

APLICAÇÕES DE INTEGRAL DEFINIDA: VOLUME DO SÓLIDO DE REVOLUÇÃO COM EIXO DE ROTAÇÃO INCLINADO

Andesson Micael Oliveira da Cunha, Antonio Airton de Melo

Resumo: O presente trabalho apresenta o cálculo do volume de um sólido de revolução. Tendo como inovação a problemática de um eixo de rotação inclinado. Alguns conceitos matemáticos como reta tangente, soma de Riemann, integral definida, área e volume de sólido de revolução foram ferramentas fundamentais usadas para possibilitar essa formulação. O objetivo principal do trabalho é apresentar de forma didática e concisa a obtenção de uma fórmula que possa expressar o volume de um sólido de revolução cujo eixo de rotação seja uma reta inclinada.

Palavras-chave: sólido de revolução; eixo de rotação inclinado; integral definida.

1. INTRODUÇÃO

A integral definida possui as mais diversas aplicações, nos quais se destacam o cálculo de áreas, comprimentos de arcos e a obtenção de volume e área de sólidos de revolução, além de outras voltadas ao campo da física, como o cálculo do trabalho realizado por uma força [1]. Embora sejam problemas distintos, seguem uma mesma estratégia de resolução, que seria analisar o problema por partes, fazendo uma aproximação da mesma e com isso obter o resultado esperado a partir da soma dessas aproximações.

Entre as aplicações citadas, temos a determinação do volume de sólidos de revolução, porém o mesmo só é enfatizado para sólidos cujo eixo de rotação é uma reta horizontal ou vertical. Mas, e se girar ao redor de uma reta inclinada? Visando isso, o presente trabalho buscará deduzir as fórmulas para o volume de um sólido de revolução quando o eixo de rotação se encontra inclinado.

No decorrer do trabalho será exposto algumas formulações e conceitos que serviram como base para a solução do problema, entre eles, o problema da reta tangente, área abaixo da curva, integral definida e volume de um sólido de revolução.

2. DESENVOLVIMENTO

2.1. O PROBLEMA DA TANGENTE

O problema da tangente surgiu a partir da dificuldade de determinar uma reta tangente a um único ponto de uma curva. Após várias tentativas, verificou-se que a equação desta reta poderia ser obtida se sua inclinação m fosse conhecida, entretanto, sabe-se que é necessário possuir no mínimo dois pontos distintos de uma reta para se determinar sua inclinação e no problema apenas um ponto é conhecido, o qual a reta tangencia a função (Figura 1) [2].

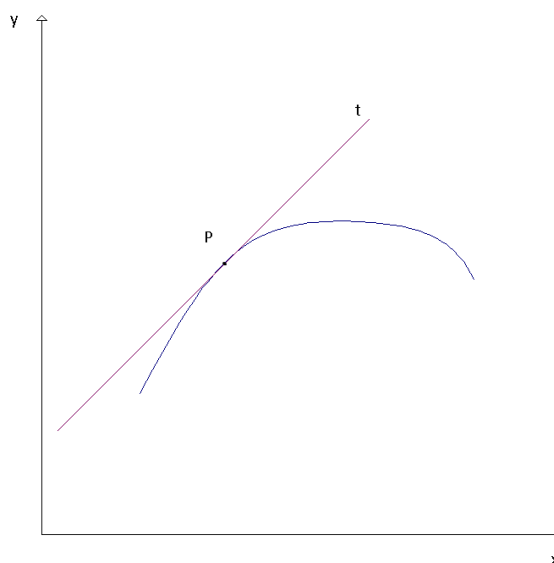


Figura 1. Reta tangente a curva em P . (Autoria própria).

Uma forma de contornar o problema, seria primeiro obter uma aproximação para m , tomando sobre a curva um ponto próximo Q e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante a curva nos pontos P e Q (Figura 2).

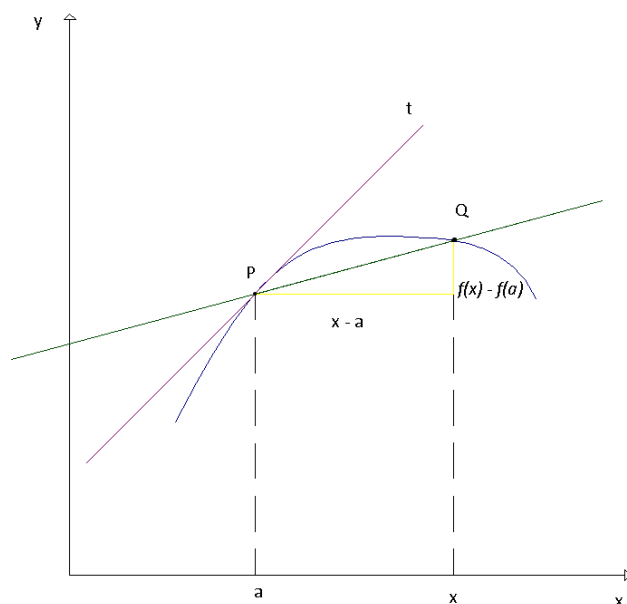


Figura 2. Reta secante a curva nos pontos P e Q . (Autoria própria)

Assim m_{PQ} é dado por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1)$$

Conforme o ponto de Q se aproxima de P (Figura 3) a reta secante gira e aproxima-se da reta tangente como sua posição limite. Deste modo, a inclinação m_{PQ} da reta secante e a inclinação m da reta tangente ficam cada vez mais próximas. Isso é denotado por:

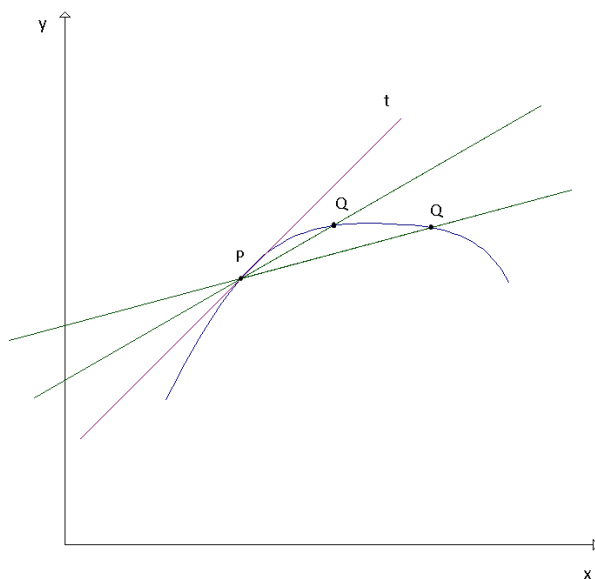


Figura 3. Retas secantes aproximando-se da reta tangente. (Autoria própria).

$$m = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} \quad (2)$$

Da Figura 2, é visto que quando Q tende a P , x tende a a , com base nisso e partir das Equações 2 e 3 tem-se:

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (3)$$

2.2. ÁREA E A INTEGRAL DEFINIDA.

As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2500 anos atrás, os gregos já sabiam encontrar a área A de qualquer polígono dividindo-o em triângulos e, em seguida somando as áreas obtidas. Quando a figura era curva, os mesmos utilizavam o chamado “método da exaustão” tal método consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e, então, aumentar o número de lados deles (Figura 4) [3].

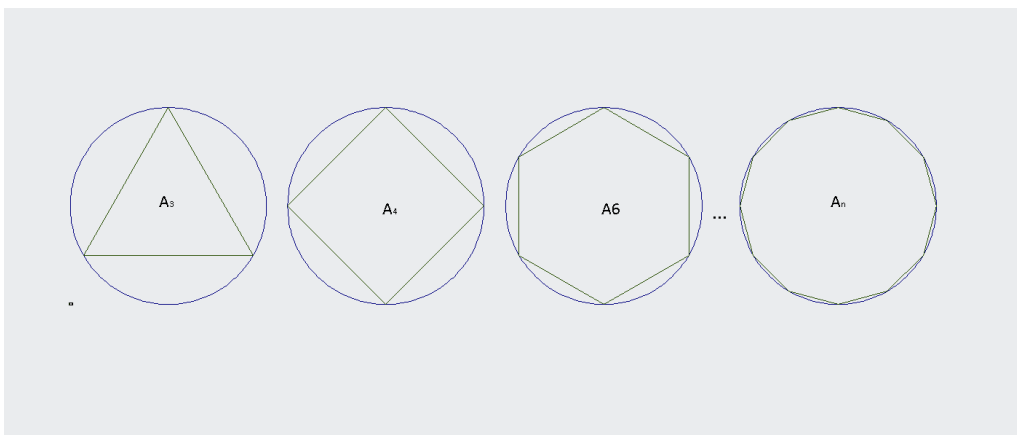


Figura 4. Polígonos de n lados inscritos em círculos. (Autoria própria).

Seja A_n a área de um polígono de n lados e A_c a área de um círculo qualquer. A medida que o valor de n cresce, o valor de A_n se aproxima cada vez mais da área do círculo A_c . Desse modo, dizemos que a área do círculo é o limite da área do polígono quando seu número de lados tende ao infinito, ou seja:

$$A_c = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \quad (4)$$

É usada uma ideia semelhante para determinar a área de uma região plana S , delimitada pelo gráfico de uma função contínua e não negativa f e pelo eixo dos x no intervalo $[a, b]$ (Figura 05).

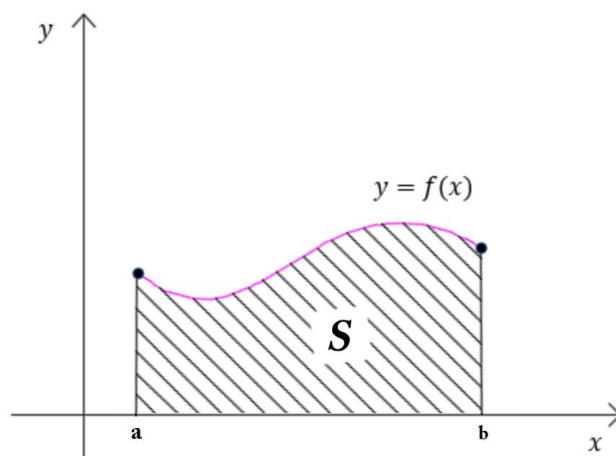


Figura 5. Região plana S abaixo da curva f no intervalo $[a, b]$. (Autoria própria).

Seja P uma partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos dada por $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$. Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e c_i um ponto arbitrário do mesmo. Para cada i variando de 1 até n é construído um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$ (Figura 06).

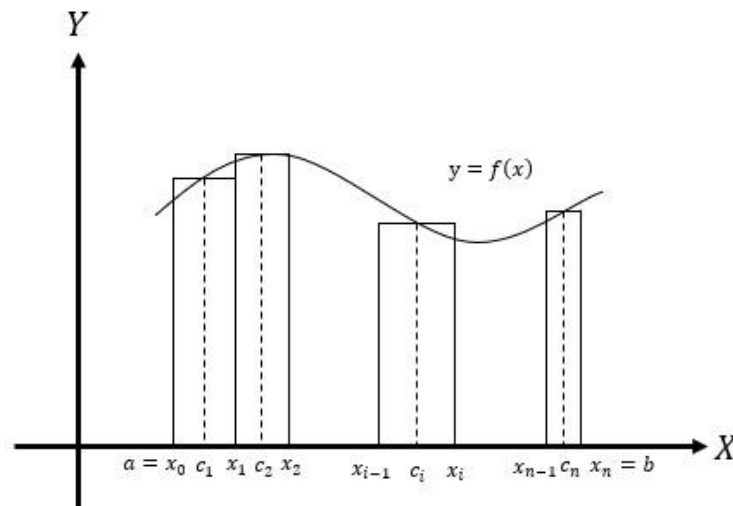


Figura 6. $f(x)$ subdividida em n retângulos. (Autoria própria).

Somando a área dos n retângulos, é obtido:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + \dots + f(c_n)\Delta x_n \quad (5)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad (6)$$

A soma mostrada na Equação 6 é a soma da Riemman da função $f(x)$. A medida que o valor de n cresce e consequentemente, cada Δx_i torna-se pequeno, a soma das n áreas retangulares, se aproxima mais do valor da área S .

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad (7)$$

Definição: Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição de $[a, b]$. A integral definida de f de a até b denotada por $\int_a^b f(x)dx$ é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad (8)$$

desde que o limite do segundo membro exista.

2.3. SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

Sólido de revolução é um sólido obtido ao fazer uma região plana girar em volta de uma reta no plano, reta esta que é chamada de eixo de revolução [4].

Ao fazer um polígono regular girar em torno de um eixo, podemos obter um sólido simples, por exemplo, com a revolução de um triângulo podemos obter um corpo de formato cônico (Figura 7).

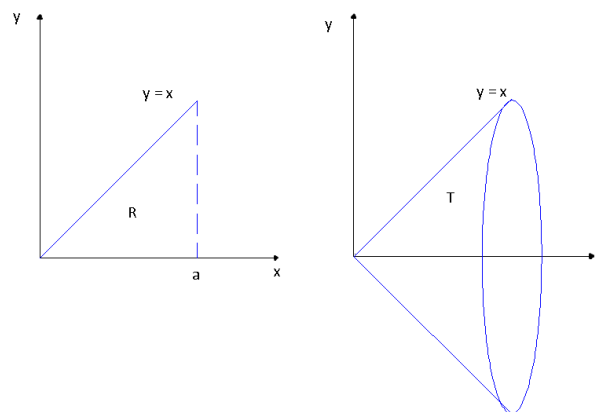


Figura 7. Região plana triangular e sua revolução em torno de x . (Autoria própria).

Seja $y = f(x)$ uma função não negativa em um intervalo $[a, b]$. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b . Considerou-se aqui, o problema de obter uma maneira de quantificar o volume de um sólido T , gerado pela rotação em torno do eixo dos x , da região R . (Figura 8).

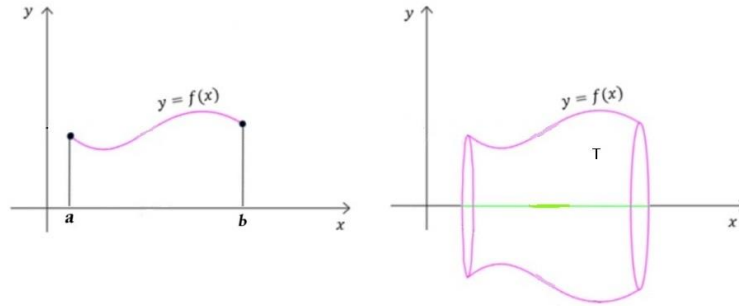


Figura 8. Região plana R e sólido de revolução T . (Autoria própria).

Para isto, considerou-se uma partição P do intervalo $[a, b]$, dada por: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$, seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, e para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ escolheu-se um ponto c_i arbitrário. Construiu-se um retângulo R_i , de base Δx_i e altura $f(c_i)$, para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (Figura 9).

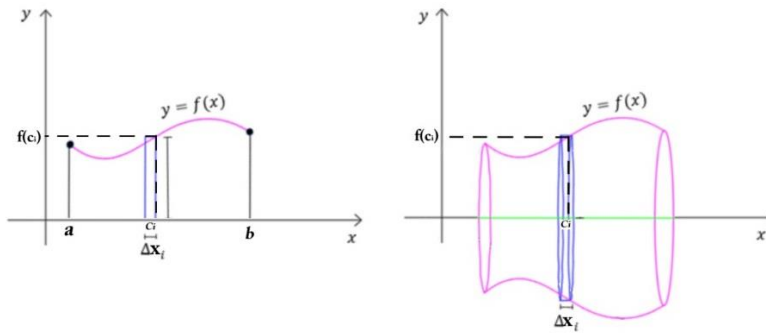


Figura 9. Retângulo R_i de base Δx_i e altura $f(c_i)$ e sua revolução. (Autoria própria).

Ao girar cada retângulo R_i no eixo horizontal, sua revolução gera um corpo cilíndrico de altura Δx_i e raio da base $f(c_i)$, e o volume do mesmo é expresso por:

$$V_c = \pi [f(c_i)]^2 \Delta x_i \quad (9)$$

Somando o volume de cada um dos n cilindros é obtido um valor aproximado do volume do sólido T que é dado por:

$$V_T = \pi [f(c_1)]^2 \Delta x_1 + \pi [f(c_2)]^2 \Delta x_2 + \dots + \pi [f(c_n)]^2 \Delta x_n \quad (10)$$

$$V_T = \pi \sum_{i=1}^n [f(c_i)]^2 \Delta x_i \quad (11)$$

Para valores de n cada vez maiores, que implicam em valores de Δx_i cada vez menores, de tal forma que a soma do volume destes n cilindros se aproxima do real volume do sólido T , logo tem-se:

$$V_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \sum_{i=1}^n [f(c_i)]^2 \Delta x_i \quad (12)$$

A soma que aparece na Equação 12 é a soma de Riemann da função $[f(x)]^2$ [4]. Visto que $f(x)$ é contínua e o limite da Equação 12 existe, pela definição de integral definida:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (13)$$

Quando ao invés de girar a região R em torno do eixo x a giramos em torno do eixo y (Figura 10), para o seu volume é necessário uma pequena alteração da Equação 13:

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy \quad (14)$$

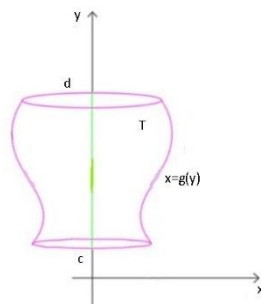


Figura 10. Sólido gerado pela rotação da região R em torno do eixo y . (Autoria própria).

2.4. ROTAÇÃO DE "R" AO REDOR DE UMA RETA PARALELA A UM DOS EIXOS COORDENADOS

Quando a rotação de R se efetua ao redor de uma reta paralela ao eixo x , ou seja, de uma reta $y = L$ (Figura 11), faz-se necessário uma adaptação da equação 13, visto que após ser feita uma partição P no intervalo, a área de cada intervalo será aproximada por retângulos de base Δx_i e altura $[f(c_i) - L]$ e consequentemente, após a região ser rotacionada, o volume de cada intervalo será aproximado por cilindros de altura Δx_i e raio da base dado por $[f(c_i) - L]$. Logo o volume do mesmo será dado por:

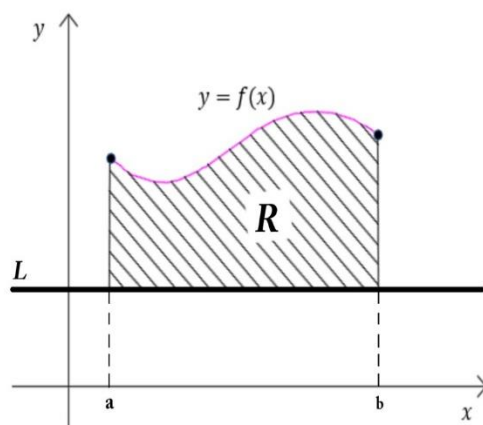


Figura 11. Região R entre a curva $y = f(x)$ e $y = L$. (Autoria própria).

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 dx \quad (15)$$

De maneira análoga, se o eixo de rotação for o uma reta paralela ao eixo y , isto é, $g(x) = M$ (Figura 12), tem-se:

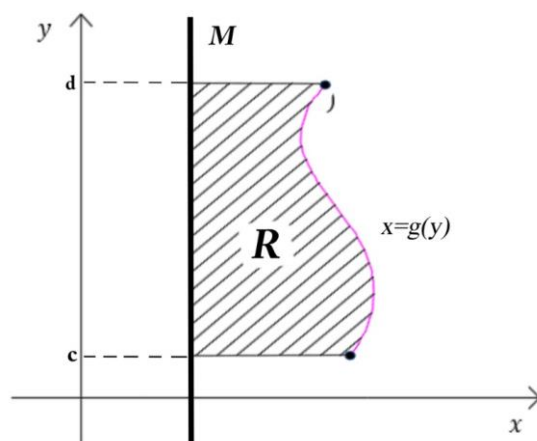


Figura 12. Região R entre $x = g(y)$ e $x = M$. (Autoria própria).

$$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 dy \quad (16)$$

2.5. VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO COM EIXO DE ROTAÇÃO INCLINADO

Seja C o arco da curva $y = f(x)$ entre os pontos $P(p, f(p))$ e $Q(q, f(q))$ e seja S a região delimitada por C , pela reta $y = mx + b$ (que está inteiramente abaixo de C) e pelas perpendiculares à reta a partir de P e de Q (Figura 13).

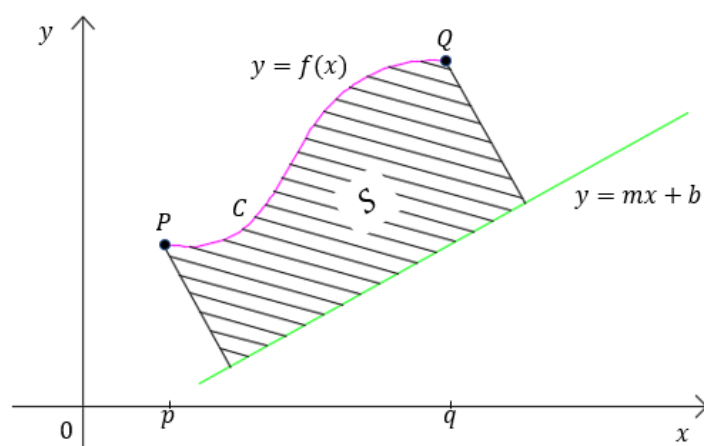


Figura 13. Região S . (Autoria própria).

Aproximando a área da região S por retângulos perpendiculares a reta inclinada, e rotacionando estes em torno da mesma, é obtido a área da região S e o volume do sólido de revolução T (obtido pela rotação de S) dados, respectivamente, por:

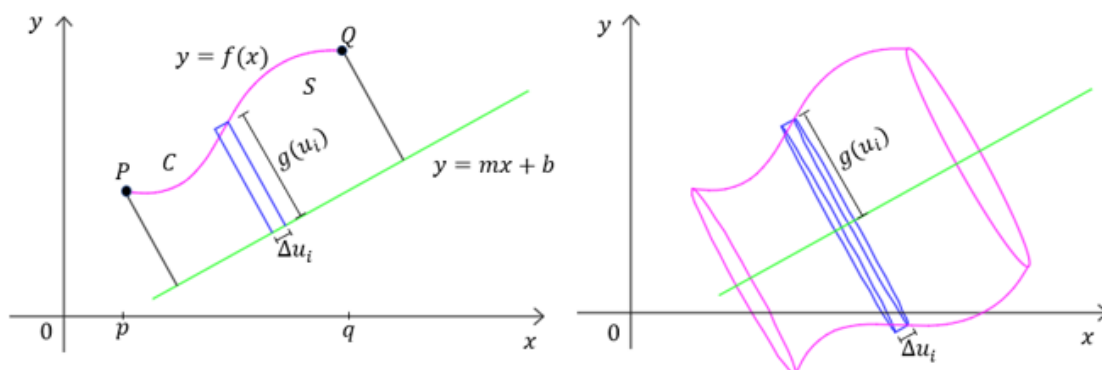


Figura 14. Região S e sólido de revolução T . (Autoria própria).

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(u_i) \Delta u_i \quad (17)$$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi [g(u_i)]^2 \Delta u_i \quad (18)$$

Diante disso, buscou-se uma maneira de expressar a Equação 18 em função de x , relacionando $g(u_i)$ e Δu_i em termos de $f(c_i)$ e Δx_i , respectivamente. Para tanto, foi traçada a reta tangente a curva C no ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ Figura 15, a mesma possui um comprimento Δs_i no intervalo, e com isso pode-se relacionar as variáveis citadas.

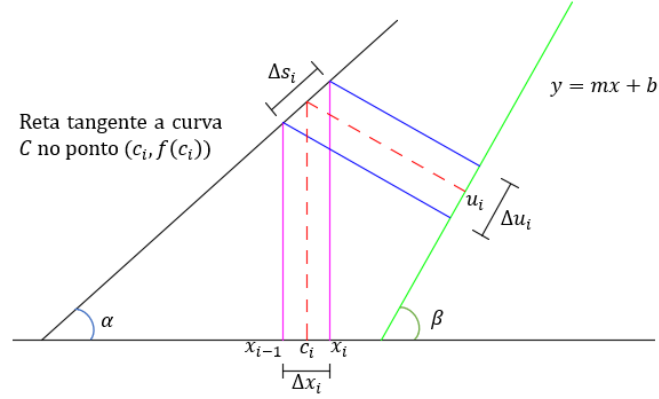


Figura 15. Reta tangente a curva C no ponto $(c_i, f(c_i))$. (Autoria própria).

Pela Figura 16 tem-se:

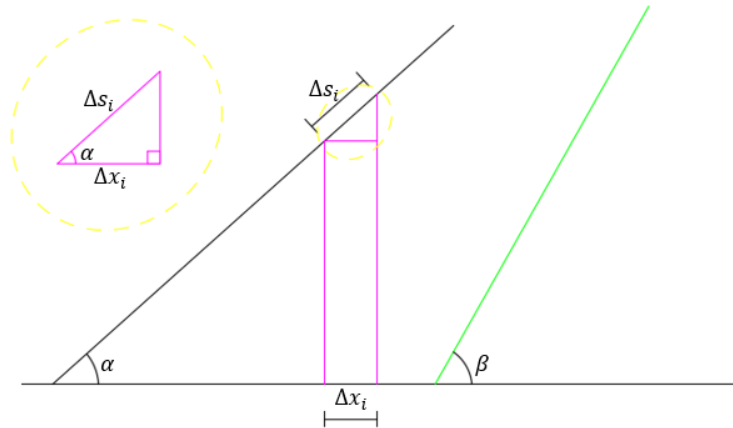


Figura 16. Relação entre Δs_i e Δx_i . (Autoria própria).

$$\cos(\alpha) = \frac{\Delta x_i}{\Delta s_i} \quad (19)$$

$$\Delta s_i = \frac{\Delta x_i}{\cos(\alpha)} \quad (20)$$

Decorrente da Figura 17, ver-se que:

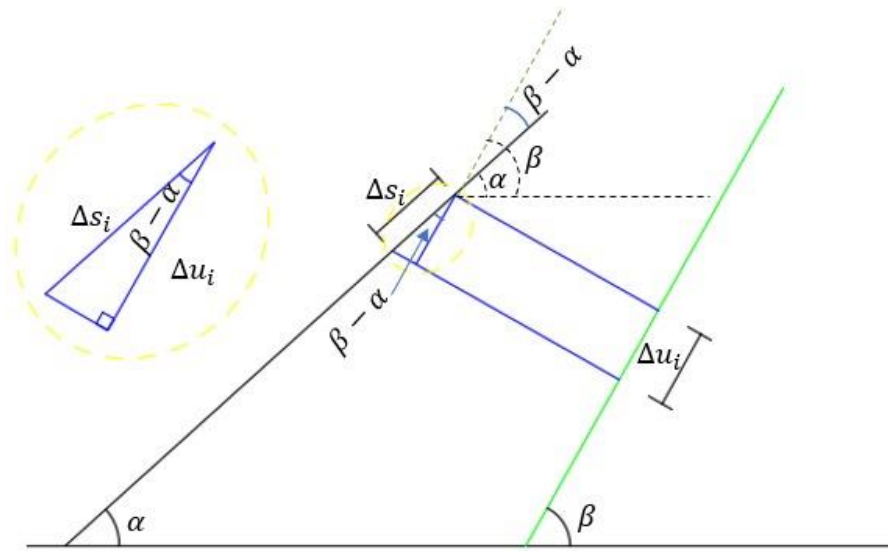


Figura 17. Relação entre Δs_i e Δu_i . (Autoria própria).

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{\Delta u_i}{\Delta s_i} \quad (21)$$

$$\Delta s_i = \frac{\Delta u_i}{\cos(\beta - \alpha)} \quad (22)$$

Comparando as Equações 20 e 22, obtém-se:

$$\frac{\Delta u_i}{\cos(\beta - \alpha)} = \frac{\Delta x_i}{\cos(\alpha)} \quad (23)$$

$$\Delta u_i = \left[\frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos(\alpha)} \right] \Delta x_i \quad (24)$$

$$\Delta u_i = \left[\frac{\cos(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\beta) \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right] \Delta x_i \quad (25)$$

$$\Delta u_i = \left[\cos(\beta) \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \sin(\beta) \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right] \Delta x_i \quad (26)$$

$$\Delta u_i = [\cos(\beta) + \sin(\beta) \operatorname{tg}(\alpha)] \Delta x_i \quad (27)$$

Como a reta $y = mx + b$ faz um ângulo β com o eixo positivo de x , tem-se o seguinte triângulo auxiliar (Figura 19).

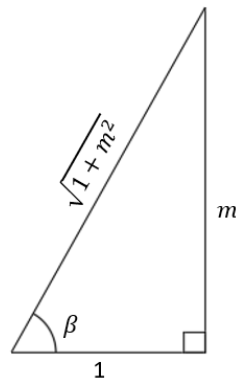


Figura 18. Triângulo auxiliar, inclinação da reta $y = mx + n$. (Autoria própria).

Do mesmo, segue que:

$$\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \quad (28)$$

$$\sin(\beta) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \quad (29)$$

Para mais, como a reta tangente a curva C no ponto $(c_i, f(c_i))$ faz um ângulo α com o eixo positivo de x , temos que:

$$\tan(\alpha) = f'(c_i) \quad (30)$$

Substituindo as equações 28, 29 e 30 na equação 27, resulta que:

$$\Delta u_i = \left[\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} f'(c_i) \right] \Delta x_i \quad (31)$$

$$\Delta u_i = \frac{1+mf'(c_i)}{\sqrt{1+m^2}} \Delta x_i \quad (32)$$

Além disso, temos da figura 20 que

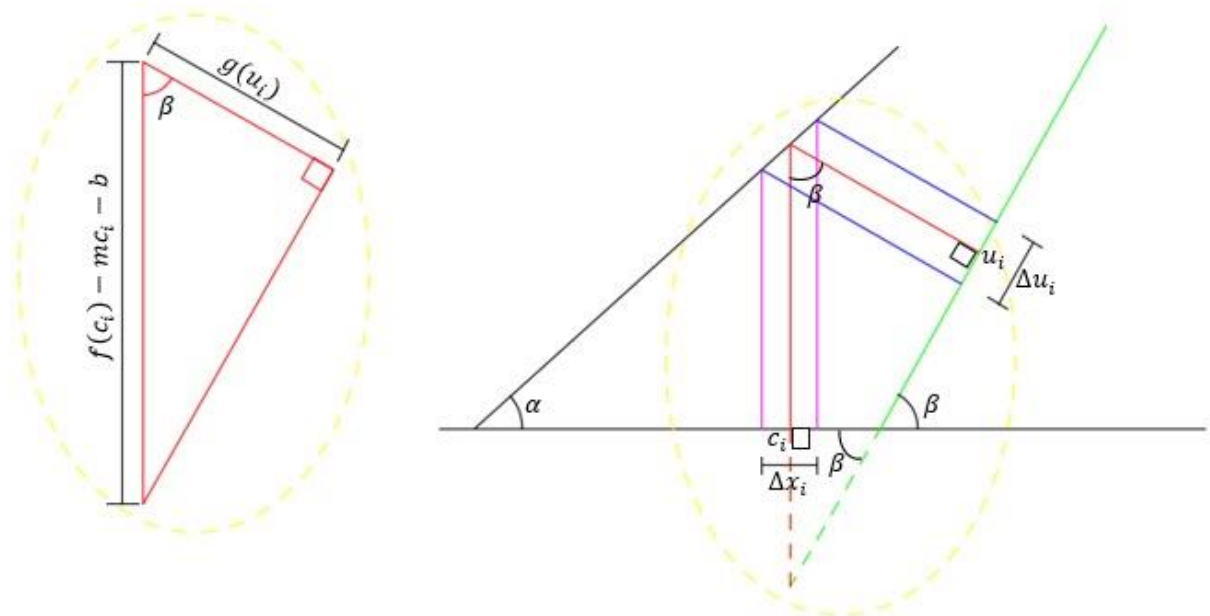


Figura 19. Relação entre $g(u_i)$ e $f(c_i)$. (Autoria própria).

Para o triângulo auxiliar mostrado na Figura 19, o ângulo β foi determinado por semelhança de triângulos.

$$\cos \beta = \frac{g(u_i)}{f(c_i) - mc_i - b} \quad (33)$$

$$g(u_i) = [f(c_i) - mc_i - b] \cos \beta \quad (34)$$

$$g(u_i) = [f(c_i) - mc_i - b] \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) \quad (35)$$

$$g(u_i) = \frac{f(c_i) - mc_i - b}{\sqrt{1+m^2}} \quad (36)$$

Portanto, substituindo as Equações (32) e (36) na Equação (18), tem-se

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \left[\frac{f(c_i) - mc_i - b}{\sqrt{1+m^2}} \right]^2 \frac{1+mf'(c_i)}{\sqrt{1+m^2}} \Delta x_i \quad (37)$$

Que pela definição de integral definida resulta em:

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{(1+m^2)^3}} \int_p^q [f(x) - mx - b]^2 \cdot [1 + m f'(x)] dx \quad (38)$$

Para $m = 0$ e $b = 1$ a Equação 38 resulta na Equação 15, onde o eixo de rotação é uma reta paralela ao eixo x . E para $m = 0$ e $b = 0$ a Equação 38 resulta na Equação 13, quando o eixo de rotação é o eixo dos x .

Além disso, em [5] Rufino, E.O.; Soares e Stephen obtiveram a mesma Equação 38 partindo de uma abordagem diferente da desenvolvida nesse trabalho.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou estabelecer uma forma de determinar o volume de sólido de revolução, gerado em torno de um eixo de rotação inclinada, ou seja, de uma maneira diferente da que é encontrada nos livros didáticos, trazendo uma ampliação das aplicações da integral definida.

Estabelecer essa formulação só foi possível através do uso de algumas ferramentas e conceitos matemáticos. Por fim, espera-se que esse trabalho desperte interesse e motivação a futuros trabalhos nessa área, bem como traga alguma contribuição a comunidade acadêmica.

4. REFERÊNCIAS

- [1] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo: Volume 2. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. Tradução de: Claus Ivo Doering.
- [2] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- [3] STEWART, James. CÁLCULO: volume I. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [4] FLEMMING, Diva; GONÇALVES, Mirian. Cálculo A Funções, limite e integração. Florianópolis: Pearson, 2006.
- [5] Rufino, E.O.; Soares e Stephen Volume de sólidos de revolução com eixo de rotação inclinado. RCT, 2017