



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Marcelo Augusto Carvalho da Silva

**PROPOSTAS DE JOGOS SOBRE POLIEDROS PARA TURMAS DO SEXTO ANO DO
ENSINO FUNDAMENTAL**

MOSSORÓ - RN

2025

Marcelo Augusto Carvalho da Silva

**PROPOSTAS DE JOGOS SOBRE POLIEDROS PARA TURMAS DO SEXTO ANO DO
ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Orientador: Mariana de Brito Maia, Prof. Dra.

Co-orientador: Fabricio de Figueredo Oliveira, Prof. Dr.

MOSSORÓ - RN

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S586p Silva, Marcelo Augusto Carvalho da .
PROPOSTAS DE JOGOS SOBRE POLIEDROS PARA TURMAS
DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL / Marcelo
Augusto Carvalho da Silva. - 2025.
126 f. : il.

Orientadora: Mariana de Brito Maia.
Coorientador: Fabricio de Figueredo Oliveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em
Matemática, 2025.

1. ensino de matemática. 2. geometria. 3.
jogos educativos. I. Maia, Mariana de Brito ,
orient. II. Oliveira, Fabricio de Figueredo , co-
orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

Marcelo Augusto Carvalho da Silva

PROPOSTAS DE JOGOS SOBRE POLIEDROS PARA TURMAS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino Básico de Matemática

Defendida em: 31/03/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente



MARIANA DE BRITO MAIA

Data: 06/06/2025 16:23:35-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Mariana de Brito Maia, Prof. Dra. (UFERSA)

Presidente

Documento assinado digitalmente



FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA

Data: 03/06/2025 17:31:23-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Fabricio de Figueredo Oliveira, Prof. Dr. (UFERSA)

Membro Examinador

Documento assinado digitalmente



WANDERLEY DE OLIVEIRA PEREIRA

Data: 02/06/2025 12:38:35-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Wanderley de Oliveira Pereira, Prof. Dr. (UECE)

Membro Examinador

Documento assinado digitalmente



RONALDO CESAR DUARTE

Data: 02/06/2025 19:55:14-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Ronaldo César Duarte, Prof. Dr. (UFRN)

Membro Examinador

Dedico este trabalho a Deus e à minha família,
especialmente à minha esposa Láyza e à minha
mãe Verônica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por permitir que essa conquista se realizasse em minha vida. Sei que nada disso seria possível sem Sua graça, força e direção. A Ele entrego toda a glória, honra e louvor por cada passo, não apenas desta jornada, mas de toda a minha vida.

Agradeço à minha esposa, Láyza Amanda Paulino da Costa, por tudo. Pelo incentivo constante, por acreditar em mim até quando eu duvidava e por me ajudar a acreditar também. Por estar ao meu lado nos momentos bons e, principalmente, nos difíceis, me apoiando e me ajudando a me reerguer. Por viver esse sonho comigo, compartilhando cada desafio e conquista. Sou imensamente grato a Deus por tê-la ao meu lado, por compartilhar a vida com você. Você não foi apenas a melhor coisa que me aconteceu nessa jornada, foi a melhor que já me aconteceu. Meu amor, amo muito você!

Agradeço à minha mãe, Maria Verônica de Carvalho, por nunca medir esforços ao longo de todos esses anos. Por lutar para que eu pudesse estudar, me encontrar como professor e conquistar mais essa etapa em minha vida. Por suas orações e incentivos, que sempre são e sempre serão fonte de força e esperança para mim. Agradeço também a minha família.

Agradeço aos meus professores, em especial à minha orientadora, Mariana de Brito Maia, e ao professor Fabricio de Figueiredo Oliveira, por acreditarem na ideia deste trabalho, pelo apoio e acolhimento, por acreditarem em mim e por sempre me motivarem. Sou imensamente grato por suas orientações e por todo o ensinamento durante o curso, que contribuíram para o meu processo de formação.

Agradeço aos amigos Francisco Junior Levi da Silva, Ronaldo César Duarte e Clélio Deems Costa de Souza, que, de diferentes formas, contribuíram, em alguns momentos, para a realização deste trabalho. Seja pelo apoio nas discussões sobre o tema, pelas sugestões valiosas ou pelo incentivo, a presença de vocês foi fundamental ao longo deste percurso.

“Não andeis ansiosos por coisa alguma; antes, em tudo, sejam os vossos pedidos conhecidos diante de Deus pela oração e súplica, com ações de graças. E a paz de Deus, que excede todo o entendimento, guardará os vossos corações e as vossas mentes em Cristo Jesus.”

(Filipenses 4:6-7)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de elaboração de jogos educativos voltados ao ensino da Geometria no 6º ano do Ensino Fundamental II, alinhados à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Foram desenvolvidos três jogos – Jogo dos Prismas, Jogo das Pirâmides e Em que Ordem estão os Poliedros de Platão? – que compõem a proposta “Os Jogos dos Poliedros”, abordando conceitos relacionados a geometria plana e espacial do ano em questão. Trata-se de uma pesquisa aplicada, de caráter exploratório e abordagem bibliográfica e documental, voltada à produção técnica de recursos didáticos. A metodologia envolveu o levantamento teórico, a análise das habilidades da BNCC e o desenvolvimento dos jogos com regras, objetivos e materiais próprios, adotando a definição de jogo educativo proposta por Lima e Messeder-Neto (2021). Os jogos desenvolvidos têm como finalidade estimular o pensamento geométrico dos estudantes de forma lúdica e interativa. A proposta busca contribuir para a aprendizagem da Geometria, favorecendo o interesse e a participação ativa dos estudantes, apresentando-se como recurso didático inovador para professores da Educação Básica.

Palavras-chave: ensino de matemática; geometria; jogos educativos.

ABSTRACT

This work presents a proposal for the development of educational games aimed at teaching Geometry in the 6th grade of Elementary School II, aligned with the Brazilian Common National Curriculum Base (BNCC). Three games were developed – Prism Game, Pyramid Game, and In What Order Are the Platonic Solids? – which make up the proposal “The Polyhedra Games,” addressing concepts related to plane and solid geometry for the targeted grade level. This is an applied research project, exploratory in nature, with a bibliographic and documentary approach, focused on the technical production of didactic resources. The methodology involved theoretical research, analysis of BNCC skills, and the development of the games with their own rules, objectives, and materials, adopting the definition of educational games proposed by Lima and Messeder-Neto (2021). The games were designed to stimulate students’ geometric thinking in a playful and interactive way. The proposal aims to contribute to the learning of Geometry by fostering students’ interest and active participation, presenting itself as an innovative teaching resource for Basic Education teachers.

Keywords: mathematics education; geometry; educational games.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Proficiência Média em Matemática no 5º ano do Ensino Fundamental: Evolução e Níveis na Escala por ano do Saeb – Brasil – 1995 a 2023.	21
Figura 2 –	Proficiência Média em Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental: Evolução e Níveis na Escala por ano do Saeb - Brasil - 1995 a 2023.	22
Figura 3 –	Proficiência Média em Matemática na 3ª série do Ensino Médio Tradicional: Evolução e Níveis na Escala por ano do Saeb - Brasil - 1995 a 2023. .	23
Figura 4 –	Evolução da Proficiência Média em Matemática: Brasil e OCDE (23 países) – PISA 2003 a 2022.	26
Figura 5 –	Jogos no contexto educacional: proposição esquemática de suas variantes. .	36
Figura 6 –	Esquema que diferencia um jogo enquanto educativo ou stricto sensu. . . .	39
Figura 7 –	Peças representativas dos prismas	43
Figura 8 –	Peças representativas das pirâmides	44
Figura 9 –	Peças representativas dos poliedros de Platão	45
Figura 10 –	Frente e verso da Carta IM da Posição 2, Coluna $C1$	95
Figura 11 –	Frente e verso da Carta da Posição 2, Coluna $C2$	95
Figura 12 –	Frente e verso da Carta da Posição 2, Coluna $C3$	96
Figura 13 –	Cartas IM com Poliedros de Platão	97
Figura 14 –	Frente e verso de uma Carta Poliedro de Platão	98
Figura 15 –	Cartas Poliedros de Platão	98
Figura 16 –	Frente e verso de uma Carta Multiplicadora de Platão	99
Figura 17 –	Cartas Multiplicadoras de Platão	99
Figura 18 –	Argola	100
Figura 19 –	Carta IM da Posição 2, Ordem 1, respondida com a peça da Argola	100
Figura 20 –	Jogo Gerado com as Cartas IM da Figura 13 Respondido	101

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – MATEMÁTICA – 6º ANO	15
Quadro 2 – Distinção entre jogo didático e jogo pedagógico	35
Quadro 3 – Quadro IM com Prismas	43
Quadro 4 – Quadro IM com Pirâmides	44
Quadro 5 – Quadro IM com Poliedros de Platão	45
Quadro 6 – Quadro IM com Prismas Respondido	47
Quadro 7 – Quadro IM com Pirâmides Respondido	47
Quadro 8 – Quadro IM com Poliedros de Platão Respondido	47
Quadro 9 – MATEMÁTICA – 6º ANO	48
Quadro 10 Proposta Complementar - MATEMÁTICA – 6º ANO - Poliedros de Platão . .	48
Quadro 11 MATEMÁTICA – 6º ANO (Números)	49
Quadro 12 Quadro AX Gerado no Passo 1	51
Quadro 13 Quadro Gerado no Passo 2	51
Quadro 14 Quadro Gerado no Passo 2	52
Quadro 15 Quadro Gerado no Passo 3	52
Quadro 16 Quadro Gerado no Passo 3	53
Quadro 17 Quadro Gerado no Passo 4	53
Quadro 18 Quadro Gerado no Passo 4	53
Quadro 19 Quadro Gerado no Passo 4	54
Quadro 20 Quadro Gerado no Passo 4	54
Quadro 21 Quadro G Gerado no Passo 5	54
Quadro 22 Quadro G Gerado no Passo 5	55
Quadro 23 Quadro G Gerado no Passo 5	55
Quadro 24 Quadro G Gerado no Passo 5	55
Quadro 25 Quadro IM Gerado no Passo 6	56
Quadro 26 Quadro IM Gerado no Passo 6	56
Quadro 27 Quadro IM Gerado no Passo 6	56
Quadro 28 Quadro IM Gerado no Passo 6	57
Quadro 29 Quadro AX com Pirâmides Gerado no Passo 1	57
Quadro 30 Quadro IM com Pirâmides Gerado no Passo 6	57
Quadro 31 Quadro G com Pirâmides Gerado no Passo 5	58
Quadro 32 Quadro IM com Pirâmides Gerado no Passo 6	58
Quadro 33 Quadro G com Pirâmides Gerado no Passo 5	58
Quadro 34 Quadro IM com Pirâmides Gerado no Passo 6	58
Quadro 35 Quadro G com Pirâmides Gerado no Passo 5	59
Quadro 36 Quadro IM com Pirâmides Gerado no Passo 6	59
Quadro 37 Quadro G com Pirâmides Gerado no Passo 5	59

Quadro 38 Quadro AX com Poliedros de Platão Gerado no Passo 1	60
Quadro 39 Quadro IM com Poliedros de Platão Gerado no Passo 6	60
Quadro 40 Quadro G com Poliedros de Platão Gerado no Passo 5	60
Quadro 41 Quadro IM com Poliedros de Platão Gerado no Passo 6	60
Quadro 42 Quadro G com Poliedros de Platão Gerado no Passo 5	61
Quadro 43 Quadro IM	67
Quadro 44 Quadro G	68
Quadro 45 Quadro AX	68
Quadro 46 Quadro IM Parcialmente Respondido	69
Quadro 47 Quadro IM Parcialmente Respondido	69
Quadro 48 Quadro IM Respondido	70
Quadro 49 Quadro IM	70
Quadro 50 Quadro G	71
Quadro 51 Quadro AX	71
Quadro 52 Quadro IM Parcialmente Respondido	71
Quadro 53 Quadro IM Parcialmente Respondido	72
Quadro 54 Quadro IM Respondido	73
Quadro 55 Quadro IM	73
Quadro 56 Quadro G	73
Quadro 57 Quadro IM Parcialmente Respondido	74
Quadro 58 Quadro IM Parcialmente Respondido	75
Quadro 59 Quadro IM Respondido	76
Quadro 60 Quadro IM	76
Quadro 61 Quadro G	77
Quadro 62 Quadro AX	77
Quadro 63 Quadro IM Parcialmente Respondido	78
Quadro 64 Quadro IM Parcialmente Respondido	78
Quadro 65 Quadro IM Parcialmente Respondido	79
Quadro 66 Quadro IM Respondido	79
Quadro 67 Quadro IM	80
Quadro 68 Quadro G	80
Quadro 69 Quadro AX	80
Quadro 70 Quadro IM Parcialmente Respondido	81
Quadro 71 Quadro IM Parcialmente Respondido	82
Quadro 72 Quadro IM Parcialmente Respondido	82
Quadro 73 Quadro IM Respondido	82
Quadro 74 Quadro IM	83
Quadro 75 Quadro G	83
Quadro 76 Quadro IM Parcialmente Respondido	84

Quadro 77 Quadro IM Parcialmente Respondido	85
Quadro 78 Quadro IM Respondido	85
Quadro 79 Quadro IM	86
Quadro 80 Quadro G	86
Quadro 81 Quadro AX	86
Quadro 82 Quadro IM Parcialmente Respondido	87
Quadro 83 Quadro IM Parcialmente Respondido	88
Quadro 84 Quadro IM Parcialmente Respondido	88
Quadro 85 Quadro IM Parcialmente Respondido	88
Quadro 86 Quadro IM Respondido	89
Quadro 87 Quadro IM	90
Quadro 88 Quadro G	90
Quadro 89 Quadro AX	90
Quadro 90 Quadro IM Parcialmente Respondido	91
Quadro 91 Quadro IM Parcialmente Respondido	91
Quadro 92 Quadro IM Parcialmente Respondido	92
Quadro 93 Quadro IM Parcialmente Respondido	92
Quadro 94 Quadro IM Parcialmente Respondido	93
Quadro 95 Quadro IM Respondido	93
Quadro 96 Quadro IM com Poliedros de Platão	94
Quadro 97 Quadro G com Poliedros de Platão	94

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	Desafios no ensino de matemática	17
2.2	Jogo no ensino e aprendizagem de matemática	28
2.2.1	O lúdico	29
2.2.2	O social	30
2.2.3	O cognitivo	31
2.2.4	Jogo educativo, didático, pedagógico	33
2.2.5	O papel do professor no uso de jogos	39
3	OS JOGOS DOS POLIEDROS	43
3.1	Apresentação inicial dos jogos	43
3.1.1	Materiais	43
3.1.2	Participantes e suas funções	46
3.1.3	Objetivos do jogo	46
3.2	A BNCC e Os Jogos dos Poliedros	47
3.3	Manual de criação dos Jogos dos Poliedros	49
3.3.1	Quadros IM e G com prismas	50
3.3.2	Quadros IM e G com pirâmides	57
3.3.3	Quadros IM e G com poliedros de Platão	59
3.4	Regras dos Jogos dos Poliedros	61
3.4.1	Primeiro conjunto de regras	61
3.4.2	Segundo conjunto de regras	65
3.5	Uso em sala de aula	66
3.5.1	O Jogo dos Prismas: níveis de jogo e algumas soluções padrão	67
3.5.2	O Jogo das Pirâmides: níveis de jogo e algumas soluções padrão	76
3.5.3	Em que Ordem estão os Poliedros de Platão? : níveis de jogo e algumas soluções padrão	85
3.6	Os Jogos dos Poliedros em sua versão com cartas	94
3.6.1	Em que Ordem estão os Poliedros de Platão? em sua versão com cartas	94
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
	REFERÊNCIAS	102
	ANEXO – PLANIFICAÇÕES E PERSPECTIVAS DOS POLIEDROS MONTADOS	108

1 INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática no Brasil enfrenta desafios expressivos, em particular no que se refere ao ensino de Geometria, ramo fundamental da disciplina. Esses desafios são evidenciados pelos resultados insatisfatórios em avaliações como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), realizado pelo Ministério da Educação (MEC), e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Esses dados indicam a necessidade de reformulação das práticas pedagógicas, com estratégias que tornem o aprendizado mais dinâmico e acessível aos alunos.

Nesse cenário, os jogos educativos vêm se consolidando como uma ferramenta eficaz no ensino da matemática, proporcionando um ambiente interativo e estimulante. Segundo Balestra e Gequelin (2008, p. 6):

A importância de se pensar no jogo como estratégia de ensino e aprendizagem, ganha relevância, especialmente diante dos resultados das avaliações realizadas pelo MEC, que evidenciam um baixo desempenho dos alunos na disciplina de Matemática. Esta realidade está levando os professores a procurarem formas alternativas e mais atraentes de trabalhar o conteúdo em sala de aula, de forma a possibilitar que o aluno seja um sujeito ativo e construa seu conhecimento na inter-relação com outros sujeitos. A utilização de jogos como estratégia de ensino e aprendizagem na disciplina de Matemática, pode contribuir com a prática docente como mais um recurso no atendimento às dificuldades de aprendizagem apresentadas por grande parte dos alunos.

Ao longo das últimas décadas, os jogos têm ganhado ainda mais relevância como ferramentas pedagógicas. Quando bem planejados, podem auxiliar na superação de bloqueios cognitivos e emocionais relacionados ao aprendizado da matemática. O ambiente lúdico proporciona aos estudantes a oportunidade de explorar conceitos matemáticos em contextos práticos, incentivando a autonomia, a criatividade e o raciocínio crítico. Ademais, os jogos favorecem a socialização e o trabalho em equipe, aspectos essenciais para a formação integral do aluno.

A Geometria é uma das áreas de grande relevância no estudo da Matemática. Ao aprender Geometria, o estudante desenvolve a capacidade de descrever, compreender e representar o mundo ao seu redor. Quando bem compreendida, essa área do conhecimento estimula a observação, a identificação de semelhanças e diferenças, além de contribuir para a resolução de problemas matemáticos de forma mais eficaz.

Entretanto, muitos alunos apresentam dificuldades em visualizar e manipular formas geométricas planas e espaciais, compreender relações entre seus elementos e desenvolver o pensamento geométrico. Essa realidade foi vivenciada de perto pelo autor, tanto em sua trajetória como estudante quanto em sua prática docente. A experiência em sala de aula revelou o quanto o ensino da Geometria pode se tornar desmotivador quando abordado de forma puramente teórica e descontextualizada.

Essas observações despertaram no autor o interesse em buscar estratégias alternativas para o ensino da Geometria, inicialmente experimentadas através da criação do jogo “Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?”, ainda durante a graduação. Essa experiência inicial inspirou o desenvolvimento da proposta que seria aprofundada no âmbito do mestrado. O objetivo inicial era introduzir conceitos geométricos de forma lúdica, explorando os cinco poliedros de Platão. Contudo, a proposta carecia de aprofundamento pedagógico, tanto em sua fundamentação quanto em sua estrutura.

A vivência dessas dificuldades e a busca por metodologias mais eficazes impulsionaram a decisão de transformar essa proposta em objeto de pesquisa no mestrado, acrescentando um aprofundamento pedagógico e aprimorando sua estrutura. Ao analisarmos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), constatamos que, na unidade temática de Geometria do sexto ano, espera-se desenvolver algumas habilidades relacionadas a prismas e pirâmides, conforme mostrado no Quadro 1:

Quadro 1: MATEMÁTICA – 6º ANO

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADE
Geometria	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial

Fonte: BNCC (2018, p. 303)

Com base nesse alinhamento, percebemos que a ideia inicial do jogo se aproximava do que é descrito na unidade temática de Geometria do sexto ano. Isso nos levou a aprimorar o jogo “Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?”, como uma proposta complementar, fundamentada na necessidade de ampliar a percepção geométrica dos alunos. Sendo assim, o jogo pode ser utilizado como uma extensão natural do que a BNCC propõe para o ensino de geometria no sexto ano. Além disso, passamos a criar novos jogos que trabalhassem especificamente prismas e pirâmides.

Dessa forma, os novos jogos desenvolvidos, intitulados “Jogo dos Prismas” e “Jogo das Pirâmides”, foram planejados para serem utilizados no sexto ano do Ensino Fundamental, em conformidade com as diretrizes da BNCC. Seu objetivo principal é desenvolver nos alunos a habilidade EF06MA17, descrita acima, promovendo um aprendizado mais interativo e dinâmico da geometria.

Em resumo, neste trabalho, apresentam-se três jogos educativos para o ensino e a aprendizagem da matemática, intitulados “Jogo dos Prismas”, “Jogo das Pirâmides” e “Em que

Ordem estão os Poliedros de Platão?”. Juntos, esses jogos compõem o que denominamos “Os Jogos dos Poliedros”. Essa estratégia didática é voltada para os alunos do sexto ano do ensino fundamental e integra o ensino de conceitos geométricos à dinâmica dos jogos, em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O objetivo central é apresentar uma proposta que pode contribuir para a aprendizagem da matemática, ao mesmo tempo em que podem estimular o interesse e a participação ativa dos estudantes.

Em relação à classificação científica, esta pesquisa se caracteriza como aplicada, uma vez que visa à elaboração de um produto pedagógico — jogos educativos — com potencial de uso prático no contexto escolar. Quanto à natureza do estudo, trata-se de uma pesquisa de caráter exploratório, ao buscar investigar o potencial desses jogos como recurso para o ensino da Geometria no 6º ano do Ensino Fundamental II. Em relação aos procedimentos técnicos, a pesquisa adota uma abordagem bibliográfica e documental, fundamentando-se em obras teóricas e na análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como documento oficial orientador da prática pedagógica (PRODANOV; FREITAS, 2013).

A metodologia envolveu o levantamento teórico, a análise das habilidades previstas na BNCC e o desenvolvimento de jogos educativos elaborados com regras, objetivos e materiais próprios. Para a concepção dos jogos, adotou-se a definição de jogo educativo proposta por Lima e Messeder-Neto (2021), que orientou a estruturação dos recursos didáticos alinhados aos objetivos de aprendizagem. As possibilidades de aplicação pedagógica dos jogos foram apresentadas como sugestões, sem a realização de aplicação prática junto a estudantes.

Para melhor organizar a apresentação do estudo, este trabalho está estruturado em quatro capítulos. No Capítulo 2, são discutidos alguns dos desafios do ensino da matemática, com a apresentação de dados das avaliações SAEB e PISA. Além disso, apresentamos a importância dos jogos no processo de ensino-aprendizagem, abordando seus aspectos pedagógicos, conceitos, e o papel do professor no uso dessa metodologia, com base em estudos e referenciais teóricos. No Capítulo 3 descrevemos “Os Jogos dos Poliedros”, destacando sua fundamentação na BNCC, bem como suas regras e algumas simulações. Por fim, as Considerações Finais destacam as contribuições do estudo e apontam perspectivas para futuras investigações na área.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Desafios no ensino de matemática

A pesquisa em Matemática no Brasil atingiu, em 2018, um patamar de excelência internacional. Nesse ano, segundo o IMPA¹ (2018), a União Matemática Internacional (IMU) aprovou a inclusão do Brasil no Grupo 5, que reúne as nações mais desenvolvidas em pesquisa matemática. Além do Brasil, integram esse grupo: Alemanha, Canadá, China, Estados Unidos, França, Israel, Itália, Japão, Reino Unido e Rússia.

Marcelo Viana, diretor do IMPA declarou que:

A pesquisa matemática brasileira é consolidada, se disseminou. Ao longo das décadas nossa capacidade de pesquisa e formação de pesquisadores cresceu muito. O fato de a matemática brasileira estar agora ao lado dos países de maior expressão e relevância na matemática global representa o reconhecimento da qualidade da pesquisa matemática feita no país (IMPA, 2018, online).

Sobre os motivos que levaram o Brasil a alcançar o padrão de excelência na pesquisa em Matemática, IMPA (2018, online) descreve:

Progresso notável da produção científica brasileira na área, em termos qualitativos e quantitativos. Expansão do sistema de pós-graduação (mestrado e doutorado) em matemática no Brasil, em nível de qualidade compatível com os melhores padrões internacionais. Crescimento da colaboração regional e internacional dos matemáticos brasileiros com colegas de todo o mundo e crescente papel internacional de nossas instituições. Confiança por parte da comunidade matemática mundial na maturidade da matemática brasileira e em sua capacidade para organizar grandes eventos, como o ICM2018.

Não somente na pesquisa, a Matemática também ocupa uma posição central no currículo escolar, buscando desempenhar um papel essencial no desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de resolver problemas e na compreensão de fenômenos cotidianos. Além disso, o domínio de habilidades matemáticas é uma necessidade prática para a vida em sociedade. Conforme estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o Ensino Fundamental tem como compromisso promover o letramento matemático, definido como:

as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação

¹“O Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) é uma unidade de ensino e pesquisa qualificada como Organização Social vinculada ao Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI) e ao Ministério da Educação (MEC)”(IMPA, 2024, online).

no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (BRASIL, 2018, p. 266).

Durante o processo de aprendizagem, espera-se que os alunos desenvolvam posturas e atitudes que favoreçam a aquisição de competências e habilidades, como as descritas no letramento matemático. Em particular, no ensino de Matemática, tais características são fundamentais para que os estudantes consigam participar ativamente das aulas, formular hipóteses e resolver problemas.

Espera-se um aluno participativo, envolvido na atividade de ensino, concentrado, atento, que elabore hipóteses sobre o que interage, que estabeleça soluções alternativas e variadas, que se organize segundo algumas normas e regras e, finalmente, que saiba comunicar o que pensa, as estratégias de solução de seus problemas. (GRANDO, 2000, p. 17)

No entanto, a realidade nas salas de aula muitas vezes contrasta com essa expectativa. Este cenário ideal descrito por Grando (2000) é pouco aparente no ensino de matemática em diversos países, incluindo o Brasil. Aqui, apesar da excelência na pesquisa matemática, como destacado anteriormente, o desempenho escolar em matemática muitas vezes deixa a desejar, com a maioria dos alunos enfrentando grandes dificuldades ao longo de sua jornada educacional. Assim, o processo de ensino e aprendizagem no Brasil enfrenta inúmeros desafios. Conforme Guirado *et al.* (2018, p. 18), “ensinar matemática não é uma tarefa fácil, pois depende de muitos fatores, principalmente da motivação por parte do aluno, da autoconfiança, do pensamento independente, da criatividade, da organização do pensamento”.

Esses desafios incluem não apenas fatores como a motivação, a autoconfiança, o pensamento independente, a criatividade e a organização do pensamento, mas também dificuldades anteriores dos alunos, problemas relacionados à qualificação dos professores, estrutura da escola, ausência da família na vida escolar, além da própria forma de apresentação dos conteúdos, conforme descrito a seguir.

Segundo Monis (2023, p. 17):

Sabe-se que não existe uma única origem para a não aprendizagem da Matemática; há diferentes fatores que impedem o sucesso do processo de aprendizagem, tais como: impasses relacionados à leitura e, conseqüentemente, à dificuldade da interpretação de problemas matemáticos; problemas com o raciocínio lógico e não concreto, nos quais alguns alunos apresentam dificuldade de visualizar e compreender os conceitos abstratos, mostrando a importância do uso, quando possível, de materiais concretos; problemas com conceitos de anos iniciais, que por vezes não são bem desenvolvidos, causando grandes danos em aprendizagens de conteúdos posteriores, uma vez que a Matemática é uma disciplina sequencial, dentre outros.

O que Monis (2023) descreve é bastante comum na fala de muitos professores: os alunos frequentemente chegam ao ensino fundamental II com lacunas significativas e esse quadro tende a se agravar ainda mais nessa etapa, o que compromete a aprendizagem de conteúdos

mais avançados. Essa falta de base, por sua vez, pode ter diversas origens — e uma delas pode estar diretamente relacionada ao professor. Quando o docente não teve uma formação adequada, ou mesmo quando teve, mas não encontra apoio suficiente da instituição, como materiais didáticos acessíveis e tempo para planejamento, sua atuação acaba limitada. Observa-se que, embora a intenção de inovar exista, muitas vezes ela esbarra na ausência de recursos básicos para realizar uma aula diferenciada. Oliveira (2024, p. 18) aponta que:

[...] quando se trata da dificuldade de aprendizagem dos alunos, é a questão da formação dos docentes e todo o contexto em que essa relação se dá. A falta de estrutura nas escolas e na carreira do magistério, em especial na educação básica, faz com que, por muitas vezes, os professores não tenham tempo nem apoio para sua qualificação profissional, para além da recebida nos cursos de licenciatura.

Essa realidade é comum no cotidiano das escolas públicas. Em muitos contextos, mesmo professores motivados enfrentam limitações estruturais que dificultam a adoção de práticas pedagógicas inovadoras, como o uso de jogos e materiais concretos. Isso evidencia a urgência de políticas que não apenas valorizem o professor, mas também garantam condições reais para que ele exerça seu trabalho com qualidade.

A ausência do papel da família no processo de ensino e aprendizagem da Matemática na escola tem contribuído para o aumento acelerado das dificuldades enfrentadas pelos alunos, especialmente no Ensino Médio (SANTOS, 2006). Esse cenário é preocupante e está em consonância com a análise de Souza (2009, p. 10):

[...] o ambiente escolar e familiar no qual o aluno está inserido pode vir a acarretar um mau desempenho escolar seja por falta de estímulos, incentivo ou condições de ensino. Portanto, quando se fala em desempenho escolar, o ambiente familiar não deve ser relegado a segundo plano, mesmo quando se trata da educação formal, função considerada especificamente da escola, pois como se sabe o aprendizado tem início muito antes da vida escolar e sabe-se também que ao chegar à escola, a criança já traz consigo uma considerável gama de conhecimentos, embora diferenciados em função do meio no qual vive.

O envolvimento da família não apenas fortalece o vínculo do aluno com a escola, mas também influencia diretamente na valorização do conhecimento e no desenvolvimento da autonomia para os estudos.

Pontes *et al.* (2020, p. 3171) destaca que “as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de matemática brotam porque a exposição das ideias matemáticas sobrevém de forma abstrata, baseada em uma linguagem extremamente complexa e não usual”. Essa forma de apresentação pode contribuir para o distanciamento dos alunos em relação ao entendimento de como o pensamento matemático é construído, especialmente quando combinada com práticas pedagógicas tradicionais. Para Zanardi e Silva (2016), o desinteresse dos alunos, e consequentemente a dificuldade encontrada por alguns através do método de ensino tradicional são um dos maiores problemas enfrentados na sala de aula.

O modelo tradicional de ensino também é criticado por D'Ambrosio (1989, p. 1), que observa que ele leva os alunos a perceberem a matemática como um simples acúmulo de fórmulas e algoritmos, transmitidos de forma dogmática. Para D'Ambrosio, essa abordagem não apenas distancia os alunos da compreensão do pensamento matemático, mas também enfraquece sua confiança em suas próprias intuições, contribuindo para a crença de que a matemática é um conhecimento inacessível e reservado a “gênios”:

Primeiro, alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo, os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios. O aluno, acreditando e supervalorizando o poder da matemática formal perde qualquer auto-confiança em sua intuição matemática, perdendo, dia a dia, seu “bom-senso” matemático. (D'AMBROSIO, 1989, p. 1)

As reflexões apresentadas pelos autores sugerem fatores que podem intensificar a aversão dos alunos à Matemática, comprometendo seu engajamento e interesse pelo aprendizado e contribuindo para o baixo rendimento escolar. Esse cenário preocupante na educação brasileira é claramente evidenciado quando se analisam os dados de alguns sistemas de avaliações, a saber: Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). Essas avaliações buscam compreender os resultados alcançados pelos alunos ao longo do desenvolvimento escolar. Os dados gerados por essas avaliações fornecem informações valiosas sobre o atual sistema educacional brasileiro e destacam as áreas que necessitam de intervenção urgente, em especial a matemática.

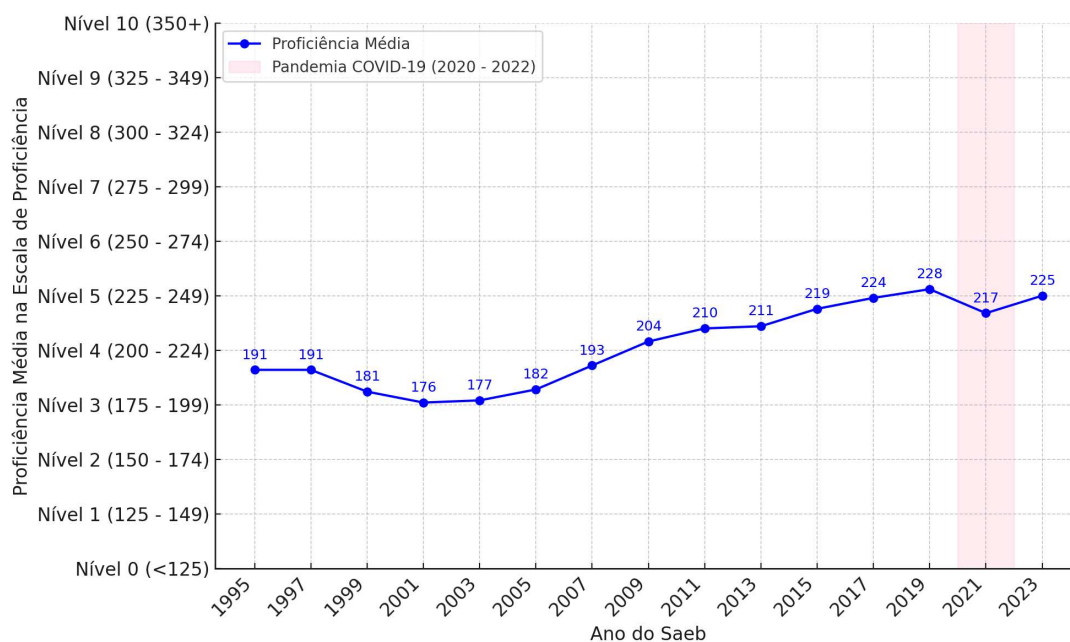
O SAEB, implementado em 1990, consiste em um conjunto de avaliações externas em larga escala que permite ao Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP)² diagnosticar a qualidade da educação básica no Brasil. Além disso, o SAEB analisa fatores que podem influenciar o desempenho dos estudantes. Realizado a cada dois anos, seus resultados oferecem importantes indicadores sobre a eficácia do ensino e contribuem para o planejamento de políticas públicas voltadas à melhoria da educação no país.

Os gráficos das Figuras 1, 2 e 3, a seguir, apresentam, respectivamente, as evoluções das proficiências médias nacionais em Matemática no 5º ano do Ensino Fundamental, no 9º ano do Ensino Fundamental e na 3ª série do Ensino Médio Tradicional³, no período de 1995 a 2023. Esses dados permitem uma análise abrangente do desempenho dos estudantes, evidenciando oscilações e tendências ao longo do tempo, além de oferecer uma visão detalhada sobre os níveis de aprendizagem registrados nas diferentes edições do SAEB.

²O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) é uma autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação (MEC). Sua missão é subsidiar a formulação de políticas educacionais dos diferentes níveis de governo com intuito de contribuir para o desenvolvimento econômico e social do país.

³O Ensino Médio tradicional no Brasil é a etapa final da educação básica, com duração de três anos, voltada à formação geral dos estudantes.

Figura 1: Proficiência Média em Matemática no 5º ano do Ensino Fundamental: Evolução e Níveis na Escala por ano do Saeb – Brasil – 1995 a 2023.



Fonte: Elaborado pelo autor, com base em dados do INEP.

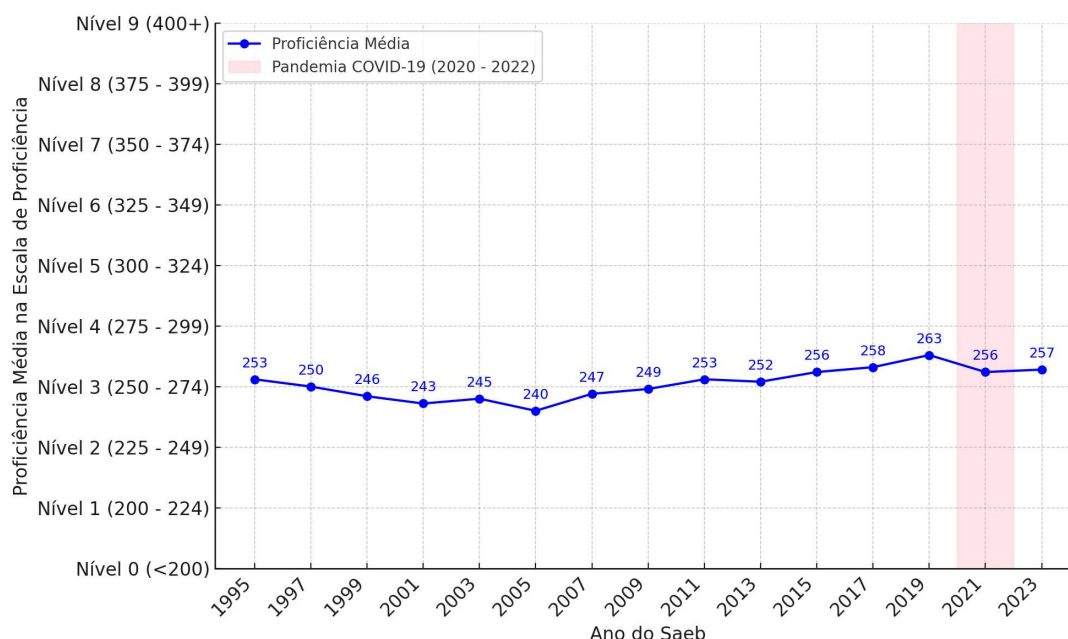
O INEP classifica os 10 níveis da escala de proficiência do 5º ano, apresentados no gráfico da Figura 1, da seguinte forma: níveis 0, 1 e 2: Insuficiente; níveis 3 e 4: Básico; níveis 5 e 6: Proficiente; e níveis 7, 8, 9 e 10: Avançado.

O gráfico da Figura 1 revela uma tendência inicial de decrescimento na proficiência média dos alunos de Matemática no 5º ano do Ensino Fundamental entre 1997 e 2001. Durante esse período, os alunos permaneceram no nível 3 (Básico). Em 2001, registrou-se a menor proficiência média de todo o período analisado (1995 a 2023), com 176 pontos, ficando muito próximo de uma queda para o nível 2 (Insuficiente), que se inicia em 175 pontos.

A partir de 2001, observa-se uma mudança de tendência, com um crescimento contínuo na proficiência média dos alunos, alcançando o nível 4 (Básico) em 2009 e o nível 5 (Proficiente) em 2019. Este último ano, correspondente ao último SAEB antes da pandemia, registrou a maior proficiência média de todo o período analisado, com 228 pontos. Esse progresso, que registrou (obteve) um ganho de 52 pontos de 2001 a 2019, foi interrompido em 2021, edição realizada durante a pandemia de COVID-19, quando a proficiência média caiu 11 pontos, reduzindo-se para 217 pontos, retornando os alunos ao nível 4 (Básico).

Em 2023, primeira edição após a pandemia, os alunos recuperaram parte do desempenho, retornando ao nível 5 (Proficiente) com 225 pontos. Apesar dessa recuperação de 8 pontos em relação a 2021, o resultado ainda ficou 3 pontos abaixo do pico registrado em 2019. Comparativamente a 1995, observa-se um avanço significativo de 34 pontos, evidenciando uma evolução geral ao longo dos anos.

Figura 2: Proficiência Média em Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental: Evolução e Níveis na Escala por ano do Saeb - Brasil - 1995 a 2023.



Fonte: Elaborado pelo autor, com base em dados do INEP.

O INEP classifica os 9 níveis da escala de proficiência do 9º ano, apresentados no gráfico da Figura 2, da seguinte forma: níveis 0 e 1: Insuficiente; níveis 2, 3 e 4: Básico; níveis 5 e 6: Proficiente; e níveis 7, 8 e 9: Avançado.

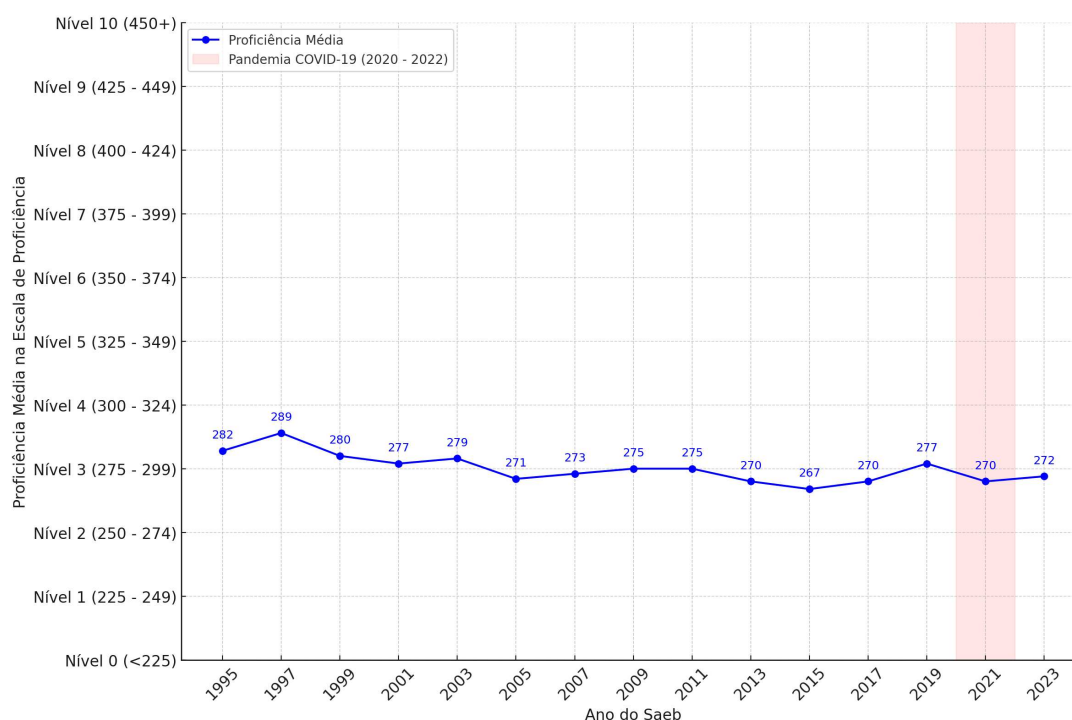
Diferentemente da proficiência média dos alunos de Matemática no 5º ano do Ensino Fundamental, que iniciaram no nível 3 (Básico) em 1995 e evoluíram dois níveis, alcançando o nível 5 (Proficiente) em duas das últimas três edições (2019 e 2023), o gráfico da Figura 2 revela uma estagnação no desempenho da proficiência média dos alunos de Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental. Em 2023, a proficiência média permaneceu no mesmo nível registrado em 1995, o nível 3 (Básico). Enquanto o 5º ano apresentou uma evolução geral de 34 pontos ao longo do período analisado (1995 a 2023), o 9º ano registrou um avanço muito mais modesto, de apenas 4 pontos.

Ao longo das 15 edições do SAEB, a proficiência média do 9º ano permaneceu distante do nível 5 (Proficiente) e nunca chegou sequer ao nível 4. Pelo contrário, regrediu para o nível 2 (Insuficiente) e permaneceu por 6 edições consecutivas. Mesmo em 2019, ano correspondente ao último SAEB antes da pandemia e que registrou a maior média de todo o período analisado, com 263 pontos, a diferença para o nível 5 era de 37 pontos. Essa lacuna é significativamente maior do que a maior evolução registrada, de 23 pontos entre 2005 (quando a média foi a menor de todo o período, com 240 pontos) e 2019.

Em 2023, primeira edição realizada após a pandemia de COVID-19, os alunos do 9º ano alcançaram uma proficiência média de 257 pontos: apenas 1 ponto acima da edição de 2021 (realizada durante a pandemia), 6 pontos abaixo de 2019 e apenas 4 pontos acima de 1995. Esses dados evidenciam a dificuldade em promover avanços significativos no desempenho dos

alunos ao longo das décadas.

Figura 3: Proficiência Média em Matemática na 3ª série do Ensino Médio Tradicional: Evolução e Níveis na Escala por ano do Saeb - Brasil - 1995 a 2023.



Fonte: Elaborado pelo autor, com base em dados do INEP.

O INEP classifica os 10 níveis da escala de proficiência da 3ª série do Ensino Médio, apresentados no gráfico da Figura 3, da seguinte forma: níveis 0, 1 e 2: Insuficiente; níveis 3, 4 e 5: Básico; níveis 6 e 7: Proficiente; e níveis 8, 9 e 10: Avançado.

O desempenho do Ensino Médio foi ainda pior que o do 9º ano, evidenciando maiores retrocessos e estagnação ao longo das edições do SAEB. O gráfico da Figura 3 revela um cenário preocupante na proficiência média dos alunos do 3º ano do Ensino Médio Tradicional ao longo das 15 edições do SAEB (1995 a 2023). A menor média registrada ocorreu em 2015, com 267 pontos, enquanto a maior foi em 1997, com 289 pontos. Analisando apenas a última década (2013 a 2023), o maior registro foi em 2019, com 277 pontos, ano correspondente ao último SAEB antes da pandemia. Os 7 pontos ganhos entre 2017 e 2019 foram perdidos em 2021, edição realizada durante a pandemia de COVID-19.

Desde 1997, a pontuação sempre se manteve abaixo da registrada em 1995, quando era nível 3 (Básico), com 282 pontos. A proficiência média dos alunos permaneceu quase sempre próxima do limite inferior do nível 3 (Básico), com diferenças de no máximo 5 pontos, chegando a atingir exatamente esse limite em 2009 e 2011. Observa-se muitas oscilações ao longo das edições, sem qualquer tendência de avanço para o nível 6 (Proficiente) ou sequer para o nível 4 (Básico). Pelo contrário, em 7 das 15 edições, a média ficou no nível 2 (Insuficiente), inclusive na edição de 2023, a primeira realizada após a pandemia de COVID-19.

Em 2023, a pontuação alcançada foi de 272 pontos, apenas 2 pontos acima de 2021,

5 pontos abaixo de 2019 e 10 pontos abaixo de 1995. Esses dados evidenciam a dificuldade em promover avanços significativos no desempenho dos alunos do 3º ano do Ensino Médio ao longo do período analisado.

Os anos de 2019, 2021 e 2023 são particularmente relevantes nas análises feitas anteriormente, pois marcam momentos-chave: 2019 corresponde à edição realizada antes da pandemia, 2021 à edição durante a pandemia, e 2023 à primeira edição após a pandemia. Entre 2019 e 2021, observamos quedas nos gráficos das Figuras 1, 2 e 3, de 11, 7 e 7 pontos, respectivamente. Entre 2021 e 2023, ocorreram pequenos avanços, com o gráfico da Figura 2 registrando um aumento de 1 ponto, o gráfico da Figura 3 de 2 pontos e o gráfico da Figura 1 apresentando um avanço mais expressivo, de 8 pontos. Em 2023, todos os gráficos apresentaram pontuações abaixo das registradas em 2019. Esses resultados podem ter sofrido impactos da pandemia de COVID-19. Conforme destaca João Paulo Cêpa, Gerente de Articulação do Movimento pela Base:

A defasagem de aprendizagens no Brasil, intensificada pela pandemia, terá impactos sentidos pelos próximos 10 anos e nas próximas 5 edições do SAEB. Essa situação compromete o avanço escolar e o futuro pessoal e profissional dos nossos jovens. Apesar de todo o esforço das escolas, os estudantes seguem com lacunas de aprendizagem. E a recomposição segue como uma estratégia fundamental para mudar este cenário, especialmente nos Anos Finais e Ensino Médio, onde os resultados são ainda mais preocupantes (MOVIMENTO PELA BASE, 2024, online).

Os dados do SAEB apresentados anteriormente evidenciam que, atualmente, com exceção dos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, os demais não atingem, em média, níveis de proficiência em Matemática, indicando desafios significativos no aprendizado da disciplina. Esse cenário não é apenas atual, mas também recorrente ao longo dos anos, tendo impactado inclusive o 5º ano em edições anteriores. Além disso, à medida que os alunos avançam nos anos escolares, essa tendência parece se agravar.

Outro programa que mede o desempenho dos estudantes em larga escala, desta vez em âmbito internacional, é o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). Desenvolvido e coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico⁴ (OCDE)⁵, o PISA foi implementado em 2000 e tem sido realizado a cada três anos⁶. O PISA avalia o conhecimento e as habilidades dos alunos em matemática, leitura e ciências. Além disso, “a pesquisa também avalia domínios chamados inovadores, como Resolução de Problemas, Letramento Financeiro e Competência Global” (INEP, 2024, online).

O órgão responsável pelo planejamento e pela operacionalização da avaliação do

⁴Tradução de Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD).

⁵Ao longo do texto, adotaremos ambas as siglas: OCDE (em português) e OECD (em inglês).

⁶Devido à pandemia de Covid-19, o espaçamento de três anos entre as edições de 2018 e 2021 não foi mantido. Conforme descrito pelo INEP (2024, online), “os países-membros e associados da OCDE decidiram adiar a avaliação do Pisa 2021 para 2022 e do Pisa 2024 para 2025”.

PISA no Brasil é o INEP⁷. O Brasil participa do programa desde sua criação, desempenhando um papel importante na coleta e análise de dados que permitem comparar o desempenho dos estudantes em matemática, leitura e ciências e outros aspectos da aprendizagem. Conforme descrito pelo INEP (2024, online):

O Pisa oferece informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países, vinculando dados sobre seus backgrounds e suas atitudes em relação à aprendizagem, e também aos principais fatores que moldam sua aprendizagem, dentro e fora da escola.

Os resultados do Pisa permitem que cada país avalie os conhecimentos e as habilidades de seus estudantes em comparação com os de outros países, aprenda com as políticas e práticas aplicadas em outros lugares e formule suas políticas e programas educacionais visando à melhora da qualidade e da equidade dos resultados de aprendizagem.

Essas características fazem do PISA uma ferramenta indispensável para compreender os desafios educacionais no Brasil e no mundo. Segundo o INEP (2023, online), “trata-se do maior estudo comparativo do mundo”. Logo, os resultados do programa orientam políticas públicas no Brasil, visando à melhoria da qualidade do ensino e promovendo uma educação básica mais inclusiva e equitativa.

A cada edição, o PISA dá mais ênfase a uma das três áreas avaliadas, “o que significa que os estudantes respondem a um maior número de itens no teste dessa área do conhecimento e que os questionários se concentram na coleta de informações relacionadas à aprendizagem nesse domínio” (INEP, 2024, online). Em 2003, 2012 e, mais recentemente, 2022, o foco do PISA foi na área de Matemática. De acordo com a OECD (2018, p. 104, tradução nossa):

A avaliação de matemática do PISA tem como foco medir a capacidade dos estudantes de formular, utilizar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Esses contextos incluem não apenas situações familiares relacionadas à experiência pessoal, como ao preparar alimentos, fazer compras ou assistir a esportes, mas também contextos ocupacionais, sociais e científicos, como calcular o custo de um projeto, interpretar estatísticas nacionais ou modelar fenômenos naturais. Para ter sucesso no teste do PISA, os estudantes devem ser capazes de raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. A competência em matemática, conforme definida pelo PISA, ajuda os indivíduos a reconhecer o papel da matemática no mundo e a fazer julgamentos e decisões fundamentadas, necessárias para serem cidadãos construtivos, engajados e reflexivos (OCDE, 2019).

O desempenho em matemática, descrito dessa forma, abrange mais do que a capacidade de reproduzir os conceitos e procedimentos matemáticos adquiridos na escola. O PISA busca medir quão bem os estudantes podem extrapolar o que sabem e aplicar seus conhecimentos matemáticos em uma variedade de

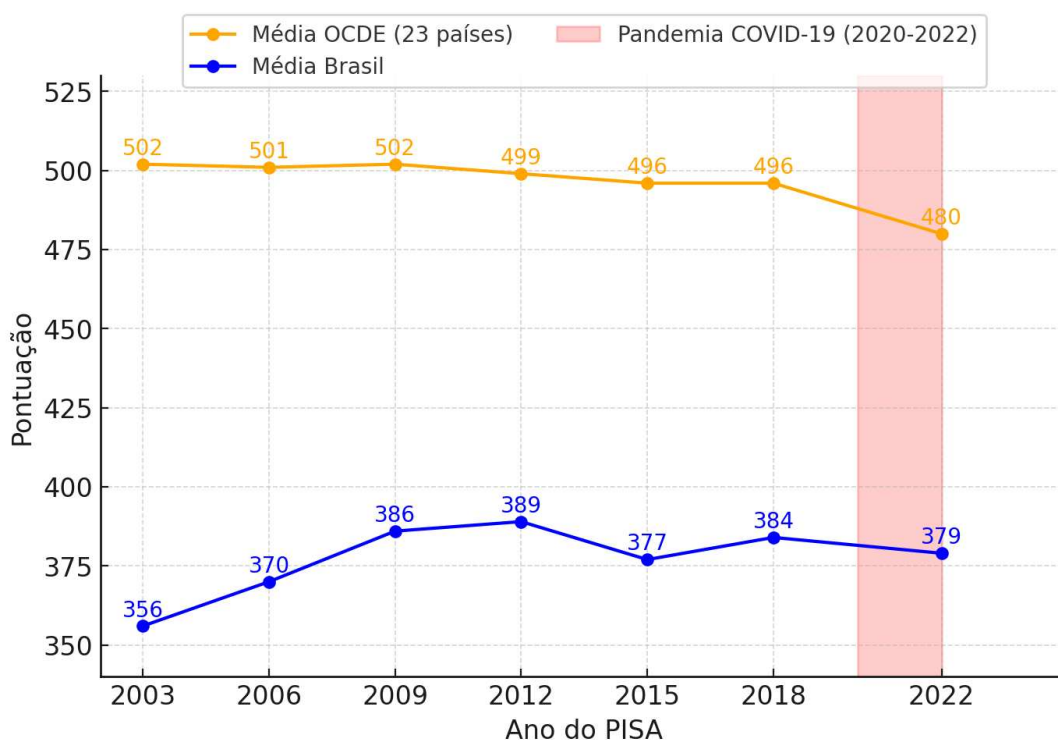
⁷O INEP (2024, online) descreve que essa responsabilidade “envolve representar o Brasil perante a OCDE, coordenar a tradução dos instrumentos de avaliação, coordenar a aplicação desses instrumentos nas escolas amostradas e a coleta das respostas dos participantes, coordenar a codificação dessas respostas, analisar os resultados e elaborar o relatório nacional”.

situações, incluindo aquelas novas e desconhecidas. Para esse fim, a maioria das questões de matemática do PISA faz referência a contextos da vida real nos quais habilidades matemáticas são necessárias para resolver um problema. O foco em contextos da vida real também se reflete na possibilidade de uso de “ferramentas”, como calculadoras, réguas ou planilhas eletrônicas, para resolver problemas, da mesma forma que se faria em uma situação do dia a dia.

O desempenho dos alunos no PISA é relatado em uma escala. Atualmente, a escala de Matemática é dividida em oito níveis de proficiência⁸. Para atingir os níveis 2, 5 e 6, por exemplo, o aluno deve obter, no mínimo, 420, 607 e 669 pontos, respectivamente. Segundo a OECD (2019, 2023), nos relatórios do PISA, alcançar o nível 2 é particularmente importante, pois representa o grau básico de proficiência esperado de todos os jovens, sendo essencial para aproveitar novas oportunidades de aprendizagem e participar plenamente da sociedade. Alunos abaixo do nível 2 são classificados como “de baixo desempenho”, enquanto aqueles nos níveis 5 e 6 são categorizados como “de alto desempenho”.

Nesse contexto, ao analisarmos a média em Matemática no Brasil apresentada no gráfico abaixo, é possível constatar que, ao longo de todas as edições, os alunos têm apresentado baixo desempenho nessa área. As análises da OECD (2023) apontam que, desde 2009, os resultados em Matemática no Brasil têm se mantido estáveis, com apenas pequenas flutuações, geralmente não significativas.

Figura 4: Evolução da Proficiência Média em Matemática: Brasil e OCDE (23 países) – PISA 2003 a 2022.



Fonte: Elaborado pelo autor, com base em dados da OECD.

⁸A escala de Matemática foi inicialmente construída para o PISA de 2003 e permaneceu inalterada até a edição de 2022. Para mais detalhes sobre a escala atual, acesse: <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>.

O gráfico também evidencia que a média do Brasil sempre esteve significativamente abaixo da média dos países da OECD. Segundo o INEP, mesmo em 2022, quando a média da OECD atingiu o menor patamar de toda a série histórica desde 2000, os estudantes brasileiros apresentaram resultados inferiores em Matemática e nas demais disciplinas avaliadas. Antes da divulgação dos resultados do PISA 2022, Monis (2023, p. 28) já destacava:

Quando se fala de proficiência em Matemática, de acordo com as pesquisas, em termos de escolarização os estudantes brasileiros estão três anos e meio atrás dos países da OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) e provavelmente após a pandemia do COVID 19 o problema irá se agravar ainda mais.

Em 2022, a média do Brasil em Matemática foi praticamente a mesma de 2018, ano da última aplicação do PISA antes da pandemia. Apesar das dificuldades enfrentadas durante a crise sanitária, os dados e análises divulgadas mostram que não houve quedas significativas nos resultados médios do país em relação à edição de 2018. Sobre essa estabilidade, João Marcelo Borges, gerente de pesquisa e inovação do Instituto Unibanco, destaca: “O nosso é um sistema de baixo desempenho e é difícil cair muito de onde estamos” (O Globo, 2023, online).

De acordo com dados fornecidos pelo INEP, em 2022, participaram do PISA 10.798 estudantes brasileiros de 599 escolas, tanto públicas quanto privadas. Apenas 27% dos alunos brasileiros alcançaram, no mínimo, o Nível 2 de proficiência, percentual significativamente inferior à média dos países da OECD, que é de 69%. Além disso, cerca de 1% dos estudantes brasileiros atingiram o nível 5 ou 6⁹, considerados de alto desempenho, enquanto a média da OECD é de 9%¹⁰. Por outro lado, os 73% dos estudantes brasileiros que não alcançaram o Nível 2 de proficiência em Matemática apresentam dificuldades em representar matematicamente situações cotidianas, como estimar distâncias entre rotas alternativas ou realizar conversões monetárias, especialmente sem instruções diretas.

Os dados dos relatórios do PISA 2022 divulgados pelo INEP revelam que, entre os 81 países participantes da edição, o Brasil ficou classificado entre as 20 piores colocações no desempenho médio em Matemática, ocupando entre a 62^a e a 69^a posição¹¹. Quando comparado aos países da América do Sul avaliados, o Brasil, com exceção do Paraguai¹² (338 pontos), é um dos piores em Matemática, empatando estatisticamente com a Argentina (379 pontos) e a Colômbia (384 pontos). O Chile (412 pontos), o Uruguai (409 pontos) e o Peru (391 pontos) apresentam desempenhos superiores.

As médias de proficiência em Matemática das regiões do Sul, Sudeste Centro-Oeste, Norte, Nordeste do Brasil em 2022 foram, respectivamente, 394, 384, 388, 357 e 363 pontos.

⁹Mais especificamente, os alunos brasileiros considerados de alto desempenho alcançaram apenas o Nível 5. Na edição de 2022, nenhum estudante brasileiro obteve a proficiência máxima em Matemática.

¹⁰Dos 9% de estudantes da OECD considerados de alto desempenho, 7% estão no Nível 5 e 2% atingiram a proficiência máxima no Nível 6.

¹¹Segundo o INEP (2023, online), “o país pode ser colocado em um determinado intervalo de posição, em função da margem de erro inerente ao estudo”.

¹²Dos países da América do Sul analisados no PISA 2022, o Paraguai é o que possui menos participações

Lembrando que a média nacional foi 379 pontos. Em relação a essas médias das regiões do Brasil, “o desempenho médio da Região Sul e Sudeste é significativamente superior ao nacional, o da Região Centro-Oeste é estatisticamente igual ao nacional e o das Regiões Norte e Nordeste inferiores ao nacional” (INEP, 2023, p.10).

Os dados do PISA apresentados anteriormente também indicam desafios significativos no aprendizado de Matemática, corroborando os resultados do SAEB. Em média, os alunos não atingem o nível de proficiência considerado básico na disciplina, uma realidade que se mantém ao longo dos anos, sem mudanças significativas.

2.2 Jogo no ensino e aprendizagem de matemática

Os dados anteriormente analisados nos revelam uma preocupação no ensino e aprendizagem da Matemática. Como apontado por alguns autores, diversos são os problemas. Segundo Pontes (2019, p.2),

No mundo contemporâneo diversas pesquisas são realizadas em busca de uma solução eficaz no processo ensino e aprendizagem de matemática, tendo como foco as suas novas técnicas da educação matemática. Os conteúdos de matemática na educação básica devem passar por um criterioso processo de reformulação e deve ser repensado através destas novas técnicas apresentadas na educação matemática.

Entre essas novas técnicas, destaca-se o uso de jogos na educação, especialmente os jogos matemáticos, amplamente reconhecidos como uma metodologia significativa. Esses jogos proporcionam melhorias na relação ensino-aprendizagem nas aulas de Matemática, pois contribuem para o aumento da capacidade de construção e abstração de novos conhecimentos (ASCOLI; BRANCHER, 2006).

Historicamente, os jogos eram considerados atividades superficiais, mas, como observa Guirado *et al.* (2018), seu valor educativo começou a ganhar mais força e reconhecimento a partir do século XIX, quando passaram a ser vistos como ferramentas eficazes para aprendizagem e socialização, ocupando um espaço relevante na educação. Segundo Cleophas e Soares (2018, p. 12):

O campo de desenvolvimento e utilização de jogos educacionais no Brasil é amplo. Cada vez mais, os jogos fazem parte da rotina dos espaços de ensino formal e informal e isso pode ser facilmente constatado ao observar as inúmeras publicações de cunho acadêmico-científico que legitimam esse quadro referente à inserção da ludicidade nos diferentes níveis de ensino.

É importante ressaltar que ao considerar a inserção dos jogos no processo de ensino-aprendizagem de matemática o objetivo não é substituir os métodos tradicionais, mas oferecer ao professor uma alternativa metodológica que complemente e amplie as possibilidades de aprendizado dos alunos, promovendo uma interação significativa com os conteúdos propostos. Queiroz (2023, p. 16) destaca que:

A pesquisa não tem o intuito de abolir o ensino tradicional, mas de contribuir com outras metodologias que podem auxiliar na aprendizagem dos alunos. A resolução de exercícios pelos alunos tem o seu valor, mas o professor deve diversificar em sala de aula, utilizando diferentes métodos na abordagem dos conteúdos, assim os conceitos matemáticos podem ser trabalhados com os alunos através de uma articulação entre a metodologia tradicional e as alternativas.

Há inúmeros aspectos nos jogos que justificam sua eficácia na construção e abstração de novos conhecimentos. Nesta seção, abordamos alguns deles, como o caráter lúdico, a interação social e o desenvolvimento intelectual. Além disso, é discutido duas perspectivas distintas sobre como os jogos são caracterizados no contexto escolar e qual o papel do professor em sua aplicação.

2.2.1 O lúdico

Ensinar Matemática de forma prazerosa é um objetivo muitas vezes negligenciado nas práticas educativas tradicionais, mas que deve ser valorizado como parte essencial de um trabalho docente de qualidade. Como observa Mendonça (apud QUEIROZ, 2023, p. 21):

Ensinar e aprender Matemática pode e deve ser uma experiência feliz. Curiosamente quase nunca se cita a felicidade dentro dos objetivos educativos, mas é bastante evidente que só poderemos falar de um trabalho docente bem feito quando todos alcançarmos um grau de felicidade satisfatória.

O uso de jogos no ensino de Matemática apresenta-se como uma ferramenta eficaz que pode superar algumas dificuldades encontradas no modelo tradicional de ensino e alcançar o objetivo descrito por Mendonça. Segundo Zanardi e Silva:

Os jogos são uma importante metodologia para o processo de aprendizagem, pois através de sua aplicabilidade talvez seja possível “sanar” um dos maiores problemas que hoje enfrentamos em sala de aula, que é o desinteresse, e consequentemente a dificuldade encontrada por alguns através do ensino tradicional (ZANARDI E SILVA, 2016, p. 4).

Um aspecto fundamental dos jogos é o seu caráter lúdico, que desperta nos alunos o gosto pela atividade e pelas aprendizagens realizadas através dela. Como destaca Santos (2008, p. 29): “uma razão lógica para a utilização de jogos parece ser o gosto dos alunos pela atividade lúdica e pelas aprendizagens efetuadas por seu intermédio. O seu objetivo centra-se no despertar o gosto pela Matemática, mudando as rotinas de aprendizagem”.

De fato, o gosto pelo lúdico está presente em nossas vidas desde cedo, e os jogos e brincadeiras, especialmente na infância, desempenham um papel essencial no desenvolvimento das crianças. Como destaca Grando (2000, p. 19), “as crianças, desde os primeiros anos de vida, gastam grande parte de seu tempo brincando, jogando e desempenhando atividades lúdicas. Na verdade, a brincadeira parece ocupar um lugar especial no mundo delas”.

Para Bianchini, Gerhardt e Dullius (2011), o caráter lúdico dos jogos desperta a atenção de praticamente todos os alunos. Essa observação é reforçada por Grando (2000, p.

19), que relata: “a experiência docente tem mostrado que muitas crianças ficam horas, às vezes, prestando atenção em um único jogo e não se cansam”. A autora também observa que muitas dessas crianças são classificadas pela escola como aquelas com dificuldade de concentração e observação nas atividades escolares. Essa atenção provocada nos alunos pode ser vista como um efeito natural dos jogos, pois, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “um aspecto relevante dos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer” (BRASIL, 1997, p. 49).

Os aprendizados por intermédio dos jogos são mais apreciados pelos alunos, uma vez que, nesse ambiente, eles se divertem de forma descomprometida da ideia de aprender algo imposto pelo professor em sala de aula (Bianchini, Gerhardt e Dullius, 2011). Silva (2010) acrescenta que, ao jogar, o aluno se envolve de tal forma que fixa e adquire novos conhecimentos sem perceber, já que o ambiente descontraído torna o aprendizado mais leve e espontâneo.

Ensinar por meio de jogos é um caminho para o educador desenvolver aulas mais interessantes, descontraídas e dinâmicas, podendo competir em igualdade de condições com os inúmeros recursos a que o aluno tem acesso fora da escola, despertando ou estimulando sua vontade de frequentar com assiduidade a sala de aula e incentivando seu envolvimento nas atividades, sendo agente no processo de ensino e aprendizagem, já que aprende e se diverte, simultaneamente. (SILVA, 2005, p. 26).

O professor tem, então, no jogo, uma boa oportunidade de ensinar Matemática. Nessa abordagem, o aluno aprende de maneira quase inconsciente, o que elimina a pressão de ter que entender a matéria de forma imediata. Esse aspecto é crucial, pois muitas vezes os alunos se sentem culpados por suas dificuldades em aprender matemática, levando a um ciclo de desmotivação. O jogo proporciona um ambiente de aprendizado mais leve e prazeroso, onde o aluno pode explorar conceitos matemáticos sem a ansiedade que normalmente acompanha o ensino tradicional. Nesse sentido, o uso de jogos é uma alternativa positiva que visa mudar a rotina da sala de aula. Ele não só desperta o interesse dos alunos, mas também aproxima-os do prazer de aprender os conteúdos dessa disciplina.

2.2.2 O social

Enquanto jogam em sala de aula, os alunos, como agentes ativos no processo de ensino e aprendizagem, abrem margem para interações sociais significativas com o professor e entre si, transformando o ambiente em um espaço propício ao aprendizado coletivo e ao desenvolvimento de habilidades interpessoais. Como destaca Sales (2024, p. 11):

Inserir os jogos no processo de ensino-aprendizagem estabelece uma relação de cooperação entre os estudantes, uma vez que os conteúdos ali presentes estarão sendo debatidos e analisados pelas partes, e essa discussão faz com que os estudantes criem linhas de raciocínio para o debate, internalizando mais ainda o conhecimento adquirido.

Essa interação entre os alunos ocorre de forma natural e intrínseca ao ato de jogar, como apontam Bianchini, Gerhardt e Dullius (2011, p. 3):

[...] durante o ato de jogar os alunos geralmente são mais ativos e, logo, são participantes e interagem com os demais. Esta interação é intrínseca ao jogo, ou seja, não é possível ser jogador sem participar ativamente do jogo. Até mesmo os alunos mais reservados, que dificilmente compartilham suas ideias, durante o jogo, acabam por partilhar seu pensamento com os colegas.

O ambiente de cooperação proporcionado pelos jogos fortalece não apenas o entendimento dos conteúdos matemáticos, mas também estimula a capacidade de comunicar. Essa característica é especialmente evidente durante o ato de jogar, quando até os alunos mais reservados encontram oportunidades de se expressar, contribuindo para o trabalho coletivo e para a troca de ideias.

A socialização ocorre quando o jogo é realizado em equipes, onde os alunos vão compartilhar suas experiências e habilidade. Eles estarão aprendendo a impor limites a si mesmo e respeitar as idéias dos participantes. Ao interagir com os colegas estarão aprendendo coisas novas (SILVA, 2010, p. 8).

Quando realizados em equipes, os jogos intensificam a colaboração e o diálogo, fortalecendo o senso de coletividade. A divisão de tarefas e o planejamento estratégico dentro do grupo incentivam os alunos a reconhecerem a importância do trabalho em equipe para alcançar objetivos comuns. Contudo, mesmo em jogos individuais, a socialização pode ser promovida, desde que o professor crie momentos para debates e trocas de ideias entre os alunos. Esse planejamento permite que cada aluno compartilhe suas estratégias e aprendizados, enriquecendo o processo de ensino.

Portanto, os jogos não apenas facilitam o aprendizado dos conteúdos matemáticos, mas também integram a formação acadêmica e social dos estudantes, promovendo habilidades como comunicação, empatia e respeito mútuo. Ao desenvolverem essas competências, os alunos tornam-se mais preparados para enfrentar os desafios do convívio social e da vida cotidiana de forma colaborativa e reflexiva.

2.2.3 O cognitivo

O ambiente lúdico e social proporcionado pelos jogos cria condições ideais para a superação de bloqueios relacionados à Matemática, a contextualização de problemas e o desenvolvimento intelectual dos alunos. Segundo Borin (apud ZANARDI E SILVA, 2016, p. 6):

Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática, sentindo-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam de Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positi-

vas frente a seus processos de aprendizagem.

Pelas discussões anteriores, podemos citar, por exemplo, que os alunos percebem que é possível aprender Matemática de forma divertida. Um outro exemplo de bloqueio é o medo de errar. Os erros no processo de ensino e aprendizagem são essenciais, pois fazem parte do desenvolvimento — é errando que também se aprende. No entanto, os erros em Matemática, ao que parece, desestimulam ainda mais os alunos, devido à visão negativa que se tem dessa área. Os jogos, por sua vez, ajudam os alunos a enxergar os erros no processo de ensino e aprendizagem da Matemática de forma natural, pois “[...] o erro deixa de ser visto como um problema e passa a ser considerado um degrau necessário para se chegar a uma resposta correta” (SILVA, 2010, p. 20). Além de proporcionar atitudes positivas perante os erros, os jogos oferecem uma forma atraente de contextualizar problemas matemáticos, permitindo que os alunos os compreendam de maneira prática e significativa. Conforme os PCN destacam (1998, p. 46):

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações se sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.

Resolver problemas matemáticos em um contexto de jogo implica não apenas vencer desafios, mas também utilizar estratégias e habilidades matemáticas de maneira prática e dinâmica. Resolver problemas, nesse contexto, é sinônimo de avançar no jogo, e jogar é explorar conceitos matemáticos. Essa integração não apenas motiva os alunos, mas também estimula seu desenvolvimento intelectual. Durante os jogos, eles são desafiados a pensar de forma crítica, discutir estratégias, levantar hipóteses e refletir sobre as consequências de suas escolhas. Como aponta Grando (2000, p. 28):

[...] considera-se que o jogo, em seu aspecto pedagógico, se apresenta produtivo ao professor que busca nele um aspecto instrumentador e, portanto, facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, e também produtivo ao aluno, que desenvolveria sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las (investigação matemática), com autonomia e cooperação.

Portanto, os jogos transcendem sua função de simples ferramentas didáticas. Eles tornam o aprendizado mais atrativo e significativo, promovendo o desenvolvimento de competências fundamentais nos alunos, como a capacidade de resolver problemas, trabalhar em equipe e enfrentar desafios com confiança e criatividade. Essa abordagem integrada não apenas enriquece a experiência de aprendizado, mas também prepara os alunos para aplicarem os conhecimentos matemáticos de forma prática e inovadora em diferentes contextos.

2.2.4 Jogo educativo, didático, pedagógico

Com a presença crescente dos jogos na sala de aula, aqueles utilizados para o ensino de conteúdos escolares passam a ser classificados e adjetivados como “educativos”, “didáticos” ou “pedagógicos”. Isso levanta uma questão central: o que define um jogo como educativo, didático ou pedagógico? Há, de fato, diferenças entre essas classificações?

[...] conceitos como jogo, jogo educativo, jogo didático, jogo pedagógico são usados, em muitos trabalhos, com pouca precisão e sem uma matriz teórica que sustente a escolha dos termos. Preocupados com essa imprecisão conceitual, alguns autores tentam fazer discussões nas quais tais termos são colocados em debate, buscando trazer definições para parte desses conceitos, com o objetivo de melhor orientar o campo que pensa a ludicidade e suas relações com aprendizagem e educação (LIMA; MESSEDER-NETO, 2021, p. 183).

Nesse contexto, Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018) e Lima e Messeder-Neto (2021) oferecem análises fundamentadas, destacando as dimensões educativas dos jogos e propondo diferentes abordagens para os termos “educativo”, “didático” e “pedagógico”. Passemos, então, a descrever as contribuições desses autores, considerando suas perspectivas na busca por definições para esses conceitos.

Partimos da visão apresentada por Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018). Na busca por responder a essa questão, os autores analisam, com base em referências teóricas sobre o jogo, a dimensão educativa inserida nesse contexto. Eles também destacam diferenças importantes entre os conceitos de jogos educativos, didáticos e pedagógicos.

[...] faz-se necessário fomentar o debate acerca dos entendimentos sobre as características e as dimensões que estão integradas às nomenclaturas atribuídas aos jogos no ambiente educacional (jogos didáticos – JD, jogos pedagógicos – JP e jogos educativos – JE), já que, quase sempre, esses termos são empregados no dia a dia como sendo uma metonímia, pois de fato há relação entre eles. Logo, o interesse aqui é apontar prováveis congruências e divergências entre esses termos, contribuindo, desse modo, com direcionamentos que banalizem as possíveis diferenças e similitudes (discretas, mas não menos importantes) entre os termos adotados na contemporaneidade (CLEOPHAS; CAVALCANTI; SOARES, 2018, p. 34).

Em primeiro lugar, Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018, p. 36) entendem que “o jogo, em seu sentido stricto, filosófico, é aquele que é lúdico, prazeroso, divertido, entre outros aspectos”. Quanto ao jogo educativo, os autores reforçam a ideia de que ele diverge do jogo em sua essência stricto. Eles explicam:

Ele não é propriamente o jogo, mas um arremedo dele, pois, se partirmos do pressuposto de que o jogo e a educação são paradoxais em suas definições e, consequentemente, não complementares, não pode o jogo educativo ser o jogo no sentido stricto (CLEOPHAS; CAVALCANTI; SOARES, 2018, p. 38).

Em outras palavras, o jogo educativo é uma nova categoria ou variante do próprio

jogo em seu sentido stricto (CLEOPHAS; CAVALCANTI; SOARES, 2018). Os autores defendem que o jogo educativo pode ser aceito sem que haja preocupação de que, por ser educativo, deixe de ser considerado jogo em seu sentido stricto (CLEOPHAS; CAVALCANTI; SOARES, 2018).

Para Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018) o jogo educativo pode ser dividido em duas vertentes principais: o jogo educativo informal (JEI) e o jogo educativo formalizado (JEF). O JEI promove aprendizados de forma indireta e espontânea, sem uma intenção direta de ensino formal, sendo, inicialmente, usado apenas com uma finalidade lúdica (CLEOPHAS; CAVALCANTI; SOARES, 2018).

Por sua vez, o JEF se diferencia por estar intimamente ligado ao contexto educacional. Ele é subdividido em duas categorias – o jogo didático (JD) e o jogo pedagógico (JP) – e caracteriza-se por ter objetivos educacionais bem definidos, seja em sua criação, seja em sua aplicação prática (CLEOPHAS; CAVALCANTI; SOARES, 2018).

O jogo didático (JD) surge a partir da adaptação de jogos previamente existentes, sejam informais ou no sentido stricto, aos quais são incorporados conteúdos didáticos de uma área específica de conhecimento. Com regras bem definidas e objetivos educativos planejados, busca-se alinhar a proposta lúdica ao propósito pedagógico, utilizando-o como recurso para reforçar conteúdos ou realizar avaliações diagnósticas (CLEOPHAS; CAVALCANTI; SOARES, 2018).

O Jogo Pedagógico (JP), por outro lado, não deriva de adaptações e apresenta um alto grau de originalidade, sendo projetado especificamente para desenvolver habilidades cognitivas relacionadas a conteúdos específicos. Esse tipo de jogo combina uma abordagem instrucional com um planejamento cuidadoso, com o objetivo de estimular a autorreflexão intencional dos alunos e promover mudanças no comportamento de aprendizagem, sem perder o caráter lúdico e prazeroso da atividade. Ademais, sua aplicação é flexível, podendo ser utilizado tanto para introduzir novos conceitos, sem a necessidade de discussões prévias, quanto para reforço e avaliação diagnóstica (CLEOPHAS; CAVALCANTI; SOARES, 2018).

O Quadro 2, a seguir, apresenta as definições diretas fornecidas pelos autores em relação ao jogo didático e ao jogo pedagógico, permitindo observar de forma clara as distinções entre as duas categorias, conforme suas palavras.

Quadro 2: Distinção entre jogo didático e jogo pedagógico

Jogo Didático	Jogo Pedagógico
Um tipo de Jogo Educativo Formalizado que foi adaptado a partir de um Jogo Educativo Informal ou outro jogo no sentido strictu, e que teve conteúdos didáticos de uma determinada área de conhecimento ancorados em seu escopo, tal como a Química, os quais foram inseridos em seu propósito, mediante as regras previamente estipuladas - tendo estas a finalidade de alinhar o objetivo lúdico proposto pelo jogo com os objetivos educativos antecipadamente planejados pelo elaborador e que se deseja alcançar por meio da resolução dos problemas ou desafios nele inseridos. Esse tipo de jogo, alinhando-se às ideias de Kishimoto (1996), é utilizado para reforçar conteúdos ou ainda como uma forma de avaliação diagnóstica. Geralmente é aquele trabalhado após a discussão do conteúdo. Esse tipo de jogo é adaptado de jogos já existentes, tanto na literatura quanto no cotidiano lúdico, que pode ir de jogos de tabuleiro até os eletrônicos. Exemplos: jogos de roleta, quebra-cabeças, bingo, dominó, cobras e escadas, jogo da velha, Scotland Yard, War, entre tantos outros.	Jogo Educativo Formalizado que não foi adaptado de nenhum outro jogo, ou seja, seria um jogo contendo elevado grau de ineditismo, visando desenvolver habilidades cognitivas sobre conteúdos específicos. Esse tipo de jogo mantém, em sua essência, o papel instrucional, atuando, assim, como uma estratégia de ensino que foi cautelosamente planejada para estimular a capacidade de autorreflexão intencional nos alunos, levando-os a uma mudança de comportamento em relação à sua aprendizagem, sem perder o aspecto prazeroso que uma atividade lúdica possui. Contudo, caso seja replicado o mesmo jogo, com as mesmas regras, continuaremos tendo um jogo pedagógico, mas, se alterarmos as regras, conteúdos ou repaginarmos esse jogo, inserindo novos elementos, ele passará a ser um Jogo Didático. Esse tipo de Jogo Educativo Formalizado é aquele que pode ser considerado flexível, ou seja, pode ser utilizado para ensinar o conceito sem necessidade de o professor ter discutido o conceito anteriormente, ou seja, ensina-se de fato o conteúdo por meio do jogo, mas também pode ser utilizado como reforço, mantendo, assim, as características avaliativas que tem o jogo (CAVALCANTI, 2011). Exemplos: ARG (Jogo de Realidade Alternativa), RPG, jogos psicodramáticos, jogos simulados, etc.

Fonte: Adaptado/extraído de Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018, p. 39).

Para Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018), tanto o jogo didático (JD) quanto o jogo pedagógico (JP) compartilham uma intencionalidade pedagógica criteriosamente delineada. O que os diferencia, entretanto, é o grau de originalidade de um em relação ao outro e a forma como são aplicados na prática docente, sendo cada um adaptado aos propósitos específicos do processo de ensino-aprendizagem. Ambos utilizam a combinação de ação lúdica e educativa para promover, no contexto da sala de aula, o pensamento crítico, estimular a resolução de problemas e desenvolver habilidades cognitivas, entre outras funções (CLEOPHAS; SOARES; CAVALCANTI, 2018).

(...) em se tratando da utilização do jogo didático ou pedagógico nos ambientes educacionais, eles devem ser elaborados com rigor, ou seja, devem ser inseridos em sala de aula após um amplo planejamento, acompanhamento do processo de execução/aplicação do jogo proposto e, posteriormente, avaliação de

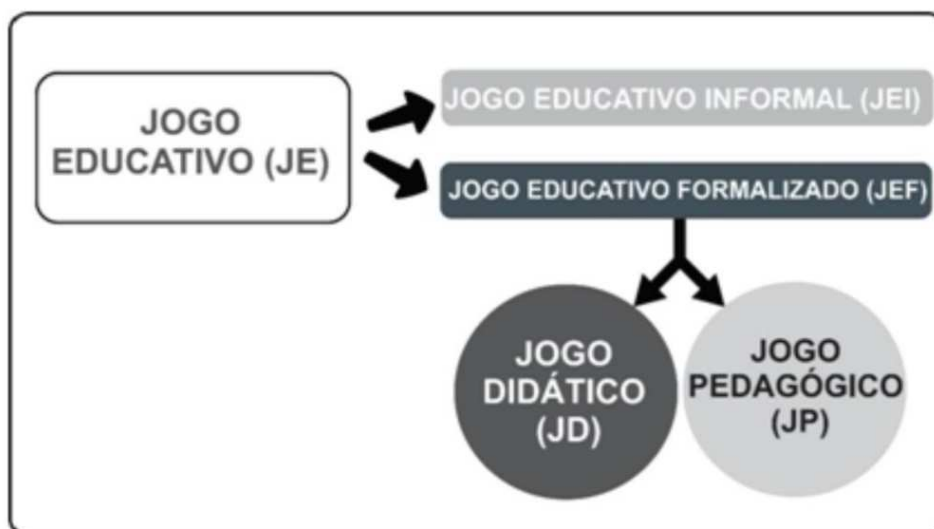
todas as etapas que fizeram parte da estratégia didático-metodológica que foi previamente construída com base no universo plural do lúdico (CLEOPHAS; SOARES; CAVALCANTI, 2018, p. 40).

Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018), em suas discussões, apresentam uma distinção clara entre as categorias de jogos educativos, didáticos e pedagógicos, destacando suas finalidades e aplicações no processo de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, propõem a seguinte conceituação:

Propõe-se, mediante o exposto, a seguinte relação entre os termos supracitados, quando trabalhamos com jogos em um contexto educacional, formal ou informal: Todo jogo didático e todo jogo pedagógico é um Jogo Educativo Formalizado, porém nem todo jogo educativo pode ser considerado didático ou pedagógico, justamente por não ter sido construído com a finalidade específica de favorecer a mediação entre os processos de ensino e de aprendizagem de um determinado conteúdo característico ou componente curricular. Nesse caso, o Jogo Educativo Informal poderá servir como um recurso lúdico que, subliminarmente, estimula o desenvolvimento de habilidades e de competências distintas de modo involuntário, mas, para que se torne didático ou pedagógico, deve possuir objetivos que contribuam com o processo de apropriação cognitiva sobre um tema ou assunto específico que se deseja atingir com a sua elaboração ou reestruturação (CLEOPHAS; SOARES; CAVALCANTI, 2018, p. 42).

Na Figura 5, a seguir, temos uma representação do conceito de jogo educativo, conforme compreendido por Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018).

Figura 5: Jogos no contexto educacional: proposição esquemática de suas variantes.



Fonte: Adaptado/extraído de Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018, p. 43)

Para Lima e Messeder-Neto (2021, p. 188), “a definição do jogo enquanto educacional, didático ou pedagógico não é universal e depende, intrinsecamente, da vertente pedagógica adotada”. Tomando como referência alguns elementos da psicologia histórico-cultural e da pe-

dagogia histórico-crítica, os autores apresentam uma perspectiva própria acerca da definição desses termos.

Os autores argumentam que a intencionalidade é uma característica essencial do trabalho educativo. É fundamental que o professor tenha clareza sobre o que deseja ensinar, a quem se destina o ensino e quais métodos serão utilizados para trabalhar os conteúdos. Nesse contexto, Lima e Messeder-Neto (2021) divergem da proposta de Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018) em relação à compreensão do jogo educativo, afirmando:

Compreendemos que os jogos podem ser entendidos no sentido específico do termo, *stricto sensu*, ou como educativo. Para ser caracterizado como educativo, um jogo necessita, obrigatoriamente, do uso pedagógico intencional, a fim de que, por meio deste, o professor alcance o objetivo esperado da aprendizagem do aluno: a apropriação dos conceitos científicos. Assim, entendemos que a classificação de um jogo como educativo não está no fato dele já existir fora da escola ou dentro da escola, ser adaptado ou ser criado. O que faz dele educativo é a sua utilização com intencionalidade pelo professor para ensinar o conteúdo científico (LIMA; MESSEDER-NETO, 2021, p. 189).

Além disso, Lima e Messeder-Neto (2021) criticam a caracterização ampla apresentada por Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018) sobre o jogo educativo informal. Segundo eles, essa definição pode atribuir caráter educativo a qualquer jogo, mesmo quando não há uma intenção pedagógica clara:

Conforme a visão proposta por Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018) ao enfatizar a perspectiva dos jogos educativos informais a partir da não intencionalidade, todo jogo acaba apresentando essencialmente uma perspectiva educativa. Retomemos os aspectos trazidos pelos autores para tratar de jogos educativos informais: “Nesse caso, o Jogo Educativo Informal poderá servir como um recurso lúdico que, subliminarmente, estimula o desenvolvimento de habilidades e competências distintas de modo involuntário” (CLEOPHAS; CAVALCANTI; SOARES, 2018, p. 42). Tal definição para caracterizar algo como educativo, ainda que informal, é tão ampla que, no fim das contas, cabe a qualquer jogo no sentido *stricto sensu* ou não. Por exemplo, no jogo “banco imobiliário⁴”, aplicado fora do ambiente escolar, a criança pode aprender, de maneira não intencional, a fazer as operações matemáticas, a contar, a pensar sobre renda, lucro. Outro exemplo é quando a criança brinca de bambolê, automaticamente, ela está aprendendo a controlar sua coordenação motora, nem por isso esse jogo é considerado educativo. E isso se aplica a todos os jogos no sentido *stricto sensu* do termo. Ao ampliar a definição de “educativo”, os autores, ainda que sem a intenção, fragilizam o sentido educativo, dando a ele um caráter muito ampliado (LIMA; MESSEDER-NETO, 2021, p. 189).

Conforme a definição de Lima e Messeder-Neto (2021) descrita acima, se não houver uma intenção pedagógica clara por parte do professor, o jogo não pode ser considerado educativo, sendo classificado apenas como um jogo no sentido *stricto sensu*. Diferentemente da proposta de Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018), que admitem a existência de duas vertentes para o jogo educativo — a informal e a formal —, Lima e Messeder-Neto (2021) rejeitam essa

possibilidade, afirmando:

[...] as vertentes dos jogos enquanto formal e informal não se aplicam a partir da ideia que trazemos. O jogo só pode ser considerado educativo quando, por meio dele, existe a função de ensinar, ou seja, de produzir direta e intencionalmente a humanidade que foi construída ao longo da história (LIMA; MESSEDER-NETO, 2021, p. 189).

Em relação a caracterização do jogo educativo enquanto didático ou pedagógico, Lima e Messeder-Neto (2021) também adotam uma abordagem distinta da proposta por Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018). Para eles, os termos não precisam ser diferenciados apenas pela maneira como os jogos são organizados ou projetados, uma vez que consideram existir uma relação estreita entre didática e pedagogia. Eles defendem que:

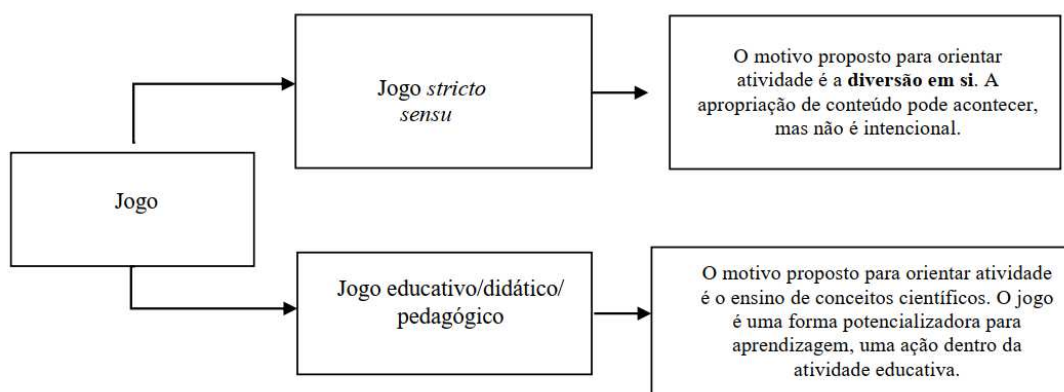
[...] tanto o jogo didático quanto o jogo pedagógico, ou até mesmo o educativo, são estruturados visando o mesmo objetivo, enquanto ato educacional e intencional: potencializar, através do lúdico, o desenvolvimento afetivo-cognitivo dos alunos por meio da vinculação de conhecimentos sistematizados. Consideramos que se o jogo está na escola cumprindo sua função, ele pode ser chamado, indistintamente, de jogo educativo, didático ou pedagógico, independente da forma como ele é adaptado e/ou desenvolvido (LIMA; MESSEDER-NETO, 2021, p. 190).

Podemos ver que os autores tratam os termos educativo, didático e pedagógico como sinônimos, caracterizando o jogo como uma metodologia destinada a auxiliar o processo de ensino-aprendizagem de conhecimentos científicos no contexto escolar. Lima e Messeder-Neto (2021) reforçam novamente essa visão e descrevem a flexibilidade do uso do jogo ao afirmarem:

[...] defendemos que independente da maneira em que o jogo é organizado, seja por meio de adaptações de jogos já existentes ou através de propostas inovadoras, o jogo educacional, enquanto ação intencionalmente estruturada, dentro da atividade educativa, constitui-se como uma forma, um instrumento didático ou, se quisermos, pedagógico. O nome associado ao jogo nesse contexto, não altera o objetivo do ato de jogar, que só ganha relevância se articulado com o motivo real da atividade pedagógica: o ensino de conceitos científicos. A favor da aprendizagem tal ação pode adquirir qualquer caráter avaliativo, de revisão, de apresentação dos conceitos, de exercício ou de outro tipo de intencionalidade (LIMA; MESSEDER-NETO, 2021, p. 192).

A seguir, a Figura 6 ilustra a distinção proposta pelos autores entre o conceito de jogo educativo e o jogo no sentido stricto sensu.

Figura 6: Esquema que diferencia um jogo enquanto educativo ou *stricto sensu*.



Fonte: Adaptado/extraído de Lima e Messeder-Neto (2021, p. 192)

Apesar das divergências conceituais entre os termos “jogo educativo”, “jogo didático” e “jogo pedagógico”, há uma convergência entre os autores quanto à importância do uso intencional do jogo no ambiente escolar. O jogo, em suas múltiplas formas, pode ser compreendido como uma ferramenta pedagógica potente, capaz de promover aprendizagens significativas, desde que alinhado a objetivos educativos claros e planejados. Diante das diferentes classificações e usos do jogo no contexto escolar, é fundamental considerar também o momento e a finalidade de sua aplicação, aspectos diretamente ligados à intencionalidade pedagógica do professor. Tanto Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018) quanto Lima e Messeder-Neto (2021) destacam que o jogo pode cumprir funções distintas — como introduzir, desenvolver ou avaliar conteúdos — desde que esteja articulado a objetivos claros de aprendizagem. Essa compreensão reforça a importância do planejamento docente na escolha do tipo de jogo, do momento de sua inserção no processo didático e da forma como ele será conduzido para promover aprendizagens significativas, sem perder de vista seu caráter lúdico e formativo.

Ainda que reconheçamos que as duas formas de conceituação apresentadas anteriormente não sejam as únicas — considerando que podem existir outros autores que trazem definições diferentes —, optamos por adotar os conceitos estabelecidos por Lima e Messeder-Neto (2021) devido à afinidade teórica com sua abordagem. Assim, utilizamos a concepção de jogo educativo proposta pelos autores como base para o desenvolvimento deste trabalho, no qual foram elaborados jogos inéditos com a finalidade pedagógica de promover a construção do conhecimento científico matemático.

2.2.5 O papel do professor no uso de jogos

É importante enfatizar que o jogo não é o único recurso à disposição do professor, sendo necessário equilibrar suas metodologias de ensino. No entanto, ao optar pelo uso de jogos no ensino de Matemática, é fundamental compreender que essa escolha demanda uma mudança significativa na postura docente. Como explicam Silva e Kodoma (2004):

O uso de jogos para o ensino, representa, em sua essência, uma mudança de postura do professor em relação ao o que é ensinar matemática, ou seja, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem, do processo de construção do saber pelo aluno [...] (SILVA e KODOMA, 2004, p. 5).

Essa mudança de postura coloca o professor como figura central no sucesso dessa estratégia educativa. Para que o jogo em sala de aula assuma um caráter educativo, é indispensável que esteja alinhado com a intencionalidade pedagógica do docente. Balestra e Gequelin (2008) reforçam essa necessidade ao afirmar:

É preciso ressaltar que o jogo é relevante do ponto de vista educacional, quando o professor o utiliza com intencionalidade pedagógica, ou seja, que conheça as estruturas cognitivas de seus alunos e, a finalidade educativa do jogo com o qual vai trabalhar. Em outras palavras, é preciso que o educador tenha um objetivo claro sobre os resultados que deseja alcançar e se a escolha da estratégia possibilitará esse alcance (BALESTRA; GEQUELIN, 2008, p. 5).

Antes de levar os jogos para a sala de aula, é imprescindível realizar um planejamento criterioso que considere aspectos como os objetivos da atividade, as necessidades específicas dos alunos e o tempo disponível. Para que esse planejamento seja realmente eficaz, o professor também deve conhecer profundamente as dinâmicas dos jogos antes de utilizá-los. Isso envolve não apenas estudá-los teoricamente, mas também testá-los na prática, como apontam Silva e Kodoma (2004):

Um cuidado metodológico que o professor deve considerar antes de levar os jogos para a sala de aula, é o de estudar previamente cada jogo, o que só é possível jogando. Através da exploração e análise de suas próprias jogadas e da reflexão sobre seus erros e acertos é que o professor terá condições de colocar questões que irão auxiliar seus alunos e ter noção das dificuldades que irão encontrar (SILVA; KODOMA, 2004, p. 5).

A vivência prática dos jogos permite ao professor reconhecer, com maior clareza, suas potencialidades e limites, favorecendo escolhas mais assertivas para o contexto de sala de aula. Para que essa experiência se transforme em aprendizagem significativa, é fundamental promover um ambiente aberto ao diálogo, no qual professor e alunos compartilhem percepções, estratégias e dificuldades surgidas durante a atividade. Esse espaço reflexivo contribui para evidenciar os caminhos do raciocínio utilizado e os desafios enfrentados.

Nesse contexto, o professor deve lançar questões desafiadoras e intervir pontualmente para guiar os alunos em suas descobertas. Essa mediação estimula a comunicação clara das ideias e promove o aprendizado coletivo:

[...] e só irá interferir, quando isso se faz necessário, através de questionamentos, por exemplo, que levem os alunos a mudanças de hipóteses, apresentando situações que forcem a reflexão ou para a socialização das descobertas dos

grupos, mas nunca para dar a resposta certa. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários (SILVA; KODOMA, 2004, p. 5).

O registro das jogadas, por sua vez, é uma ferramenta importante para promover a reflexão sobre as ações realizadas e construir uma linguagem matemática acessível e significativa. Como destaca Grandó (2000):

A construção, pelo aluno, de uma linguagem auxiliar, coerente com a situação de jogo, propicia estabelecer uma “ponte” para a compreensão da linguagem matemática, enquanto forma de expressão de um conceito, e não como algo abstrato, distante e incompreensível, que se possa manipular independentemente da compreensão dos conceitos envolvidos nesta exploração. O registro no jogo, gerado por uma necessidade, pode representar um dos caminhos à construção desta linguagem matemática (GRANDÓ, 2000, p. 37).

Os jogos exigem do professor muito mais do que uma aula tradicional. Sua postura, ao escolher essa metodologia, assume diferentes papéis em momentos distintos, o que torna o uso dessa ferramenta desafiador. Sendo assim, algumas dificuldades podem surgir nesse processo. Uma delas encontra-se no processo de selecionar os jogos que se pretende trabalhar. Segundo Queiroz (2023), a escolha de jogos para o ensino da Matemática não é uma tarefa simples, pois um único jogo pode assumir diferentes interpretações e sentidos, tanto para os estudantes quanto para os objetivos pedagógicos dessa área específica.

Outro ponto é que, mesmo quando o docente encontra um jogo adequado, nem sempre ele será viável do ponto de vista do custo do material. Muitas vezes, é preciso buscar alternativas com baixo custo e bom aproveitamento pedagógico, já que a falta de estrutura nas escolas, como sabemos, impõe limitações significativas. Em muitos casos, o próprio professor assume a responsabilidade de confeccionar os materiais ou adaptar jogos, utilizando recursos simples e acessíveis — o que exige criatividade, tempo e, muitas vezes, investimento pessoal. Diante disso, é fundamental reconhecer o esforço docente em transformar limitações em possibilidades, utilizando estratégias que mantenham o caráter lúdico e pedagógico dos jogos, mesmo em ambientes com restrições materiais severas.

Todo esse processo — desde selecionar jogos que atendam às necessidades da turma diante dos objetivos pedagógicos propostos, até vivenciar a prática antes de levá-los à sala de aula — requer tempo. Uma dificuldade recorrente é justamente o tempo necessário para esse planejamento detalhado, o que nem sempre é viável em contextos escolares marcados por excesso de atribuições docentes. Além de preparar as aulas, os professores lidam diariamente com tarefas administrativas, avaliações, relatórios e formações continuadas, o que reduz significativamente o tempo disponível para experimentar novas metodologias. Essa sobrecarga, muitas vezes naturalizada pelas instituições, acaba desestimulando práticas inovadoras, como o uso de jogos. O tempo, portanto, deixa de ser apenas uma variável de organização da rotina escolar e

passa a ser um fator pedagógico que impacta diretamente na qualidade e continuidade dessas experiências. Reconhecer essa dimensão temporal é essencial para que propostas mais criativas e participativas encontrem espaço real de aplicação nas escolas.

Em relação ao momento da aplicação, o professor deve ter paciência, pois algumas dificuldades podem surgir. Primeiro, a atividade pode exigir mais tempo do que uma aula tradicional, não somente em sua elaboração, como citado anteriormente, mas também durante sua realização. Esse tempo pode estar relacionado, naturalmente, ao próprio processo do jogo ou ainda aos desafios enfrentados durante sua condução — como, por exemplo, o de garantir a inclusão de todos os alunos. Durante a aplicação, é possível que alguns estudantes se mostrem desengajados ou resistam à proposta, o que requer do professor estratégias para promover a participação de todos de forma respeitosa e efetiva. Nesse sentido, Grando (2000) ressalta que é importante oferecer alternativas de envolvimento aos que, num primeiro momento, não se sentem à vontade para participar diretamente da brincadeira, como observar os colegas, atuar como juiz do jogo ou assumir o papel de monitor da atividade.

O barulho no momento da aplicação é um fator presente, uma vez que a brincadeira envolve, empolga os alunos e exige uma troca de diálogos constante, seja pela necessidade natural causada pelo jogo ou pela mediação do professor. Esse barulho não deve ser encarado como algo negativo, mas sim como parte do processo de aprendizagem ativa, em que os estudantes constroem conhecimento por meio da interação. Como apontam Silva e Kodoma (2004), é justamente por meio das discussões que se chega a resultados mais consistentes. O diálogo entre os alunos, a troca de ideias entre equipes e o reconhecimento do valor das opiniões divergentes favorecem a construção de estratégias mais eficazes. Para que isso aconteça de forma produtiva, é importante cultivar o hábito do trabalho em grupo, pois quanto mais familiarizados os alunos estiverem com a dinâmica colaborativa, menor será o barulho desorganizado.

Em síntese, o uso de jogos no ensino de Matemática vai além da aplicação de uma ferramenta lúdica: envolve planejamento estratégico, análise prática, mediação reflexiva e a construção de um ambiente colaborativo. Assim como outras metodologias, essa também não está alheia aos desafios existentes. Apesar das dificuldades, é essencial que o docente reconheça o potencial transformador que os jogos oferecem no processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista que o sucesso não é imediato e requer paciência para colher os frutos desse trabalho. O professor, como figura central, transforma a experiência do jogo em uma oportunidade de aprendizagem significativa, promovendo um ensino dinâmico e eficaz.

3 OS JOGOS DOS POLIEDROS

O sexto ano marca o início do Ensino Fundamental II, e a introdução de boas estratégias de ensino desde cedo pode prevenir dificuldades futuras, como a falta de uma base sólida em matemática. Neste capítulo, apresentamos os jogos oficialmente intitulados “Jogo dos Prisma”, “Jogo das Pirâmides” e “Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?”, seus objetivos, materiais, jogabilidade e, por fim, algumas simulações. Esses jogos representam uma alternativa metodológica para os professores aplicarem no sexto ano alinhada às diretrizes da BNCC. Para simplificar a leitura, ao longo deste capítulo, a expressão “Jogos dos Poliedros” abrangerá os jogos “Jogo dos Prismas”, “Jogo das Pirâmides” e “Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?”.

3.1 Apresentação inicial dos jogos

Na sequência, será apresentada uma introdução aos jogos, aos materiais que os compõem, aos participantes e suas respectivas funções, bem como ao objetivo do jogo — elementos que serão aprofundados nas seções seguintes.

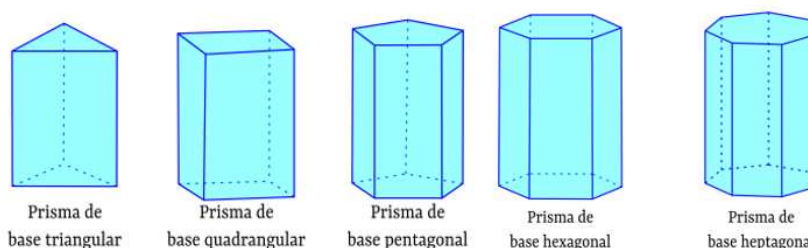
3.1.1 Materiais

Entre os materiais necessários para a realização dos Jogos dos Poliedros, destacam-se o Quadro das Informações Multiplicadas (Quadro IM) e as peças representativas dos poliedros, que serão apresentados e ilustrados, respectivamente, nos quadros e figuras a seguir.

Quadro 3: Quadro IM com Prismas

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		84	126	42	54	
2		32	48	16	24	
3		24	36	12	16	
4		30	45	15	25	
5		30	45	15	21	

Figura 7: Peças representativas dos prismas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em cada linha do Quadro 3, os valores apresentados correspondem às informações B , F , V e A de um dos prismas da Figura 7, multiplicadas por um número natural maior que 1. Nessa notação, B representa o número de lados da base do prisma, F o número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas. Embora tenham sido utilizados multiplicadores distintos em cada linha, é possível construir o Quadro IM com Prismas utilizando um único multiplicador para todas as linhas, como será discutido na Seção 3.2.

Na construção de um Quadro IM com Prismas, cada coluna — $C1$, $C2$, $C3$ e $C4$ — pode conter valores resultantes da multiplicação de um único tipo de informação ou de diferentes tipos, dentre os seguintes:

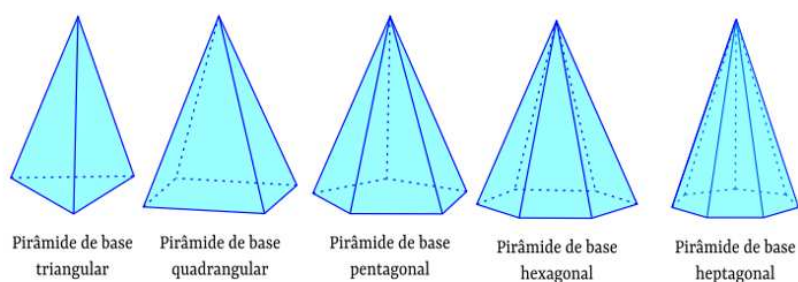
- $\times B$: Número de lados da base do prisma multiplicado.
- $\times F$: Número de faces do prisma multiplicado.
- $\times V$: Número de vértices do prisma multiplicado.
- $\times A$: Número de arestas do prisma multiplicado.

Especificamente no Quadro 3, cada coluna apresenta valores resultantes da multiplicação de diferentes tipos de informações geométricas, evidenciando a variedade de possibilidades na construção dessa atividade.

Quadro 4: Quadro IM com Pirâmides

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		84	42	48		
2		32	16	20		
3		24	12	14		
4		30	15	20		
5		30	15	18		

Figura 8: Peças representativas das pirâmides



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em cada linha do Quadro 4, os valores apresentados correspondem às informações B , F e A de uma das pirâmides da Figura 8, multiplicadas por um número natural maior que 1. Nessa notação, B representa o número de lados da base da pirâmide, F o número de faces e A o número de arestas. Embora tenham sido utilizados multiplicadores distintos em cada linha, é possível construir o Quadro IM com Pirâmides utilizando um único multiplicador para todas as linhas, como será discutido na Seção 3.2.

Na construção de um Quadro IM com Pirâmides, cada coluna — $C1$, $C2$ e $C3$ — pode conter valores resultantes da multiplicação de um único tipo de informação ou de diferentes tipos, dentre os seguintes:

- $\times B$: Número de lados da base da pirâmide multiplicado;
- $\times F$: Número de faces da pirâmide multiplicado;
- $\times A$: Número de arestas da pirâmide multiplicado.

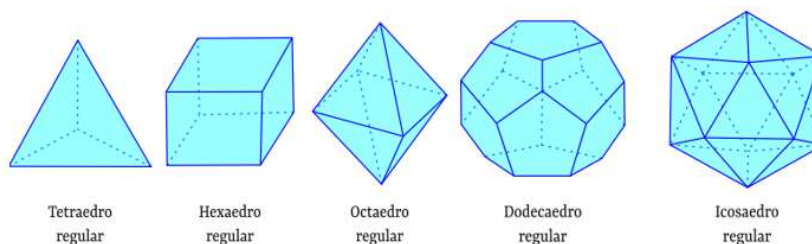
A notação V refere-se ao número de vértices da pirâmide e, neste caso, essa informação multiplicada não é utilizada no quadro, devido ao fato de que, em toda pirâmide, o número de faces (F) é igual ao número de vértices (V).

Especificamente no Quadro 4, cada coluna apresenta valores resultantes da multiplicação de diferentes tipos de informações geométricas, evidenciando a variedade de possibilidades na construção dessa atividade.

Quadro 5: Quadro IM com Poliedros de Platão

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		32	24	48	
2		18	24	36	
3		8	8	12	
4		60	100	150	
5		120	72	180	

Figura 9: Peças representativas dos poliedros de Platão



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em cada linha do Quadro 5, os valores apresentados correspondem às informações V , F e A de um dos poliedros de Platão da Figura 9, multiplicadas por um número natural maior que 1. Nessa notação, V representa o número de vértices, F o número de faces e A o número de arestas do poliedro de Platão. Embora tenham sido utilizados multiplicadores distintos em cada linha, é possível construir o Quadro IM com Poliedros de Platão utilizando um único multiplicador para todas as linhas, como será discutido adiante.

Na construção de um Quadro IM com Poliedros de Platão, cada coluna — $C1$, $C2$ e $C3$ — contém exclusivamente um único tipo de informação multiplicada, dentre os seguintes:

- $\times V$: Número de vértices do poliedro de Platão multiplicado;
- $\times F$: Número de faces do poliedro de Platão multiplicado;

- $\times A$: Número de arestas do poliedro de Platão multiplicado.

Essa configuração é especialmente relevante porque alguns poliedros compartilham o mesmo conjunto de quantidades, embora associadas a elementos distintos. É o caso do hexaedro e do octaedro, que possuem os mesmos números $\{6, 8, 12\}$, assim como o dodecaedro e o icosaedro, que compartilham o conjunto $\{12, 20, 30\}$.

3.1.2 Participantes e suas funções

Não há um número máximo de jogadores. O jogo pode ser realizado com qualquer quantidade de participantes, podendo ser jogado individualmente ou em equipes, conforme definido no início de cada partida pelos próprios jogadores. Além disso, a presença de um mediador é indispensável. Aos jogadores, cabe o desafio de alcançar os objetivos propostos pelo jogo, aplicando conhecimentos prévios e adquiridos ao longo da atividade, respeitando as regras estabelecidas e interagindo de forma colaborativa. Já ao mediador, atribui-se a função de conduzir o desenvolvimento da partida, assegurando a clareza das instruções, a observância das regras e a mediação de eventuais conflitos ou dúvidas. Além disso, o mediador atua como facilitador da aprendizagem, incentivando reflexões e promovendo discussões que potencializem a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos.

3.1.3 Objetivos do jogo

Durante o jogo, os jogadores devem preencher o Quadro IM, cumprindo os seguintes objetivos:

- (1) Preencher a coluna intitulada “Prismas”, “Pirâmides” ou “Poliedros de Platão”, conforme o jogo correspondente, identificando corretamente o nome do poliedro ao qual pertencem as informações multiplicadas em cada linha do Quadro IM.
- (2) Preencher a coluna intitulada “Multiplicadores”, determinando qual multiplicador foi utilizado em cada linha para obter os valores registrados no Quadro IM.
- (3) Se o Quadro IM foi gerado com prismas, além dos itens (1) e (2), deve-se preencher os números de cada coluna $C1$, $C2$, $C3$ e $C4$ com os seguintes índices: $\times B$, $\times F$, $\times A$ e $\times V$, de modo a associar cada valor do quadro à característica correspondente do prisma. Ou seja, é necessário identificar se o número representa a base multiplicada, a face multiplicada, a aresta multiplicada ou o vértice multiplicado.
- (4) Se o Quadro IM foi gerado com pirâmides, além dos itens (1) e (2), deve-se preencher os números de cada coluna $C1$, $C2$ e $C3$ com os seguintes índices: $\times B$, $\times F$ e $\times A$, identificando se cada valor representa base multiplicada, face multiplicada ou aresta multiplicada da pirâmide. Além disso, deve-se preencher a coluna intitulada V com o número correto de vértices da pirâmide correspondente.
- (5) Se o Quadro IM foi gerado com poliedros de Platão, além dos itens (1) e (2), deve-se preencher os números de cada coluna $C1$, $C2$ e $C3$ com os seguintes índices: $\times V$, $\times A$

e $\times F$, de modo a associar cada valor do quadro às características correspondentes do poliedro de Platão. Ou seja, identificar se o valor representa vértice multiplicado, aresta multiplicada ou face multiplicada do poliedro de Platão.

Os Quadros 6, 7 e 8, apresentados a seguir, correspondem, respectivamente, aos Quadros 3, 4 e 5 já preenchidos com as respostas corretas.

Quadro 6: Quadro IM com Prismas Respondido

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	$84_{\times V}$	$126_{\times A}$	$42_{\times B}$	$54_{\times F}$	6
2	Prisma de base retangular	$32_{\times V}$	$48_{\times A}$	$16_{\times B}$	$24_{\times F}$	4
3	Prisma de base hexagonal	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	$12_{\times B}$	$16_{\times F}$	2
4	Prisma de base triangular	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$25_{\times F}$	5
5	Prisma de base pentagonal	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$21_{\times F}$	3

Quadro 7: Quadro IM com Pirâmides Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base heptagonal	$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$	8	6
2	Pirâmide de base retangular	$32_{\times A}$	$16_{\times B}$	$20_{\times F}$	5	4
3	Pirâmide de base hexagonal	$24_{\times A}$	$12_{\times B}$	$14_{\times F}$	7	2
4	Pirâmide de base triangular	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$20_{\times F}$	4	5
5	Pirâmide de base pentagonal	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$18_{\times F}$	6	3

Quadro 8: Quadro IM com Poliedros de Platão Respondido

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1	Octaedro	$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	$48_{\times A}$	4
2	Hexaedro (Cubo)	$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	3
3	Tetraedro	$8_{\times F}$	$8_{\times V}$	$12_{\times A}$	2
4	Dodecaedro	$60_{\times F}$	$100_{\times V}$	$150_{\times A}$	5
5	Icosaedro	$120_{\times F}$	$72_{\times V}$	$180_{\times A}$	6

3.2 A BNCC e Os Jogos dos Poliedros

Os Jogos dos Poliedros são jogos educativos (ou se preferir didáticos/pedagógicos) desenvolvidos como recursos pedagógicos para serem aplicados no sexto ano do Ensino Fundamental II. A BNCC estabelece que, nesse nível de ensino, os alunos devem desenvolver a habilidade EF06MA17, que se relaciona diretamente com o “Jogo dos Prismas” e o “Jogo das Pirâmides”. O Quadro 9 apresenta essa habilidade em detalhes:

Quadro 9: MATEMÁTICA – 6º ANO

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADE
Geometria	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial

Fonte: BNCC (2018, p. 303)

Além do trabalho com prismas e pirâmides, o professor pode optar por incluir o estudo dos poliedros de Platão como um aprofundamento do conteúdo geométrico. Embora os poliedros de Platão não sejam mencionados especificamente na BNCC para o sexto ano, a exploração desses sólidos contribui para o desenvolvimento da percepção espacial dos alunos e permite que eles estabeleçam relações entre vértices, arestas e faces de maneira mais ampla. Dessa forma, o jogo “Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?” pode ser incorporado como uma estratégia adicional, complementando o estudo da geometria. O Quadro 10 apresenta uma proposta de habilidade, que embora não esteja elencada na BNCC é compatível com o desenvolvimento esperado do aluno no sexto ano, cujo código será identificado como EF06HP¹³ para referência ao longo deste trabalho.

Quadro 10: Proposta Complementar - MATEMÁTICA – 6º ANO - Poliedros de Platão

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADE PROPOSTA
Geometria	Poliedros de Platão: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	(EF06HP) Quantificar e estabelecer a relação de Euler ($V - A + F = 2$) entre o número de vértices, faces e arestas dos poliedros de Platão, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial

Fonte: Proposta do autor baseada na BNCC (2018), elaborada para complementar o ensino de geometria espacial.

Essas atividades educativas foram concebidas como uma alternativa metodológica prática para o ensino da matemática. O professor pode utilizá-las para introduzir, reforçar ou avaliar os conhecimentos dos alunos, conforme sua intencionalidade pedagógica.

¹³EF06HP: Código criado pelo autor com base na estrutura dos códigos da BNCC, em que “EF” indica o Ensino Fundamental, “06” o 6º ano, e “HP” representa Habilidade Proposta. Utilizado exclusivamente neste trabalho para fins de organização e referência.

Embora o foco principal da atividade seja a habilidade EF06MA17 e a habilidade proposta no Quadro 10, os alunos podem, ao longo do jogo, recorrer a conceitos como divisão, múltiplos e estratégias de cálculo. Isso ocorre naturalmente à medida que identificam relações entre os elementos geométricos e realizam operações matemáticas para solucionar desafios propostos. Dessa forma, além da unidade temática de Geometria, algumas habilidades da unidade temática de Números do sexto ano podem ser mobilizadas durante a aplicação dos Jogos dos Poliedros, conforme descrito no Quadro 11:

Quadro 11: MATEMÁTICA – 6º ANO (Números)

UNIDADES TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana	(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
	Múltiplos e divisores de um número natural	(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor

Fonte: BNCC (2018, p. 303)

Ao longo do jogo, os alunos, sob a mediação e o planejamento do professor, exploram conceitos matemáticos alinhados às habilidades descritas nos quadros acima. A atividade incentiva a autonomia e a cooperação, auxiliando-os na superação de bloqueios cognitivos e emocionais. Além disso, o jogo estimula a criatividade e o raciocínio crítico, ao mesmo tempo em que favorece a socialização e o trabalho em equipe.

3.3 Manual de criação dos Jogos dos Poliedros

Na Seção 3.1, apresentamos as peças representativas dos prismas, pirâmides e poliedros de Platão, bem como o Quadro das Informações Multiplicadas (Quadro IM), que compõem os materiais necessários para Os Jogos dos Poliedros. Além desses, é necessário também o Quadro Gabarito (Quadro G). A construção detalhada dos quadros é descrita em seis passos, apresentados na Subseção 3.3.1 deste manual. Como a estrutura do processo de construção dos quadros é semelhante entre prismas, pirâmides e poliedros de Platão, utilizaremos os prismas como exemplo principal. Ao final, nas Subseções 3.3.2 e 3.3.3, são apresenta-

dos os quadros correspondentes às pirâmides e aos poliedros de Platão, de forma mais objetiva, indicando as pequenas diferenças em relação à estrutura dos quadros com prismas.

Os materiais podem ser construídos pelos alunos, utilizando recursos definidos pelo professor, conforme a realidade da escola e dos estudantes. Pensando em uma alternativa de bom custo-benefício, o jogo foi desenvolvido na forma de quadros. Uma vez elaborados, esses quadros podem ser facilmente copiados ou impressos, o que possibilita sua aplicação em diferentes turmas, sem a necessidade de grandes investimentos.

Seguindo o mesmo padrão de um bom custo-benefício, as peças representativas podem ser construídas por meio da impressão de suas planificações. No anexo único deste trabalho, encontram-se as planificações dos cinco prismas da Figura 7, das cinco pirâmides da Figura 8 e dos cinco poliedros de Platão da Figura 9.

Outra forma de criar Os Jogos dos Poliedros, embora requeira um maior investimento financeiro — o que pode representar uma limitação em alguns contextos escolares — é por meio da utilização de cartas. Na Seção 3.6 deste trabalho, apresentamos o jogo “Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?”, em sua versão com cartas.

Todos os materiais já criados e os que ainda serão desenvolvidos — como, por exemplo, as versões em cartas dos demais jogos — serão disponibilizados por meio do seguinte link no Google Drive: Os Jogos dos Poliedros ¹⁴. O objetivo é facilitar o acesso dos professores, permitindo que utilizem, adaptem e repliquem as atividades conforme a realidade pedagógica de suas turmas.

3.3.1 Quadros IM e G com prismas

A construção detalhada dos Quadros IM e G com prismas é apresentada nos seis passos descritos a seguir.

Passo 1 - Quadro Auxiliar

Escolha uma certa quantidade de prismas e construa um quadro semelhante ao do exemplo a seguir.

Exemplo 3.1. Escolhendo os prismas de bases triangular, retangular, pentagonal, hexagonal e heptagonal construímos um quadro com a seguinte estrutura:

¹⁴Link completo: <https://drive.google.com/drive/folders/15FzH1RAEK5p-fLtRAn8VaZZvv-mvNxtP?usp=sharing>

Quadro 12: Quadro AX Gerado no Passo 1

Posição	Prismas	B	F	A	V	Multiplicadores
1	Prisma de base triangular	3	5	9	6	
2	Prisma de base retangular	4	6	12	8	
3	Prisma de base pentagonal	5	7	15	10	
4	Prisma de base hexagonal	6	8	18	12	
5	Prisma de base heptagonal	7	9	21	14	

O Quadro 9 é denominado Quadro Auxiliar (abreviado como Quadro AX) e tem como finalidade listar os tipos de prismas geométricos em uma determinada posição (ou linha), juntamente com suas características. As colunas B , F , A e V representam, respectivamente, o número de lados da base, o número de faces, o número de arestas e o número de vértices de cada prisma listado na linha correspondente. Além disso, a coluna intitulada “Multiplicadores” é reservada para a inserção de valores naturais diferentes de 1 ($\mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$), os quais serão utilizados nos próximos passos. Tais valores têm a função de multiplicar todos os elementos das colunas B , F , A e V da linha correspondente, sendo aplicados integralmente ao conjunto de características do prisma selecionado.

Passo 2 - Inserir os multiplicadores

Escolha multiplicadores naturais diferentes de 1 e insira-os no Quadro do Passo 1, sem realizar as multiplicações ainda. Pode-se escolher um único multiplicador para todo o quadro ou multiplicadores diferentes para cada linha.

Exemplo 3.2. Preenchendo a coluna dos Multiplicadores do Quadro 12 do Exemplo 3.1 com os números 5, 4, 3, 2 e 6 nas posições 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, obtemos:

Quadro 13: Quadro Gerado no Passo 2

Posição	Prismas	B	F	A	V	Multiplicadores
1	Prisma de base triangular	3	5	9	6	5
2	Prisma de base retangular	4	6	12	8	4
3	Prisma de base pentagonal	5	7	15	10	3
4	Prisma de base hexagonal	6	8	18	12	2
5	Prisma de base heptagonal	7	9	21	14	6

Exemplo 3.3. Preenchendo a coluna dos Multiplicadores do Quadro 12 do Exemplo 3.1 com o multiplicador 3 em todas as posições obtemos:

Quadro 14: Quadro Gerado no Passo 2

Posição	Prismas	B	F	A	V	Multiplicadores
1	Prisma de base triangular	3	5	9	6	3
2	Prisma de base retangular	4	6	12	8	3
3	Prisma de base pentagonal	5	7	15	10	3
4	Prisma de base hexagonal	6	8	18	12	3
5	Prisma de base heptagonal	7	9	21	14	3

Passo 3 - Reposicionando os prismas com suas informações B, F, A, V e seus multiplicadores

No quadro gerado no Passo 2, permuta as linhas, trocando os prismas e suas respectivas informações e multiplicador de posição. Em outras palavras, reorganize as linhas de modo que cada linha contenha um prisma, suas informações e seu multiplicador, mas em uma nova ordem.

Exemplo 3.4. No Quadro 13 do Exemplo 3.2, façamos as seguintes mudanças:

- O prisma triangular e suas informações vão para a posição 4.
- O prisma retangular e suas informações permanecem na posição 2.
- O prisma pentagonal e suas informações vão para a posição 5.
- O prisma hexagonal e suas informações vão para a posição 3.
- O prisma heptagonal e suas informações vão para a posição 1.

Assim, obtemos a seguinte quadro:

Quadro 15: Quadro Gerado no Passo 3

Posição	Prismas	B	F	A	V	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	7	9	21	14	6
2	Prisma de base retangular	4	6	12	8	4
3	Prisma de base hexagonal	6	8	18	12	2
4	Prisma de base triangular	3	5	9	6	5
5	Prisma de base pentagonal	5	7	15	10	3

Exemplo 3.5. No Quadro 14 do Exemplo 3.3, façamos as seguintes mudanças:

- O prisma triangular e suas informações vão para a posição 3.
- O prisma retangular e suas informações permanecem na posição 4.
- O prisma pentagonal e suas informações vão para a posição 1.
- O prisma hexagonal e suas informações vão para a posição 5.
- O prisma heptagonal e suas informações vão para a posição 2.

Assim, obtemos a seguinte quadro:

Quadro 16: Quadro Gerado no Passo 3

Posição	Prismas	B	F	A	V	Multiplicadores
1	Prisma de base pentagonal	5	7	15	10	3
2	Prisma de base heptagonal	7	9	21	14	3
3	Prisma de base triangular	3	5	9	6	3
4	Prisma de base retangular	4	6	12	8	3
5	Prisma de base hexagonal	6	8	18	12	3

Passo 4 - Permutação de valores nas linhas

No quadro gerado no Passo 3, altere a ordem das colunas B , F , A e V . Alternativamente, escolha uma nova ordem para os valores B , F , A e V em cada linha para diversificar as colunas. Isso significa que cada coluna pode conter números que representam as quantidades de lados da base, de faces, de vértices e de arestas, e não mais apenas uma dessas quantidades. Em seguida, renomeie-as para $C1$ (= coluna 1), $C2$ (= coluna 2), $C3$ (= coluna 3), $C4$ (= coluna 4) e insira B , F , A e V como índices para manter as identificações.

Exemplo 3.6. Alterando a ordem das colunas do Quadro 15 do Exemplo 3.4, um possível quadro gerado após a aplicação do Passo 4 é o seguinte:

Quadro 17: Quadro Gerado no Passo 4

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	14_V	21_A	7_B	9_F	6
2	Prisma de base retangular	8_V	12_A	4_B	6_F	4
3	Prisma de base hexagonal	12_V	18_A	6_B	8_F	2
4	Prisma de base triangular	6_V	9_A	3_B	5_F	5
5	Prisma de base pentagonal	10_V	15_A	5_B	7_F	3

Neste caso, a ordem escolhida foi $C1 = V$, $C2 = A$, $C3 = B$ e $C4 = F$.

Exemplo 3.7. Escolhendo uma nova ordem para os valores B , F , A e V em cada linha para diversificar as colunas do Quadro 15 do Exemplo 3.4, um possível quadro gerado após a aplicação do Passo 4 é o seguinte:

Quadro 18: Quadro Gerado no Passo 4

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	21_A	7_B	9_F	14_V	6
2	Prisma de base retangular	4_B	8_V	6_F	12_A	4
3	Prisma de base hexagonal	6_B	18_A	8_F	12_V	2
4	Prisma de base triangular	9_A	6_V	3_B	5_F	5
5	Prisma de base pentagonal	10_V	5_B	15_A	7_F	3

Exemplo 3.8. Alterando a ordem das colunas do Quadro 16 do Exemplo 3.5, um possível quadro gerado após a aplicação do Passo 4 é o seguinte:

Quadro 19: Quadro Gerado no Passo 4

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base pentagonal	7_F	10_V	5_B	15_A	3
2	Prisma de base heptagonal	9_F	14_V	7_B	21_A	3
3	Prisma de base triangular	5_F	6_V	3_B	9_A	3
4	Prisma de base retangular	6_F	8_V	4_B	12_A	3
5	Prisma de base hexagonal	8_F	12_V	6_B	18_A	3

Neste caso, a ordem escolhida foi $C1 = F$, $C2 = V$, $C3 = B$ e $C4 = A$.

Exemplo 3.9. Escolhendo uma nova ordem para os valores B , F , A e V em cada linha para diversificar as colunas do Quadro 16 do Exemplo 3.5, um possível quadro gerado após a aplicação do Passo 4 é o seguinte:

Quadro 20: Quadro Gerado no Passo 4

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base pentagonal	7_F	10_V	15_A	5_B	3
2	Prisma de base heptagonal	7_B	21_A	14_V	9_F	3
3	Prisma de base triangular	9_A	5_F	3_B	6_V	3
4	Prisma de base retangular	8_V	6_F	4_B	12_A	3
5	Prisma de base hexagonal	18_A	6_B	8_F	12_V	3

Passo 5 - Aplicando os multiplicadores e Quadro Gabarito

Multiplique cada um dos valores B , F , A e V de todas as linhas pelo multiplicador correspondente escolhido no Passo 2. Em seguida, introduza as notações $\times B$, $\times F$, $\times A$ e $\times V$, que significam, respectivamente, o número de lados da base do prisma multiplicado, o número de faces do prisma multiplicado, o número de arestas do prisma multiplicado e o número de vértices do prisma multiplicado. O Quadro gerado ao final deste processo é chamado de Quadro Gabarito (Quadro G).

Exemplo 3.10. No Quadro 17 do Exemplo 3.6, multiplicando cada um dos valores B , F , A e V de todas as linhas pelo multiplicador correspondente escolhido e inserindo as novas notações $\times B$, $\times F$, $\times A$ e $\times V$, obtemos:

Quadro 21: Quadro G Gerado no Passo 5

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	$84_{\times V}$	$126_{\times A}$	$42_{\times B}$	$54_{\times F}$	6
2	Prisma de base retangular	$32_{\times V}$	$48_{\times A}$	$16_{\times B}$	$24_{\times F}$	4
3	Prisma de base hexagonal	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	$12_{\times B}$	$16_{\times F}$	2
4	Prisma de base triangular	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$25_{\times F}$	5
5	Prisma de base pentagonal	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$21_{\times F}$	3

Neste caso, $C1 = \times V$, $C2 = \times A$, $C3 = \times B$ e $C4 = \times F$. O Quadro 21 é chamado de Quadro Gabarito.

Exemplo 3.11. No Quadro 18 do Exemplo 3.7, multiplicando cada um dos valores B , F , A e V de todas as linhas pelo multiplicador correspondente escolhido e inserindo as novas notações $\times B$, $\times F$, $\times A$ e $\times V$, obtemos:

Quadro 22: Quadro G Gerado no Passo 5

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	$126_{\times A}$	$42_{\times B}$	$54_{\times F}$	$84_{\times V}$	6
2	Prisma de base retangular	$16_{\times B}$	$32_{\times V}$	$24_{\times F}$	$48_{\times A}$	4
3	Prisma de base hexagonal	$12_{\times B}$	$36_{\times A}$	$16_{\times F}$	$24_{\times V}$	2
4	Prisma de base triangular	$45_{\times A}$	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$25_{\times F}$	5
5	Prisma de base pentagonal	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$45_{\times A}$	$21_{\times F}$	3

O Quadro 22 é chamado de Quadro Gabarito.

Exemplo 3.12. No Quadro 19 do Exemplo 3.8, multiplicando cada um dos valores B , F , A e V de todas as linhas pelo multiplicador correspondente escolhido e inserindo as novas notações $\times B$, $\times F$, $\times A$ e $\times V$, obtemos:

Quadro 23: Quadro G Gerado no Passo 5

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base pentagonal	$21_{\times F}$	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$45_{\times A}$	3
2	Prisma de base heptagonal	$27_{\times F}$	$42_{\times V}$	$21_{\times B}$	$63_{\times A}$	3
3	Prisma de base triangular	$15_{\times F}$	$18_{\times V}$	$9_{\times B}$	$27_{\times A}$	3
4	Prisma de base retangular	$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$12_{\times B}$	$36_{\times A}$	3
5	Prisma de base hexagonal	$24_{\times F}$	$36_{\times V}$	$18_{\times B}$	$54_{\times A}$	3

Neste caso, $C1 = \times F$, $C2 = \times V$, $C3 = \times B$ e $C4 = \times A$. O Quadro 23 é chamado de Quadro Gabarito.

Exemplo 3.13. No Quadro 20 do Exemplo 3.9, multiplicando cada um dos valores B , F , A e V de todas as linhas pelo multiplicador correspondente escolhido e inserindo as novas notações $\times B$, $\times F$, $\times A$ e $\times V$, obtemos:

Quadro 24: Quadro G Gerado no Passo 5

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base pentagonal	$21_{\times F}$	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	3
2	Prisma de base heptagonal	$21_{\times B}$	$63_{\times A}$	$42_{\times V}$	$27_{\times F}$	3
3	Prisma de base triangular	$27_{\times A}$	$15_{\times F}$	$9_{\times B}$	$18_{\times V}$	3
4	Prisma de base retangular	$24_{\times V}$	$18_{\times F}$	$12_{\times B}$	$36_{\times A}$	3
5	Prisma de base hexagonal	$54_{\times A}$	$18_{\times B}$	$24_{\times F}$	$36_{\times V}$	3

O Quadro 24 é chamado de Quadro Gabarito.

Passo 6 - Omissão e Quadro das Informações Multiplicadas

Omitimos os nomes dos prismas, os multiplicadores utilizados e os índices no quadro gerado no Passo 5. Este quadro, ao final deste passo, é denominado Quadro das Informações Multiplicadas (Quadro IM).

Exemplo 3.14. Omitindo os nomes dos prismas, os multiplicadores utilizados e os índices no Quadro 21 do Exemplo 3.10, obtemos:

Quadro 25: Quadro IM Gerado no Passo 6

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		84	126	42	54	
2		32	48	16	24	
3		24	36	12	16	
4		30	45	15	25	
5		30	45	15	21	

O Quadro 25 é chamado de Quadro das Informações Multiplicadas.

Exemplo 3.15. Omitindo os nomes dos prismas, os multiplicadores utilizados e os índices no Quadro 22 do Exemplo 3.11, obtemos:

Quadro 26: Quadro IM Gerado no Passo 6

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		126	42	54	84	
2		16	32	24	48	
3		12	36	16	24	
4		45	30	15	25	
5		30	15	45	21	

O Quadro 26 é chamado de Quadro das Informações Multiplicadas.

Exemplo 3.16. Omitindo os nomes dos prismas, os multiplicadores utilizados e os índices no Quadro 23 do Exemplo 3.12, obtemos:

Quadro 27: Quadro IM Gerado no Passo 6

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		21	30	15	45	
2		27	42	21	63	
3		15	18	9	27	
4		18	24	12	36	
5		24	36	18	54	

O Quadro 27 é chamado de Quadro das Informações Multiplicadas.

Exemplo 3.17. Omitindo os nomes dos prismas, os multiplicadores utilizados e os índices no Quadro 24 do Exemplo 3.13, obtemos:

Quadro 28: Quadro IM Gerado no Passo 6

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		21	30	45	15	
2		21	63	42	27	
3		27	15	9	18	
4		24	18	12	36	
5		54	18	24	36	

O Quadro 28 é chamado de Quadro das Informações Multiplicadas.

3.3.2 Quadros IM e G com pirâmides

Devido ao fato de que, em toda pirâmide, o número de faces (F) é igual ao número de vértices (V), o Quadro IM para pirâmides se diferencia do Quadro IM para prismas em relação à coluna dos valores V . Durante a aplicação dos seis passos anteriores, essa coluna permanece fixa, ou seja, não troca de posição com as demais e seu título não é omitido — somente os valores são ocultados no Passo 6.

Exemplo 3.18. Uma possibilidade de Quadro AX para pirâmides criado no passo 1 é:

Quadro 29: Quadro AX com Pirâmides Gerado no Passo 1

Posição	Pirâmides	B	F	A	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base triangular	3	4	6	4	
2	Pirâmide de base retangular	4	5	8	5	
3	Pirâmide de base pentagonal	5	6	10	6	
4	Pirâmide de base hexagonal	6	7	12	7	
5	Pirâmide de base heptagonal	7	8	14	8	

Exemplo 3.19. Uma possibilidade de Quadro IM para pirâmides criado após os seis passos é:

Quadro 30: Quadro IM com Pirâmides Gerado no Passo 6

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		84	42	48		
2		32	16	20		
3		24	12	14		
4		30	15	20		
5		30	15	18		

E o Quadro G correspondente é:

Quadro 31: Quadro G com Pirâmides Gerado no Passo 5

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base heptagonal	$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$	8	6
2	Pirâmide de base retangular	$32_{\times A}$	$16_{\times B}$	$20_{\times F}$	5	4
3	Pirâmide de base hexagonal	$24_{\times A}$	$12_{\times B}$	$14_{\times F}$	7	2
4	Pirâmide de base triangular	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$20_{\times F}$	4	5
5	Pirâmide de base pentagonal	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$18_{\times F}$	6	3

Exemplo 3.20. Uma possibilidade de Quadro IM para pirâmides criado após os seis passos é:

Quadro 32: Quadro IM com Pirâmides Gerado no Passo 6

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		84	42	48		
2		16	20	32		
3		12	24	14		
4		20	15	30		
5		30	18	15		

E o Quadro G correspondente é:

Quadro 33: Quadro G com Pirâmides Gerado no Passo 5

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base heptagonal	$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$	8	6
2	Pirâmide de base retangular	$16_{\times B}$	$20_{\times F}$	$32_{\times A}$	5	4
3	Pirâmide de base hexagonal	$12_{\times B}$	$24_{\times A}$	$14_{\times F}$	7	2
4	Pirâmide de base triangular	$20_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$	4	5
5	Pirâmide de base pentagonal	$30_{\times A}$	$18_{\times F}$	$15_{\times B}$	6	3

Exemplo 3.21. Uma possibilidade de Quadro IM para pirâmides criado após os seis é:

Quadro 34: Quadro IM com Pirâmides Gerado no Passo 6

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		18	15	30		
2		24	21	42		
3		12	9	18		
4		15	12	24		
5		21	18	36		

E o Quadro G correspondente é:

Quadro 35: Quadro G com Pirâmides Gerado no Passo 5

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base pentagonal	$18_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$	6	3
2	Pirâmide de base heptagonal	$24_{\times F}$	$21_{\times B}$	$42_{\times A}$	8	3
3	Pirâmide de base triangular	$12_{\times F}$	$9_{\times B}$	$18_{\times A}$	4	3
4	Pirâmide de base retangular	$15_{\times F}$	$12_{\times B}$	$24_{\times A}$	5	3
5	Pirâmide de base hexagonal	$21_{\times F}$	$18_{\times B}$	$36_{\times A}$	7	3

Exemplo 3.22. Uma possibilidade de Quadro IM para pirâmides criado após os seis passos é:

Quadro 36: Quadro IM com Pirâmides Gerado no Passo 6

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		18	30	15		
2		21	42	24		
3		18	12	9		
4		15	12	24		
5		36	18	21		

E o Quadro G correspondente é:

Quadro 37: Quadro G com Pirâmides Gerado no Passo 5

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base pentagonal	$18_{\times F}$	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	6	3
2	Pirâmide de base heptagonal	$21_{\times B}$	$42_{\times A}$	$24_{\times F}$	8	3
3	Pirâmide de base triangular	$18_{\times A}$	$12_{\times F}$	$9_{\times B}$	4	3
4	Pirâmide de base retangular	$15_{\times F}$	$12_{\times B}$	$24_{\times A}$	5	3
5	Pirâmide de base hexagonal	$36_{\times A}$	$18_{\times B}$	$21_{\times F}$	7	3

3.3.3 Quadros IM e G com poliedros de Platão

O Quadro AX para os Poliedros de Platão, gerada no Passo 1, diferencia-se do Quadro AX para prismas por utilizar todos os poliedros de Platão e registrar apenas os valores V , A e F . Consequentemente, o Quadro IM para os Poliedros de Platão também se diferencia do Quadro IM para prismas por registrar apenas os valores $\times V$, $\times A$ e $\times F$. Além disso, cada coluna $C1$, $C2$ e $C3$ contém um único tipo de informação multiplicada, pois, no Passo 4, neste caso, é permitido alterar apenas a ordem das colunas V , A e F . Isso ocorre porque o hexaedro e o octaedro compartilham o mesmo conjunto de números $\{6, 8, 12\}$, assim como o dodecaedro e o icosaedro compartilham o conjunto $\{12, 20, 30\}$.

Exemplo 3.23. A possibilidade de Quadro AX para poliedros de Platão criado no passo 1 é:

Quadro 38: Quadro AX com Poliedros de Platão Gerado no Passo 1

Posição	Poliedros de Platão	V	A	F	Multiplicadores
1	Tetraedro	4	6	4	
2	Hexaedro (Cubo)	8	12	6	
3	Octaedro	6	12	8	
4	Dodecaedro	20	30	12	
5	Icosaedro	12	30	20	

Exemplo 3.24. Uma possibilidade de Quadro IM para poliedros de Platão criado após os seis passos é:

Quadro 39: Quadro IM com Poliedros de Platão Gerado no Passo 6

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		120	80	48	
2		48	32	24	
3		120	48	80	
4		48	24	32	
5		24	16	16	

E o Quadro G correspondente é:

Quadro 40: Quadro G com Poliedros de Platão Gerado no Passo 5

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1	Icosaedro	$120_{\times A}$	$80_{\times F}$	$48_{\times A}$	4
2	Octaedro	$48_{\times A}$	$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	4
3	Dodecaedro	$120_{\times A}$	$48_{\times F}$	$80_{\times V}$	4
4	Hexaedro (Cubo)	$48_{\times A}$	$24_{\times F}$	$32_{\times V}$	4
5	Tetraedro	$24_{\times A}$	$16_{\times F}$	$16_{\times V}$	4

Exemplo 3.25. Uma possibilidade de Quadro IM para poliedros de Platão criado após os seis passos é:

Quadro 41: Quadro IM com Poliedros de Platão Gerado no Passo 6

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		32	24	48	
2		18	24	36	
3		8	8	12	
4		60	100	150	
5		120	72	180	

E o Quadro G correspondente é:

Quadro 42: Quadro G com Poliedros de Platão Gerado no Passo 5

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1	Octaedro	$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	$48_{\times A}$	4
2	Hexaedro (Cubo)	$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	3
3	Tetraedro	$8_{\times F}$	$8_{\times V}$	$12_{\times A}$	2
4	Dodecaedro	$60_{\times F}$	$100_{\times V}$	$150_{\times A}$	5
5	Icosaedro	$120_{\times F}$	$72_{\times V}$	$180_{\times A}$	6

3.4 Regras dos Jogos dos Poliedros

Os materiais necessários para Os Jogos dos Poliedros incluem peças representativas dos prismas, das pirâmides e dos poliedros de Platão, além dos Quadros IM e G, conforme descrito nas Seções 3.1 e 3.3. São apresentados, a seguir, dois conjuntos de regras que estruturam suas jogabilidades, com a descrição dos respectivos mecanismos e dinâmicas voltados à aplicação em sala de aula.

3.4.1 Primeiro conjunto de regras

A jogabilidade dos Jogos dos Poliedros é regida pelas 11 regras detalhadas a seguir.

Regra 1: Mediador do jogo

O jogo requer a presença de um mediador para conduzir, supervisionar e facilitar o jogo.

Regra 2: Número de jogadores

Não há um limite máximo de jogadores. O jogo pode ser realizado com qualquer quantidade de participantes, podendo ser jogado individualmente ou em equipes, conforme definido no início de cada partida pelos próprios jogadores.

Regra 3: Preparação dos jogadores

Como parte da preparação inicial do jogo, cada jogador recebe uma cópia do Quadro IM, além de papel e caneta para anotar seus raciocínios e registrar a resposta final no próprio quadro, conforme descrito na Regra 5. Além disso, caso o Quadro IM tenha sido construído com prismas ou pirâmides, os jogadores podem — ou não — receber as peças representativas dos respectivos poliedros associados aos valores registrados, ou seja, os sólidos utilizados em sua construção; essa decisão é tomada no início de cada partida pelos próprios jogadores. Por

outro lado, se o Quadro IM tiver sido construído com poliedros de Platão, as peças representativas são sempre fornecidas a todos os participantes.

Regra 4: Descrição do Quadro IM

Os jogadores devem compreender os passos utilizados na construção do Quadro IM.

Descrição do Quadro IM com prismas: O mediador deve informar aos jogadores que, em cada linha do Quadro IM, os valores apresentados correspondem às informações B , F , A e V de um prisma, multiplicadas por um número natural maior do que 1. Caso sejam fornecidas peças representativas dos prismas, esses valores pertencem a um deles. Nessa notação, B representa o número de lados da base do prisma, F o número de faces, A o número de arestas e V o número de vértices. Além disso, o mediador deve esclarecer se foram utilizados multiplicadores distintos ou o mesmo multiplicador para todas as linhas.

Cada coluna $C1$, $C2$, $C3$ e $C4$ pode conter um único tipo de informação multiplicada ou diferentes tipos de informações multiplicadas, podendo ser:

- $\times B$: Número de lados da base do prisma multiplicado.
- $\times F$: Número de faces do prisma multiplicado.
- $\times V$: Número de vértices do prisma multiplicado.
- $\times A$: Número de arestas do prisma multiplicado.

Portanto, o mediador deve deixar claro para os jogadores se cada coluna contém um único tipo de informação multiplicada ou diferentes tipos de informações multiplicadas.

Descrição do Quadro IM com pirâmides: O mediador deve informar aos jogadores que, em cada linha do Quadro IM, os valores apresentados correspondem às informações B , F e A de uma pirâmide, multiplicadas por um número natural maior do que 1. Caso sejam fornecidas peças representativas das pirâmides, esses valores pertencem a uma delas. Nessa notação, B representa o número de lados da base da pirâmide, F o número de faces e A o número de arestas. Além disso, o mediador deve esclarecer se foram utilizados multiplicadores distintos ou o mesmo multiplicador para todas as linhas.

A notação V representa o número de vértices da pirâmide e, neste caso, essa informação não é utilizada de forma multiplicada no Quadro IM. No entanto, ela deve ser registrada pelos jogadores, conforme descrito na Regra 5.

Cada coluna $C1$, $C2$ e $C3$ pode conter um único tipo de informação multiplicada ou diferentes tipos de informações multiplicadas, podendo ser:

- $\times B$: Número de lados da base da pirâmide multiplicado.
- $\times F$: Número de faces da pirâmide multiplicado.
- $\times A$: Número de arestas da pirâmide multiplicado.

Portanto, o mediador deve deixar claro para os jogadores se cada coluna contém um único tipo de informação multiplicada ou diferentes tipos de informações multiplicadas.

Descrição do Quadro IM com Poliedros de Platão: O mediador deve informar aos jogadores que, em cada linha do Quadro IM, os valores apresentados correspondem às informações V , F e A de um dos poliedros de Platão representados pelas peças fornecidas, multiplicadas por um número natural diferente de 1. Nessa notação, V representa o número de vértices do poliedro de Platão, F o número de faces e A o número de arestas. Além disso, deve ser esclarecido se foi utilizado o mesmo multiplicador em todas as linhas ou se foram empregados multiplicadores diferentes.

Cada coluna $C1$, $C2$ e $C3$ contém exclusivamente um único tipo de informação multiplicada, podendo ser:

- $\times V$: Número de vértices do poliedro de Platão multiplicado.
- $\times F$: Número de faces do poliedro de Platão multiplicado.
- $\times A$: Número de arestas do poliedro de Platão multiplicado.

Por fim, seja no jogo com prismas, pirâmides ou poliedros de Platão, é fundamental esclarecer que as informações multiplicadas de um mesmo poliedro não ocupam mais de uma linha do Quadro IM.

Regra 5: Objetivo do jogo

Durante o jogo, os jogadores devem preencher o Quadro IM, cumprindo os seguintes objetivos:

- (1) Preencher a coluna intitulada “Prismas”, “Pirâmides” ou “Poliedros de Platão”, conforme o jogo correspondente, identificando corretamente o nome do poliedro ao qual pertencem as informações multiplicadas em cada linha do Quadro IM.
- (2) Preencher a coluna intitulada “Multiplicadores”, determinando qual multiplicador foi utilizado em cada linha para obter os valores registrados no Quadro IM.
- (3) Se o Quadro IM foi gerado com prismas, além dos itens (1) e (2), deve-se preencher os números de cada coluna $C1$, $C2$, $C3$ e $C4$ com os seguintes índices: $\times B$, $\times F$, $\times A$ e $\times V$, de modo a associar cada valor do quadro à característica correspondente do prisma. Ou seja, é necessário identificar se o número representa a base multiplicada, a face multiplicada, a aresta multiplicada ou o vértice multiplicado.
- (4) Se o Quadro IM foi gerado com pirâmides, além dos itens (1) e (2), deve-se preencher os números de cada coluna $C1$, $C2$ e $C3$ com os seguintes índices: $\times B$, $\times F$ e $\times A$, identificando se cada valor representa base multiplicada, face multiplicada ou aresta multiplicada da pirâmide. Além disso, deve-se preencher a coluna intitulada V com o número correto de vértices da pirâmide correspondente.
- (5) Se o Quadro IM foi gerado com poliedros de Platão, além dos itens (1) e (2), deve-se preencher os números de cada coluna $C1$, $C2$ e $C3$ com os seguintes índices: $\times V$, $\times A$ e $\times F$, de modo a associar cada valor do quadro às características correspondentes do poliedro de Platão. Ou seja, identificar se o valor representa vértice multiplicado, aresta

multiplicada ou face multiplicada do poliedro de Platão.

Regra 6: Uso dos materiais

Durante o jogo, os jogadores podem utilizar apenas as peças representativas dos poliedros, caso fornecidas, para explorar suas características B , F , A e V . Além disso, podem utilizar papel e caneta para registrar seus raciocínios. O Quadro IM pode ser consultado e utilizado para registrar a resposta final, conforme descrito na Regra 5.

Regra 7: Condição de vitória

Os jogadores ou as equipes serão declarados vencedores ao cumprirem o objetivo descrito na regra 5.

Regra 8: Solicitação de vitória

Os jogadores devem cumprir os objetivos descritos na Regra 5, declarar-se vencedores e entregar seus Quadros IM preenchidas ao mediador, que realizará a análise utilizando o Quadro G. Caso a Regra 7 não seja satisfeita, o jogo prossegue com todos os participantes até que ocorra uma nova Solicitação de Vitória, conforme descrito na Regra 8.

Regra 9: Uso do Quadro G

O Quadro G corresponde ao gabarito do jogo e permanece sob a responsabilidade do mediador, sendo de uso exclusivo deste. Seu acesso deve ocorrer apenas nas condições estabelecidas pela Regra 8.

Regra 10: Tempo

Não há limite de tempo para o jogo. Ele é encerrado quando a Regra 7 é satisfeita.

Regra 11: Dica de Platão

Esta regra é válida exclusivamente para o jogo “Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?”. Cada jogador ou equipe tem direito a uma única pergunta durante o jogo, denominada Dica de Platão, que pode ser feita a qualquer momento. Essa pergunta permite ao jogador ou equipe identificar o tipo de um número no Quadro IM, ou seja, se ele representa $\times V$ (número de vértices multiplicado), $\times A$ (número de arestas multiplicado) ou $\times F$ (número de faces multiplicado).

O mediador deve fornecer essa informação de forma sigilosa, garantindo que apenas o jogador ou equipe solicitante tenha acesso à resposta, sem que os demais participantes sejam informados.

3.4.2 Segundo conjunto de regras

É semelhante ao Primeiro conjunto de regras descrito na Subseção 3.4.1, adicionando a competitividade entre os jogadores. A jogabilidade dos Jogos dos Poliedros é regida pelas 12 regras detalhadas a seguir.

Regras 1, 2, 3, 4, 5 e 6: Mediador do jogo. Número de jogadores, Preparação dos jogadores, Descrição do Quadro IM, Objetivo do jogo e Uso dos materiais

São as mesmas do Primeiro conjunto de regras descrito na Subseção 3.4.1.

Regra 7: Condição de vitória

O primeiro jogador ou a primeira equipe que cumprir o objetivo descrito na Regra 5 será declarado vencedor ou vencedora, respectivamente.

Regra 8: Solicitação de vitória

Os jogadores devem cumprir os objetivos descritos na Regra 5, declarar-se vencedores e entregar seus Quadros IM preenchidos ao mediador, que realizará a análise utilizando o Quadro G. Enquanto o mediador verifica a condição de vitória, conforme estabelecido na Regra 7, os jogadores devem permanecer em silêncio e sem realizar novas ações. Caso a Regra 7 não seja satisfeita, o jogo prossegue com todos os participantes até que ocorra uma nova Solicitação de vitória, conforme descrito na Regra 8.

Regra 9: Uso do Quadro G

O Quadro G corresponde ao gabarito do jogo e permanece sob a responsabilidade do mediador, sendo de uso exclusivo deste. Seu acesso deve ocorrer apenas nas condições estabelecidas pela Regra 8.

Regra 10: Tempo

Não há limite de tempo para o jogo. Ele é encerrado quando a Regra 7 é satisfeita.

Regra 11: Espera na solicitação de vitória

Um jogador ou equipe que tenha feito a Solicitação de vitória, conforme a Regra 8, e não tenha vencido o jogo, só poderá realizá-la novamente após outro participante ou equipe também ter feito uma Solicitação de vitória sem sucesso, ou caso tenha decorrido um intervalo mínimo de cinco minutos desde sua última tentativa — independentemente de novas tentativas por parte dos demais jogadores

Regra 12: Dica de Platão

Esta regra é válida exclusivamente para o jogo “Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?”. Cada jogador ou equipe tem direito a uma única pergunta durante o jogo, denominada Dica de Platão, que pode ser feita a qualquer momento. Essa pergunta permite ao jogador ou equipe identificar o tipo de um número no Quadro IM, ou seja, se ele representa $\times V$ (número de vértices multiplicado), $\times A$ (número de arestas multiplicado) ou $\times F$ (número de faces multiplicado).

O mediador deve fornecer essa informação de forma sigilosa, garantindo que apenas o jogador ou equipe solicitante tenha acesso à resposta, sem que os demais participantes sejam informados.

3.5 Uso em sala de aula

Em geral, jogos são organizados por fases, nas quais cada etapa proporciona um aprendizado específico e, à medida que o jogador avança, o nível de dificuldade aumenta. Essa progressão permite um aprendizado gradual e estruturado, tornando o ensino mais envolvente e eficaz.

Nesta seção, apresentamos Os Jogos dos Poliedros estruturado por níveis de complexidade, permitindo que os alunos desenvolvam autonomia e raciocínio matemático ao longo da atividade. Cada nível foi pensado para ser aplicado de forma sequencial, iniciando com os desafios mais simples dentro da estrutura do jogo e avançando gradualmente para situações mais complexas, à medida que se altera alguma configuração do Quadro IM. Esse modelo está alinhado à BNCC, que enfatiza a importância da formulação e resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem. Segundo a BNCC:

[...] nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto. (BNCC, 2018, p. 299)

Apresentamos simulações do Jogo dos Poliedros que podem auxiliar o professor na aplicação em sala de aula. Em cada jogada das simulações, descrevemos a habilidade trabalhada

conforme os Quadros 9 e 10, da Seção 3.2, utilizando seus respectivos códigos.

As propostas de solução das simulações que serão apresentadas posteriormente foram concebidas para contemplar todas as habilidades descritas anteriormente. Tais habilidades podem ser alcançadas pelos alunos após jogarem diversas vezes, compartilharem seus conhecimentos com a turma e contarem com o apoio do professor, que desempenha um papel crucial ao guiar o raciocínio e fomentar discussões construtivas.

3.5.1 O Jogo dos Prismas: níveis de jogo e algumas soluções padrão

Apresentaremos agora os níveis do Jogo dos Prismas, bem como as simulações de uma partida em cada nível, acompanhadas de algumas possíveis soluções.

NÍVEL 1

A estrutura do Quadro IM é a seguinte: suas colunas são organizadas de modo que cada uma contém um único tipo de informação multiplicada ($\times B$, $\times F$, $\times V$ e $\times A$), com o mesmo multiplicador aplicado em todas as linhas. Além disso, as peças representativas dos prismas utilizados são previamente fornecidas.

SIMULAÇÃO DO NÍVEL 1

Preparação inicial do jogo

Dadas as seguintes peças representativas de poliedros — prisma de base triangular, prisma de base retangular, prisma de base pentagonal, prisma de base hexagonal e prisma de base heptagonal — e considerando o Quadro IM construído:

Quadro 43: Quadro IM

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		21	30	15	45	
2		27	42	21	63	
3		15	18	9	27	
4		18	24	12	36	
5		24	36	18	54	

O Quadro G correspondente é:

Quadro 44: Quadro G

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base pentagonal	$21_{\times F}$	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$45_{\times A}$	3
2	Prisma de base heptagonal	$27_{\times F}$	$42_{\times V}$	$21_{\times B}$	$63_{\times A}$	3
3	Prisma de base triangular	$15_{\times F}$	$18_{\times V}$	$9_{\times B}$	$27_{\times A}$	3
4	Prisma de base retangular	$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$12_{\times B}$	$36_{\times A}$	3
5	Prisma de base hexagonal	$24_{\times F}$	$36_{\times V}$	$18_{\times B}$	$54_{\times A}$	3

Solução

Uma solução desta simulação está descrita nas quatro jogadas detalhadas a seguir:

Jogada 1 (EF06MA17)

Inicialmente, exploramos cada um dos prismas para conhecê-los e quantificá-los, resultando na construção do seguinte quadro:

Quadro 45: Quadro AX

Prismas	B	F	A	V
Prisma de base triangular	3	5	9	6
Prisma de base retangular	4	6	12	8
Prisma de base pentagonal	5	7	15	10
Prisma de base hexagonal	6	8	18	12
Prisma de base heptagonal	7	9	21	14

O Quadro 51, denominado Quadro Auxiliar (Quadro AX), tem a finalidade de listar os prismas geométricos e suas respectivas características. Sua estrutura é composta por cinco linhas (cada uma representando um tipo de prisma) e cinco colunas, sendo:

- B : Número de lados da base do prisma.
- F : Número de faces do prisma.
- A : Número de arestas do prisma.
- V : Número de vértices do prisma.

Esse quadro serve como referência para análises e aplicações no decorrer do jogo.

Jogada 2 (EF06MA17)

Em um prisma, sabemos que as seguintes relações são válidas: $F = B + 2$, $A = 3B$ e $V = 2B$. Dado que essas relações são verdadeiras, também são válidas as seguintes relações entre as informações multiplicadas: $\times F = \times B + 2k$, $\times A = 3 \cdot (\times B)$ e $\times V = 2 \cdot (\times B)$, onde $\times B = kB$, $\times F = kF$, $\times A = kA$, $\times V = kV$ e $k \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Portanto, como cada coluna do Quadro IM representa um único tipo de elemento — $\times B$, $\times F$, $\times A$, $\times V$ — se uma coluna é três vezes outra, a primeira é a aresta multiplicada

e a segunda é a base multiplicada. Se uma coluna é duas vezes outra, a primeira é o vértice multiplicado e a segunda é a base multiplicada. Dessa forma, conseguimos sempre identificar as colunas da base multiplicada, aresta multiplicada e vértice multiplicado. Finalmente, a coluna que resta é a da face multiplicada ou, se uma coluna não é o dobro nem o triplo de outra coluna, ela é a coluna da face multiplicada.

Neste caso, concluímos que $C1 = \times F$, $C2 = \times V$, $C3 = \times B$ e $C4 = \times A$, isto é:

Quadro 46: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		$21_{\times F}$	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$45_{\times A}$	
2		$27_{\times F}$	$42_{\times V}$	$21_{\times B}$	$63_{\times A}$	
3		$15_{\times F}$	$18_{\times V}$	$9_{\times B}$	$27_{\times A}$	
4		$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$12_{\times B}$	$36_{\times A}$	
5		$24_{\times F}$	$36_{\times V}$	$18_{\times B}$	$54_{\times A}$	

Outra forma de obter o Quadro 46 é perceber que, devido às relações $F = B + 2$, $A = 3B$ e $V = 2B$, temos $B < F < V < A$ e, consequentemente, $kB < kF < kV < kA$, com $k \in \mathbb{N} - 1$. Ou seja, $\times B < \times F < \times V < \times A$. Portanto, como $C3 < C1 < C2 < C4$, isto é, os valores da coluna $C3$ são menores que os da coluna $C1$, que são menores que os da coluna $C2$, e assim por diante, concluímos que $C1 = \times F$, $C2 = \times V$, $C3 = \times B$ e $C4 = \times A$.

Jogada 3 (EF06MA17)

Analisando o Quadro AX, podemos constatar que o menor número de lados do polígono da base é o do prisma de base triangular, seguido do prisma de base retangular, prisma de base pentagonal, prisma de base hexagonal e, por fim, prisma de base heptagonal. Diante disto, uma vez que foi utilizado um único multiplicador, essa sequência se mantém se olharmos para o número de lados da base multiplicada. Assim, $9_{\times B} < 12_{\times B} < 15_{\times B} < 18_{\times B} < 21_{\times B}$ na coluna $C3$ correspondem, respectivamente, ao prisma de base triangular, prisma de base retangular, prisma de base pentagonal, prisma de base hexagonal e prisma de base heptagonal, o que revela a posição dos mesmos, isto é:

Quadro 47: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base pentagonal	$21_{\times F}$	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$45_{\times A}$	
2	Prisma de base heptagonal	$27_{\times F}$	$42_{\times V}$	$21_{\times B}$	$63_{\times A}$	
3	Prisma de base triangular	$15_{\times F}$	$18_{\times V}$	$9_{\times B}$	$27_{\times A}$	
4	Prisma de base retangular	$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$12_{\times B}$	$36_{\times A}$	
5	Prisma de base hexagonal	$24_{\times F}$	$36_{\times V}$	$18_{\times B}$	$54_{\times A}$	

Para F , A e V , também são válidos argumentos semelhantes ao anterior, o que permite concluir a mesma resposta do Quadro 57.

Jogada 4 (EF06MA03)

Para descobrirmos o multiplicador utilizado, tomemos $21_{\times F}$ do prisma de base pentagonal e dividimos por 7_F do mesmo, resultando em 3. Logo, o multiplicador utilizado foi 3, ou seja, a resposta final é:

Quadro 48: Quadro IM Respondido

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base pentagonal	$21_{\times F}$	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$45_{\times A}$	3
2	Prisma de base heptagonal	$27_{\times F}$	$42_{\times V}$	$21_{\times B}$	$63_{\times A}$	3
3	Prisma de base triangular	$15_{\times F}$	$18_{\times V}$	$9_{\times B}$	$27_{\times A}$	3
4	Prisma de base retangular	$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$12_{\times B}$	$36_{\times A}$	3
5	Prisma de base hexagonal	$24_{\times F}$	$36_{\times V}$	$18_{\times B}$	$54_{\times A}$	3

NÍVEL 2

A estrutura do Quadro IM é a seguinte: suas colunas são organizadas de modo que cada uma contém um único tipo de informação multiplicada ($\times B$, $\times F$, $\times V$ e $\times A$), sendo aplicado um multiplicador diferente em cada linha. Além disso, as peças representativas dos prismas utilizados são previamente fornecidas.

SIMULAÇÃO DO NÍVEL 2

Preparação inicial do jogo

Dadas as seguintes peças representativas de poliedros — prisma de base triangular, prisma de base retangular, prisma de base pentagonal, prisma de base hexagonal e prisma de base heptagonal — e considerando o Quadro IM construído:

Quadro 49: Quadro IM

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		84	126	42	54	
2		32	48	16	24	
3		24	36	12	16	
4		30	45	15	25	
5		30	45	15	21	

O Quadro G correspondente é:

Quadro 50: Quadro G

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	$84_{\times V}$	$126_{\times A}$	$42_{\times B}$	$54_{\times F}$	6
2	Prisma de base retangular	$32_{\times V}$	$48_{\times A}$	$16_{\times B}$	$24_{\times F}$	4
3	Prisma de base hexagonal	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	$12_{\times B}$	$16_{\times F}$	2
4	Prisma de base triangular	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$25_{\times F}$	5
5	Prisma de base pentagonal	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$21_{\times F}$	3

Solução

Uma solução desta simulação está descrita nas quatro jogadas detalhadas a seguir:

Jogada 1 (EF06MA17)

Aplicando a mesma Jogada 1 da Solução da SIMULAÇÃO DO NÍVEL 1, obtemos o Quadro AX:

Quadro 51: Quadro AX

Prismas	B	F	A	V
Prisma de base triangular	3	5	9	6
Prisma de base retangular	4	6	12	8
Prisma de base pentagonal	5	7	15	10
Prisma de base hexagonal	6	8	18	12
Prisma de base heptagonal	7	9	21	14

Jogada 2 (EF06MA17)

Aplicando a mesma Jogada 2 da Solução da SIMULAÇÃO DO NÍVEL 1, obtemos:

Quadro 52: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		$84_{\times V}$	$126_{\times A}$	$42_{\times B}$	$54_{\times F}$	
2		$32_{\times V}$	$48_{\times A}$	$16_{\times B}$	$24_{\times F}$	
3		$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	$12_{\times B}$	$16_{\times F}$	
4		$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$25_{\times F}$	
5		$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$21_{\times F}$	

Jogada 3 (EF06MA06)

Para que um prisma pertença a uma linha do Quadro IM, é necessário que pelo menos uma das seguintes condições seja satisfeita:

- O valor $\times B$ dessa linha é múltiplo do valor B correspondente ao prisma.
- O valor $\times F$ dessa linha é múltiplo do valor F correspondente ao prisma.

Para determinar se um prisma pertence a uma linha do Quadro IM, é suficiente verificar uma das seguintes condições:

- c) Dentre os valores $\times B$ do Quadro IM, o valor $\times B$ dessa linha deve ser o único múltiplo do valor B correspondente ao mesmo prisma.
- d) Dentre os valores $\times F$ do Quadro IM, o valor $\times F$ dessa linha deve ser o único múltiplo do valor F correspondente ao mesmo prisma.
- e) Os valores $\times B$ e $\times F$ dessa linha devem ser, respectivamente, múltiplos dos valores B e F correspondentes ao mesmo prisma, e a relação $\frac{\times B}{B} = \frac{\times F}{F}$ deve ser satisfeita.

Descobrimos a posição de cada prisma, temos:

- Na coluna $C3 (= \times B)$, $42_{\times B}$ é o único múltiplo do valor 7_B . Logo, pelo item c) acima, o prisma de base heptagonal encontra-se na primeira linha do Quadro IM.
- Na coluna $C4 (= \times F)$, $54_{\times F}$ e $24_{\times F}$ são os únicos múltiplos do valor 6_F . Uma vez que o prisma de base heptagonal encontra-se na primeira linha, dos valores $\times F$ restantes, isto é, sem o $54_{\times F}$, 24_F é o único múltiplo do valor 6_F . Logo, pelo item d) acima, o prisma de base retangular encontra-se na segunda linha do Quadro IM.
- Na coluna $C4 (= \times F)$, $25_{\times F}$ é o único múltiplo do valor 5_F . Logo, pelo item d) acima, o prisma de base triangular encontra-se na quarta linha do Quadro IM.
- Na coluna $C4 (= \times F)$, $21_{\times F}$ é o único múltiplo do valor 7_F . Logo, pelo item d) acima, o prisma de base pentagonal encontra-se na quinta linha do Quadro IM.
- O prisma de base hexagonal encontra-se na terceira linha do Quadro IM, pois é o prisma e a linha que restaram. Ou por outro argumento, devido ao fato de satisfazer o item e) acima.

Portanto:

Quadro 53: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	$84_{\times V}$	$126_{\times A}$	$42_{\times B}$	$54_{\times F}$	
2	Prisma de base retangular	$32_{\times V}$	$48_{\times A}$	$16_{\times B}$	$24_{\times F}$	
3	Prisma de base hexagonal	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	$12_{\times B}$	$16_{\times F}$	
4	Prisma de base triangular	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$25_{\times F}$	
5	Prisma de base pentagonal	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$21_{\times F}$	

Jogada 4 (EF06MA03)

Em cada linha do Quadro IM, basta dividirmos o valor $\times B$ pelo respectivo valor B do prisma, revelando o multiplicador k utilizado.

Descobrimos os multiplicadores, temos:

- Na primeira linha, $42_{\times B} \div 7_B = 6$, logo o multiplicador é 6.
- Na segunda linha, $16_{\times B} \div 4_B = 4$, logo o multiplicador é 4.
- Na terceira linha, $12_{\times B} \div 6_B = 2$, logo o multiplicador é 2.

- Na quarta linha, $15_{\times B} \div 3_B = 5$, logo o multiplicador é 5.
- Na quinta linha, $15_{\times B} \div 5_B = 3$, logo o multiplicador é 3.

Portanto, a resposta final é:

Quadro 54: Quadro IM Respondido

Posição	Prismas	C1	C2	C3	C4	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	$84_{\times V}$	$126_{\times A}$	$42_{\times B}$	$54_{\times F}$	6
2	Prisma de base retangular	$32_{\times V}$	$48_{\times A}$	$16_{\times B}$	$24_{\times F}$	4
3	Prisma de base hexagonal	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	$12_{\times B}$	$16_{\times F}$	2
4	Prisma de base triangular	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$25_{\times F}$	5
5	Prisma de base pentagonal	$30_{\times V}$	$45_{\times A}$	$15_{\times B}$	$21_{\times F}$	3

NÍVEL 3

A estrutura do Quadro IM é a seguinte: suas colunas são organizadas de modo que cada uma contém diferentes tipos de informação multiplicada ($\times B$, $\times F$, $\times V$ e $\times A$), sendo aplicado um multiplicador diferente em cada linha. Além disso, as peças representativas dos prismas utilizados não são previamente fornecidas.

SIMULAÇÃO DO NÍVEL 3

Preparação inicial do jogo

Dado o Quadro IM:

Quadro 55: Quadro IM

Posição	Prismas	C1	C2	C3	C4	Multiplicadores
1		126	42	54	84	
2		16	32	24	48	
3		12	36	16	24	
4		45	30	15	25	
5		30	15	45	21	

O Quadro G correspondente é:

Quadro 56: Quadro G

Posição	Prismas	C1	C2	C3	C4	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	$126_{\times A}$	$42_{\times B}$	$54_{\times F}$	$84_{\times V}$	6
2	Prisma de base retangular	$16_{\times B}$	$32_{\times V}$	$24_{\times F}$	$48_{\times A}$	4
3	Prisma de base hexagonal	$12_{\times B}$	$36_{\times A}$	$16_{\times F}$	$24_{\times V}$	2
4	Prisma de base triangular	$45_{\times A}$	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$25_{\times F}$	5
5	Prisma de base pentagonal	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$45_{\times A}$	$21_{\times F}$	3

Solução

Uma solução desta simulação está descrita nas três jogadas detalhadas a seguir:

Jogada 1 (EF06MA17)

Em um prisma, sabemos que as seguintes relações são válidas: $F = B + 2$, $A = 3B$ e $V = 2B$. Dado que essas relações são verdadeiras, também são válidas as seguintes relações entre as informações multiplicadas: $\times F = \times B + 2k$, $\times A = 3 \cdot (\times B)$ e $\times V = 2 \cdot (\times B)$, onde $\times B = kB$, $\times F = kF$, $\times A = kA$, $\times V = kV$ e $k \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Portanto, como em cada linha do Quadro IM são representados os elementos de um mesmo prisma — $\times B$, $\times F$, $\times A$, $\times V$ — se um elemento da linha é três vezes outro elemento da mesma, o primeiro é a aresta multiplicada e o segundo é a base multiplicada. Se um elemento da linha é duas vezes outro elemento da mesma, o primeiro é o vértice multiplicado e o segundo é a base multiplicada. Dessa forma, conseguimos sempre identificar os elementos que são a base multiplicada, a aresta multiplicada e o vértice multiplicado. Finalmente, o elemento que resta na linha é a face multiplicada ou, se um elemento da linha não é o dobro nem o triplo de outro elemento da mesma, ele é a face multiplicada.

Neste caso, concluímos:

Quadro 57: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		126 $\times A$	42 $\times B$	54 $\times F$	84 $\times V$	
2		16 $\times B$	32 $\times V$	24 $\times F$	48 $\times A$	
3		12 $\times B$	36 $\times A$	16 $\times F$	24 $\times V$	
4		45 $\times A$	30 $\times V$	15 $\times B$	25 $\times F$	
5		30 $\times V$	15 $\times B$	45 $\times A$	21 $\times F$	

Outra forma de obter o Quadro 57 é perceber que, devido às relações $F = B + 2$, $A = 3B$ e $V = 2B$, temos $B < F < V < A$ e, consequentemente, $kB < kF < kV < kA$, com $k \in \mathbb{N} - \{1\}$. Ou seja, $\times B < \times F < \times V < \times A$. Portanto, em cada linha do Quadro IM, o menor valor será $\times B$, o segundo menor valor será $\times F$, o terceiro menor valor será $\times V$, e o maior valor será $\times A$.

Jogada 2 (EF06MA17 e EF06MA03)

Uma vez que sabemos quem são $\times B$ e $\times F$, podemos determinar o multiplicador k utilizado na linha do Quadro IM. De fato, a partir da relação $\times F = \times B + 2k$, obtemos:

$$k = \frac{\times F - \times B}{2}.$$

Decobrimos o multiplicador de cada linha do Quadro IM, temos:

- Na primeira linha:

$$k = \frac{54_{\times F} - 42_{\times B}}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

- Na segunda linha:

$$k = \frac{24_{\times F} - 16_{\times B}}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

- Na terceira linha:

$$k = \frac{16_{\times F} - 12_{\times B}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

- Na quarta linha:

$$k = \frac{25_{\times F} - 15_{\times B}}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

- Na quinta linha:

$$k = \frac{21_{\times F} - 15_{\times B}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Portanto:

Quadro 58: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1		$126_{\times A}$	$42_{\times B}$	$54_{\times F}$	$84_{\times V}$	6
2		$16_{\times B}$	$32_{\times V}$	$24_{\times F}$	$48_{\times A}$	4
3		$12_{\times B}$	$36_{\times A}$	$16_{\times F}$	$24_{\times V}$	2
4		$45_{\times A}$	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$25_{\times F}$	5
5		$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$45_{\times A}$	$21_{\times F}$	3

Jogada 3 (EF06MA03)

Em cada linha do Quadro IM, basta dividirmos o valor $\times B$ pelo respectivo multiplicador k , revelando o valor inicial B e, conseqüentemente, o prisma correspondente a essa linha.

- Na primeira linha, $42_{\times B} \div 6 = 7_B$, logo é o prisma de base heptagonal.
- Na segunda linha, $16_{\times B} \div 4 = 4_B$, logo é o prisma de base retangular.
- Na terceira linha, $12_{\times B} \div 2 = 6_B$, logo é o prisma de base hexagonal.
- Na quarta linha, $15_{\times B} \div 5 = 3_B$, logo é o prisma de base triangular.
- Na quinta linha, $15_{\times B} \div 3 = 5_B$, logo é o prisma de base pentagonal.

Portanto, a resposta final é:

Quadro 59: Quadro IM Respondido

Posição	Prismas	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	Multiplicadores
1	Prisma de base heptagonal	$126_{\times A}$	$42_{\times B}$	$54_{\times F}$	$84_{\times V}$	6
2	Prisma de base retangular	$16_{\times B}$	$32_{\times V}$	$24_{\times F}$	$48_{\times A}$	4
3	Prisma de base hexagonal	$12_{\times B}$	$36_{\times A}$	$16_{\times F}$	$24_{\times V}$	2
4	Prisma de base triangular	$45_{\times A}$	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$25_{\times F}$	5
5	Prisma de base pentagonal	$30_{\times V}$	$15_{\times B}$	$45_{\times A}$	$21_{\times F}$	3

3.5.2 O Jogo das Pirâmides: níveis de jogo e algumas soluções padrão

Apresentaremos agora os níveis do Jogo das Pirâmides, bem como as simulações de uma partida em cada nível, acompanhadas de algumas possíveis soluções.

NÍVEL 1

A estrutura da Tabela IM é a seguinte: suas colunas $C1$, $C2$ e $C3$ são organizadas de modo que cada uma contém um único tipo de informação multiplicada ($\times B$, $\times F$, $\times A$), com o mesmo multiplicador aplicado em todas as linhas. Além disso, as peças representativas das pirâmides utilizadas em sua construção são previamente fornecidas.

SIMULAÇÃO DO NÍVEL 1

Preparação inicial do jogo

Dadas as seguintes peças representativas de poliedros — pirâmide de base triangular, pirâmide de base retangular, pirâmide de base pentagonal, pirâmide de base hexagonal e pirâmide de base heptagonal — e considerando o Quadro IM construído:

Quadro 60: Quadro IM

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		18	15	30		
2		24	21	42		
3		12	9	18		
4		15	12	24		
5		21	18	36		

O Quadro G correspondente é:

Quadro 61: Quadro G

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base pentagonal	$18_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$	6	3
2	Pirâmide de base heptagonal	$24_{\times F}$	$21_{\times B}$	$42_{\times A}$	8	3
3	Pirâmide de base triangular	$12_{\times F}$	$9_{\times B}$	$18_{\times A}$	4	3
4	Pirâmide de base retangular	$15_{\times F}$	$12_{\times B}$	$24_{\times A}$	5	3
5	Pirâmide de base hexagonal	$21_{\times F}$	$18_{\times B}$	$36_{\times A}$	7	3

Solução

Uma solução desta simulação está descrita nas cinco jogadas detalhadas a seguir:

Jogada 1 (EF06MA17)

Inicialmente, exploramos cada uma das pirâmides para conhecê-las e quantificá-las, resultando na construção do seguinte quadro:

Quadro 62: Quadro AX

Pirâmides	B	F	A	V
Pirâmide de base triangular	3	4	6	4
Pirâmide de base retangular	4	5	8	5
Pirâmide de base pentagonal	5	6	10	6
Pirâmide de base hexagonal	6	7	12	7
Pirâmide de base heptagonal	7	8	14	8

O Quadro 62, denominado Quadro Auxiliar (Quadro AX), tem a finalidade de listar as pirâmides geométricas e suas respectivas características. Sua estrutura é composta por cinco linhas (cada uma representando um tipo de pirâmide) e cinco colunas, sendo:

- B : Número de lados da base da pirâmide.
- F : Número de faces da pirâmide.
- A : Número de arestas da pirâmide.
- V : Número de vértices da pirâmide.

Esse quadro serve como referência para análises e aplicações no decorrer do jogo.

Jogada 2 (EF06MA17)

Em uma pirâmide, sabemos que as seguintes relações são válidas: $F = B + 1$, $A = 2B$ e $V = F$. Dado que essas relações são verdadeiras, também são válidas as seguintes relações entre as informações multiplicadas: $\times F = \times B + k$, $\times A = 2 \cdot (\times B)$ e $\times V = \times F$, onde $\times B = kB$, $\times F = kF$, $\times A = kA$, $\times V = kV$ e $k \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Portanto, como cada coluna $C1$, $C2$ e $C3$ do Quadro IM representa um único tipo de elemento — $\times B$, $\times F$, $\times A$, $\times V$ — se uma coluna é duas vezes outra, a primeira é a aresta

multiplicada e a segunda é a base multiplicada. Dessa forma, conseguimos sempre identificar as colunas da base multiplicada e aresta multiplicada. Finalmente, a coluna que resta é a da face multiplicada ou, se uma coluna não é o dobro de outra coluna, ela é a coluna da face multiplicada.

Neste caso, concluímos que $C1 = \times F$, $C2 = \times B$ e $C3 = \times A$, isto é:

Quadro 63: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		$18_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$		
2		$24_{\times F}$	$21_{\times B}$	$42_{\times A}$		
3		$12_{\times F}$	$9_{\times B}$	$18_{\times A}$		
4		$15_{\times F}$	$12_{\times B}$	$24_{\times A}$		
5		$21_{\times F}$	$18_{\times B}$	$36_{\times A}$		

Outra forma de obter o Quadro 63 é perceber que, devido às relações $F = B + 1$ e $A = 2B$, temos $B < F < A$ e, consequentemente, $kB < kF < kA$, com $k \in \mathbb{N} - 1$. Ou seja, $\times B < \times F < \times A$. Portanto, como $C2 < C1 < C3$, isto é, os valores da coluna $C2$ são menores que os da coluna $C1$, que por sua vez são menores que os da coluna $C3$, concluímos que $C1 = \times F$, $C2 = \times B$ e $C3 = \times A$.

Jogada 3 (EF06MA17)

Analisando o Quadro AX, podemos constatar que o menor número de lados do polígono da base é o da pirâmide de base triangular, seguido da pirâmide de base retangular, pirâmide de base pentagonal, pirâmide de base hexagonal e, por fim, pirâmide de base heptagonal. Diante disto, uma vez que foi utilizado um único multiplicador, essa sequência se mantém se olharmos para o número de lados da base multiplicada. Assim, $9_{\times B} < 12_{\times B} < 15_{\times B} < 18_{\times B} < 21_{\times B}$ na coluna $C2$ correspondem, respectivamente, a pirâmide de base triangular, pirâmide de base retangular, pirâmide de base pentagonal, pirâmide de base hexagonal e pirâmide de base heptagonal, o que revela a posição das mesmas, isto é:

Quadro 64: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base pentagonal	$18_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$		
2	Pirâmide de base heptagonal	$24_{\times F}$	$21_{\times B}$	$42_{\times A}$		
3	Pirâmide de base triangular	$12_{\times F}$	$9_{\times B}$	$18_{\times A}$		
4	Pirâmide de base retangular	$15_{\times F}$	$12_{\times B}$	$24_{\times A}$		
5	Pirâmide de base hexagonal	$21_{\times F}$	$18_{\times B}$	$36_{\times A}$		

Para F e A , também são válidos argumentos semelhantes ao anterior, o que permite concluir a mesma resposta do Quadro 64.

Jogada 4 (EF06MA17)

Uma vez que sabemos a posição das pirâmides, basta preencher a coluna V do Quadro IM utilizando os valores correspondentes do Quadro AX. Portanto:

Quadro 65: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base pentagonal	$18_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$	6	
2	Pirâmide de base heptagonal	$24_{\times F}$	$21_{\times B}$	$42_{\times A}$	8	
3	Pirâmide de base triangular	$12_{\times F}$	$9_{\times B}$	$18_{\times A}$	4	
4	Pirâmide de base retangular	$15_{\times F}$	$12_{\times B}$	$24_{\times A}$	5	
5	Pirâmide de base hexagonal	$21_{\times F}$	$18_{\times B}$	$36_{\times A}$	7	

Jogada 5 (EF06MA03)

Para descobrirmos o multiplicador utilizado, tomemos $21_{\times F}$ da pirâmide de base pentagonal e dividimos por 7_F da mesma, resultando em 3. Logo, o multiplicador utilizado foi 3, ou seja, a resposta final é:

Quadro 66: Quadro IM Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base pentagonal	$18_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$	6	3
2	Pirâmide de base heptagonal	$24_{\times F}$	$21_{\times B}$	$42_{\times A}$	8	3
3	Pirâmide de base triangular	$12_{\times F}$	$9_{\times B}$	$18_{\times A}$	4	3
4	Pirâmide de base retangular	$15_{\times F}$	$12_{\times B}$	$24_{\times A}$	5	3
5	Pirâmide de base hexagonal	$21_{\times F}$	$18_{\times B}$	$36_{\times A}$	7	3

NÍVEL 2

A estrutura do Quadro IM é a seguinte: suas colunas $C1$, $C2$ e $C3$ são organizadas de modo que cada uma contém um único tipo de informação multiplicada ($\times B$, $\times F$, $\times A$), sendo aplicado um multiplicador diferente em cada linha. Além disso, as peças representativas das pirâmides utilizadas em sua construção são previamente fornecidas.

SIMULAÇÃO DO NÍVEL 2

Preparação inicial do jogo

Dadas as seguintes peças representativas de poliedros — pirâmide de base triangular, pirâmide de base retangular, pirâmide de base pentagonal, pirâmide de base hexagonal e pirâmide de base heptagonal — e considerando o Quadro IM construído:

Quadro 67: Quadro IM

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		84	42	48		
2		32	16	20		
3		24	12	14		
4		30	15	20		
5		30	15	18		

O Quadro G correspondente é:

Quadro 68: Quadro G

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base heptagonal	$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$	8	6
2	Pirâmide de base retangular	$32_{\times A}$	$16_{\times B}$	$20_{\times F}$	5	4
3	Pirâmide de base hexagonal	$24_{\times A}$	$12_{\times B}$	$14_{\times F}$	7	2
4	Pirâmide de base triangular	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$20_{\times F}$	4	5
5	Pirâmide de base pentagonal	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$18_{\times F}$	6	3

Solução

Uma solução desta simulação está descrita nas cinco jogadas detalhadas a seguir:

Jogada 1 (EF06MA17)

Aplicando a mesma Jogada 1 da Solução da SIMULAÇÃO DO NÍVEL 1, obtemos o Quadro AX:

Quadro 69: Quadro AX

Pirâmides	B	F	A	V
Pirâmide de base triangular	3	4	6	4
Pirâmide de base retangular	4	5	8	5
Pirâmide de base pentagonal	5	6	10	6
Pirâmide de base hexagonal	6	7	12	7
Pirâmide de base heptagonal	7	8	14	8

Jogada 2 (EF06MA17)

Aplicando a mesma Jogada 2 da Solução da SIMULAÇÃO DO NÍVEL 1, obtemos:

Quadro 70: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$		
2		$32_{\times A}$	$16_{\times B}$	$20_{\times F}$		
3		$24_{\times A}$	$12_{\times B}$	$14_{\times F}$		
4		$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$20_{\times F}$		
5		$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$18_{\times F}$		

Jogada 3 (EF06MA06)

Para que uma pirâmide pertença a uma linha do Quadro IM, é necessário que pelo menos uma das seguintes condições seja satisfeita:

- O valor $\times B$ dessa linha é múltiplo do valor B correspondente à pirâmide.
- O valor $\times F$ dessa linha é múltiplo do valor F correspondente à pirâmide.

Para determinar se uma pirâmide pertence a uma linha do Quadro IM, é suficiente verificar uma das seguintes condições:

- Dentre os valores $\times B$ do Quadro IM, o valor $\times B$ dessa linha deve ser o único múltiplo do valor B correspondente à mesma pirâmide.
- Dentre os valores $\times F$ do Quadro IM, o valor $\times F$ dessa linha deve ser o único múltiplo do valor F correspondente à mesma pirâmide.
- Os valores $\times B$ e $\times F$ dessa linha devem ser, respectivamente, múltiplos dos valores B e F correspondentes à mesma pirâmide, e a relação $\frac{\times B}{B} = \frac{\times F}{F}$ deve ser satisfeita.

Descobrimos a posição de cada pirâmide, temos:

- Na coluna $C2 (= \times B)$, $42_{\times B}$ é o único múltiplo do valor 7_B . Logo, pelo item c) acima, a pirâmide de base heptagonal encontra-se na primeira linha do Quadro IM.
- Na coluna $C3 (= \times F)$, $14_{\times F}$ é o único múltiplo do valor 7_F . Logo, pelo item d) acima, a pirâmide de base hexagonal encontra-se na terceira linha do Quadro IM.
- Na coluna $C2 (= \times B)$, $16_{\times B}$ e $12_{\times B}$ são os únicos múltiplos do valor 4_B . Uma vez que a pirâmide de base hexagonal encontra-se na terceira linha, dos valores $\times B$ restantes, isto é, sem o $12_{\times B}$, 16_F é o único múltiplo do valor 4_B . Logo, pelo item c) acima, a pirâmide de base retangular encontra-se na segunda linha do Quadro IM.
- As pirâmides restantes, pirâmide de base triangular e a pirâmide de base pentagonal, só podem ocupar as linhas quatro ou cinco. Como o valor $20_{\times F}$ na coluna $C3$ não é múltiplo de 6_F , a pirâmide de base pentagonal não pode ocupar a linha quatro, de acordo com o item b) acima. Consequentemente, a pirâmide de base triangular está na linha quatro e a pirâmide de base pentagonal está na linha cinco.

Portanto:

Quadro 71: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base heptagonal	$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$		
2	Pirâmide de base retangular	$32_{\times A}$	$16_{\times B}$	$20_{\times F}$		
3	Pirâmide de base hexagonal	$24_{\times A}$	$12_{\times B}$	$14_{\times F}$		
4	Pirâmide de base triangular	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$20_{\times F}$		
5	Pirâmide de base pentagonal	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$18_{\times F}$		

Jogada 4 (EF06MA17)

Aplicando a mesma Jogada 4 da Solução da SIMULAÇÃO DO NÍVEL 1, obtemos:

Quadro 72: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base heptagonal	$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$	8	
2	Pirâmide de base retangular	$32_{\times A}$	$16_{\times B}$	$20_{\times F}$	5	
3	Pirâmide de base hexagonal	$24_{\times A}$	$12_{\times B}$	$14_{\times F}$	7	
4	Pirâmide de base triangular	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$20_{\times F}$	4	
5	Pirâmide de base pentagonal	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$18_{\times F}$	6	

Jogada 5 (EF06MA03)

Em cada linha do Quadro IM, basta dividirmos o valor $\times B$ pelo respectivo valor B da pirâmide, revelando o multiplicador k utilizado.

Descobrimos os multiplicadores, temos:

- Na primeira linha, $42_{\times B} \div 7_B = 6$, logo o multiplicador é 6.
- Na segunda linha, $16_{\times B} \div 4_B = 4$, logo o multiplicador é 4.
- Na terceira linha, $12_{\times B} \div 6_B = 2$, logo o multiplicador é 2.
- Na quarta linha, $15_{\times B} \div 3_B = 5$, logo o multiplicador é 5.
- Na quinta linha, $15_{\times B} \div 5_B = 3$, logo o multiplicador é 3.

Portanto, a resposta final é:

Quadro 73: Quadro IM Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base heptagonal	$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$	8	6
2	Pirâmide de base retangular	$32_{\times A}$	$16_{\times B}$	$20_{\times F}$	5	4
3	Pirâmide de base hexagonal	$24_{\times A}$	$12_{\times B}$	$14_{\times F}$	7	2
4	Pirâmide de base triangular	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$20_{\times F}$	4	5
5	Pirâmide de base pentagonal	$30_{\times A}$	$15_{\times B}$	$18_{\times F}$	6	3

NÍVEL 3

A estrutura do Quadro IM é a seguinte: suas colunas $C1$, $C2$ e $C3$ são organizadas de modo que cada uma contém diferentes tipos de informação multiplicada ($\times B$, $\times F$, $\times A$), sendo aplicado um multiplicador diferente em cada linha. Além disso, as peças representativas das pirâmides utilizadas em sua construção não são previamente fornecidas.

SIMULAÇÃO DO NÍVEL 3

Preparação inicial do jogo

Dado o Quadro IM:

Quadro 74: Quadro IM

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		84	42	48		
2		16	20	32		
3		12	24	14		
4		20	15	30		
5		30	18	15		

O Quadro G correspondente é:

Quadro 75: Quadro G

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base heptagonal	$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$	8	6
2	Pirâmide de base retangular	$16_{\times B}$	$20_{\times F}$	$32_{\times A}$	5	4
3	Pirâmide de base hexagonal	$12_{\times B}$	$24_{\times A}$	$14_{\times F}$	7	2
4	Pirâmide de base triangular	$20_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$	4	5
5	Pirâmide de base pentagonal	$30_{\times A}$	$18_{\times F}$	$15_{\times B}$	6	3

Solução

Uma solução desta simulação está descrita nas três jogadas detalhadas a seguir:

Jogada 1 (EF06MA17)

Em uma pirâmide, sabemos que as seguintes relações são válidas: $F = B + 1$, $A = 2B$ e $V = F$. Dado que essas relações são verdadeiras, também são válidas as seguintes relações entre as informações multiplicadas: $\times F = \times B + k$, $\times A = 2 \cdot (\times B)$ e $\times V = \times F$, onde $\times B = kB$, $\times F = kF$, $\times A = kA$, $\times V = kV$ e $k \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Portanto, como em cada linha do Quadro IM são representados os elementos de uma mesma pirâmide — $\times B$, $\times F$, $\times A$ — se um elemento da linha é duas vezes outro elemento da

mesma, o primeiro é a aresta multiplicada e o segundo é a base multiplicada. Dessa forma, conseguimos sempre identificar os elementos que são a base multiplicada e aresta multiplicada. Finalmente, o elemento que resta é a da face multiplicada ou, se um elemento da linha não é o dobro de outro elemento da mesma, ele é a face multiplicada.

Neste caso, concluímos:

Quadro 76: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$		
2		$16_{\times B}$	$20_{\times F}$	$32_{\times A}$		
3		$12_{\times B}$	$24_{\times A}$	$14_{\times F}$		
4		$20_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$		
5		$30_{\times A}$	$18_{\times F}$	$15_{\times B}$		

Outra forma de obter o Quadro 76 é perceber que, devido às relações $F = B + 1$ e $A = 2B$, temos $B < F < A$ e, conseqüentemente, $kB < kF < kA$, com $k \in \mathbb{N} - \{1\}$. Ou seja, $\times B < \times F < \times A$. Portanto, em cada linha do Quadro IM, o menor valor será $\times B$, o segundo menor valor será $\times F$ e o maior valor será $\times A$.

Jogada 2 (EF06MA17 e EF06MA03)

Uma vez que sabemos quem são $\times B$ e $\times F$, podemos determinar o multiplicador k utilizado na linha do Quadro IM. De fato, a partir da relação $\times F = \times B + k$, obtemos:

$$k = \times F - \times B.$$

Decobrimos o multiplicador de cada linha do Quadro IM, temos:

- Na primeira linha:

$$k = 48_{\times F} - 42_{\times B} = 6.$$

- Na segunda linha:

$$k = 20_{\times F} - 16_{\times B} = 4.$$

- Na terceira linha:

$$k = 14_{\times F} - 12_{\times B} = 2.$$

- Na quarta linha:

$$k = 20_{\times F} - 15_{\times B} = 5.$$

- Na quinta linha:

$$k = 18_{\times F} - 15_{\times B} = 3.$$

Portanto:

Quadro 77: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1		$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$		6
2		$16_{\times B}$	$20_{\times F}$	$32_{\times A}$		4
3		$12_{\times B}$	$24_{\times A}$	$14_{\times F}$		2
4		$20_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$		5
5		$30_{\times A}$	$18_{\times F}$	$15_{\times B}$		3

Jogada 3 (EF06MA03 e EF06MA03)

Em cada linha do Quadro IM, basta dividirmos o valor $\times B$ pelo respectivo multiplicador k , revelando o valor inicial B e, consequentemente, identificando a pirâmide correspondente a essa linha. Além disso, o valor V da linha pode ser determinado diretamente, pois sabemos que $V = F = B + 1$.

- Na primeira linha, $42_{\times B} \div 6 = 7_B$, logo é a pirâmide de base heptagonal cujo valor V é 8.
- Na segunda linha, $16_{\times B} \div 4 = 4_B$, logo é a pirâmide de base retangular cujo valor V é 5.
- Na terceira linha, $12_{\times B} \div 2 = 6_B$, logo é a pirâmide de base hexagonal cujo valor V é 7.
- Na quarta linha, $15_{\times B} \div 5 = 3_B$, logo é a pirâmide de base triangular cujo valor V é 4.
- Na quinta linha, $15_{\times B} \div 3 = 5_B$, logo é a pirâmide de base pentagonal cujo valor V é 6.

Portanto, a resposta final é:

Quadro 78: Quadro IM Respondido

Posição	Pirâmides	$C1$	$C2$	$C3$	V	Multiplicadores
1	Pirâmide de base heptagonal	$84_{\times A}$	$42_{\times B}$	$48_{\times F}$	8	6
2	Pirâmide de base retangular	$16_{\times B}$	$20_{\times F}$	$32_{\times A}$	5	4
3	Pirâmide de base hexagonal	$12_{\times B}$	$24_{\times A}$	$14_{\times F}$	7	2
4	Pirâmide de base triangular	$20_{\times F}$	$15_{\times B}$	$30_{\times A}$	4	5
5	Pirâmide de base pentagonal	$30_{\times A}$	$18_{\times F}$	$15_{\times B}$	6	3

3.5.3 Em que Ordem estão os Poliedros de Platão? : níveis de jogo e algumas soluções padrão

Apresentaremos agora os níveis do jogo Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?, bem como as simulações de uma partida em cada nível, acompanhadas de algumas possíveis soluções.

NÍVEL 1

A estrutura do Quadro IM é construída aplicando o mesmo multiplicador a todas as linhas.

SIMULAÇÃO DO NÍVEL 1

Preparação inicial do jogo

Dadas as seguintes peças representativas dos poliedros de Platão — tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro — e considerando o Quadro IM construído:

Quadro 79: Quadro IM

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		120	80	48	
2		48	32	24	
3		120	48	80	
4		48	24	32	
5		24	16	16	

O Quadro G correspondente é:

Quadro 80: Quadro G

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1	Icosaedro	$120_{\times A}$	$80_{\times F}$	$48_{\times V}$	4
2	Octaedro	$48_{\times A}$	$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	4
3	Dodecaedro	$120_{\times A}$	$48_{\times F}$	$80_{\times V}$	4
4	Hexaedro (Cubo)	$48_{\times A}$	$24_{\times F}$	$32_{\times V}$	4
5	Tetraedro	$24_{\times A}$	$16_{\times F}$	$16_{\times V}$	4

Solução

Uma solução desta simulação está descrita nas quatro jogadas detalhadas a seguir:

Jogada 1 (EF06HP)

Inicialmente, exploramos cada um dos poliedros de Platão para conhecê-los e quantificá-los, resultando na construção do seguinte QUADRO:

Quadro 81: Quadro AX

Poliedros de Platão	V	A	F
Tetraedro	4	6	4
Hexaedro (Cubo)	8	12	6
Octaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

O Quadro 81, denominado Quadro Auxiliar (Quadro AX), tem a finalidade de listar os poliedros de Platão e suas respectivas características. Sua estrutura é composta por cinco linhas (cada uma representando um tipo de poliedro) e cinco colunas, sendo:

- V : Número de vértices do poliedro de Platão.
- A : Número de arestas do poliedro de Platão.
- F : Número de faces do poliedro de Platão.

Esse quadro serve como referência para análises e aplicações no decorrer do jogo.

Jogada 2 (EF06HP)

O único poliedro cuja quantidade de vértices coincide com a quantidade de faces é o Tetraedro. Portanto, ele sempre estará localizado na linha do Quadro IM onde houver dois valores multiplicados iguais. Neste caso, o Tetraedro está na linha cinco, pois é a única linha do Quadro IM que apresenta informações multiplicadas repetidas — neste caso, o valor 16. Logo, obtemos:

Quadro 82: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		120	80	48	
2		48	32	24	
3		120	48	80	
4		48	24	32	
5	Tetraedro	24	16	16	

Uma vez identificado o Tetraedro, podemos extrair duas informações importantes:

- (1). **O multiplicador utilizado:** Ao conhecer o multiplicador aplicado ao Tetraedro, é possível determinar o multiplicador utilizado para todos os outros poliedros, uma vez que, neste caso, o mesmo multiplicador foi utilizado para todas as linhas.
- (2). **A coluna correspondente aos valores das arestas multiplicadas:** Como os valores multiplicados das arestas dos poliedros de Platão estão organizados na mesma coluna, identificar a posição das arestas multiplicadas do Tetraedro nos permite determinar qual coluna contém todas as arestas multiplicadas dos outros poliedros.

Para encontrar o multiplicador k utilizado para o Tetraedro, basta dividir o valor da informação multiplicada repetida por 4, que é o valor inicialmente repetido do Tetraedro no Quadro AX. No caso do Quadro 82, o multiplicador é 4, pois:

$$k = 16 \div 4 = 4.$$

Logo, pelo item (1) acima:

Quadro 83: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		120	80	48	4
2		48	32	24	4
3		120	48	80	4
4		48	24	32	4
5	Tetraedro	24	16	16	4

Uma vez que a quantidade de vértices do Tetraedro coincide com a quantidade de suas faces, enquanto a quantidade de arestas é distinta, podemos utilizar essa característica para identificar o valor das arestas multiplicado. Sabendo a linha correspondente ao Tetraedro no Quadro IM, podemos concluir que o valor das arestas multiplicado será aquele que se diferencia dos outros dois, que são iguais. No caso do Quadro 83, esse valor é 24. Logo, conforme descrito no item (2) acima, a coluna $C1$ é a que contém os valores das arestas multiplicados:

Quadro 84: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		$120_{\times A}$	80	48	4
2		$48_{\times A}$	32	24	4
3		$120_{\times A}$	48	80	4
4		$48_{\times A}$	24	32	4
5	Tetraedro	$24_{\times A}$	16	16	4

Jogada 3 (EF06HP)

Utilizando a Dica de Platão, descobrimos que o valor 16 na coluna $C2$ corresponde ao tipo $\times F$ e, consequentemente, todos os valores dessa coluna representam $\times F$, já que cada coluna contém um único tipo de informação multiplicada.

Como $C1$ e $C2$ correspondem, respectivamente, aos valores $\times A$ e $\times F$, podemos concluir que $C3$ corresponde aos valores $\times V$.

Com isso, obtemos:

Quadro 85: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		$120_{\times A}$	$80_{\times F}$	$48_{\times V}$	4
2		$48_{\times A}$	$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	4
3		$120_{\times A}$	$48_{\times F}$	$80_{\times V}$	4
4		$48_{\times A}$	$24_{\times F}$	$32_{\times V}$	4
5	Tetraedro	$24_{\times A}$	$16_{\times F}$	$16_{\times V}$	4

Jogada 4 (EF06MA03 e EF06HP)

O Tetraedro está localizado na posição 5 do Quadro IM. Para determinar a posição dos demais poliedros de Platão, basta dividir todos os valores $\times V$, $\times A$ e $\times F$ de cada linha pelo multiplicador 4, revelando os valores originais V , A e F . Em seguida, podemos identificar, com base no Quadro AX, a qual poliedro de Platão cada conjunto de informações pertence.

Descobrimos a posição dos outros poliedros de Platão:

- Dividindo os valores da linha um do Quadro IM, obtemos:

$$120_{\times A} \div 4 = 30_A, 80_{\times F} \div 4 = 20_F \text{ e } 48_{\times V} \div 4 = 12_V.$$

Os valores 12_V , 30_A e 20_F no Quadro AX correspondem ao Icosaedro. Logo, o Icosaedro está localizado na posição 1 do Quadro IM.

- Dividindo os valores da linha dois do Quadro IM, obtemos:

$$48_{\times A} \div 4 = 12_A, 32_{\times F} \div 4 = 8_F \text{ e } 24_{\times V} \div 4 = 6_V.$$

Os valores 6_V , 12_A e 8_F no Quadro AX correspondem ao Octaedro. Logo, o Octaedro está localizado na posição 2 do Quadro IM.

- Dividindo os valores da linha três do Quadro IM, obtemos:

$$120_{\times A} \div 4 = 30_A, 48_{\times F} \div 4 = 12_F \text{ e } 80_{\times V} \div 4 = 20_V.$$

Os valores 20_V , 30_A e 12_F no Quadro AX correspondem ao Dodecaedro. Logo, o Dodecaedro está localizado na posição 3 do Quadro IM.

- Resta apenas a posição 4 do Quadro IM a ser preenchida, e o Hexaedro (Cubo) é o único poliedro que ainda não foi alocado. Logo, o Hexaedro está localizado na posição 4 do Quadro IM.

Portanto, a resposta final é:

Quadro 86: Quadro IM Respondido

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1	Icosaedro	$120_{\times A}$	$80_{\times F}$	$48_{\times V}$	4
2	Octaedro	$48_{\times A}$	$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	4
3	Dodecaedro	$120_{\times A}$	$48_{\times F}$	$80_{\times V}$	4
4	Hexaedro (Cubo)	$48_{\times A}$	$24_{\times F}$	$32_{\times V}$	4
5	Tetraedro	$24_{\times A}$	$16_{\times F}$	$16_{\times V}$	4

NÍVEL 2

A estrutura do Quadro IM é construída aplicando um multiplicador diferente em cada linha.

SIMULAÇÃO DO NÍVEL 2

Preparação inicial do Jogo

Dadas as seguintes peças representativas dos poliedros de Platão — tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro — e considerando o Quadro IM construído:

Quadro 87: Quadro IM

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		32	24	48	
2		18	24	36	
3		8	8	12	
4		60	100	150	
5		120	72	180	

O Quadro G correspondente é:

Quadro 88: Quadro G

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1	Octaedro	$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	$48_{\times A}$	4
2	Hexaedro (Cubo)	$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	3
3	Tetraedro	$8_{\times F}$	$8_{\times V}$	$12_{\times A}$	2
4	Dodecaedro	$60_{\times F}$	$100_{\times V}$	$150_{\times A}$	5
5	Icosaedro	$120_{\times F}$	$72_{\times V}$	$180_{\times A}$	6

Solução

Uma solução desta simulação está descrita nas cinco jogadas detalhadas a seguir:

Jogada 1 (EF06HP)

Aplicando a mesma Jogada 1 da Solução da SIMULAÇÃO DO NÍVEL 1, obtemos o Quadro AX:

Quadro 89: Quadro AX

Poliedros de Platão	V	A	F
Tetraedro	4	6	4
Hexaedro (Cubo)	8	12	6
Octaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

Jogada 2 (EF06HP)

O único poliedro cuja quantidade de vértices coincide com a quantidade de faces é o Tetraedro. Portanto, ele sempre estará localizado na linha do Quadro IM onde houver dois valores multiplicados iguais. Neste caso, o Tetraedro está na linha três, pois é a única linha do Quadro IM que apresenta informações multiplicadas repetidas — neste caso, o valor 8. Logo, obtemos:

Quadro 90: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Poliedros de Platão	C1	C2	C3	Multiplicadores
1		32	24	48	
2		18	24	36	
3	Tetraedro	8	8	12	
4		60	100	150	
5		120	72	180	

Uma vez identificado o Tetraedro, podemos extrair duas informações importantes:

- (1). **O multiplicador utilizado para o Tetraedro.** Para encontrar o multiplicador k utilizado para o Tetraedro, basta dividir o valor da informação multiplicada repetida por 4, que é o valor inicialmente repetido do Tetraedro no Quadro AX.
- (2). **A coluna correspondente aos valores das arestas multiplicadas:** Como os valores multiplicados das arestas dos poliedros de Platão estão organizados na mesma coluna, identificar a posição das arestas multiplicadas do Tetraedro nos permite determinar qual coluna contém todas as arestas multiplicadas dos outros poliedros.

No caso do Quadro 90, o multiplicador é 2, pois aplicando (1) acima:

$$k = 8 \div 4 = 2.$$

Logo:

Quadro 91: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Poliedros de Platão	C1	C2	C3	Multiplicadores
1		32	24	48	
2		18	24	36	
3	Tetraedro	8	8	12	2
4		60	100	150	
5		120	72	180	

Uma vez que a quantidade de vértices do Tetraedro coincide com a quantidade de suas faces, enquanto a quantidade de arestas é distinta, podemos utilizar essa característica para identificar o valor das arestas multiplicado. Sabendo a linha correspondente ao Tetraedro no Quadro IM, podemos concluir que o valor das arestas multiplicado será aquele que se diferencia

dos outros dois, que são iguais. No caso do Quadro 91, esse valor é 12. Logo, conforme descrito no item (2) acima, a coluna $C3$ é a que contém os valores das arestas multiplicados:

Quadro 92: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		32	24	$48_{\times A}$	
2		18	24	$36_{\times A}$	
3	Tetraedro	8	8	$12_{\times A}$	2
4		60	100	$150_{\times A}$	
5		120	72	$180_{\times A}$	

Jogada 3 (EF06HP)

Utilizando a Dica de Platão, descobrimos que o valor 8 na coluna $C2$ corresponde ao tipo $\times V$ e, conseqüentemente, todos os valores dessa coluna representam $\times V$, já que cada coluna contém um único tipo de informação multiplicada.

Como $C2$ e $C3$ correspondem, respectivamente, aos valores $\times V$ e $\times A$, podemos concluir que $C1$ corresponde aos valores $\times F$.

Com isso, obtemos:

Quadro 93: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	$48_{\times A}$	
2		$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	
3	Tetraedro	$8_{\times F}$	$8_{\times V}$	$12_{\times A}$	2
4		$60_{\times F}$	$100_{\times V}$	$150_{\times A}$	
5		$120_{\times F}$	$72_{\times V}$	$180_{\times A}$	

Jogada 4 (EF06HP)

Sabemos que, para todo poliedro de Platão, a relação de Euler é válida:

$$V - A + F = 2.$$

Multiplicando ambos os lados por um número natural $k \neq 1$, obtemos:

$$kV - kA + kF = 2k.$$

Ou seja, podemos expressar essa relação em termos das informações multiplicadas no Quadro IM:

$$\times V - \times A + \times F = 2k, \quad \text{com } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Isso nos permite determinar o multiplicador k utilizado na construção de cada linha do Quadro IM através da seguinte fórmula:

$$k = \frac{\times V - \times A + \times F}{2}.$$

Descobrimos o multiplicador de cada linha do Quadro IM:

- Na primeira linha:

$$k = \frac{24_{\times V} - 48_{\times A} + 32_{\times F}}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

- Na segunda linha:

$$k = \frac{24_{\times V} - 36_{\times A} + 18_{\times F}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

- Na terceira linha já sabemos que $k = 2$.

- Na quarta linha:

$$k = \frac{100_{\times V} - 150_{\times A} + 60_{\times F}}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

- Na quinta linha:

$$k = \frac{72_{\times V} - 180_{\times A} + 120_{\times F}}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Portanto:

Quadro 94: Quadro IM Parcialmente Respondido

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	$48_{\times A}$	4
2		$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	3
3	Tetraedro	$8_{\times F}$	$8_{\times V}$	$12_{\times A}$	2
4		$60_{\times F}$	$100_{\times V}$	$150_{\times A}$	5
5		$120_{\times F}$	$72_{\times V}$	$180_{\times A}$	6

Jogada 5 (EF06MA03 e EF06HP)

Aplicando a mesma Jogada 4 da Solução da SIMULAÇÃO DO NÍVEL 1, obtemos a resposta final, que é:

Quadro 95: Quadro IM Respondido

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1	Octaedro	$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	$48_{\times A}$	4
2	Hexaedro (Cubo)	$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	3
3	Tetraedro	$8_{\times F}$	$8_{\times V}$	$12_{\times A}$	2
4	Dodecaedro	$60_{\times F}$	$100_{\times V}$	$150_{\times A}$	5
5	Icosaedro	$120_{\times F}$	$72_{\times V}$	$180_{\times A}$	6

3.6 Os Jogos dos Poliedros em sua versão com cartas

Nesta seção, discute-se a possibilidade de adaptação de Os Jogos dos Poliedros para versões em cartas, tendo como referência a estrutura do jogo “Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?”, único do conjunto que já possui tal formato. Considera-se que essa abordagem pode tornar a experiência didática mais lúdica em comparação à versão com quadros. No entanto, sua implementação em sala de aula pode apresentar limitações em alguns contextos escolares, uma vez que requer um maior investimento financeiro. Ressalta-se que estão em fase de concepção e desenvolvimento versões em cartas para os demais jogos do conjunto — Jogo dos Prismas e Jogo das Pirâmides —, com vistas a ampliar as possibilidades pedagógicas oferecidas por esta proposta.

Todos os materiais já criados e os que ainda serão desenvolvidos — como, por exemplo, as versões em cartas dos demais jogos — serão disponibilizados por meio do seguinte link no Google Drive: Os Jogos dos Poliedros ¹⁵.

3.6.1 Em que Ordem estão os Poliedros de Platão? em sua versão com cartas

Para melhor compreensão do jogo “Em que Ordem estão os Poliedros de Platão?” construído com cartas, iremos desenvolvê-lo a partir da versão baseada no Quadro IM:

Quadro 96: Quadro IM com Poliedros de Platão

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1		32	24	48	
2		18	24	36	
3		8	8	12	
4		60	100	150	
5		120	72	180	

O Quadro G correspondente é:

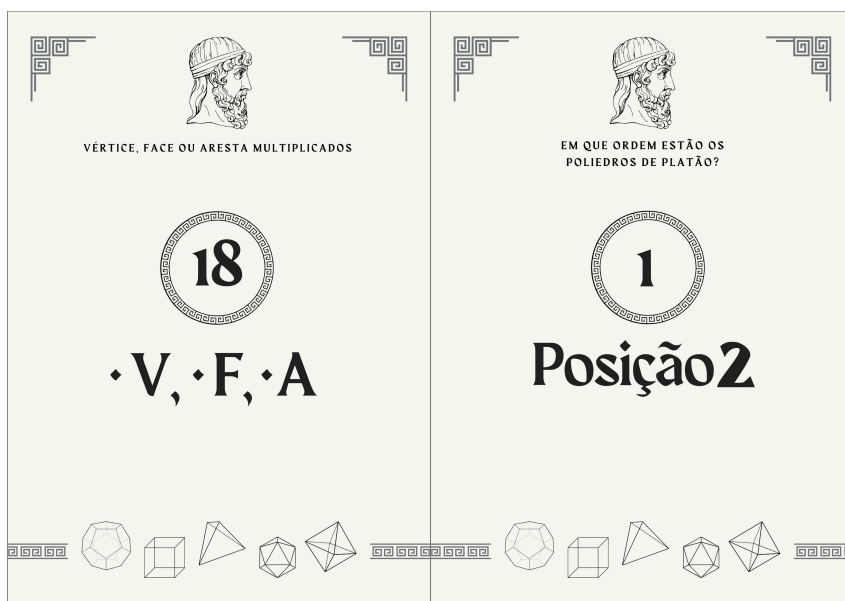
Quadro 97: Quadro G com Poliedros de Platão

Posição	Poliedros de Platão	$C1$	$C2$	$C3$	Multiplicadores
1	Octaedro	$32_{\times F}$	$24_{\times V}$	$48_{\times A}$	4
2	Hexaedro (Cubo)	$18_{\times F}$	$24_{\times V}$	$36_{\times A}$	3
3	Tetraedro	$8_{\times F}$	$8_{\times V}$	$12_{\times A}$	2
4	Dodecaedro	$60_{\times F}$	$100_{\times V}$	$150_{\times A}$	5
5	Icosaedro	$120_{\times F}$	$72_{\times V}$	$180_{\times A}$	6

¹⁵Link completo: <https://drive.google.com/drive/folders/15FzH1RAEK5p-fLtRAn8VaZZvv-mvNxtP?usp=sharing>

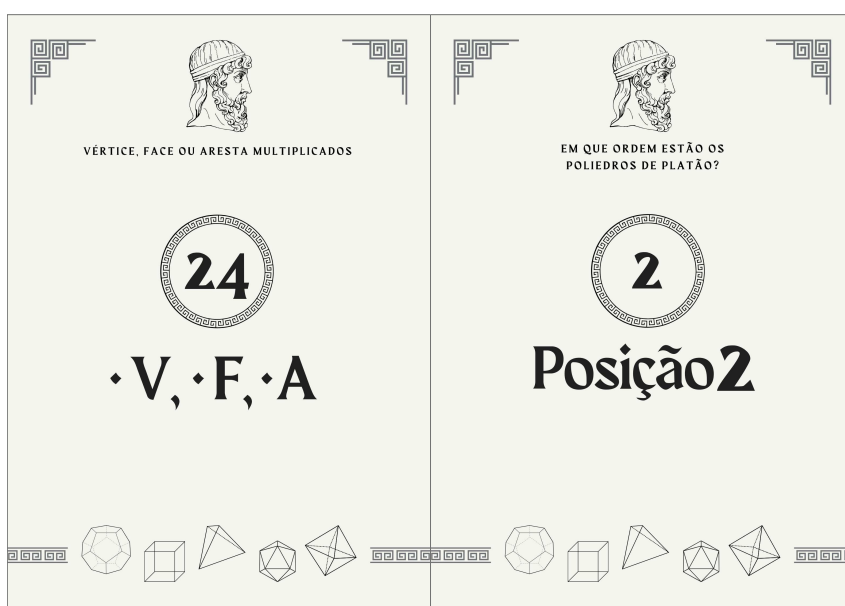
Dado o Quadro 96, construímos uma carta para cada um de seus valores. No verso de cada carta, deve constar a indicação da posição à qual ela pertence e o número que representa sua ordem. Ou seja: se a carta corresponder à coluna C1, sua ordem será 1; se corresponder à coluna C2, sua ordem será 2; e, se for da coluna C3, sua ordem será 3. Na frente da carta, deve estar indicada a informação multiplicada correspondente. As Figuras 10, 11 e 12 ilustram as cartas referentes aos valores da Posição 2 (isto é, da segunda linha) do Quadro 96.

Figura 10: Frente e verso da Carta IM da Posição 2, Coluna C1



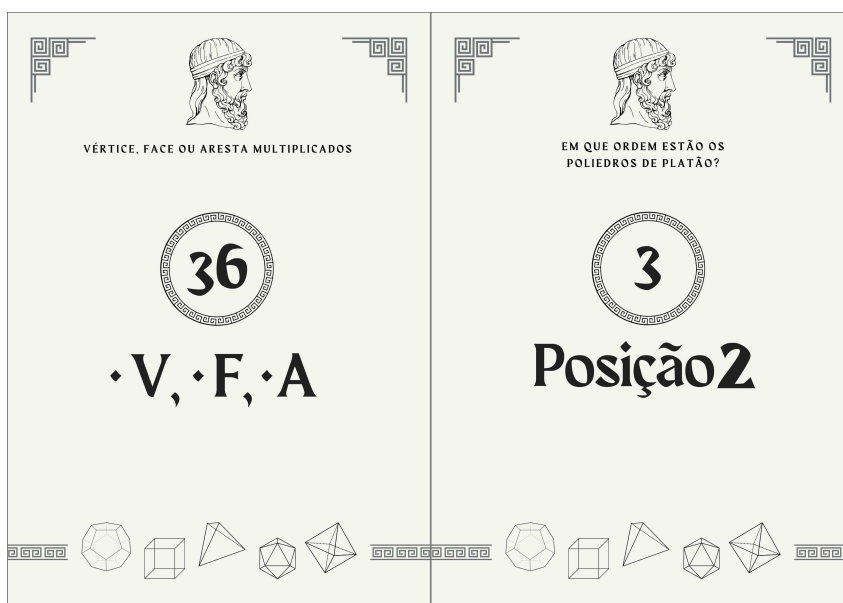
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11: Frente e verso da Carta da Posição 2, Coluna C2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12: Frente e verso da Carta da Posição 2, Coluna C3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na frente de cada carta, como exemplificado nas Figuras 10, 11 e 12, utilizamos, abaixo da informação multiplicada, os seguintes títulos: $\cdot V$, $\cdot F$ e $\cdot A$, que correspondem, respectivamente, às notações já conhecidas $\times V$, $\times F$ e $\times A$. Optamos por adotar o símbolo $\cdot$ no lugar de $\times$ na versão com cartas, simplesmente por preferência estética, pois nos agradou mais. Os títulos servem para indicar, com o auxílio da peça da argola — a ser apresentada mais adiante — a qual tipo pertence a informação multiplicada.

A Figura 13 apresenta todas as quinze cartas construídas a partir do Quadro 96, organizadas de acordo com suas respectivas posições e ordens. Trata-se, portanto, da versão do Quadro IM em cartas, motivo pelo qual as denominamos Cartas das Informações Multiplicadas (Cartas IM).

As Cartas IM iniciam o jogo apresentando o seu verso e devem ser organizadas conforme suas posições indicadas. As cartas da Posição 1 devem compor a primeira fileira, na parte superior, seguidas, em ordem descendente, pelas cartas das posições 2, 3, 4 e 5. Assim, as cinco fileiras formam uma grade visual com três cartas em cada linha, respeitando a ordem crescente de posição de cima para baixo. Em cada fileira, as cartas devem ser organizadas da esquerda para a direita, seguindo a ordem indicada: carta de ordem 1, seguida pela de ordem 2 e, por fim, pela de ordem 3. Em seguida, cada uma é virada, revelando sua frente e permanecendo organizada conforme ilustrado na Figura 13.

Figura 13: Cartas IM com Poliedros de Platão

 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 32 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$	 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 24 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$	 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 48 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$
 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 18 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$	 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 24 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$	 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 36 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$
 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 8 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$	 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 8 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$	 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 12 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$
 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 60 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$	 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 100 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$	 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 150 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$
 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 120 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$	 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 72 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$	 VÉRTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS 180 $\cdot V, \cdot F, \cdot A$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além das Cartas IM, construímos também as cartas que representam os poliedros de Platão, denominadas Cartas Poliedros de Platão. A Figura 14, por exemplo, ilustra a carta do Hexaedro, apresentando sua frente e seu verso.

Figura 14: Frente e verso de uma Carta Poliedro de Platão



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 15, visualizam-se as cinco Cartas Poliedros de Platão construídas com suas respectivas faces frontais. O verso dessas cartas é idêntico para todas e está ilustrado na Figura 14.

Figura 15: Cartas Poliedros de Platão



Fonte: Elaborado pelo autor.

A existência das Cartas Poliedros de Platão não elimina a possibilidade de utilizar as peças representativas dos poliedros de Platão durante o jogo.

Para os multiplicadores, construímos uma certa quantidade de cartas intituladas Cartas Multiplicadoras de Platão, que representam os possíveis valores utilizados para obter as Cartas IM. A Figura 16 ilustra a carta com o multiplicador 3, apresentando sua frente e seu verso.

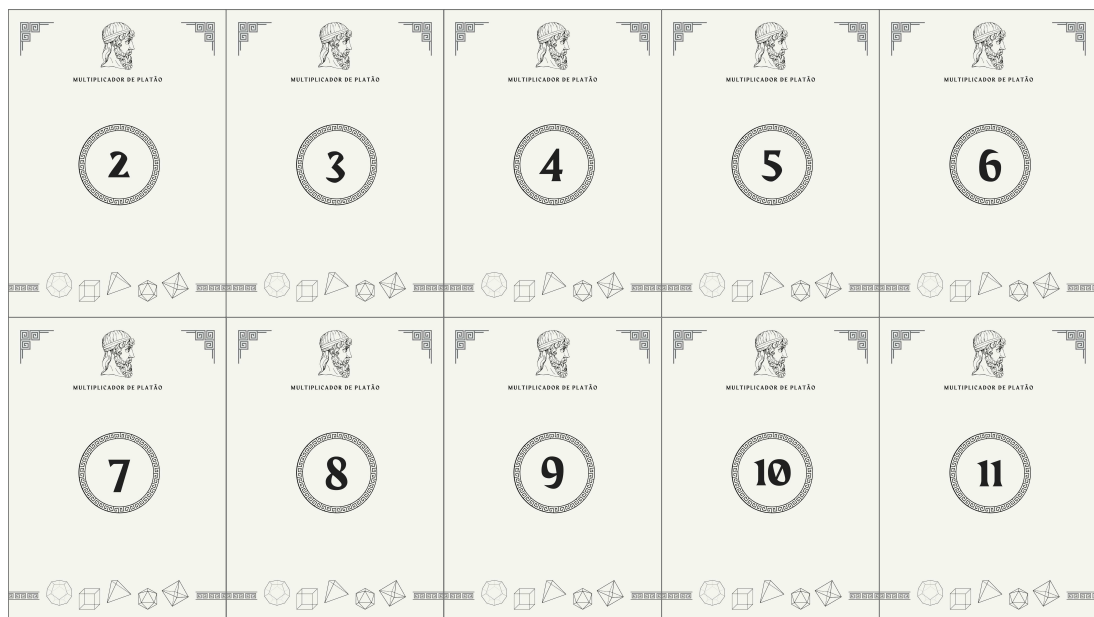
Figura 16: Frente e verso de uma Carta Multiplicadora de Platão



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 17 apresenta as dez Cartas Multiplicadoras de Platão construídas com suas respectivas faces frontais. O verso dessas cartas é idêntico para todas e está ilustrado na Figura 16.

Figura 17: Cartas Multiplicadoras de Platão



Fonte: Elaborado pelo autor.

Construímos quinze argolas, conforme ilustrado na Figura 18, uma para cada Carta IM, cuja finalidade é indicar, de maneira tátil e visual, o tipo de informação multiplicada representada em cada carta — $\cdot V$, $\cdot F$ ou $\cdot A$.

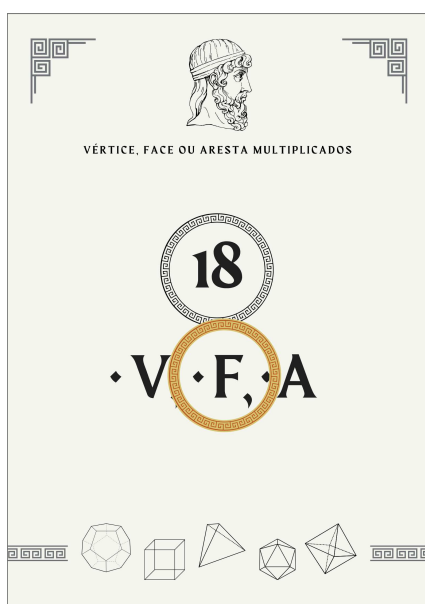
Figura 18: Argola



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 19, observa-se que a argola foi posicionada circulando a informação $\cdot F$. Isso significa que o número 18 representa o número de faces de algum poliedro de Platão multiplicado.

Figura 19: Carta IM da Posição 2, Ordem 1, respondida com a peça da Argola



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, a Figura 20 apresenta o jogo Em que ordem estão os Poliedros de Platão? em sua versão com cartas completamente respondido, com todas as cartas organizadas e suas respectivas respostas devidamente posicionadas, evidenciando a estrutura final da atividade.

Figura 20: Jogo Gerado com as Cartas IM da Figura 13 Respondido

 POLIEDRO DE PLATÃO Octaedro	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 MULTIPLICADOR DE PLATÃO
 POLIEDRO DE PLATÃO Hexaedro	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 MULTIPLICADOR DE PLATÃO
 POLIEDRO DE PLATÃO Tetraedro	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 MULTIPLICADOR DE PLATÃO
 POLIEDRO DE PLATÃO Dodecaedro	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 MULTIPLICADOR DE PLATÃO
 POLIEDRO DE PLATÃO Icosaedro	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 VERTICE, FACE OU ARESTA MULTIPLICADOS $\cdot V \cdot F \cdot A$	 MULTIPLICADOR DE PLATÃO

Fonte: Elaborado pelo autor.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de Matemática no Brasil enfrenta desafios persistentes, evidenciados pelos baixos índices de desempenho nas avaliações nacionais e internacionais. Diante desse cenário, diversas abordagens metodológicas têm sido propostas para tornar a aprendizagem mais acessível e eficaz. Entre essas abordagens, o uso de jogos educativos destaca-se como uma estratégia promissora para engajar os alunos, estimular o raciocínio lógico e contribuir para a superação das dificuldades de aprendizagem na disciplina.

Neste trabalho, desenvolvemos uma proposta didática baseada nos Jogos dos Poliedros, um conjunto de jogos voltados para o ensino de conceitos geométricos no 6º ano do Ensino Fundamental, alinhados às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A proposta busca explorar a ludicidade como ferramenta pedagógica, oferecendo aos estudantes um ambiente interativo que favorece a construção do conhecimento matemático de maneira dinâmica e contextualizada.

Acreditamos que a implementação dessa proposta pode contribuir para um ensino de Matemática mais motivador, permitindo aos estudantes superar bloqueios cognitivos e emocionais frequentemente associados à disciplina. Embora o presente estudo tenha se concentrado no desenvolvimento e fundamentação dos jogos, sem sua experimentação direta em sala de aula, espera-se que trabalhos futuros possam testar sua eficácia na aprendizagem dos alunos. Esses estudos também poderão contribuir para o aprimoramento da proposta apresentada, ajustando as regras, os materiais e as estratégias pedagógicas utilizadas em diferentes realidades educacionais.

Com vistas à sua aplicabilidade, recomenda-se que os Jogos dos Poliedros sejam inseridos no contexto de uma sequência didática, favorecendo uma abordagem mais estruturada e eficaz no desenvolvimento das atividades. Essa organização em etapas permite ao professor conduzir o processo de forma progressiva, articulando os jogos aos objetivos de aprendizagem previstos na BNCC. Investigações posteriores poderão explorar sua implementação em contextos escolares reais, com análises quantitativas e qualitativas sobre seu impacto. Além disso, essa abordagem apresenta potencial para ser estendida a outras séries do Ensino Fundamental, ampliando seu alcance para além do 6º ano.

Por fim, esta pesquisa reforça a importância de buscar metodologias inovadoras para o ensino de Matemática, ressaltando que o aprendizado dessa disciplina pode ser um processo prazeroso e significativo. Espera-se que o trabalho aqui desenvolvido inspire novas investigações e contribua para a construção de práticas pedagógicas cada vez mais eficazes no ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS

ASCOLI, Cleonice Claudete Brancher; BRANCHER, Vantoir Roberto. Jogos matemáticos: algumas reflexões sobre os processos de ensino e aprendizagem. 2006.

BALESTRA, Maria Marta Mazaro; GEQUELIN, Franciele. O papel do jogo no processo de aprendizagem e na relação conhecimento espontâneo x conhecimento formal. **Revista Eletrônica de Ciências da Educação**, Campo Largo, v. 7, n.1, jun. 2008. Disponível em: <https://periodicosibepes.org.br/index.php/reped/article/view/315>. Acesso em: 7 jan. 2025.

BIANCHINI, Gisele; GERHARDT, Tatiane; DULLIUS, Maria Madalena. JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA “QUAIS AS POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DO USO DE JOGOS NO PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA?”. **Revista Destaques Acadêmicos**, [S. l.], v. 2, n. 4, 2011. Disponível em: <https://www.univates.br/revistas/index.php/destaques/article/view/83>. Acesso em: 10 set. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. 142 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 7 jun. 2024.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 174 p.

CLEOPHAS, Maria das Graças; CAVALCANTI, Eduardo Luiz Dias; SOARES, Márlon Herbert Flora Barbosa. Afinal de contas, é jogo educativo, didático ou pedagógico no ensino de Química/Ciências? Colocando os pingos nos “is”. In: CLEOPHAS, Maria das Graças; SOARES, Márlon Herbert Flora Barbosa (Orgs). **Didatização Lúdica no ensino de Química/Ciências: teorias de aprendizagem e outras interfaces**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018. p. 33-43.

CLEOPHAS, Maria das Graças; SOARES, Márlon Herbert Flora Barbosa. À guisa de apresentação: quando se abrem as cortinas da ludicidade em ensino de química/ciências. In: CLEOPHAS, Maria das Graças; SOARES, Márlon Herbert Flora Barbosa (Orgs). **Didatização Lúdica no ensino de Química/Ciências: teorias de aprendizagem e outras interfaces**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018. p. 11-14

D’AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM, Ano II, n. 2, p. 15-19. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/td/article/view/2651> . Acesso em: 7 dez.

2024.

FELIX DE CARVALHO LIMA, Luiza Renata; DA SILVA MESSEDER NETO, Hélio. O debate conceitual do jogo no ensino de química/ciências: nem todos os “is” têm pingô. **Revista Eletrônica Ludus Scientiae**, [S. l.], v. 5, n. 1-2, 2021. DOI: 10.30691/relus.v5i1-2.2844. Disponível em: <https://revistas.unila.edu.br/relus/article/view/2844>. Acesso em: 10 nov. 2024

GANDRO, R.C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese. Doutorado. Universidade de Campinas. Campinas: Unicamp, 2000 . Disponível em: http://matpraticas.pbworks.com/w/file/124818583/tese_grando%281%29.pdf . Acesso em: 15 out. 2024.

GUIRADO, João Cesar et al. **Jogos matemáticos na educação básica: a magia de ensinar e aprender**. Campo Mourão: Fecilcam, 2018. 135 p.: il. Disponível em: <http://campomourao.unespar.edu.br/editora/obrasdigitais>. Acesso em: 7 nov. 2024. ISBN 978-85-88753-49-5.

IMPA - INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Brasil é promovido à elite da matemática mundial**. Disponível em: <https://impa.br/noticias/brasil-e-promovido-a-elite-da-matematica-mundial/>. Acesso em: 15 dez. 2024.

IMPA - INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Página institucional**. Disponível em: <https://impa.br/>. Acesso em: 16 dez. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Divulgados os resultados do PISA 2022**. Ministério da Educação. Publicado em: 05 dez. 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022>. Acesso em: 15 dez. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **PISA**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa>. Acesso em: 15 dez. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA 2022: Resultados**. Brasília: INEP, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes-internacionais/pisa/resultados/2022/apresentacao_pisa_2022_brazil.pdf. Acesso em: 15 dez. 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Relatório de resultados do Saeb 2019: volume 1: 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e séries finais do Ensino Médio**. Brasília, DF: INEP, 2021. 245 p. ISBN 978 – 65 – 5801 – 050 – 0. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2019_volume_1.pdf Acesso em: 15 dez.

2024.

MONIS, Amanda Pontes Silvério. **O impacto do apoio familiar na aprendizagem: investigação em uma escola pública do Rio de Janeiro**. 2023. Disponível em: <http://www.repositorio-bc.unirio.br:8080/xmlui/handle/unirio/13787?show=full> Acesso em: 10 nov. 2024.

MOVIMENTO PELA BASE. **MEC divulga resultados do SAEB 2023: análise dos dados em relação à BNCC**. 2023. Disponível em: <https://observatorio.movimentopelabase.org.br/mec-divulga-resultados-do-saeb-2023-analise-dos-dados-em-relacao-a-bncc/>. Acesso em: 14 dez. 2024.

OECD. **PISA 2018 Results: What Students Know and Can Do**, PISA, OECD Publishing, Paris, 2019. v. 1. Acesso em: <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>. Acesso em: 3 dez. 2024.

OECD. **PISA 2022 Assessment and Analytical Framework**. Paris: OECD Publishing, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>. Acesso em: 3 dez. 2024.

OECD. **PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education**. PISA, OECD Publishing, Paris, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1787/53f23881-en> Acesso em: 3 dez. 2024.

O GLOBO. **PISA 2022: Brasil está entre os 20 piores em Matemática e Ciências; veja mapa com as notas de todos os países**. O Globo, Rio de Janeiro, 5 dez. 2023. Disponível em: <https://oglobo.globo.com/brasil/educacao/noticia/2023/12/05/pisa-2022-brasil-esta-entre-os-20-piores-em-matematica-e-ciencias-veja-mapa-com-as-notas-de-todos-os-paises.ghtml>. Acesso em: 6 dez. 2024.

OLIVEIRA, Luciana Trevenzoli de. **Investigação dos fatores que influenciam a aprendizagem matemática e uma análise dos resultados obtidos em uma escola pública do município do Rio de Janeiro**. 2024. 120 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2024. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 14 dez. 2024.

PONTES, Edel Alexandre Silva. **MÉTODO DE POLYA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**. HOLOS, [S. l.], v. 3, p. 1–9, 2019. DOI: 10.15628/holos.2019.6703. Disponível em: <https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/6703>. Acesso em: 16 out. 2024.

PONTES, Edel Guilherme Silva; PONTES, Edel Alexandre Silva; SILVA, Luciano Martins da; SILVA, Robespierre Cocker Gomes da; MIRANDA, Janaina Rodrigues de; SANTOS, Janaine Ferreira dos. Recomendações Teóricas de um Jogo Matemático Desenvolvido a Partir do Conceito Intuitivo de um Terno Pitagórico . **Diversitas Journal**, [S. l.], v. 5, n. 4, p. 3169–3179, 2020. DOI: 10.17648/diversitas-journal-v5i4-1279. Disponível em: https://diversitasjournal.com.br/diversitas_journal/article/view/1279. Acesso em: 15 dez. 2024.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

QUEIROZ, André Machado de. **A utilização de jogos como ferramenta de auxílio ao ensino de Matemática**. 2023. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Quixadá, 2023. Disponível em: <https://proformat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 10 jan. 2025.

SALES, Moisés dos Santos de. **Uma proposta pedagógica para o ensino de determinantes: uma aplicação do jogo da velha no cilindro**. 2024. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Teresina, 2024. Disponível em: <https://proformat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 20 dez. 2024.

SANTOS, F. L. F. **A matemática e o jogo: influência no rendimento escolar**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa - FCT-UNL, 2008.

SANTOS, Jorge Batista. **As dificuldades no processo de ensino-aprendizagem no ensino médio do colégio estadual Dr. Jessé Fontes**. 2006. Disponível em: <https://monografias.brasilecola.uol.com.br/matematica/a-matematica-dificuldades-no-processo-ensino-aprendizagem.htm>. Acesso em: 15 dez de 2024.

SILVA, Aparecida Francisco da; KODAMA, Hélia Matiko Yano. Jogos no Ensino da Matemática. In: **II BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**, UFBA, out. 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/OF11.pdf>. Acesso em: 23 dez. 2024.

SILVA, Claudiana Alves da. **A utilização de jogos no ensino da Matemática**. 2010. [número total de folhas] f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual de Goiás, Unidade Universitária de Jussara, Jussara-GO, 2010. Disponível em: https://www.ueg.br/jussara/conteudo/20492_matematica . Acesso em: 5 out. 2024

SILVA, Mônica Soltau da. **Clube da Matemática: Jogos Educativos**. 3.ed. Campinas,SP: Papirus, 2004. (série atividades) (3 ed. 2007).

SILVA, Silvana Vieira da. **Os jogos como recurso didático em Matemática**. 2010. [número total de folhas] f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual de Goiás, Unidade Universitária de Jussara, Jussara-GO, 2010. Disponível em: https://www.ueg.br/jussara/conteudo/20492_matematica . Acesso em: 5 out. 2024

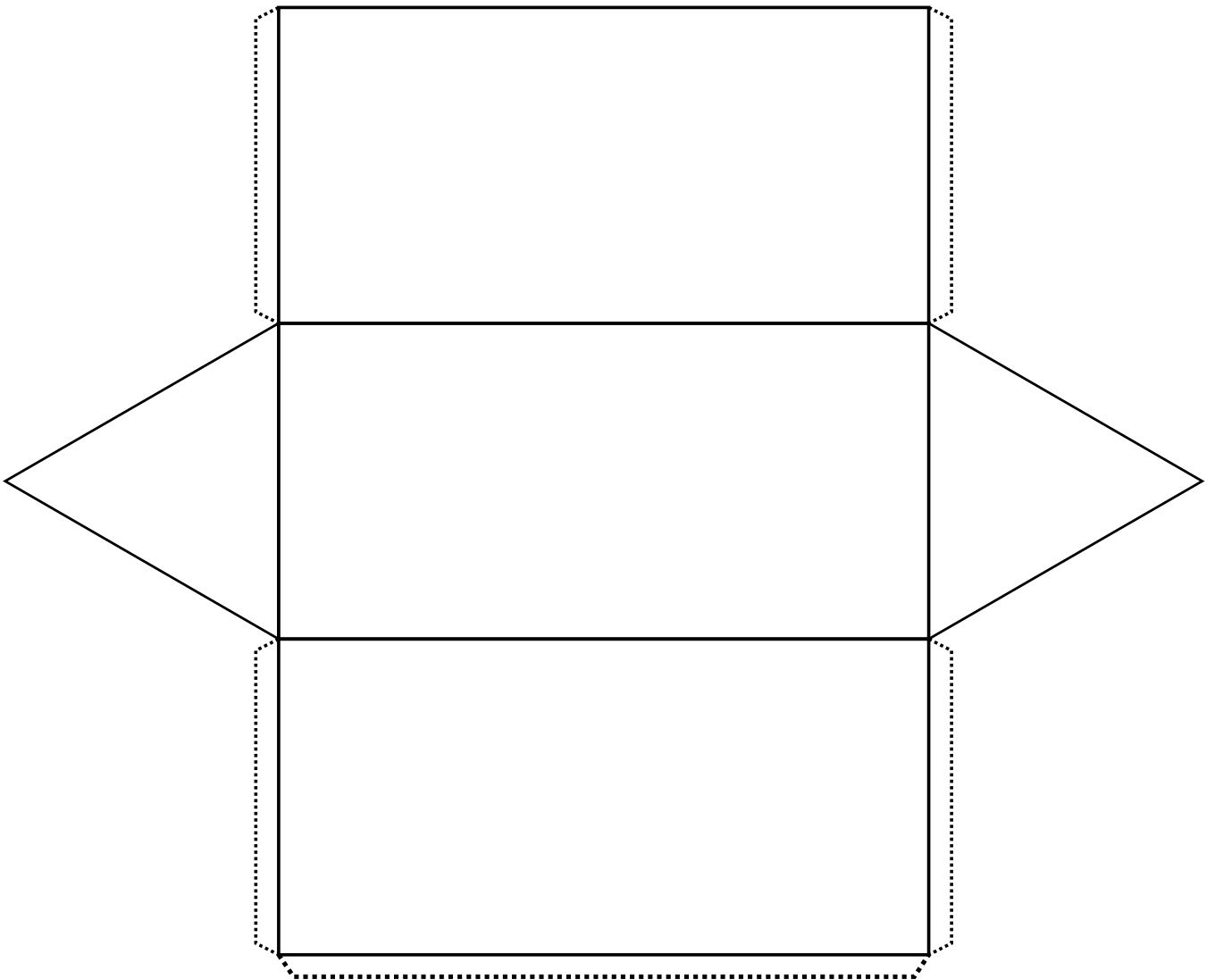
SOUZA, Maria Ester Prado. **Família/escola: a importância dessa relação no desempenho escolar**. Paraná. 2009. Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1764-8.pdf>. Acesso em: 15 dez de 2024.

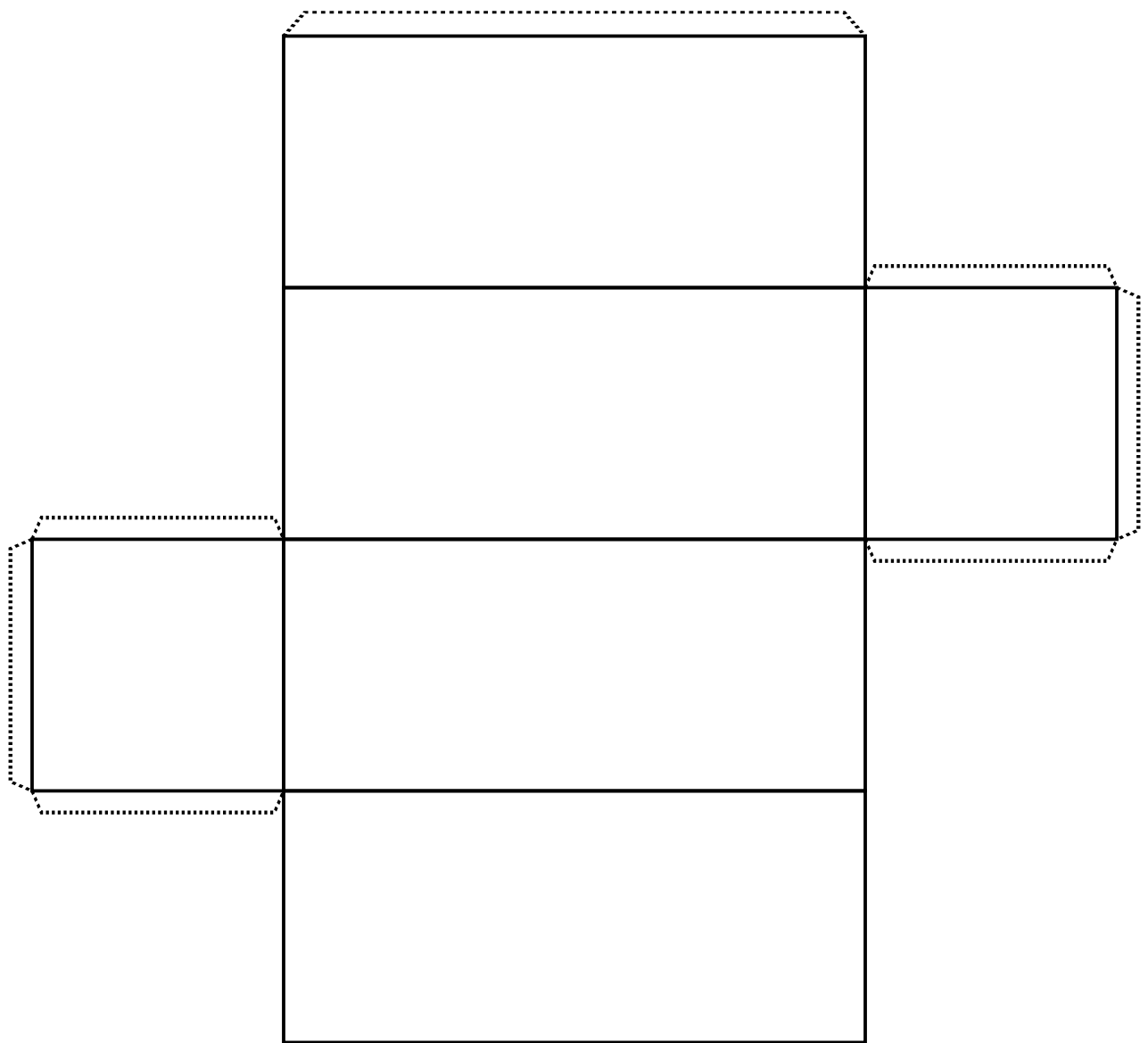
ZANARDI, Daniela Cristina; SILVA, Flávio Roberto Dias. O USO DE JOGOS, COM VISTAS À UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA MATEMÁTICA. In: **PARANÁ**. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016. Curitiba: SEED/PR., 2018. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unioeste_danielacristinazanardi.pdf. Acesso em 5 out. 2024. ISBN 978-85-8015-093-3

ANEXO – PLANIFICAÇÕES E PERSPECTIVAS DOS POLIEDROS MONTADOS

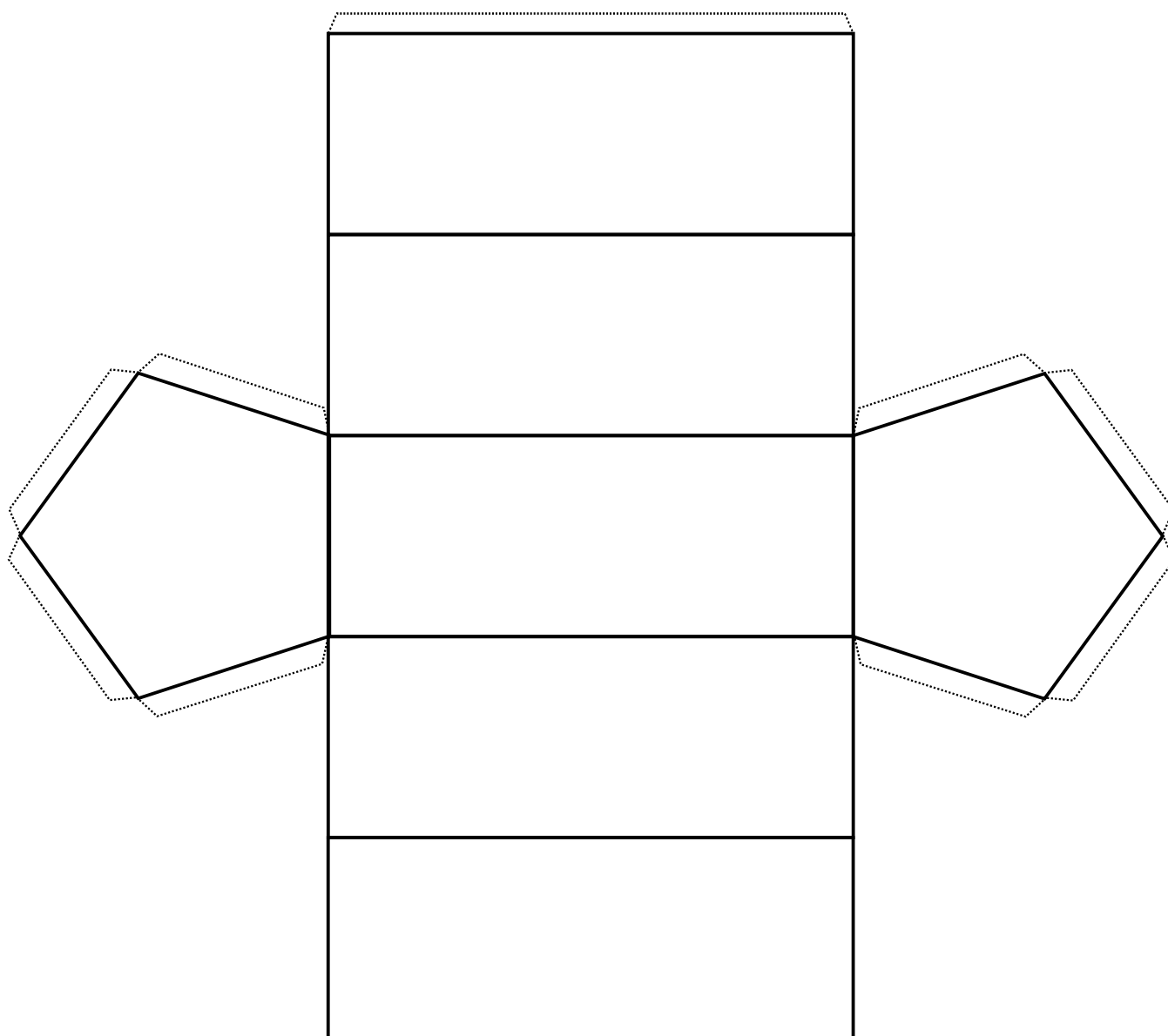
PLANIFICAÇÃO DE UM PRISMA DE BASE TRIANGULAR



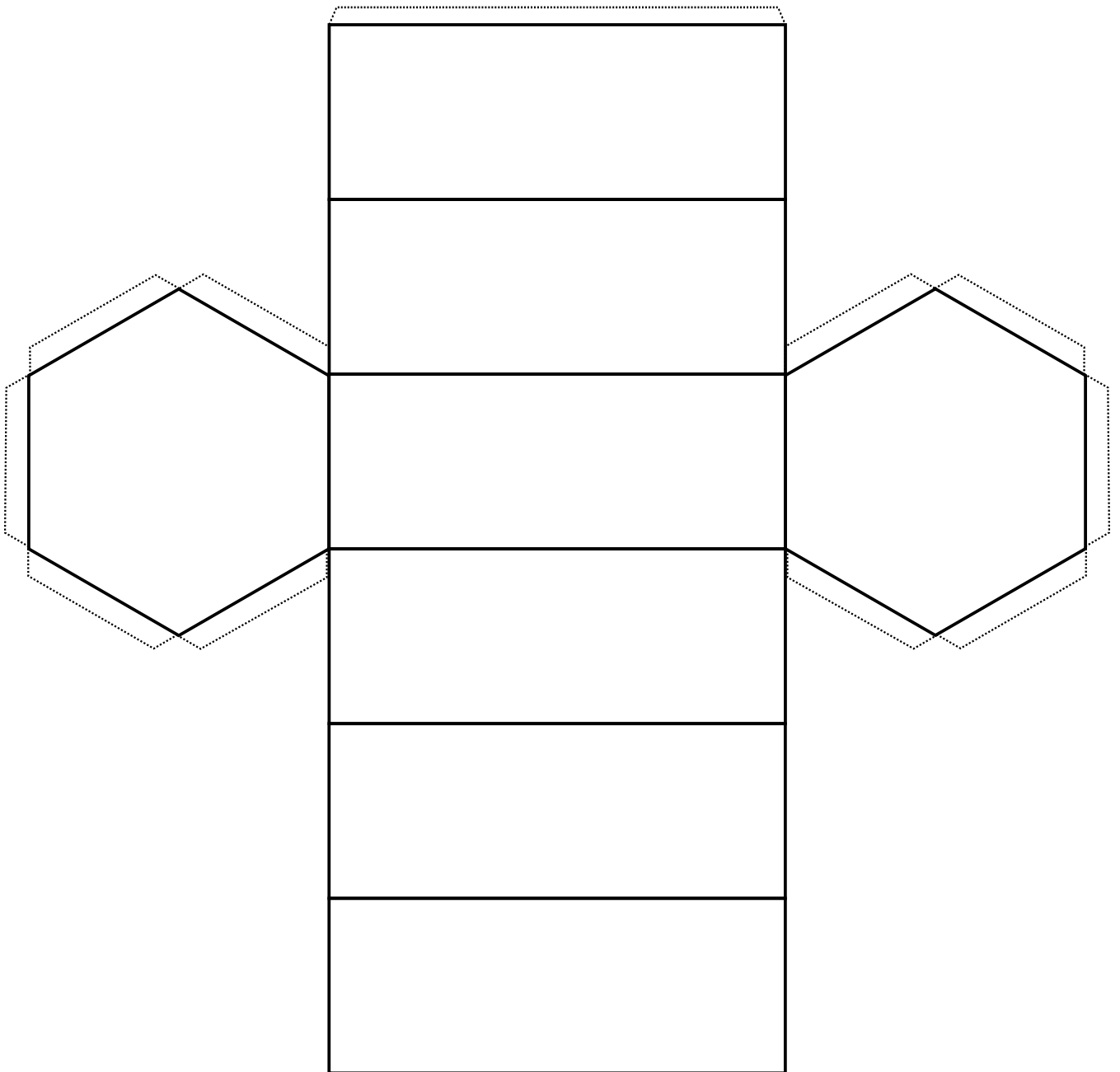
PLANIFICAÇÃO DE UM PRISMA DE BASE QUADRANGULAR



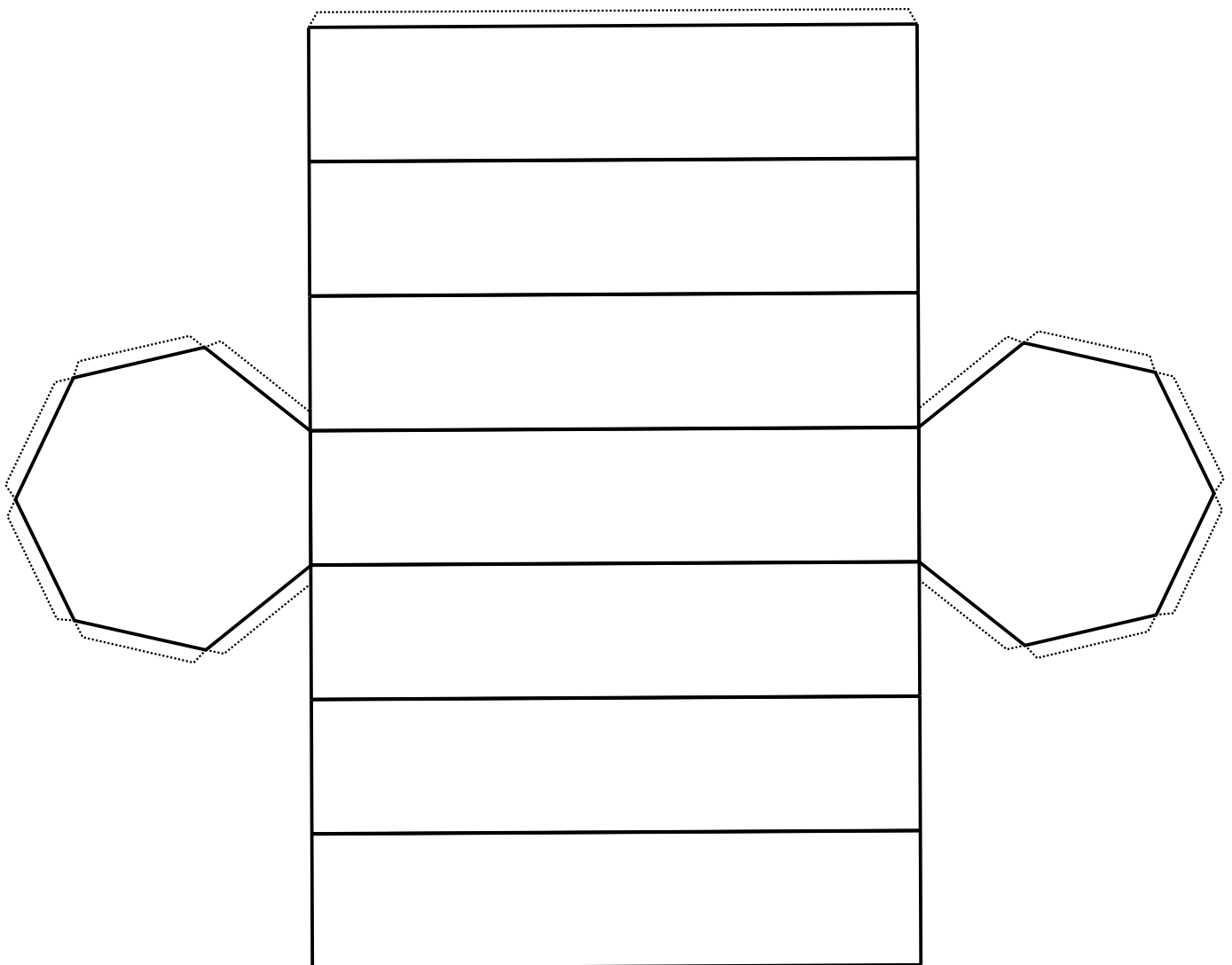
PLANIFICAÇÃO DE UM PRISMA DE BASE PENTAGONAL



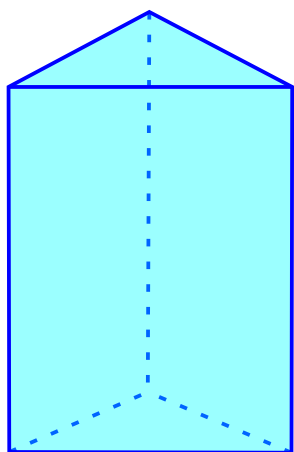
PLANIFICAÇÃO DE UM PRISMA DE BASE HEXAGONAL



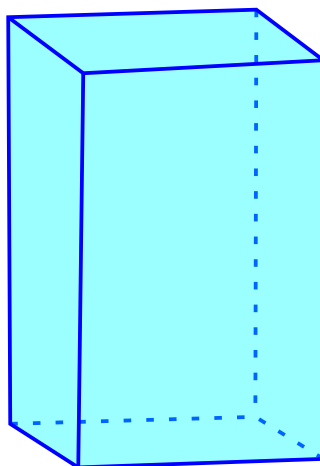
PLANIFICAÇÃO DE UM PRISMA DE BASE HEPTAGONAL



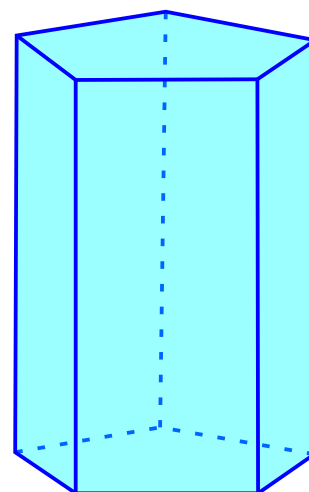
PERSPECTIVAS DOS PRISMAS MONTADOS



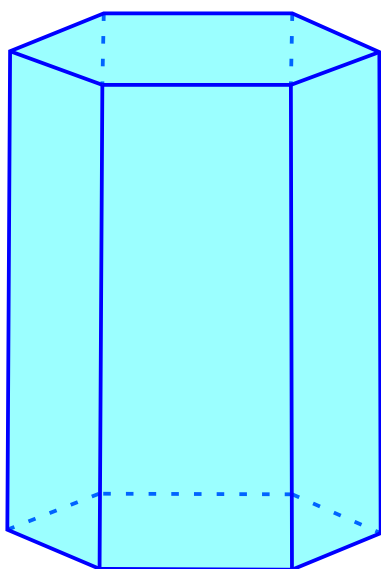
Prisma de
base triangular



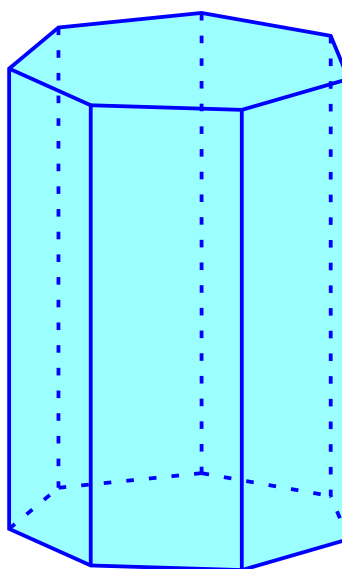
Prisma de
base quadrangular



Prisma de
base pentagonal

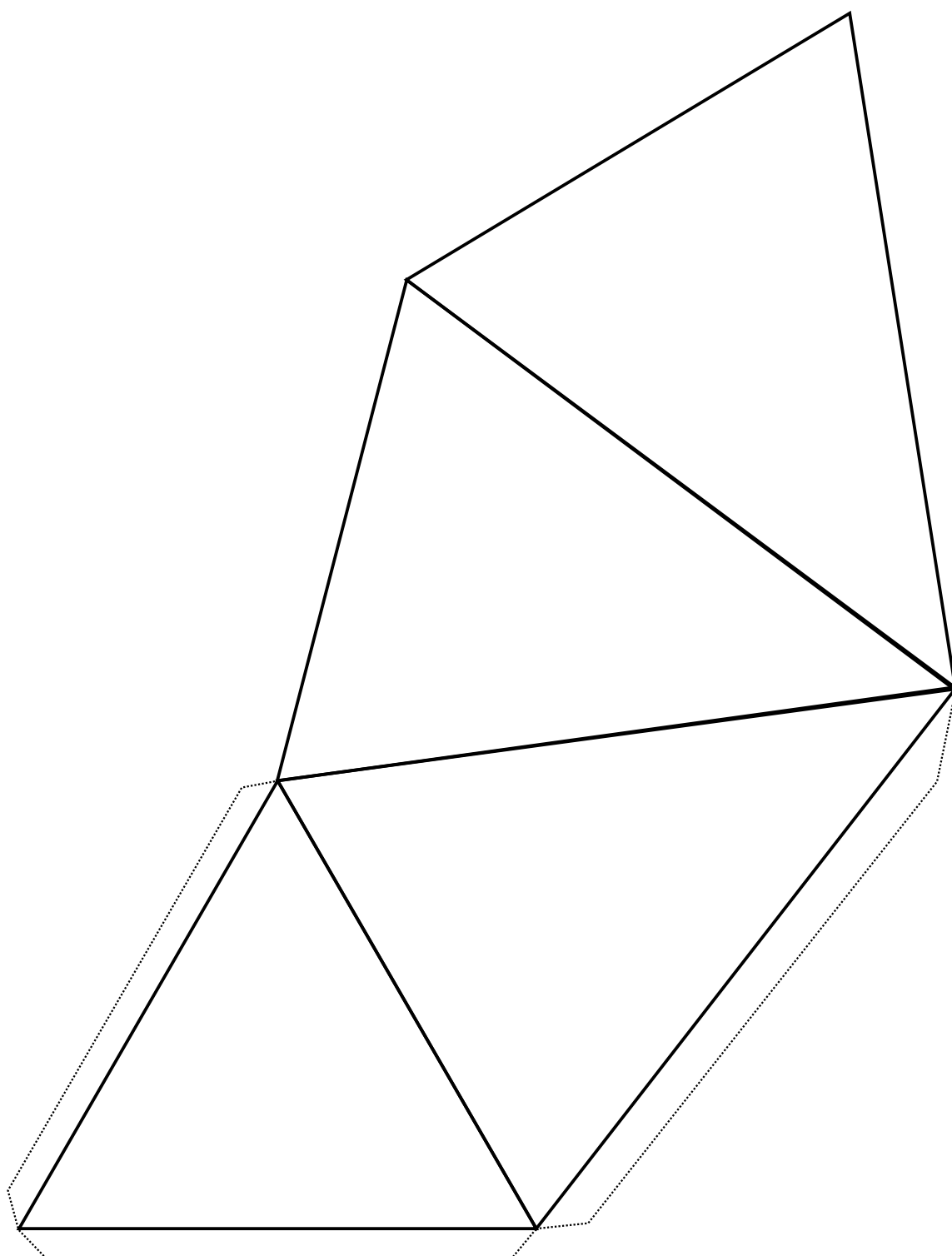


Prisma de
base hexagonal

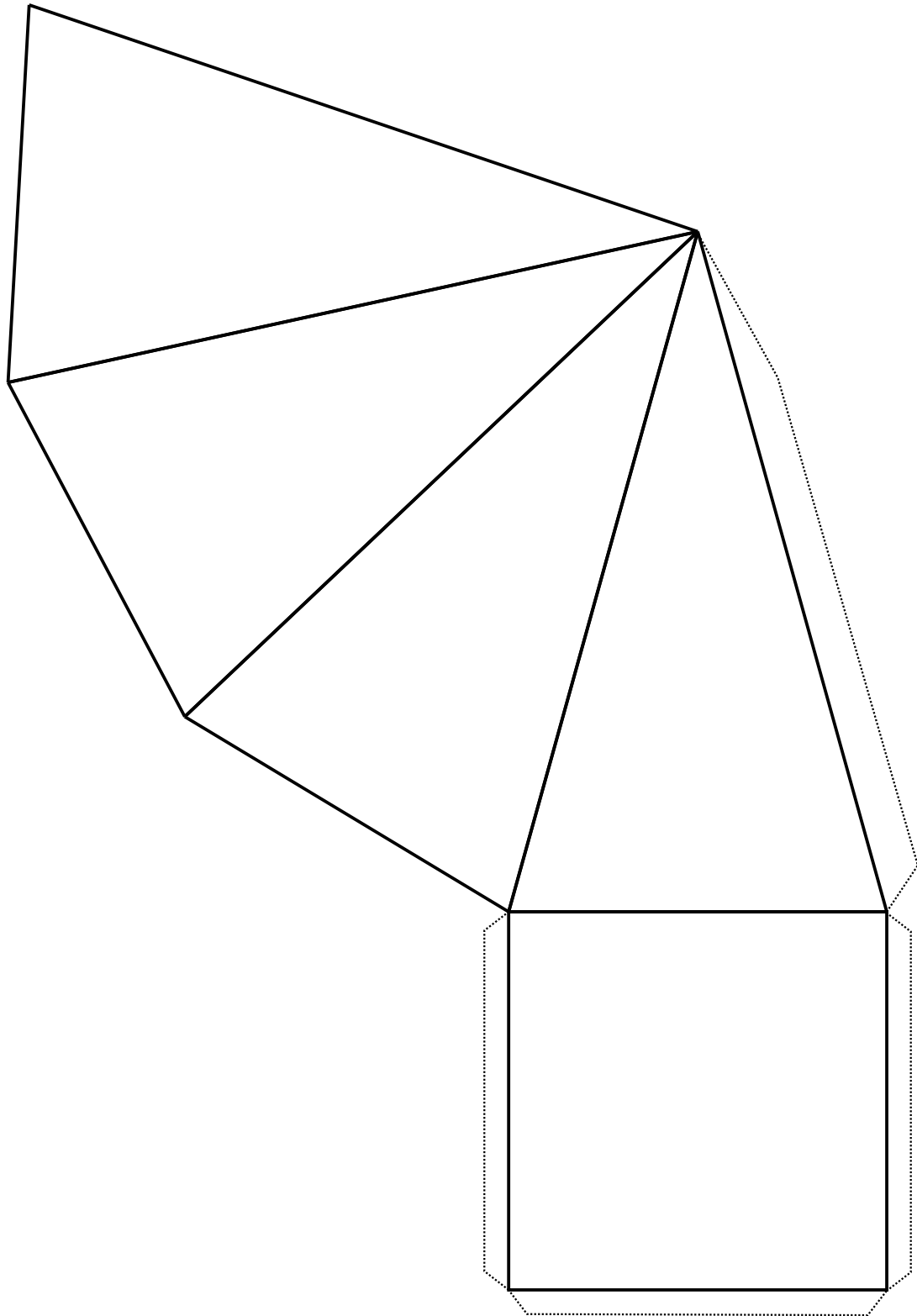


Prisma de
base heptagonal

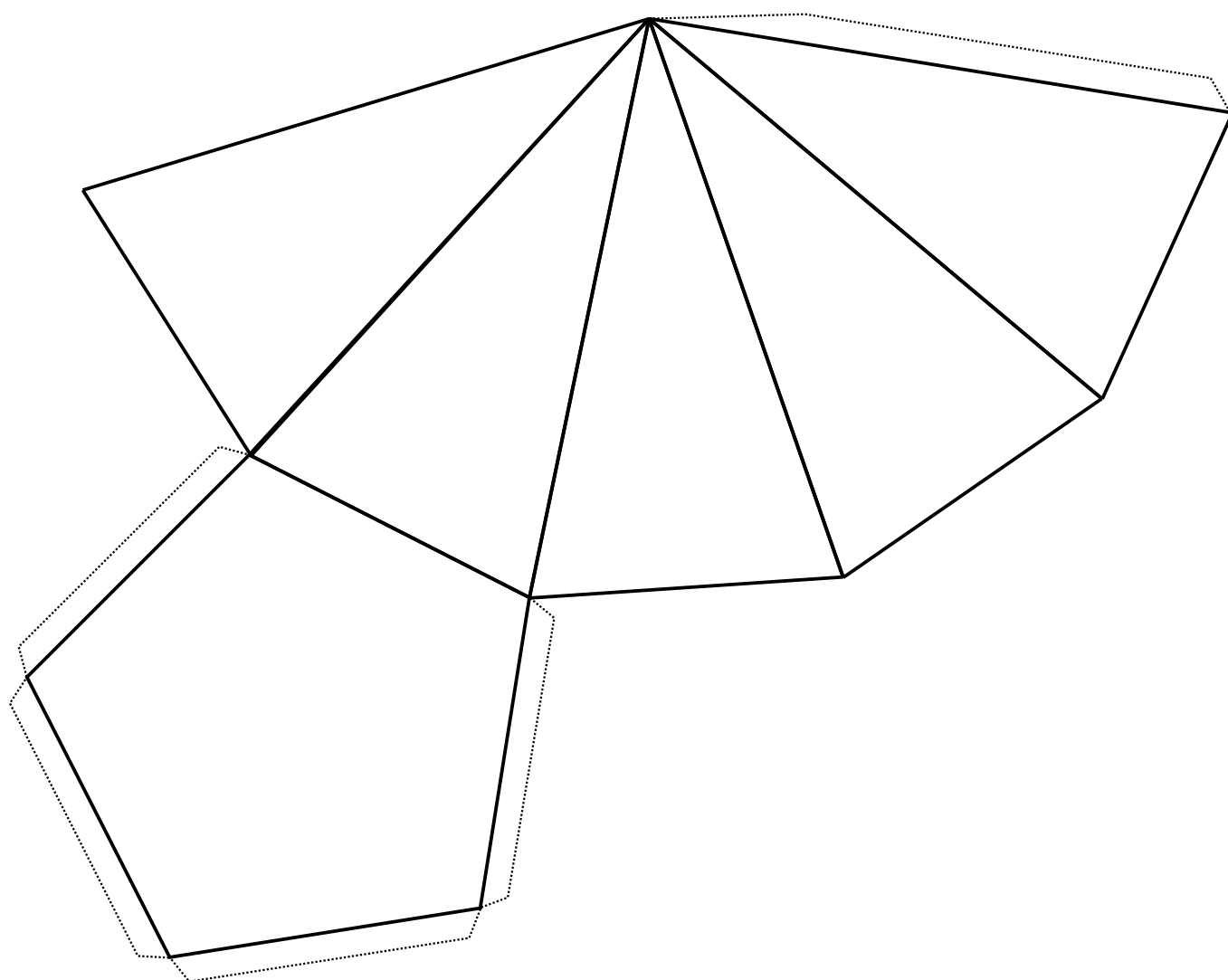
PLANIFICAÇÃO DE UMA PIRÂMIDE DE BASE TRIANGULAR



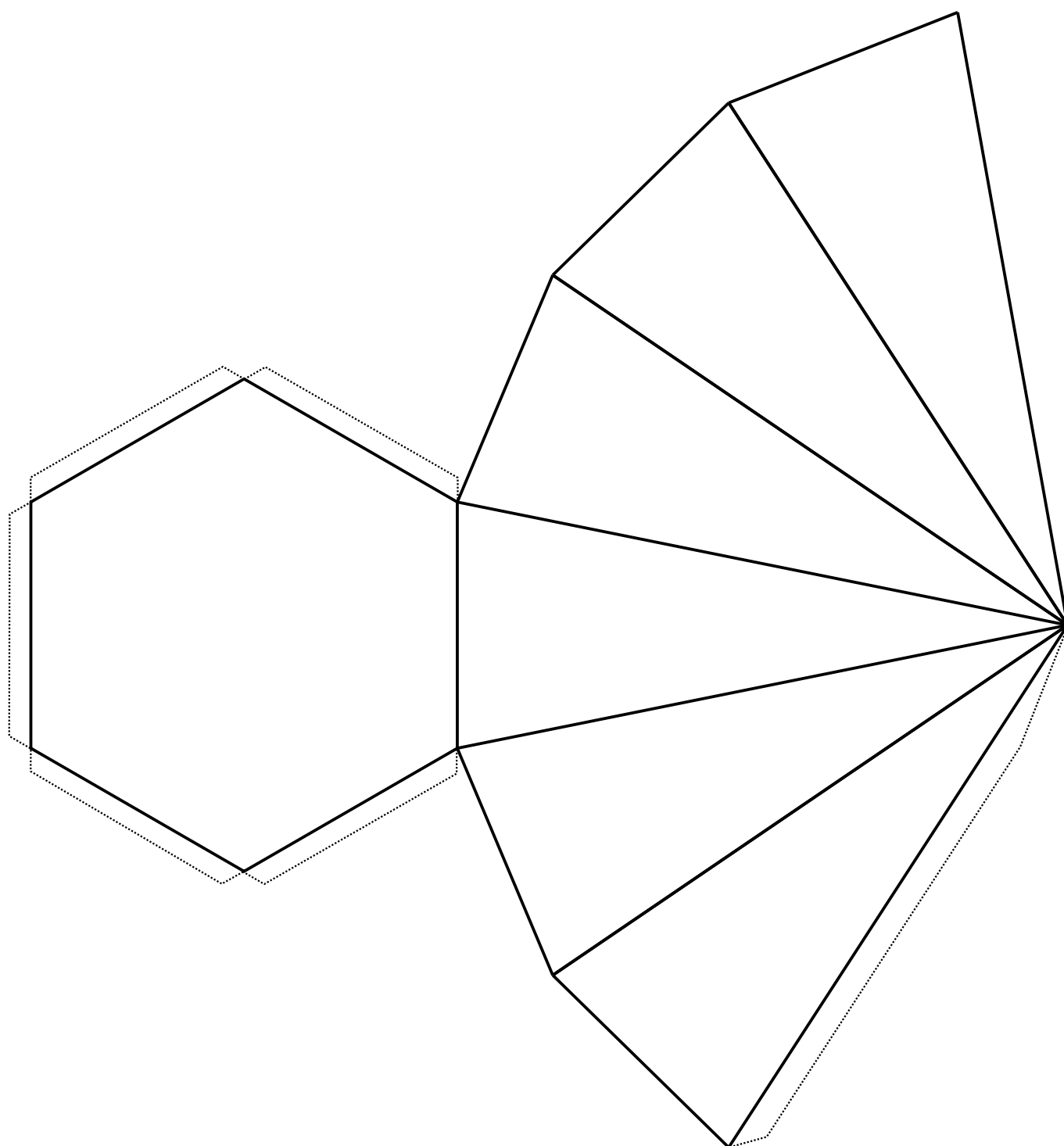
PLANIFICAÇÃO DE UMA PIRÂMIDE DE BASE QUADRANGULAR



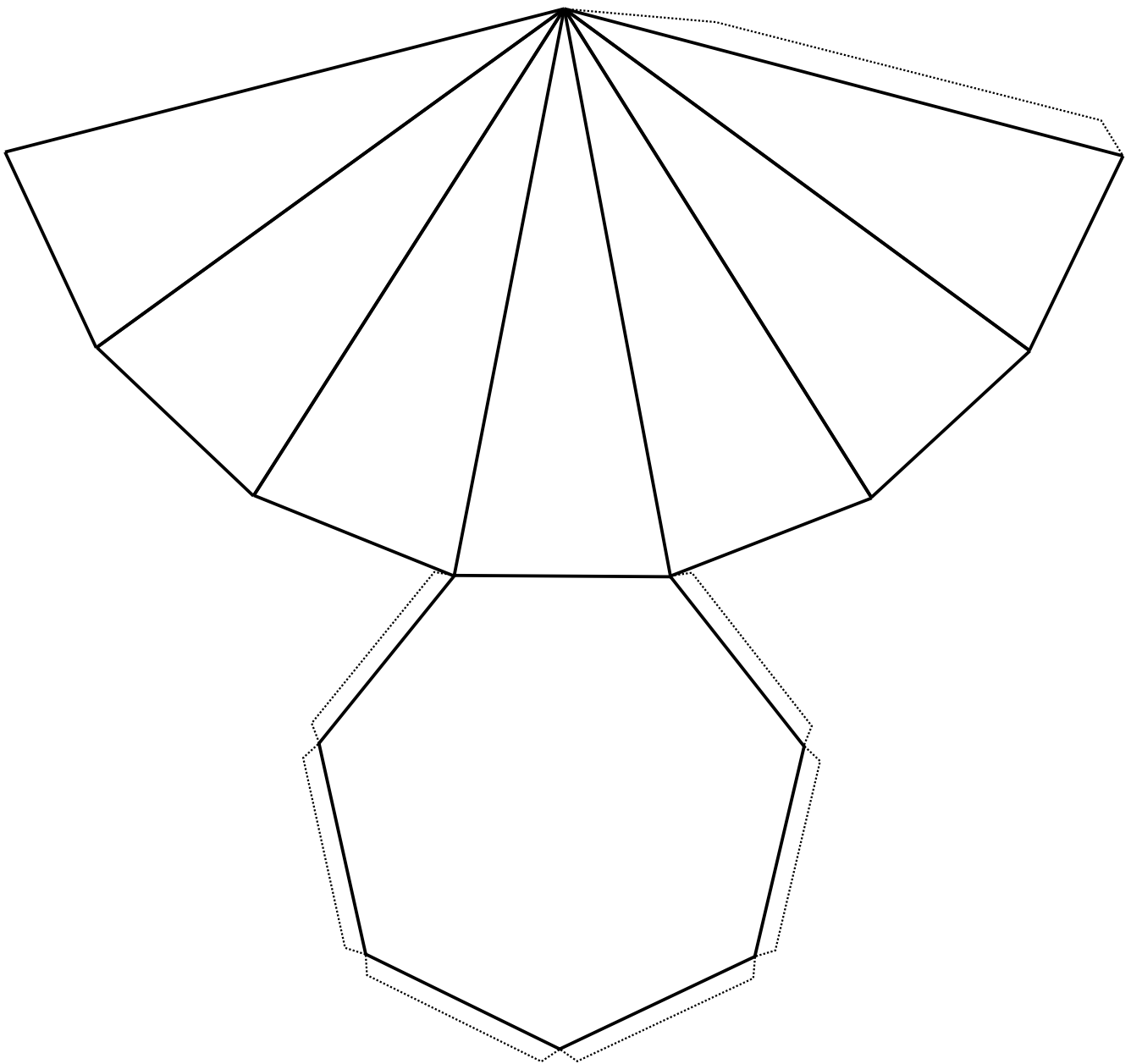
PLANIFICAÇÃO DE UMA PIRÂMIDE DE BASE PENTAGONAL



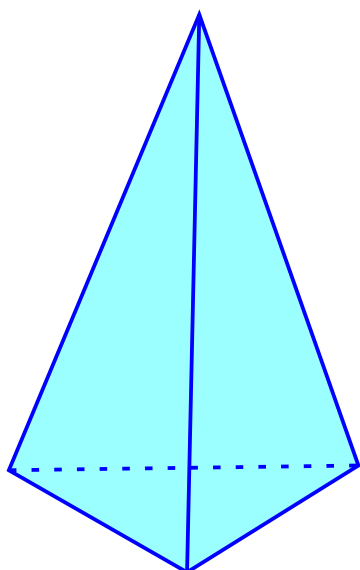
PLANIFICAÇÃO DE UMA PIRÂMIDE DE BASE HEXAGONAL



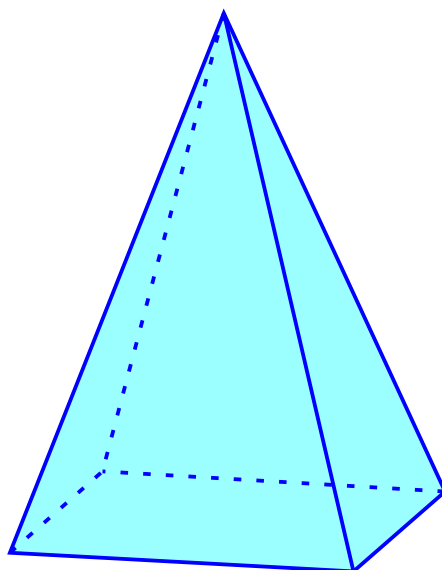
PLANIFICAÇÃO DE UMA PIRÂMIDE DE BASE HEPTAGONAL



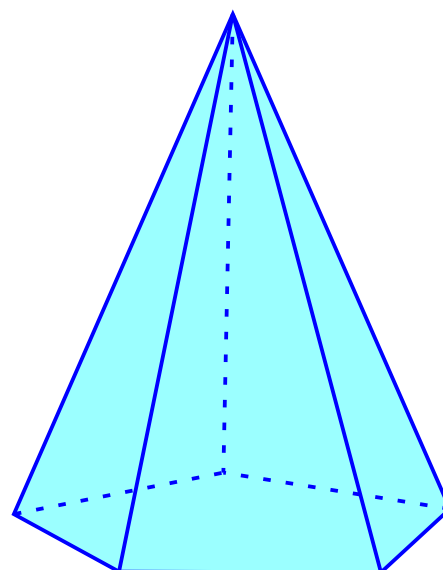
PERSPECTIVAS DAS PIRÂMIDES MONTADAS



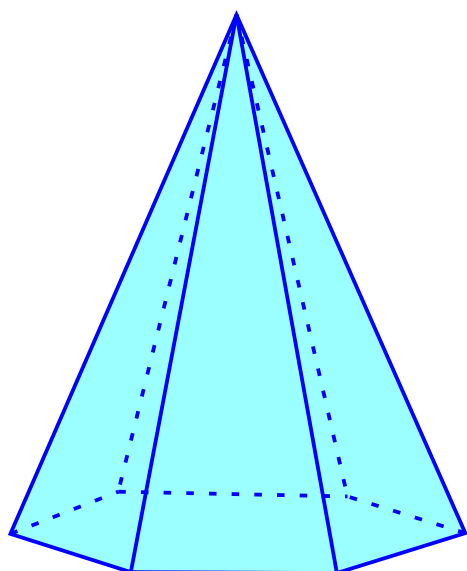
Pirâmide de base
triangular



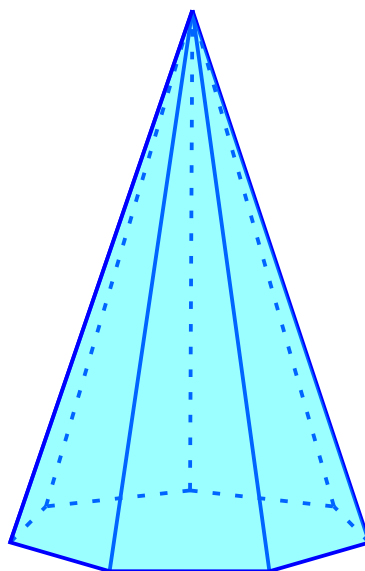
Pirâmide de base
quadrangular



Pirâmide de base
pentagonal

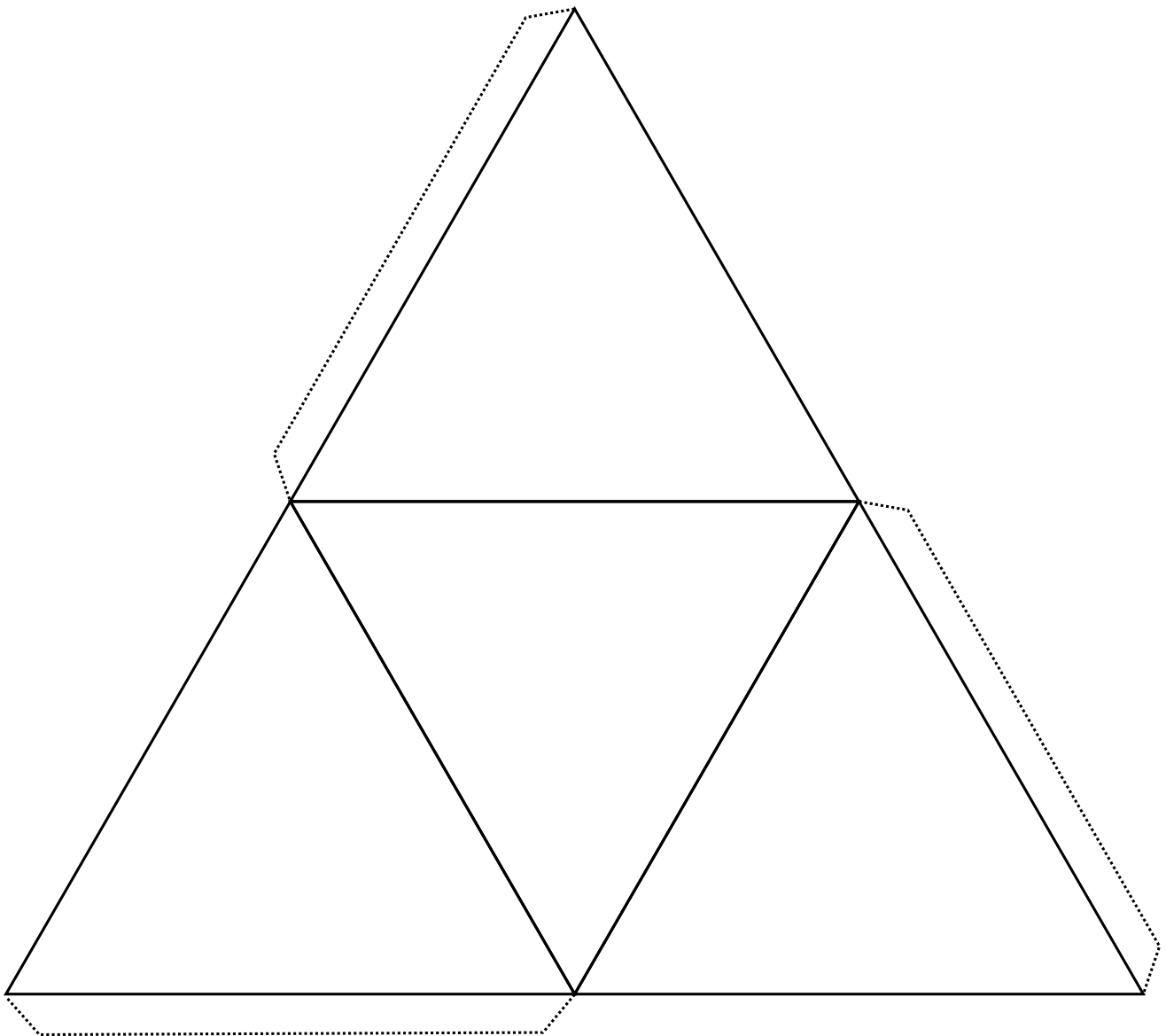


Pirâmide de base
hexagonal

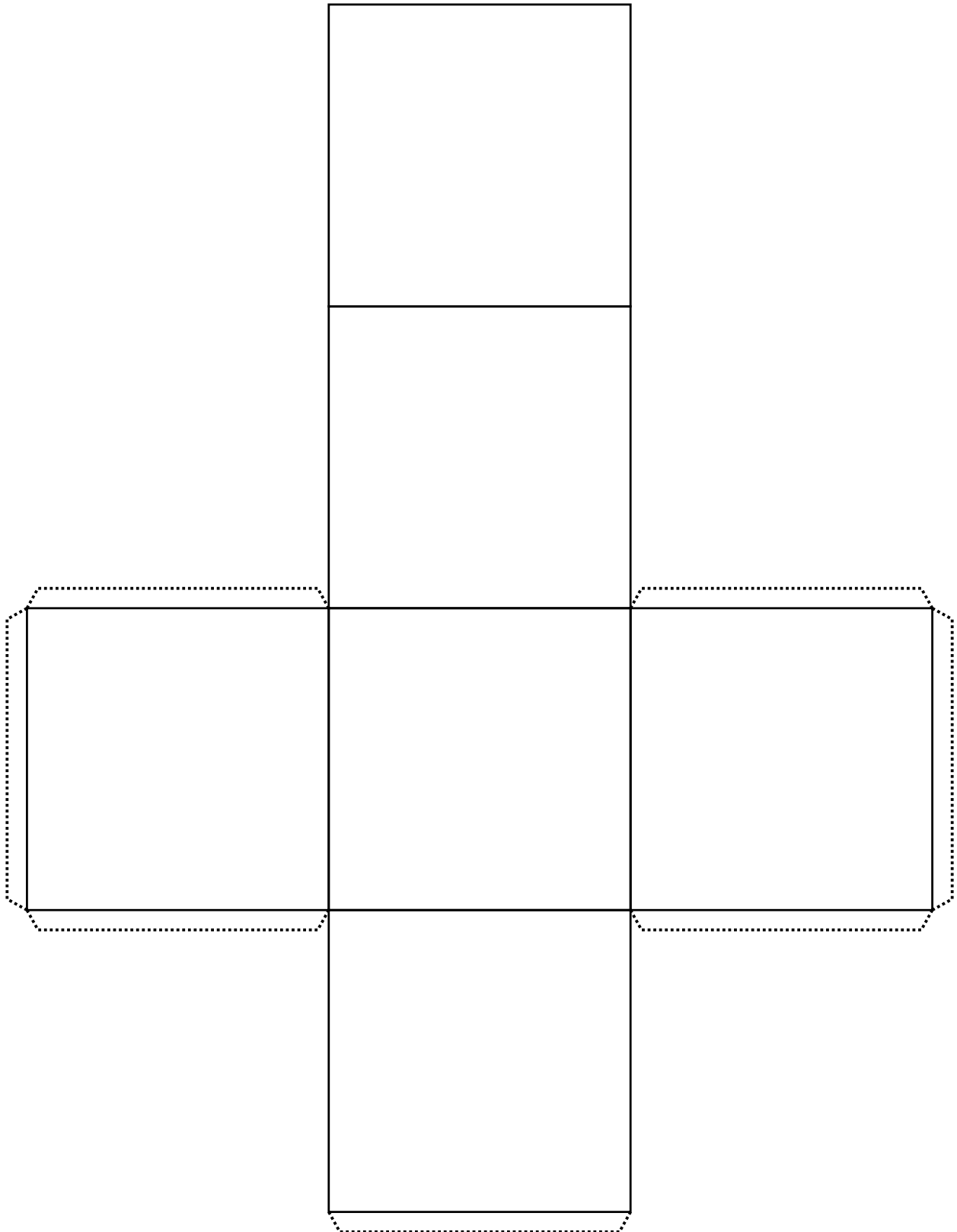


Pirâmide de base
heptagonal

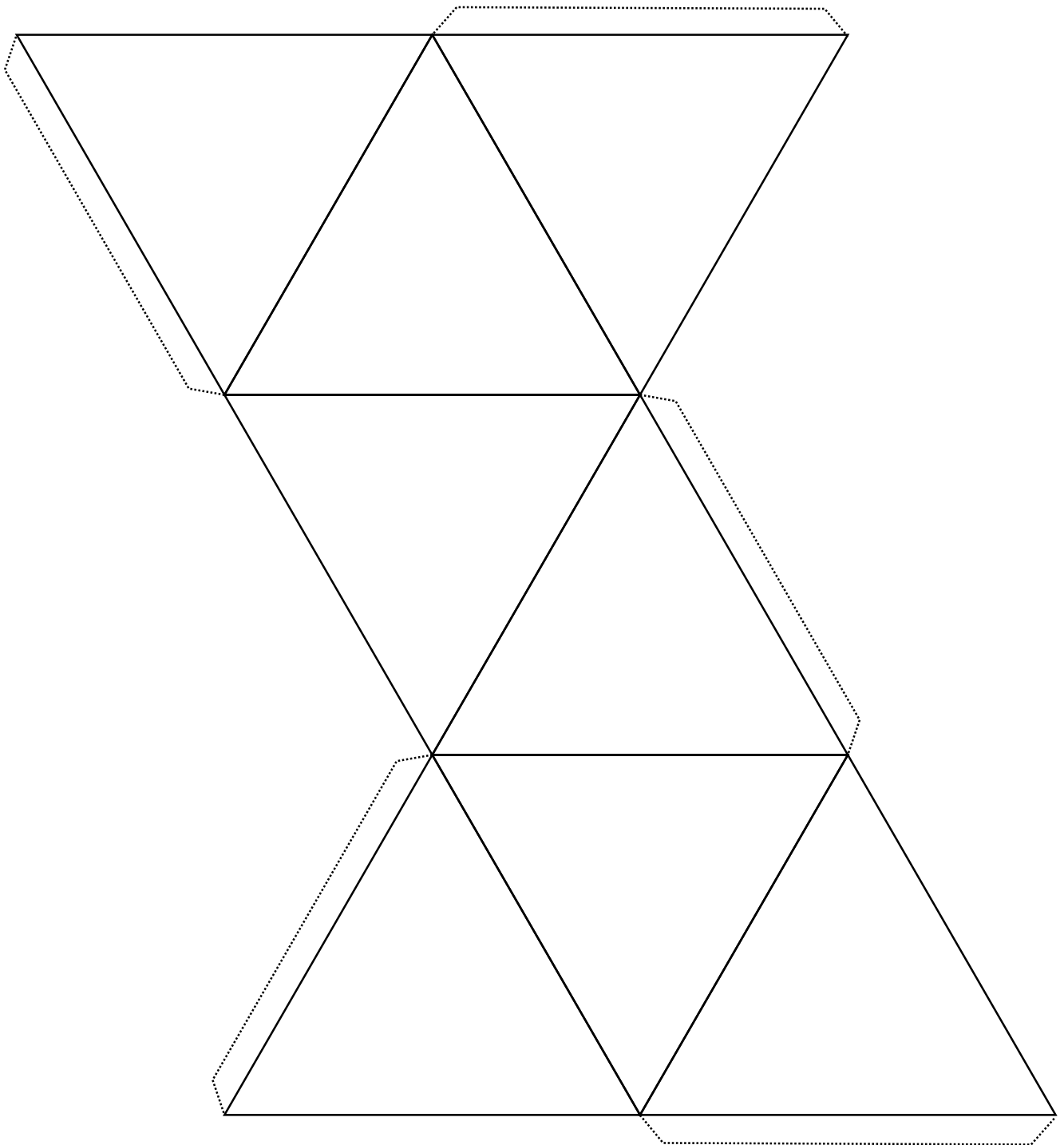
PLANIFICAÇÃO DE UM TETRAEDRO REGULAR



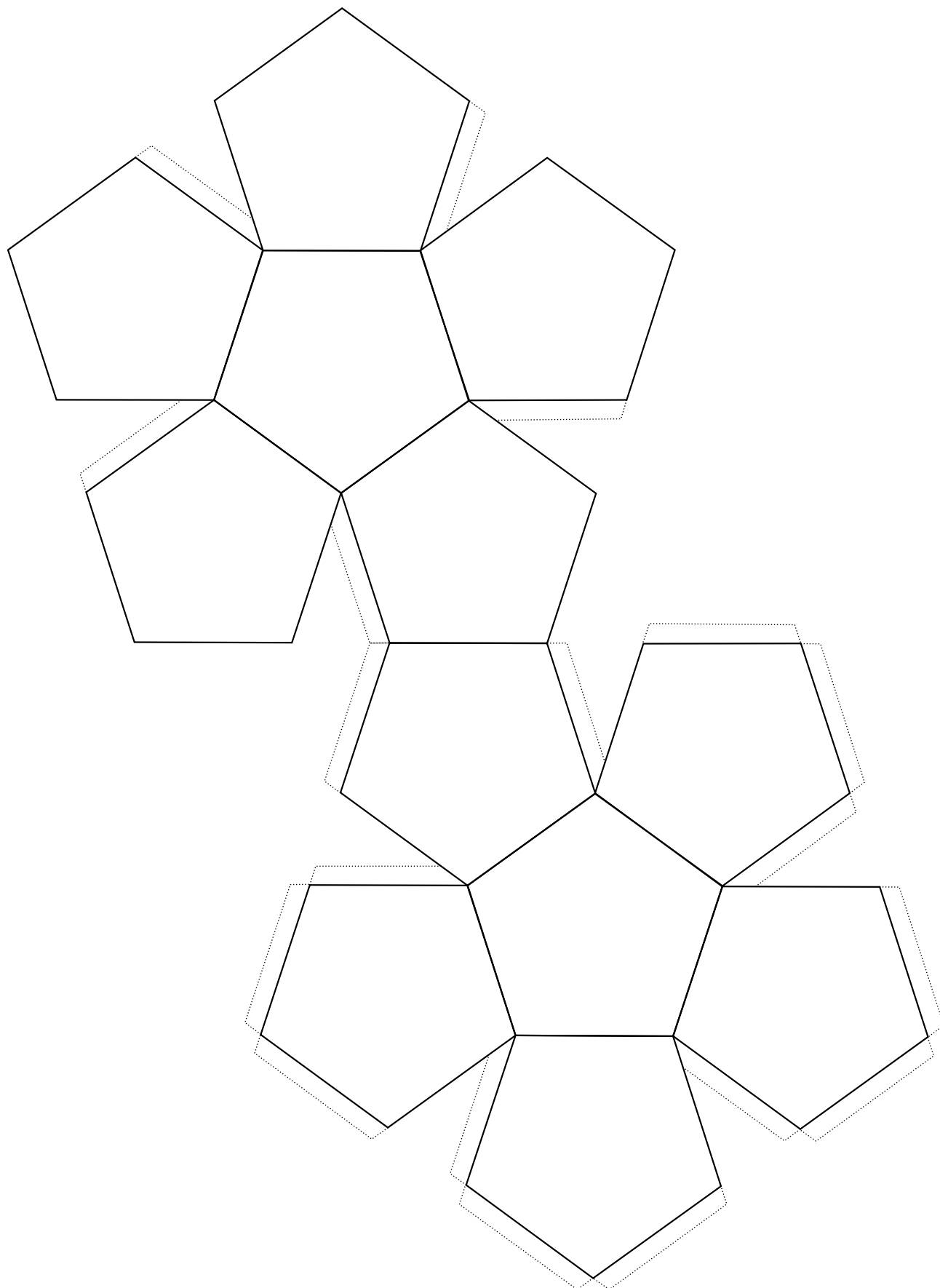
PLANIFICAÇÃO DE UM HEXAEDRO REGULAR



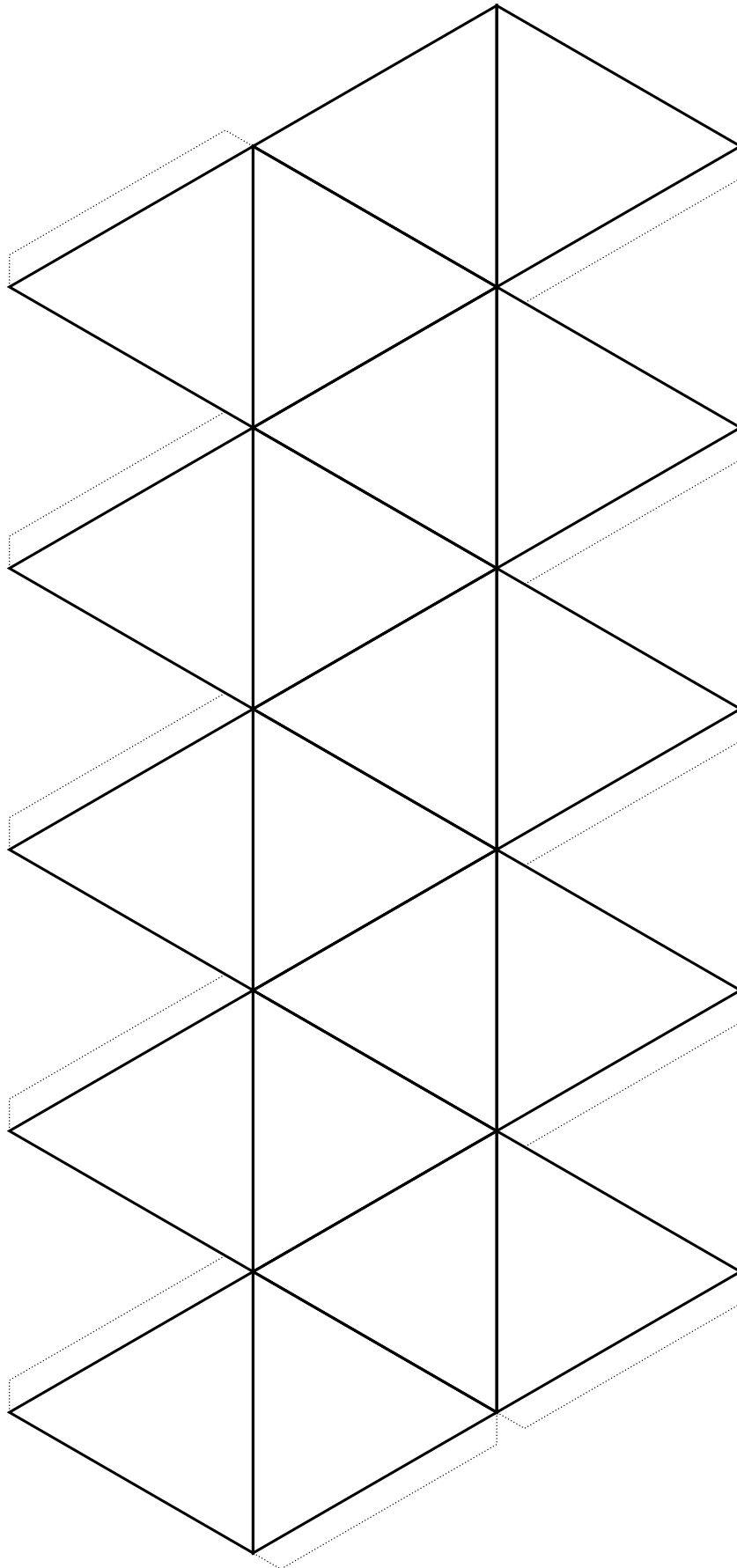
PLANIFICAÇÃO DE UM OCTAEDRO REGULAR



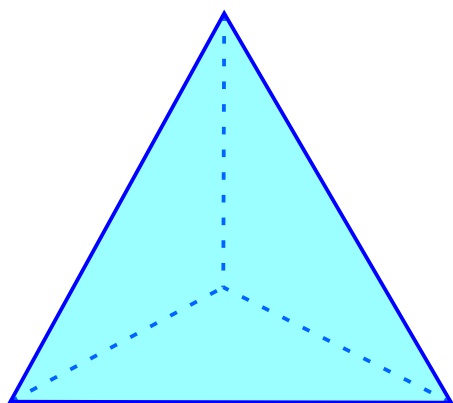
PLANIFICAÇÃO DE UM DODECAEDRO REGULAR



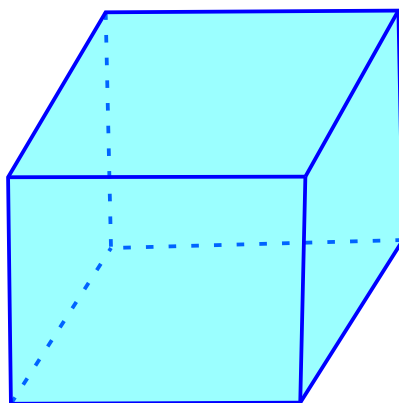
PLANIFICAÇÃO DE UM ICOSAEDRO REGULAR



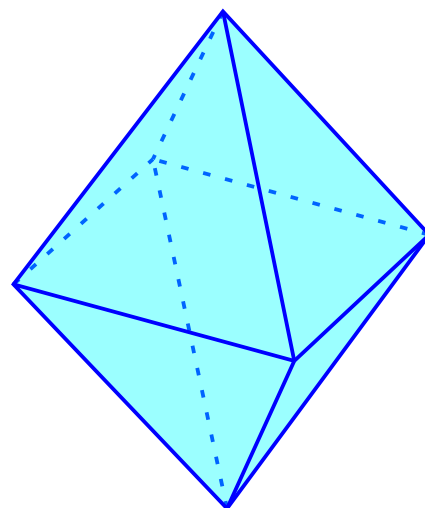
PERSPECTIVAS DOS POLIEDROS REGULARES MONTADOS



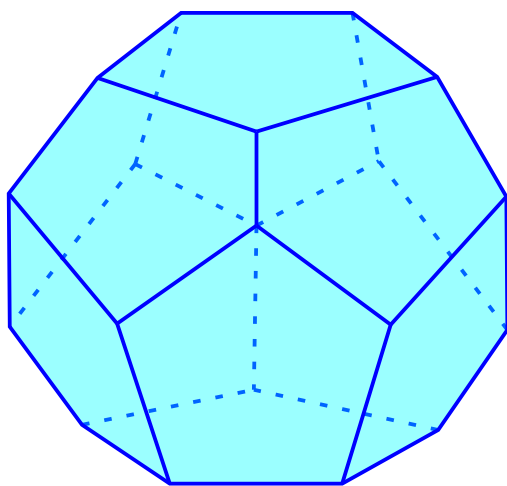
Tetraedro
regular



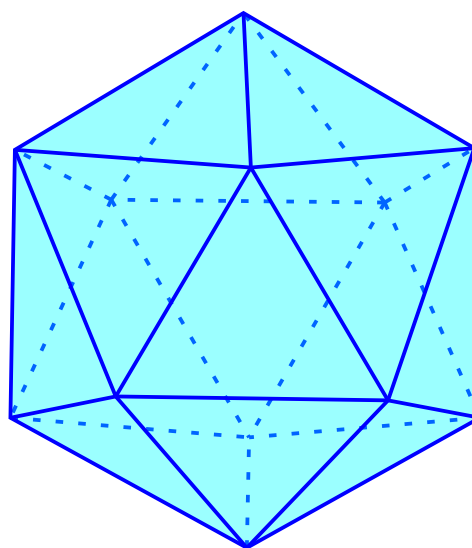
Hexaedro
regular



Octaedro
regular



Dodecaedro
regular



Icosaedro
regular