

APLICAÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Claudio Kennyo dos Reis Silva e Jusciane da Costa e Silva

Resumo: Mediante as inúmeras aplicações do movimento harmônico simples, o presente artigo tem o intuito de analisar, individualmente, o sistema massa-mola. Valendo-se das propriedades das equações diferenciais, objetiva-se modelar uma função que descreva este sistema e ainda analisa o mesmo experimentalmente. Conhecendo o sistema massa-mola fisicamente, é possível fazer uma análise matemática a fim de classificar o tipo de equação que rege esse sistema. Conhecendo a função, cria-se uma situação teórica que pode ser reproduzida experimentalmente e analisada com o propósito de comparação com a teoria. Após a realização dessa comparação os valores obtidos tiveram uma aproximação aceitável, vale salientar que alguns erros experimentais podem ser minimizados, no entanto não extinguidos. Investigando os dados obtidos, chegou-se à conclusão que é possível modelar uma equação, com uma boa aproximação experimental, que descreva o sistema massa-mola aplicando os métodos de resolução das equações diferenciais de segunda ordem.

Palavras-chave: Movimento Harmônico Simples, Massa-mola, Equação Diferencial.

1. INTRODUÇÃO

O Movimento Harmônico Simples (MHS) é caracterizado pelo movimento oscilatório de um corpo de massa m , quando a força restauradora desse movimento é proporcional ao deslocamento. No MHS a aceleração e a força resultante são proporcionais e opostas ao movimento. São exemplos de MHS o Pêndulo Simples, o Movimento Circular Uniforme e o Sistema massa-mola, que será aprofundado neste trabalho. O MHS pode ser percebido cotidianamente em um relógio de pêndulo ou até mesmo no movimento das cordas de um violão. A naturalidade que esses fenômenos passaram a ter no nosso cotidiano não descreve, nem de longe, a complexidade matemática por trás deles, fazendo-se necessária a utilização de modelagens matemáticas para entender melhor suas características (TIPLER, 2013).

O sistema massa-mola é um modelo composto por uma mola acoplada a um corpo de massa conhecida. Para que esse modelo seja considerado ideal existem algumas considerações a serem feitas. Quanto à mola, sua massa deve ser desprezível e não pode perder suas propriedades elásticas quando deformada, já em relação à massa, não deve se deformar sob ação da força aplicada. Na prática essas condições são fisicamente impossíveis de serem alcançadas, pois por mais leve que seja um corpo a sua massa não pode ser considerada nula (KELLER, 2011).

No entanto existem alguns meios para tentar aproximar o real do ideal, por exemplo, considerar apenas os primeiros ciclos de movimentos, diminuindo a influência do atrito. Restringir o experimento a pequenos deslocamentos também se faz necessário para a obtenção de um resultado satisfatório. Com isso questiona-se a possibilidade de utilização das equações deduzidas para o sistema ideal no sistema real com um resultado experimental aceitável.

Portanto, faz-se necessário modelar corretamente uma equação diferencial que descreva a posição de uma partícula do sistema massa-mola ideal em função do tempo, bem como analisar experimentalmente a validade da equação deduzida, esclarecendo se realmente é possível prever o comportamento do sistema massa-mola de maneira teórica.

2. DESENVOLVIMENTO

2.1. Fundamentação teórica

Uma oscilação denomina-se um MHS, quando a força restauradora é diretamente proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio (YOUNG; FREEDMAN, 2008). De acordo com a Segunda Lei de

Newton a força resultante que age em um corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração ($F = m \cdot a$). Esta força sempre age no sentido da aceleração.

Quando o sistema, em equilíbrio, é perturbado por uma força externa, a força restauradora surge com o objetivo de restabelecer o equilíbrio do sistema. Logo, essa relação das forças gera uma série de repetições de movimento descritos como ciclos.

O Período (T) é o tempo necessário para que um ciclo ocorra. Frequência (f) é o número de ciclos que ocorre no intervalo de um segundo. Essas grandezas são de extrema importância no sistema massa-mola, vale salientar que elas dependem apenas da massa da partícula (m) e da constante da mola (k), acerca disto Young e Freedman (2008, p.41) afirma que:

O período e a frequência do movimento harmônico simples são completamente determinados pela massa m e pela constante da mola k. No movimento harmônico simples, o período e a frequência não dependem da amplitude.

A frequência angular (ω) no sistema massa-mola é uma grandeza de extrema importância, ela tem valores que dependem do período e da frequência. A frequência angular depende apenas da massa da partícula e da constante da mola, dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

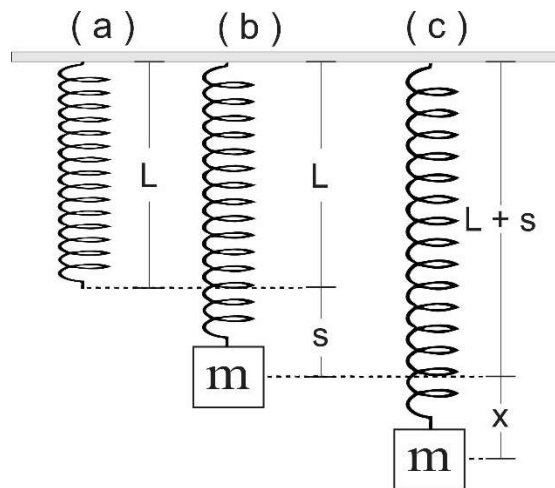
A constante da mola (k) é uma propriedade não variável que depende do tipo de material empregado na confecção desta mola, bem como das dimensões utilizadas. Essa propriedade classifica as molas de acordo com a maior ou menor capacidade de deformação quando submetida a forças em suas extremidades.

Imagine uma mola com uma das extremidades presa e a outra livre e em sua posição de equilíbrio, como mostra a figura 1 (a). Aplica-se uma força na extremidade livre e a mola tenderá a alongar-se. Estudando este fenômeno, Robert Hooke (1635-1703), percebeu que a mola exercia uma força (F) na direção contrária ao alongamento da mola, estabelecendo assim a seguinte lei:

$$F_e = -ks. \quad (2)$$

Sendo k o valor da constante elástica da mola e s a distância deslocada.

Figura 1. Sistema massa-mola.



Fonte: Autoria própria

Considere agora que um corpo de massa (m) é colocado na extremidade livre da mola, Fig. 1(b), fazendo com que haja uma deformação na mola, inicialmente na posição de equilíbrio. Para que o equilíbrio seja restabelecido, uma força restauradora deve ser igual ao valor da força peso que age sobre o corpo. Pela segunda Lei de Newton para movimentos verticais a força peso é dada como:

$$P = mg \quad (3)$$

Com isso, igualando as equações (2) e (3) como determina a posição de equilíbrio, tem-se:

$$\begin{aligned} |P| &= |F_e| \\ mg &= ks \\ mg - ks &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Aplica-se uma força externa dada pela Segunda Lei de Newton, com o sistema em equilíbrio para as forças verticais:

$$\sum F = ma \quad (5)$$

De acordo com Zill (2011), pode-se igualar a força externa aplicada (5) com a resultante do peso e da força restauradora, desde que se suponha que não haja forças de retardamento agindo sobre o sistema.

$$ma = mg - k(s + x)$$

onde $k(s + x)$, a nova força restauradora de acordo com a figura 1 (c).

$$ma = -kx + (mg - ks)$$

Pela equação (4), quando o sistema está em equilíbrio após a colocação da massa (figura 1.b), têm-se que $mg - ks = 0$, portanto:

$$a = -\frac{kx}{m} \quad (6)$$

A velocidade de uma partícula é dada como sendo a variação da posição em relação ao tempo:

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} \quad (7)$$

Já a aceleração é a variação da velocidade em relação ao tempo, em outras palavras a aceleração é a segunda derivada da posição em relação ao tempo, dada como:

$$a = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (8)$$

Substituindo, finalmente, a equação (8) na equação (6), obtém-se uma equação final (9) que será analisada teoricamente e deve descrever o comportamento prático experimental do sistema massa-mola.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{kx}{m} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{kx}{m} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

A equação (9) é uma Equação Diferencial (ED) que é definida como uma equação cuja a função contém derivadas (Zill, 2011). Uma vez que a equação é identificada como uma ED, ela pode ser classificada quanto ao tipo, ordem e a linearidade.

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é aquela que envolve derivadas de uma função de uma única variável independente. Caso isso não ocorra trata-se de uma Equação Diferencial Parcial (EDP). A respeito disto Bronson (2008, p.15) infere que:

Uma equação diferencial ordinária é aquela em que a função incógnita depende de apenas uma variável independente. Se a função incógnita depender de duas ou mais variáveis independentes, temos uma equação diferencial parcial.

Segundo Boyce (2010, p.15), “A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação”. Portanto a equação (9) classifica-se como Equação Diferencial de Segunda Ordem, já que ED apresenta derivadas com o grau máximo igual a dois.

Para a classificação da derivada quanto à linearidade faz-se necessário a observação de dois itens: o primeiro deles indica que a variável dependente e suas derivadas devem ser do primeiro grau, e o segundo é que cada coeficiente apenas pode depender da variável independente (ZILL, 2011). Se esses dois quesitos forem atendidos, a equação é dita Equação Diferencial Linear.

Isso posto, percebe-se que a equação (9) se trata de uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Segunda

Ordem, portanto, na próxima seção buscaremos a solução para esse tipo de equação.

2.2. Resolução da EDO

A solução para uma EDO com as características analisada no presente artigo tem formato:

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} \quad (10)$$

Analisando a equação (9), é possível observar que $m^2 + \omega^2 = 0$ é sua equação auxiliar. Resolvendo-a é possível encontrar valores para m_1 e m_2 .

$$\begin{aligned} m^2 &= -\omega^2 \\ m &= \sqrt{i\omega^2} \\ m_1 &= i\omega \\ m_2 &= -i\omega \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados para m_1 e m_2 na equação (10)

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (11)$$

Como (11) é uma equação complexa surge a necessidade do uso da identidade de Euler cuja que é dado por: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Fazendo $x_1 = e^{i\omega t}$ e $x_2 = e^{-i\omega t}$ obtém-se

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (12)$$

Se uma função complexa é solução de uma EDO, suas partes, real e imaginária também o são. Pois para uma EDO linear a soma de duas soluções também é solução.

Portando chamando $x_1 = \cos \omega t$ e $x_2 = \sin \omega t$ a solução final para a equação (9) aparece e é dada por:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (13)$$

O Problema de Valor Inicial (PVI) restringe a equação geral (13) a situações próprias de cada sistema do MHS, atribuindo valores as constantes C_1 e C_2 . O sistema massa-mola a ser analisado experimentalmente, parte do repouso a uma certa distância da posição de equilíbrio em $t = 0$, com isso sua velocidade inicial é nula e a posição de partida da massa será a sua amplitude máxima, representada pela letra A . Já a velocidade, como visto em (7), é a primeira derivada da posição em relação ao tempo. A situação inicial deste sistema remete ao seguinte PVI:

$$p/ t = 0, x(t) = A \text{ e } x'(t) = 0$$

Assim,

$$x'(t) = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t \quad (14)$$

Substituindo o PVI em (14),

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega C_1 \sin \omega 0 + \omega C_2 \cos \omega 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo o PVI em (13),

$$\begin{aligned} A &= C_1 \cos \omega 0 + C_2 \sin \omega 0 \\ C_1 &= A \end{aligned}$$

Finalmente substituindo os valores de C_1 e C_2 na equação geral (13) tem-se a equação da posição de acordo com o tempo para o caso específico a ser estudado.

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (15)$$

2.3. Resultados e Discussões

2.3.1. Materiais utilizados

O experimento analisado foi realizado no laboratório de Mecânica Clássica da Universidade Federal Rural do Semi-Árido e foram utilizados os seguintes materiais:

- 01 (um) tripé universal;
- 01 (uma) régua;
- 03 (três) discos metálicos;
- 01 (uma) mola;
- 01 (um) suporte para fazer a ligação entre os discos e a mola;
- 01 (uma) balança de precisão.

A figura 2 mostra todos os materiais utilizados no experimento.

Figura 2: Materiais utilizados



Fonte: Autoria própria

2.3.2. Procedimento experimental

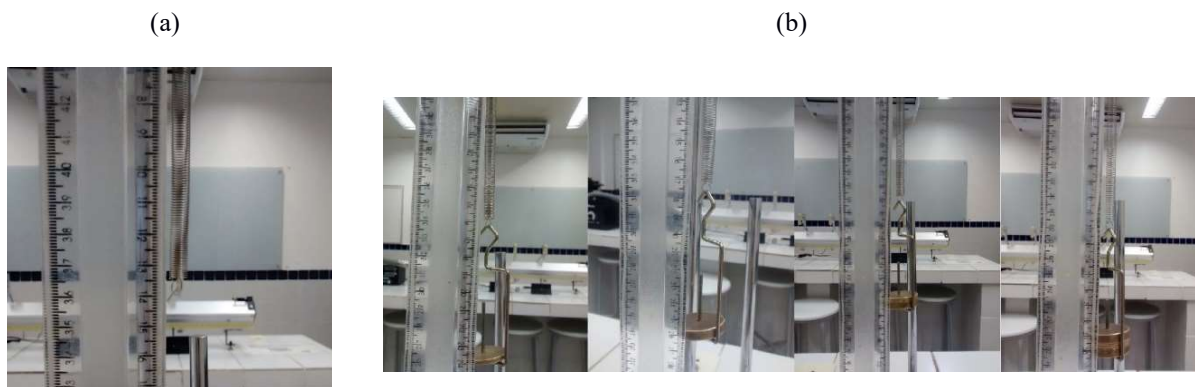
O procedimento para obtenção da constante elástica da mola e análise das oscilações está disposto a seguir:

- I. Fixe uma das extremidades da mola no tripé universal e marque o seu comprimento inicial;
- II. Utilizando uma balança de precisão meça as massas dos discos e do suporte em seguida disponha os valores na tabela (1);
- III. Prenda o suporte na mola e acrescente as massas medidas, uma amostra por vez;
- IV. Com o sistema em equilíbrio meça o novo comprimento da mola, e finalize o preenchimento da tabela (1)
- V. Com o sistema em equilíbrio após a colocação das massas, puxe o sistema levemente para baixo e solte-o ao mesmo tempo que dispara o cronômetro;
- VI. Com as medições de tempo e posição preencha a tabela (2).

2.3.3 Determinação da constante elástica

A constante elástica de uma mola é dada pela carga aplicada sobre o deslocamento resultante e sua unidade no SI é dado em metro por segundo (N/m). A figura 3 (a) mostra a mola usada no experimento. A mola está inicialmente relaxada. Antes de calcular a constante elástica da mola, foram feitas as medidas das massas que seriam usadas como cargas na mola. Em seguida as massas foram colocadas na extremidade da mola e assim foi possível medir a distensão da mola devido à aplicação da carga. A figura 3 (b) mostra as medidas da constante elástica para diferentes cargas metálicas no estado de equilíbrio.

Figura 3: (a) Mola da posição inicial, relaxada. (b) Molas com cargas no ponto de equilíbrio.



Fonte: Autoria própria.

A figura 4 mostra as algumas medidas para diferentes cargas metálicas que foram usadas no experimento.

Figura 5: Medidas das massas utilizadas



Fonte: Autoria própria

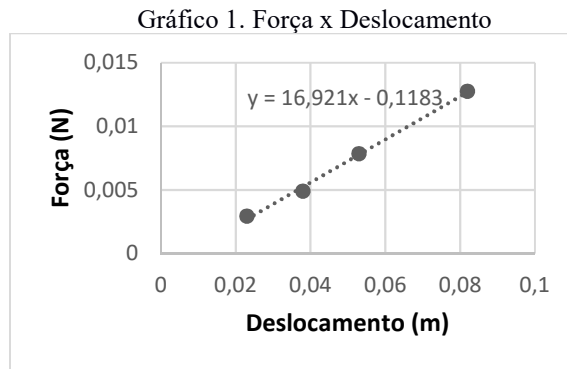
Foram usadas quatro amostras para o experimento, variando as massas das cargas postas sobre a mola. A força resultante de cada amostra foi calculada multiplicando a massa aferida na balança pela aceleração da gravidade ($9,81\text{m/s}^2$). Para a primeira carga, a massa foi de $0,0299\text{ kg}$, o que causou uma força de $0,293\text{ N}$ sobre a mola e um deslocamento de $0,023\text{ m}$. As demais medidas estão expostas na tabela 1.

Tabela 1. Valores de força e deslocamento calculados

Amostra	Massa (Kg)	Força (N)	Deslocamento (m)
1	0,029928	0,29359368	0,023
2	0,049981	0,49031361	0,038
3	0,079979	0,78459399	0,053
4	0,129960	1,27490760	0,082

Fonte: Autoria própria

A partir dos dados de força e deslocamento da tabela 1 é possível traçar um gráfico que nos dará justamente a constante elástica. Os deslocamentos são dados em metro (m) e estão dispostos no eixo das abscissas e no eixo das ordenadas serão colocados os valores das forças, em Newton (N).



Fonte: Autoria própria

Analisando do gráfico (1), realiza-se uma regressão linear e encontra com isso a equação da reta ($y = 16,921x - 0,1183$), onde “x” é o deslocamento em metros e “y” é a força em newton. Para encontrar a constante da mola, faz-se necessário corrigir os valores utilizando a equação da reta encontrada por meio da regressão linear, fazendo:

$$x = 0,053m$$

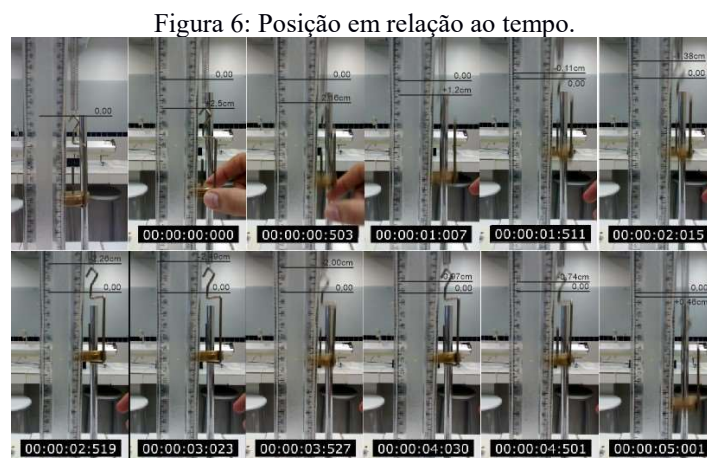
O valor de y será:

$$y = 0,778513N$$

Assim, o valor da constante da mola será $K = 14,67N/m$

2.3.4. Análise prática do sistema massa-mola

Com o sistema em equilíbrio uma força foi aplicada deslocando o sistema em 2,5cm com relação a sua posição inicial. Após a retirada da força o sistema passou a oscilar realizando um MHS descrito pela equação (15) modelada anteriormente. A figura 6 demonstram as oscilações realizadas pelo sistema.



Fonte: Autoria própria.

Cada um dos 12 quadros da figura 6 representa um instante de tempo da oscilação do sistema. Partindo do repouso, quando $t = 0$, até a posição final em $t = 5s$. Os valores para as posições em função do tempo (Fig. 6) devem ser comparados aos valores obtidos na teoria através da equação (15). Para esta comparação, foram adicionadas algumas retas com os valores das posições encontradas teoricamente. Esses valores podem ser entendidos melhor através da tabela 2 e o gráfico a seguir.

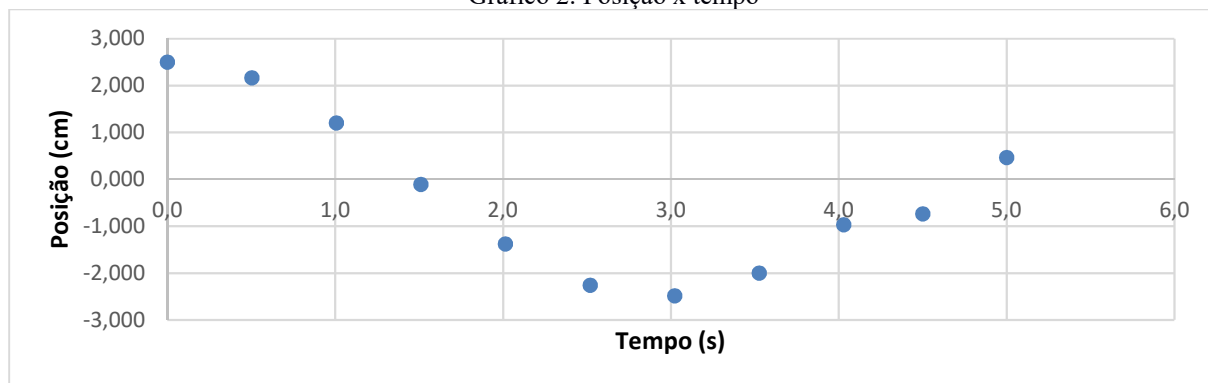
Tabela 2. Posição x tempo

t(s)	0,000	0,503	1,007	1,511	2,015	2,519	3,023	3,527	4,030	4,501	5,001
Posição (cm)	2,500	2,160	1,200	-0,110	-1,380	-2,260	-2,490	-2,000	-0,970	-0,740	0,460

Fonte: Autoria própria

Utilizando os dados da tabela 2, plota-se o gráfico 2 (abaixo) onde pode-se perceber, claramente, o comportamento senoidal da equação (15) em função do cosseno, iniciando-se no ponto de deslocamento máximo positivo.

Gráfico 2. Posição x tempo



Fonte: Autoria própria

2.3.4. Resultados

Através do experimento chegou-se a resultados que se aproximam dos valores teóricos. Vale salientar que existem alguns agentes externos ao sistema que podem influenciar na execução do experimento. Outra variável que contribui para a divergência entre os valores teórico e prático é a resistência do ar, que faz o sistema perder energia. Para diminuir erros em decorrência do atrito do ar, foram analisados, apenas, os primeiros 5 (cinco) segundos de oscilação, como mencionado no item (1).

Comparando os valores, logo se percebe que, as maiores variações de resultados ocorrem na parte final do ensaio. As diferenças de valores ficaram na ordem de 0,1cm a 0,5cm em média.

O erro experimental é dado por:

$$E = \frac{|V_t - V_e|}{V_t}$$

Onde V_t é o valor teórico e V_e é o valor experimental.

Calculando os erros experimentais para $t(1)$ e $t(4)$ encontraremos:

$$E = \frac{|1,2 - 1,1|}{1,2} \times 100 = 8,33\%$$

$$E = \frac{|0,97 - 1,4|}{0,97} \times 100 = 44,33\%$$

Como descrito anteriormente a medida que a oscilação vai ocorrendo o sistema perde energia o que ocasiona um erro maior em relação as primeiras oscilações como esperado.

3. CONCLUSÕES

Observando os resultados obtidos, conclui-se que a equação (15) é válida para identificar a posição do sistema massa-mola em função do tempo. No entanto, como citado anteriormente, a equação deve respeitar suas restrições para que os resultados sejam aceitáveis.

O sistema massa-mola é aplicado de diversas formas ao redor do mundo, diante disto, deve ser analisado detalhadamente para um resultado final próximo do ideal dentro de uma margem de segurança.

Quanto as Equações Diferenciais, foi analisado apenas um caso de sua aplicação, porém, é suficiente para verificar a importância que este tipo de equação possui tanto para a ciência quanto para a engenharia.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene, Física para Cientistas e Engenheiros - Vol. 2, 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

KELLER, Frederick J., GETTYS, W. Edwards & SKOVE, Malcolm J. FÍSICA - Volume 2. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1997.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. Física II: Termodinâmica e Ondas. 12. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2008. 325 p.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações Diferenciais, Volume I. São Paulo: Pearson Makron Books, 2007. 473 p.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 10^a edição. Rio de Janeiro: Gen LTC, 2015.

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel B. Equações diferenciais. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. 400 p.