



UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE A AXIOMATIZAÇÃO DA ÁLGEBRA

Beatriz Silva de Lima¹

Resumo: Não é incomum observar indagações ou afirmações sobre o estudo dos acontecimentos históricos parecidas com essas: *Para quê estudar os acontecimentos do passado? Não adianta estudar história porque o passado não volta mais.* Mas, ao contrário do que se pensa, a história não é uma ciência presa ao passado, ela está presente no cotidiano das pessoas para lembrá-las de sua condição humana de agentes transformadores do mundo. Então, ao olhar por esse lado e aplicar este conceito ao estudo da matemática, torna-se possível entender como os fatos que ocorreram no passado podem contribuir ou acrescentar nas pesquisas da atualidade. Pensando nisto, este artigo traz a jornada da álgebra até sua axiomatização, ou seja, apresenta um relato histórico de como a álgebra conseguiu desenvolver seus próprios axiomas independente da geometria. Para alcançar este objetivo, optou-se por realizar uma pesquisa bibliográfica de cunho histórico, a qual nos esclareceu que a temática objeto de nosso estudo, a axiomatização da álgebra, está intrinsecamente ligada ao entendimento da matemática tal como é estudada hoje.

Palavras chaves: Axiomas. Álgebra. História. Matemática.

1. A MATEMÁTICA CONQUISTANDO SEU LUGAR COMO CIÊNCIA.

Assim como toda história é construída a partir da sucessão de acontecimentos no decorrer do tempo, com a história da matemática não foi diferente. Hoje sabe-se que a matemática é considerada uma ciência caracterizada pela abstração, no entanto nem sempre foi definida e usada como tal. Para um melhor entendimento de como ela ganha essa configuração, primeiro será feito um breve relato dos seus avanços ao longo dos anos, desde seus primeiros vestígios até conseguir seu espaço como ciência. Na sequência, o presente artigo irá relatar os acontecimentos históricos que contribuíram para que a atual concepção de matemática como ciência abstrata se instituisse. No entanto esse é apenas o pano de fundo da problemática principal da pesquisa, que na verdade busca compreender os empasses vivenciados pela álgebra para conseguir se configurar como área da matemática independente da geometria e da aritmética.

Indo ao encontro das primeiras civilizações ocidentais que apresentam registros matemáticos pela historiografia, encontra-se os Egípcios, Sumérios e Babilônios. Todas essas civilizações tinham uma relação com a matemática pautada na solução de problemas do cotidiano como, por exemplo: divisão de terras, armazenamentos de grãos, problemas ligados com a astronomia, entre outros. Em virtude disso, essas civilizações não procuravam saber o porquê da matemática conseguir resolver as questões práticas, apenas buscavam respostas, que na maioria das vezes eram satisfeitas somente com soluções numéricas. Devido a essa característica, [1] nomeou a matemática desenvolvida por essas civilizações de atividades proto-matemáticas, pois remete a ideia de primeiro, logo marca o início do desenvolvimento da matemática.

Com o passar do tempo, houve uma mudança no contexto matemático, impulsionada por alterações no ambiente econômico e político das civilizações antigas. Essas mudanças propiciaram avanços, como por exemplo: a invenção do alfabeto e a criação das Pólis¹ pelos gregos. Este novo cenário contribuiu para a formação de um pensamento racional crescente, principalmente nos filósofos da Grécia. No que se refere a matemática da Grécia, [2] afirmam:

Há evidências, todavia, de que no meio dos filósofos os métodos usados pelos matemáticos eram questionados. Por volta do ano 375 a.C., Platão começa a criticar os geômetras por não empregarem critérios de rigor desejáveis nas práticas matemáticas.

(...) ainda que não possamos dizer que a transformação dos fundamentos da Matemática grega é devida a Platão, ele expressa o descontentamento dos filósofos com os métodos empregados e articula o trabalho dos pensadores a sua volta para que se dediquem a formalizar os conceitos e técnicas utilizadas indiscriminadamente na Matemática da época ([2], p.63).

¹ Cidades-estado grega

Nesse contexto, os pensadores gregos começaram a sentir a necessidade de demonstrar suas teorias. Entre eles destaca-se Aristóteles (384 a.c.-322 a.c.), que criou o método axiomático-dedutivo, partindo da ideia de que não poderia provar tudo, precisava de um ponto de partida o qual chamou de postulados, ou seja, proposições das quais partiam todos os teoremas. A característica principal dos postulados aristotélicos é a auto evidência, ou seja, eles teriam que ser intuitivamente óbvios, verdades absolutas que qualquer pessoa poderia enxergar. A partir da adoção do método axiomático-dedutivo, a matemática passou a ser vista como ciência, [1] nomeia essa fase de nascimento da matemática.

É importante frisar que embora os gregos tenham abordado algumas questões que as civilizações antigas já haviam tratado, não existiam nos antigos a preocupação de construção de um método, que passou a existir com os gregos. Portanto, como consequência dessa nova perspectiva iniciada pelos gregos, tem-se a mudança do foco das questões matemáticas, que deixaram de ser pautadas apenas nas necessidades do mundo e passaram a permeiar também o campo das ideias.

Apesar de ser um avanço na construção da matemática como ciência, o método dedutivo aristotélico ao instituir a necessidade de veracidade e auto evidência aos axiomas, gerava uma limitação ao seu uso, pois exigia-se que os axiomas fossem vistos a partir de um olhar físico. Portanto a geometria por permitir essa visão foi a primeira e única área a ser axiomatizada até o século XIX. Por esse motivo, a álgebra e a aritmética dependiam da geometria para ter credibilidade, como podemos verificar neste relato.

Da época clássica da Grécia até aproximadamente o início do século XVII, a matemática ocidental era principalmente a geometria. E era principalmente a geometria não somente porque o maior esforço dos matemáticos deste longo período era dedicado à resolução de problemas geométricos, mas também porque o desenvolvimento dos outros ramos da matemática – especialmente a aritmética e álgebra – foi condicionado pela geometria. Demonstrações de proposições eram sempre feitas demonstrando as proposições geométricas equivalentes e a interpretação dos conceitos matemáticos era sempre feita em termos geométricos ([3], p. 107).

Como pode-se perceber a subordinação geométrica perdurou por bastante tempo, pois a necessidade de auto evidência impedia a criação de proposições para áreas abstratas como a álgebra. Diante do exposto, fica perceptível que a axiomatização da álgebra, não foi algo tão simples de acontecer, pois o problema “morava” na gênese da matemática como ciência. Portanto estudar os aspectos históricos da axiomatização da álgebra se justifica diante da relevância desta temática para a compreensão da construção da matemática no decorrer dos séculos.

Por meio deste breve relato espera-se ter deixado claro para o leitor como a matemática conquistou seu lugar como ciência, pois esta compreensão é essencial ao entendimento do objetivo principal deste trabalho que é descrever os acontecimentos históricos que resultaram na axiomatização da álgebra, e como esse fato contribui para a mudança de estrutura ocorrida pela matemática no século XIX. No que concerne a metodologia, a presente pesquisa se classifica como uma pesquisa bibliográfica de cunho histórico, pois no intuito de atingir nosso objetivo e focado na problemática abordada, foi feita uma análise bibliográfica em livros e trabalhos científicos, que abordam acontecimentos históricos relacionados ao tema, para dessa forma obter o conhecimento necessário para a realização da pesquisa.

2. ACONTECIMENTOS NÃO ALGÉBRICOS.

É inquestionável que no decorrer dos séculos a matemática passa por mudanças em diversos aspectos. No que se refere, mais especificamente a resultados ligados à álgebra, podemos citar por exemplo: a resolução de equações do terceiro e quarto grau, por Girolamo Cardano (1501-1576) e a apresentação pela primeira vez de uma abordagem simbólica para as equações, por François Viète (1540-1603), ambos acontecimentos do século XVI. Juntamente com os estudos sobre os cálculos diferenciais, desenvolvido por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) no século posterior, como importantes avanços no campo algébrico. No entanto, mesmo com essas mudanças, alguns padrões ainda precisavam ser quebrados para que a álgebra conseguisse se libertar da geometria. Entre estes, existiam paradigmas que não estavam ligados diretamente à álgebra, mas que influenciavam nesse processo. A descoberta de novas geometrias e a aceitação dos números negativos e complexos são dois acontecimentos que serão discutidos nos próximos tópicos a fim de entendermos como eles contribuíram mesmo que de forma indireta para axiomatização da álgebra. Apesar de abordados separadamente é importante a percepção de que esses eventos ocorrem quase que simultaneamente, e que eles se entrelaçam na construção de novos fundamentos para a matemática.

2.1. Descobertas de geometrias não Euclidianas

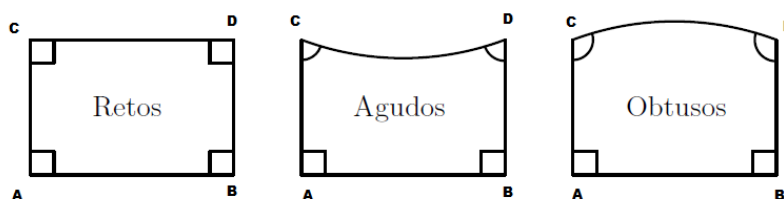
Por volta do ano 300 a.c, Euclides, em sua obra *Os Elementos*, inicia apresentando quinze definições, dez axiomas e cinco postulados como base da axiomatização da geometria. Euclides definiu os axiomas como

verdades aplicáveis à todas as ciências e os postulados como verdades em relação à disciplina em questão [3]. Os quatro primeiros postulados definidos por Euclides não geraram dúvidas quanto sua veracidade, no entanto, o quinto postulado apresentava uma dificuldade de visualizá-lo facilmente como verdade, ou seja, não possuía o caráter da auto evidência, como pode-se perceber no trecho que segue:

- I. *Pede-se que se desenhe uma reta de um ponto qualquer até outro ponto qualquer.*
- II. *E que se produza uma linha reta finita continuamente em uma linha reta.*
- III. *E que com qualquer centro e qualquer distância se descreva um círculo.*
- IV. *E que todos os ângulos retos sejam iguais.*
- V. *E que, se uma linha reta cortando duas linhas retas torna os ângulos interiores do mesmo lado menores que dois retos, as linhas retas, se continuadas indefinidamente, se encontrem deste lado no qual os ângulos são menores que dois retos ([2], p.70).*

Devido essa ausência de auto evidência, diversos matemáticos procuraram substituir o quinto postulado por outro mais óbvio. O substituto mais comum nos atuais textos de geometria foi dado por Playfair (1748-1819) e dizia que “Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta” [4]. Ainda assim, o postulado das paralelas continuava sem evidência imediata, portanto outra alternativa utilizada para resolver esse problema foi tentar prová-lo, pois se isso fosse possível ele deixaria de ser chamado de postulado e passaria a ser um teorema.

É importante registrar que no decorrer dos séculos diversos matemáticos tentaram o feito de rebaixar o quinto postulado de Euclides a um teorema. Mas, a primeira investigação realmente científica do postulado das paralelas foi desenvolvida por Girolamo Saccheri (1667-1733), no livro chamado *Euclides livre de toda imperfeição*, no qual se afirma ter conseguido a demonstração do postulado [4]. No que se refere a demonstração apresentada por Saccheri, seu trabalho consistia em estudar o quadrilátero $ABCD$ (Figura 01) em que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos e os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são iguais. Ele começou concluindo que os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ deveriam ser iguais, e consegue isso utilizando apenas as primeiras 28 proposições² do livro I dos *Elementos*. Em seguida, sua pretensão era definir o tipo de ângulos e, para isso, formulou três possíveis hipóteses que chamou de hipótese dos ângulos retos, ângulos agudos e ângulos obtusos



Hipóteses de Saccheri. Fonte: ([5] p.31)

Saccheri decidiu provar sua teoria através do método de redução ao absurdo. Primeiro, eliminou facilmente a hipótese do ângulo obtuso, pois observou que, considerando a infinitude da reta, certamente $\overline{CD}$ intercepta $\overline{AB}$, logo, não são paralelas. Procedendo com a análise, e não conseguindo o desejado, ele forçou uma contradição a fim de eliminar a hipótese dos ângulos serem agudos, pois ele acreditava fielmente que a única geometria existente era a de Euclides. Dessa forma, restava apenas a hipótese dos ângulos retos que provava a existência de uma única reta paralela à $\overline{AB}$, portanto, o quinto postulado poderia ser provado através dos outros e, então, rebaixado a teorema. É relevante relatar que embora Saccheri tenha obtido diversos resultados que futuramente fizeram parte de uma geometria diferente da euclidiana, a dificuldade de desvincular-se do mundo físico e compreender o campo abstrato que ele estava desvendando, fez com que ele forçasse uma contradição, e por causa desse equívoco, o mérito da descoberta da existência de outras geometrias não foi dado a ele.

Depois de Saccheri, outros matemáticos se dedicaram a estudar e tentar provar o postulado das paralelas, entre eles destaca-se Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) e Nicolai Lobachevsky (1802-1860). Atualmente sabe-se que Gauss foi o primeiro matemático a trabalhar com a hipótese do ângulo agudo. Segundo [6] apud [5] Gauss iniciou seus estudos em geometria não-euclidiana desde seus 15 anos. Uma das passagens que comprova isso pode ser encontrada na carta que escreveu em 1824 à Adolph Taurinus (1794 -1874)³, numa resposta a uma das tentativas de prova deste. Nessa correspondência Gauss relata “que havia mais de 30 anos que ponderava o assunto e por ser de difícil aceitação não publicará nada, mas que com constante reflexão essas ideias se revelavam nada impossíveis” [5]. Gauss complementa ainda dizendo que

² Segundo Eves (1995, p.539) Euclides não fez nenhum uso do postulado das paralelas até alcançar a Proposição 29 do livro I. Ainda segundo este autor esse fato fortalecia a dúvida se esse postulado era realmente necessário, ou se ele poderia ser deduzido, como teorema.

³ Franz Adolph Taurinus foi um matemático alemão conhecido por seu trabalho em geometria não-euclidiana

todos seus esforços para a descoberta de uma contradição, ou incoerência, nesta geometria não-euclidiana, haviam fracassado.

O título de ter descoberto as geometrias não-euclidianas foi dado a dois matemáticos que de lugares diferentes do mundo, praticamente no mesmo período, publicaram ideias semelhantes. Janos Bolyai era austríaco e publicou no apêndice do livro de seu pai no ano de 1832, por incentivo dele, as descobertas que resolveu nomear de *Universo novo e estranho*. Pouco antes disso, entre os anos de 1829-1830, Nicolai Lobachevsky publicou em russo seu primeiro artigo também referente à geometria não euclidiana, mas devido às barreiras linguísticas existentes na época, Bolyai só soube desse feito muitos anos depois. Resumidamente, os dois estudiosos não encontraram contradição na hipótese do ângulo agudo, então aceitando que os ângulos podem ser agudos construíram uma nova geometria, que mais tarde foi chamada de geometria hiperbólica. Para tanto, foi necessário abdicar da geometria ligada ao mundo físico e abrir espaço para o entendimento do abstrato, feito não conseguido por Saccheri. Sobre o fim da problemática do quinto postulado e a indubitabilidade da existência de outras geometrias, [4] afirma que:

A real independência do postulado das paralelas dos outros postulados da geometria euclidiana só foi estabelecida inquestionavelmente quando se forneceram demonstrações da consistência da hipótese do ângulo agudo. Estas não demoraram a vir e foram produzidas por Beltrami, Arthur Cayley, Felix Klein, Henri Poincaré e outros. O método consistia em construir um modelo na geometria euclidiana, de modo que o desenvolvimento abstrato da hipótese do ângulo agudo pudesse dar uma interpretação concreta numa parte do espaço euclidiano. Então, qualquer inconsistência na geometria não euclidiana implicaria uma inconsistência correspondente na geometria euclidiana ([4], p.543).

Portanto com a descoberta de uma geometria tão consistente quanto a de Euclides, mas que seus axiomas não eram auto evidentes, pelo contrário, até contrariavam o que os olhos viam, os matemáticos não mais poderiam exigir dos postulados essa característica. Nessa conjuntura passou-se então a exigir dos postulados apenas a necessidade de consistência e dessa forma, poderiam ser escolhidos ao gosto do matemático desde que não fossem contraditórios.

Todas essas mudanças fizeram com que os estudiosos da época comessem a enxergar esta ciência não mais como uma tradução do mundo físico, e consequentemente aceitar a abstração na matemática. Essa transformação de pensamento possibilitou o início do desenvolvimento de axiomas para áreas abstratas, como a álgebra, pois, como foi dito anteriormente, a auto evidência era um dos principais fatos que dificultava a axiomatização dessa área. Diante do exposto, a queda da auto evidência deve ser destacada como a principal consequência da descoberta de novas geometrias.

Será abordado na sequência a aceitação dos números negativos e complexos, chamados por muito tempo de números impossíveis. A legitimação desses números é outro acontecimento não algébricos que contribuiu para a mudança na concepção de matemática que ocorreu no século XIX, na qual ela passou ao status de ciência abstrata. Então para entender como a questão em torno da aceitabilidade desses números fortaleceu as ideias que surgiram das descobertas de novas geometrias, e, consequentemente, colaborou com a axiomatização da álgebra voltaremos um pouco na história para compreender como os números impossíveis foram sendo discutidos no decorrer do tempo.

2.2. Aceitação dos números impossíveis

A partir de agora, será apresentado de forma breve as razões pelas quais fizeram com que os matemáticos resistissem em aceitar os números negativos e complexos como entidade matemática. Será explanado também de que forma eles aceitaram a legitimação desses números, além de mostrar como essa conquista é importante para a compreensão da matemática do modo como é constituída atualmente.

Embora os negativos tenham surgido desde a antiguidade de forma natural na resolução de equações, observa-se no decorrer da história da matemática diversos fatores que fortaleceram a idealização de que os negativos e posteriormente os imaginários não poderiam ser aceitos no universo científico. Entre estes fatores destaca-se o vínculo da matemática com o mundo físico, que resultou do modelo de matemática criado a partir do método axiomático-dedutivo por Aristóteles e posteriormente propagado pelos gregos, como o principal obstáculo à legitimação desses números. Como já relatado anteriormente, esse modelo de matemática fez com que a geometria fosse a única área axiomatizada até o século XIX, por isso assume o papel de verificadora da verdade e do rigor. Nesse contexto, como os números impossíveis não fazem parte de uma realidade palpável, eles não conseguem ter uma representação lógica na geometria e, portanto, não poderiam ser legitimados nessa teoria [7].

Outra premissa, na qual baseavam-se as teorias de rejeição dos números negativos, tem foco na definição de um elemento primordial na construção da matemática, o conceito de número. É comum associar a ideia de número a de contagem ou medida, afinal de contas essas noções provêm do contato rotineiro que temos com a matemática de caráter prático, isto é, situações do dia-a-dia como contar dinheiro, ou medir algo. Embora

para a concepção atual de matemática esta conceitualização seja considerada restrita, diante da imensidão do conceito de número, foi a definição aceita e difundida até o século XIX, o número como elemento de contagem e medida, e por esta razão, a matemática era entendida como a ciência das quantidades e das medidas. A explicação para a força desse pensamento encontra-se ligada ao que foi relatado anteriormente, visto que esse entendimento de número se enquadra ao modelo de representação do mundo físico. Portanto é compreensível que o tratamento dado a matemática até o século XIX não era, de fato, favorável aos números impossíveis e então eles não eram considerados como entes matemáticos.

A explanação aqui apresentada pode ser sintetizada através do seguinte trecho:

A discussão sobre as quantidades negativas, durante o século XVIII, mostra que somente os números absolutos eram aceitos, pois se pretendia relacionar a existência em Matemática a uma noção qualquer de “realidade”. Para avançar, era preciso migrar para um conceito abstrato de número não subordinado à ideia de quantidade ([2], p.238).

Diante do exposto, fica claro que a forma como os acontecimentos foram sendo dispostos na história contribuiu para a rejeição dos números negativos por quase 2000 anos, e entre estes acontecimentos o fato da axiomatização primordialmente da geometria e consequentemente todos os elementos terem que ser modelados por ela, fizeram com que os números impossíveis fossem deixados de lado em razão da compreensão de uma realidade física exigida como fonte de certeza.

Depois de enumerados os pontos principais que fizeram com que os números impossíveis fossem rejeitados, pode-se então narrar os acontecimentos que influenciaram no processo de superação desses obstáculos. Segundo [7] “houve um aumento crescente dos indícios favoráveis à existência desses números provenientes tanto da matemática prática como também da formal”. Entre os fatores práticos essa autora destaca, a nova organização mercantil do fim do século XIII, que possibilitou o aparecimento de uma estrutura de crédito, pois proporcionou pela primeira uma interpretação aos negativos, isto é, eles poderiam ser entendidos como débitos. Quanto aos aspectos formais, o século XVI, já na era moderna, se destaca no enredo dos números impossíveis, pois o debate sobre a legitimação desses números ganha força a partir dos feitos inovadores de grandes algebristas, como Cardano, Rafael Bombelli (1526-1572) e Viète (1540-1603). É importante ainda registrar que o contexto mundial contribuiu para a formação, mesmo que inconsciente, desse pensamento inovador, pois a idade moderna é marcada por mudanças em todos os âmbitos, inclusive na ciência.

Os estudos de Cardano sobre a resolução de equações do 3º e 4º grau publicado na sua obra *Ars Magna*, mesmo que de forma não intencional, acabou dando uma maior autonomia à álgebra. [7] baseada em [8] concluiu que Cardano nesta obra “aproxima sua argumentação do pensamento analítico e suas demonstrações geométricas passam a ser apenas uma questão de formalidade”, já [9] considerou *Ars Magna* como “um passo definitivo para construção da autonomia da álgebra[...]”. Compartilhando das mesmas ideias de Cardano, Bombelli escreveu sua obra *L'Algebra* que segundo [8] foi escrita com a intenção de apresentar um texto mais claro e acabar com os desentendimentos presentes em *Ars Magna*, principalmente relacionados às controvérsias a respeito dos negativos e imaginários. Neste intuito de maior clareza, Bombelli apresenta pela primeira vez as regras das operações aritméticas para os números complexos. Portanto, a postura destes dois matemáticos nestas obras é de significativa relevância para aceitação dos números negativos, pois pode ser interpretada como o início de um enfraquecimento do obstáculo geométrico, que como já comentado, talvez seja o principal argumento contrário a legitimação dos números negativos e complexos.

Dando continuidade, não podemos deixar de citar o francês Viète, que através de seus estudos, sugere a generalização dos coeficientes das equações por meio dos símbolos e, dessa forma, introduz o simbolismo a matemática. Embora o estilo simbólico não tenha alcançado sua maior influência com Viète, sabemos que o simbolismo foi um passo decisivo para o desenvolvimento da matemática, pois abre as portas para a abstração matemática, além de marcar o início de uma postura mais profissional das produções matemáticas. Apesar da introdução do simbolismo ter contribuído significativamente para aceitação dos negativos, não foi capaz de pôr fim a problemática da sua legitimação, mas influenciou na criação de teorias de aceitação retratada por [9] como por exemplo a *specious arthmetick* de Wallis, *theory of names* de Hobbes e *method of subduction* de Barrow, todas inglesas.

Infelizmente não existiu uma continuidade no pensamento iniciado por esses matemáticos ingleses, pelo contrário, no século seguinte, diante do contexto político e social, houve um atraso nesse processo, pois a matemática inglesa optou por um isolamento racional, em virtude da forte corrente nacionalista e o sentimento de superioridade intelectual resultante das vitórias nas guerras e no comércio. Como resposta a esse isolamento a Inglaterra vivenciou a disseminação das ideias do importante matemático inglês, Isaac Newton, que apesar de brilhante, tinha uma visão da matemática como ciência das quantidades, portanto não cabia nela os números negativos. Deste modo, optou por justificar os negativos através de metáforas usando analogias de débitos.

Somente na primeira metade do século XIX, também na Inglaterra, a questão sobre a legitimidade dos números negativos voltou a ser debatida por meio das ideias revolucionárias do matemático George Peacock (1791-1858), que alertava para a necessidade de refletir sobre as bases estabelecidas para matemática até então.

Em sua obra *Treatise on algebra* publicada em 1830, Peacock retoma os princípios do simbolismo de Viète e aplica à álgebra, promovendo de vez a total aceitação dos números negativos. Podemos perceber a importância dessa obra para a problemática a respeito da legitimidade dos números negativos, por meio do seguinte trecho:

Em sua obra *Treatise on Algebra* de 1830 e e na republicação de 1833, ele (Peacock) abordou o maior problema levantado pelos opositores dos negativos: a definição dos números negativos, a definição da operação de subtração e a questão da álgebra como ciência.
(...) Peacock, portanto, revelou o ponto crucial de sua solução para o problema dos números negativos. Os negativos e as subtrações irrestritas surgiram quando a aritmética foi tratada em sua forma mais geral ([10], p.32-35; Tradução nossa).

Em síntese, a real aceitação dos negativos só foi possível quando os números foram tratados na sua forma mais geral, ou seja, por meios dos símbolos. Peacock consegue isso fazendo a distinção entre álgebra aritmética e álgebra simbólica, que será melhor explicada no tópico seguinte.

Diante do exposto, espera-se que tenha ficado claro que o reconhecimento dos números impossíveis como entidades do discurso matemático através da obra de Peacock e a descoberta das geometrias não euclidianas, fatos que ocorreram quase que simultaneamente, embora não tivessem como objetivo central a axiomatização da álgebra e consequentemente, a sua libertação da subordinação geométrica, estes dois acontecimentos influenciaram diretamente para que tudo isso ocorresse, pois interferiram na forma como a matemática era entendida.

3. TREATISE ON ALGEBRA

No momento em que a matemática passou a ser uma estrutura complexa de símbolos, ela se constituiu como uma ciência abstrata, e se aproximou cada vez mais da forma como se vê essa disciplina na atualidade. Devido a obra *Treatise on algebra* ser peça central desta mudança ocorrida na concepção de matemática e também na axiomatização da álgebra, daremos uma atenção especial à essa obra de Peacock, relatando como a simbologia descrita nela contribuiu para o desenvolvimento da abstração matemática.

Treatise on Algebra foi publicada no momento que a Inglaterra estava inserida em uma conjuntura de revolução, tanto no contexto social e político, quanto no contexto intelectual. Episódios como a Revolução Industrial, a abertura dos ingleses ao conhecimento vindo do restante do continente Europeu, o surgimento de novas classes sociais e a valorização do conhecimento técnico caracterizaram este momento de mudança. Além das questões externas, merece destaque as motivações relativas aos fundamentos da matemática, provenientes de uma menor valorização do rigor teórico, em nome dos avanços práticos, impulsionada tanto pelas diversas aplicabilidades do Cálculo, como também pela evolução de resolução de equações algébricas.

Em meados do século XVIII, muitos matemáticos incomodados com a precária fundamentação em que se embasava as últimas descobertas da sua área, iniciaram uma busca para superar esta situação. Peacock e seus colegas da Universidade de Cambridge, ganharam destaque nesse propósito ao fundarem a Analytical Society. Embora a finalidade primeira desta sociedade fosse reformar o ensino do cálculo e adotar as notações em uso no continente, pois como já comentado a Inglaterra tinha optado por um isolamento racional, o que fez com que ocorresse algum atraso em relação aos progressos ocorridos na restante da Europa, veremos que a principal contribuição deixada pela Analytical Society, foi repensar e discutir os fundamentos da álgebra [11].

Todo este cenário de inovações influenciou as ideias de Peacock, mas ele também se aproveitou desse momento para apresentar sua visão reformadora em relação à matemática e redimensionar as bases estabelecidas até o momento para esta ciência. O passo inicial e talvez fundamental dado por Peacock no seu projeto reformador, tem caráter filosófico, trata da mudança de entendimento da matemática, não mais como ciência das quantidades, passando a ser concebida como ciência dos signos. Essa mudança de entendimento proporcionou uma maior compreensão das proposições abstratas e consequentemente abre espaço para a axiomatização da álgebra [10].

No que se refere especificamente *Treatise on Algebra*, Peacock pretendia por meio desta obra dar à álgebra um tratamento lógico semelhante ao que Euclides deu a geometria, em sua obra *Os Elementos*. A fim de estabelecer seu pensamento e atingir seu objetivo, Peacock optou por distinguir álgebra aritmética de álgebra simbólica. Este raciocínio foi tão importante para época que, alguns anos depois da primeira publicação houve a necessidade de ampliar a obra para dois volumes, cada um com foco em uma das álgebras. Ao fazer essa distinção entre as álgebras, ele rompe com o pensamento antigo de que a álgebra era apenas uma aritmética simbólica. No primeiro volume, ele define que na álgebra aritmética seria trabalhado as operações apenas com inteiros positivos e exibe as leis fundamentais da aritmética, trabalhando apenas com números e dando aos símbolos $+$ e $-$ o seu significado ordinário. No segundo volume, desenvolve uma álgebra simbólica e as mesmas regras são aplicadas aos símbolos sem conteúdo específico, portanto na álgebra simbólica as restrições impostas pelos números inteiros positivos são retiradas, mas permanecem as leis da aritmética baseadas no princípio da permanência das formas equivalentes [12]. O princípio da permanência das formas equivalentes tem o seguinte enunciado: “Quaisquer que sejam as formas equivalentes, quando os símbolos são gerais em sua

forma e específicos em seus valores, continuará sendo uma forma equivalente assim como os símbolos são gerais tanto em seu valor quanto em sua forma” [13].

A sistematização proposta por Peacock, fazia com que as leis da aritmética, a saber:

Comutativa da adição: $a + b = b + a$

Associativa da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Comutativa da multiplicação: $a \cdot b = b \cdot a$

Associativa da multiplicação: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributiva da adição e multiplicação: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; fossem válidas na álgebra simbólica e definidas como as leis algébricas. Desta forma este conjunto de proposições pode ser entendida como um primeiro sistema axiomático da álgebra.

Embora este feito seja emblemático, atualmente a definição das leis aritméticas como leis algébricas, é entendida como um aspecto limitador dentro do pensamento revolucionário de Peacock. Para [14] a definição das leis aritméticas como as leis algébricas, pode ter sido um obstáculo ao desenvolvimento da matemática, pois desta forma Peacock sugeriu que as leis da álgebra fossem as mesmas quaisquer que sejam os números ou objetos trabalhados. [10] também compartilha dessa ideia, quando afirma que “por causa de sua preocupação com a aplicabilidade da álgebra simbólica, ele (Peacock) simplesmente adotou as leis da aritmética como leis da álgebra” (tradução nossa). Segundo esta última autora esta preocupação com a aplicabilidade dos conceitos impediu Peacock de ir além e fortificar suas ideias. Pode-se constatar o enfraquecimento das ideias de Peacock, mediante a falta de liberdade que ele atribuiu a álgebra simbólica, por meio do seguinte trecho:

A declaração de Peacock que as leis da álgebra simbólica fossem atribuídas arbitrariamente pelos matemáticos foi quase totalmente ignorada, primeiro por seus contemporâneos e depois pelos historiadores da matemática, que geralmente atribuem o reconhecimento da liberdade da matemática a Hamilton, o criador dos quatérnios, e aos inventores da geometria não euclidiana. A perda de créditos de Peacock por essa ideia se deve parcialmente ao fato dele não exercer a liberdade algébrica que ele mesmo proclamou ([10], p.37; Tradução nossa).

Apesar da limitação aqui relatada no posicionamento de Peacock, e ao entendimento de que a álgebra alcançou sua verdadeira axiomatização somente quando William Rowan Hamilton (1805-1865) e outros matemáticos como Arthur Cayley (1821- 1895) e Hermann Grassman (1809-1877) construíram sistemas consistentes baseados na intuição, através de estruturas algébricas que não respeitavam algumas das leis da aritmética; não podemos negar que *Treatise on Algebra* e as idéias iniciadas por Peacock nessa obra teve participação essencial na axiomatização da álgebra. Segundo [12] este trabalho é considerado a obra que anuncia a álgebra como um sistema axiomático, além de colocar um fim na discussão sobre os números impossíveis, como já mencionado.

Atualmente é inquestionável que o tratado de Peacock colaborou para o abstrato ganhar ainda mais espaço, ao ampliar o uso dos símbolos e propor um primeiro sistema axiomático para a álgebra. Além de que foi a partir deste trabalho, que vários matemáticos mudaram a forma como realizavam suas investigações, o que trouxe por consequência, a descoberta de modernas estruturas algébricas, as quais serão citadas no próximo tópico.

4. O SURGIMENTO DA ÁLGEBRA ABSTRATA

O pensamento que as leis algébricas existentes são apenas as leis que regem os números inteiros e grandezas reais da geometria, qualquer que fosse o sistema, não foi um pensamento restrito a Peacock. Na verdade, abandonar esta ideia era algo tão inovador, quanto conceber a existência de geometrias diferentes da euclidiana, pois teria que aceitar que existiam estruturas algébricas que não atendem as leis dos números naturais, algo não trivial para época.

Entre os que compartilhavam do mesmo pensamento de Peacock, está Augustus De Morgan (1806-1871), que segundo [14] ampliou a teoria de Peacock ao considerar os símbolos elementos totalmente abstratos ao invés de entendê-los como números, mas cometeu o mesmo equívoco quando se trata das leis algébricas. De Morgan em seus estudos sobre a álgebra simples dos números reais e a álgebra dupla dos números complexos, publicados em *Trigonometry and Double Algebra*, também em 1830, constatou que as regras de operação na álgebra simples e na álgebra dupla eram as mesmas, e com isso concluiu que os números complexos também obedecem às leis da aritmética⁴. Embora De Morgan operasse com os complexos na forma $z = a + bi$ em que a e $b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, faremos uso deles na forma de par ordenado, ou seja, $z = (a, b)$, pois é mais adequado para nossa narrativa⁵. É válido destacar que o responsável por dar aos complexos esta representação foi Hamilton.

⁴ Mostraremos essa constatação mais a seguir

⁵ Posteriormente trataremos dos quatérnios desta mesma forma por isso optamos por essa nomenclatura.

Sua reformulação da teoria dos números complexos parte de uma observação muito simples; ele nota que a expressão $a + bi$ não denota uma soma genuína, do mesmo tipo que $2 + 3$ e afirma que o uso do sinal $+$ é um acidente histórico e, certamente, bi não pode ser adicionado a a . Assim, percebe que escrever um número complexo na forma $a + bi$ não é mais do que dar o par ordenado de números reais (a, b) ([11], p.32).

Representados desta forma, as operações de adição e multiplicação são assim definidas por Hamilton:

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$	(1)
------------------------------------	-----

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$	(2)
--	-----

Observe que para voltarmos para a forma $z = a + bi$, basta considerarmos $i = (0, 1)$, pois

$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$	(3)
--	-----

e assim

$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$	(4)
--	-----

Feito isto, podemos então mostrar que esta estrutura algébrica também obedece às leis da aritmética. Considerando $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ e $t = (e, f)$ com a, b, d, e, f pertencente aos reais e as operações de adição e multiplicação acima definida, segue que as leis da aritmética são válidas, como se verifica:

Comutatividade da adição:

$z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$	(5)
--	-----

$w + z = (c, d) + (a, b) = (c + a, d + b)$	(6)
--	-----

Associatividade da adição :

$z + (w + t) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (a + c + e, b + d + f)$	(7)
---	-----

$(z + w) + t = [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$	(8)
---	-----

Comutatividade da multiplicação:

$z \cdot w = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$	(9)
--	-----

$w \cdot z = (c, d) \cdot (a, b) = (ca - db, cb + da)$	(10)
--	------

Associatividade da multiplicação:

$z \cdot (w \cdot t) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf)$	(11)
---	------

$(z \cdot w) \cdot t = [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) = (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$	(12)
---	------

Distributiva da adição e multiplicação:

$z \cdot (w + t) = (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c + e, d + f) = (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)$	(13)
---	------

$z \cdot w + z \cdot t = [(a, b) \cdot (c, d)] + [(a, b) \cdot (e, f)] = (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) = (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)$	(14)
--	------

Portanto, diante da inexistência de qualquer problemática, uma vez que foi visto que os complexos também obedeciam às leis da aritmética, é natural que De Morgan e Peacock defendessem essas leis como leis da álgebra de forma universal. A mudança de entendimento a esse respeito, ou seja, a desvinculação das leis algébricas das leis aritméticas, só aconteceu de fato quando

Hamilton construiu uma álgebra para os quatérnios⁶, pois surgiu pela primeira vez uma estrutura algébrica que não satisfaz as leis aritméticas. Será abordado a partir de agora um pouco da gênese dos quatérnios, não será feito de forma detalhada, pois foge o intuito deste trabalho.

Hamilton em 1833, após dar aos complexos a estrutura de par ordenado e perceber que a multiplicação desses números poderia ser compreendida como rotações no plano, decidiu estender seus estudos para triplos com a intenção de aplicá-los às rotações no espaço. Algebricamente, os triplos foram definidos na forma $x + iy + jz$, em que i e j são unidades imaginárias com comportamento $i^2 = j^2 = -1$, igualmente aos complexos e foram associados a terna (x, y, z) . Seguindo na sua empreitada, Hamilton definiu a adição e multiplicação de forma análoga ao tratamento dado aos complexos, que é semelhante a forma como somamos e multiplicamos polinômios atualmente, e obteve os seguintes resultados

$(a + ib + jc) + (x + iy + jz) = (a + x) + i(b + y) + j(c + z)$	(15)
---	------

$\begin{aligned} (a + ib + jc) \cdot (x + iy + jz) &= ax + aiy + ajz + ibx + ibiy + ibjz + jcx + jciy + jcjz \\ &= ax + i^2by + j^2cz + iay + ibx + jaz + jcx + ijbz + ijcy \\ &= (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy) \end{aligned}$	(16)
---	------

Para a adição, Hamilton não encontrou problema, pois definida desta forma a adição atende às propriedades de comutatividade e associatividade, no entanto, ele se deparou com uma complicação ao definir a multiplicação. Antes mesmo de analisar as propriedades, pode-se perceber que a multiplicação de triplos assim definida não é uma operação fechada, ou seja não resulta em um triplo. O próprio Hamilton expõe esse problema no seguinte trecho: “Parece natural assumir que o produto é $(ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az +$

⁶ Álgebra de dimensão quatro sobre o corpo dos números reais, ou seja, uma extensão dos números complexos.

$cx) + ij(bz + cy)$, mas o que fazer com ij ? Deveria ser da forma $\alpha + i\beta + jy$?" ([16] apud [13], p.62). Ainda segundo [13] "Para superar o impasse, Hamilton testa conjecturas algébricas sobre o produto ij em multiplicações particulares de tripletos. Essas multiplicações provavelmente foram escolhidas por ele de modo que pudessem ser interpretadas geometricamente segundo a sua conjectura geométrica." ([13], p.63) Na sequência esse mesmo autor mostrou que para o problema que Hamilton estava estudando, ou seja, a rotação no espaço, além das leis da aritmética, três outras condições teriam que ser satisfeitas, citaremos apenas a denominada de lei dos módulos⁷, que em termos geométricos significa que o comprimento do produto de vetores fosse igual ao produto dos comprimentos, e em termos algébricos seria o seguinte

Lei dos módulos:

$$a^2 + b^2 + c^2 \cdot ((a')^2 + (b')^2 + (c')^2) = (a'')^2 + (b'')^2 + (c'')^2. \quad (17)$$

Em sua busca para solucionar o problema da multiplicação de triplos, Hamilton propôs alguns resultados para o produto ij , entre eles $ij = +1$ e $ij = 0$. É importante ressaltar que para proposta $ij = 0$, as 3 condições impostas pelo problema da rotação no espaço são satisfeitas ao fazer o produto de um triplo por ele mesmo, e também resolve o problema do fechamento da operação, uma vez que $ij = 0$, mas o mesmo não acontece quando a multiplicação é feita com triplos quaisquer, ou seja, não é possível generalizar. Não se sabe muito bem o porquê, Coelho ([13] p.68) sugere que, provavelmente pelo estudo das n-uplas, Hamilton despertou para o fato de considerar $ij = -ji$, ou seja, abrir mão da comutatividade da multiplicação, algo inovador. Mesmo não sendo algo convencional, Hamilton resolveu testar essa hipótese e iniciou considerando a multiplicação de dois triplos que se diferenciam apenas no termo que não é acompanhado de um imaginário, ou seja realiza o produto entre $(a + ib + jc)$ e $(x + iy + jz)$ um produto mais geral do que o testado anteriormente, porém ainda particular. Novamente Hamilton alcançou o desejado de forma satisfatória no caso particular, no entanto mais uma vez ao tentar generalizar para um triplo qualquer sua conjectura falha, pois a lei dos módulos não é satisfeita. Observa-se na sequência os principais resultados que levaram a criação dos quatérnios. Note que a multiplicação de dois triplos quaisquer, admitindo que $ij = -ji$, é:

$$(a + ib + jc) \cdot (x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz - cy) \quad (18)$$

Observe que esta equação se diferencia da equação (16) que é o resultado do produto de dois tripletos quaisquer, apenas no fato do coeficiente de ij ser $(bz - cy)$ já que $ij = -ji$.

Na sequência Hamilton junta suas hipóteses mais frutíferas e faz $ij = -ji = 0$, pois dessa forma ele resolve seu primeiro problema que é a multiplicação de triplos ser um triplo, assim temos

$$a + ib + jc \cdot (x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) \quad (19)$$

No entanto, ao testar se a lei dos módulos é válida, ou seja, a igualdade abaixo acontece:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2 \quad (20)$$

ele percebeu que a lei dos módulos não é satisfeita, mas que se difere apenas pelo termo $(bz - cy)^2$, ou seja,

$$(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - \{(ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2\} = (bz - cy)^2 \quad (21)$$

foi a partir desta percepção que inicia-se a resolução do problema, como podemos observar nas palavras do próprio Hamilton "Mas este (a diferença $(bz - cy)^2$) é justamente o coeficiente de k no desenvolvimento do produto $(a + ib + jc) \cdot (x + iy + jz)$ se admitimos $ij = k$ e $ji = -k$, como antes" ([15] apud [13] p.71). Não bastasse conjecturar uma álgebra em que a comutatividade não era válida para a multiplicação, diante dessa última constatações Hamilton teve que tomar uma decisão paradoxal, que foi introduzir uma dimensão a mais para se trabalhar com o espaço, surgem assim os quatérnios $a + ib + jc + kd$. Sobre esse fato, segue novamente as palavras do próprio Hamilton:

E aqui me veio a idéia de que devemos admitir, de alguma maneira, uma quarta dimensão para o espaço com o propósito de calcular com tripletos; ou transferindo o paradoxo para a álgebra, que devemos admitir um terceiro símbolo imaginário k , distinto de i e j , mas igual ao produto deste (nesta ordem); o que me levou a introduzir quaternions tais como $a + ib + jc + kd$ ou $(a; b; c; d)$ ([15] apud [13], p.71).

Não deve-se pensar que isto aconteceu de forma rápida e fácil, até mesmo para Hamilton, o mentor de tal ideia, era difícil aceitar que poderia haver estruturas em que as leis algébricas não fossem válidas, principalmente diante da resistência dos matemáticos a esta aceitação. Sobre isso [14] relata que "durante dez anos ele (Hamilton) lutou com a multiplicação de n-uplas, para n maior que dois". É comum entre a literatura sobre os quatérnios encontrar o relato de uma carta escrita por Hamilton a um dos seus filhos, em que comenta que encontrou a solução para a multiplicação dos quatérnios abandonando a lei da comutatividade da multiplicação, enquanto caminhava pelo parque com sua esposa e diante de tamanha hesitação, em uma pedra fez a seguinte anotação:

⁷ A importância da lei dos módulos está no fato de ter sido a tentativa de preservá-la que impôs a Hamilton a necessidade de trabalhar com uma dimensão a mais.

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$	(22)
------------------------------	------

Diante do exposto, fica claro que por meio dos seus estudos sobre rotação no espaço Hamilton construiu uma álgebra totalmente desenvolvida no campo da abstração, ou seja, sem nenhuma dependência do mundo sensorial, até porque um espaço de quatro dimensões foge da realidade física. Portanto, pode-se apontar como a principal contribuição de Hamilton com a criação dos quatérnios, a aceitação da abstração no desenvolvimento da matemática. Além do que já foi comentado, Hamilton amplia abstração a patamares nunca visto antes ao mostrar que é possível desenvolver uma estrutura algébrica consistente, na qual as leis da aritmética, antes impostas como único sistema axiomático possível, não necessariamente precisam ser respeitadas.

Após a descoberta dos quatérnios, Hamilton se dedicou a buscar aplicações destes à outras áreas como geometria, mecânica e física. Entre elas, não se pode deixar de citar o cálculo vetorial que, embora na época não tivesse a forma como é estudado hoje, foi desenvolvido a partir dos quatérnios e é bastante aplicado nos cursos de Engenharia.

Com os quatérnios Hamilton mostrou a possibilidade de estender ainda mais o conjunto das álgebras conhecidas, portanto, muitos matemáticos se dedicaram na busca de novas álgebras. A ampliação de publicações sobre o assunto foi enorme, mas para não nos alongarmos citaremos apenas, Arthur Cayley que desenvolveu pela primeira vez a noção de matriz inspirado pelas ideias de determinantes que vinham sendo concebida desde um século antes. As matrizes são uma estrutura algébrica bem conhecida, na qual a multiplicação também não é comutativa. A ideia de matrizes talvez seja até de mais fácil compreensão atualmente por estudarmos esse assunto na educação básica e por essa razão omitiremos o contraexemplo que mostra que a multiplicação de matrizes não é comutativa.

Para finalizarmos não podemos deixar de falar de Hermann Grassmann, que no ano seguinte a descoberta dos quatérnios por Hamilton, publicou na Alemanha ideias muito semelhantes. O diferencial de Grassmann estava na generalização. “Em vez de considerar apenas quádruplos ordenados de números reais, Grassmann considerou conjuntos ordenados de n números reais” [14]. Infelizmente, por sua obra *Ausdehnungslehre* exigir uma interpretação mística e talvez apresentar uma exposição abstrata demais para a época, seu trabalho demorou demais para ser compreendido. Contudo, é justo destacar que sua geometria de n dimensões e seus hipernúmeros conduziram os matemáticos a várias das noções hoje correntes na álgebra linear.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conjunto de acontecimentos aqui descritos tais como: a descoberta de novas geometrias, a legitimação dos números denominados de impossíveis, a difusão do pensamento simbólico que resultaram na construção de um sistema axiomático para a álgebra e todos os nomes citados neste trabalho contribuíram para formação de uma nova concepção da matemática no século XIX, nas quais as novas produções científicas não mais visam uma realidade física e sim têm foco nas construções mentais. Desta forma, a matemática passa a ser entendida como ciência puramente hipotético-dedutiva, ou seja, o método usado para fundamentação das suas leis consiste na construção de premissas baseadas em hipóteses, sem a necessidade de correlação com a realidade e seu objetivo é testar a veracidade dessas premissas através de deduções lógicas. Não podemos deixar de registrar que o movimento de aritmetização da análise que também ocorreu no início do século XIX contribuiu diretamente para essa mudança de concepção da matemática, não relatamos este assunto neste trabalho, pois fugia da temática central que era a axiomatização da álgebra.

Observando toda a história da matemática percorrida neste trabalho, vamos ao encontro do que defende André Lichnerowicz⁸ quando afirma que “uma das características fundamentais da matemática é repensar periodicamente seus próprios conteúdos e que nisto radica uma das fontes do seu progresso” [17]. Complementando esse pensamento percebemos por meio desta pesquisa que nenhum grande desenvolvimento científico é conquistado por uma única pessoa, em metáfora podemos dizer que no decorrer dos séculos diversos matemáticos colocaram alguns tijolos na construção do conhecimento algébrico e como a ciência é um saber inacabado cabe aos matemáticos da atualidade, continuar construindo a matemática com suas contribuições.

6. REFERÊNCIAS

- [1] FOSSA, John A. **Dois momentos notáveis na vida da matemática: o nascimento e a maioridade**. Rio Grande do Norte, 2004.
- [2] ROQUE, Tatiana. PITOMBEIRA, João. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. (Coleção PROFMAT), Rio de Janeiro: SBM, 2012.

⁸ André Lichnerowicz (Bourbon-l'Archambault, 21 de janeiro de 1915 — 11 de dezembro de 1998) foi um geômetra diferencial e físico matemático francês de ascendência polonesa.

- [3] FOSSA, Jonh A. **A História da Geometria e a Epistemologia da Matemática** in Ensaios sobre a educação matemática. Belém: Eduepa, 2001.
- [4] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Traduzido por Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.
- [5] SANTOS, Wellington Tavares dos. **A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico**. 2016. Trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Rio Grande, 2016.
- [6] GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history**. New York, US: W. H. Freeman and Company, 1993.
- [7] MOURA, Andréa Maria Ferreira. **A Rejeição Inglesa Aos Números Negativos: Uma Análise Das Obras Dos Principais Opositores De 1750-1830**. Tese (Doutorado em Educação)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, p. 144, 2015.
- [8] FOSSA, J.A. A Álgebra de Cardano a Vieté. In: (ORG.), I. A. M. **Matemáticas da Época de Andrea Palladio**. Natal: EDUFRN, 2008. p.141-194.
- [9] ANJOS, Maria Figueredo dos. **Um estudo epistemológico do conceito de número negativo**. Vol 3. Natal - RN: EDUFRN, 2012.
- [10] PYCIOR, H., **George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra**, Hist. Math. 8, p.23-45, (1981).
- [11] MILIES, C. Polcino. **Breve História da Álgebra Abstrata**, in Atas da XI Escola de Algebra, Soc. Brasileira de Mat., São Paulo, 1990, pp. 1-46.
- [12] ANJOS, M; PONTES, M. **Um Breve Estudo Da Obra Treatise On Algebra (1842, 1845): O Papel Histórico-Filosófico Da Axiomatização Matemática**. Seminário Nacional de História da Matemática, 2012.
- [13] COELHO, R. **Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço**. 2008. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro – IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.i
- [14] BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Traduzido por Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.
- [15] HAMILTON, William Rowan, **Copy of a letter from Sir William R. Hamilton to John Graves**, The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, vol. xxv, pp. 489-95, 1844.
- [16] HAMILTON, William Rowan, **On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions**, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol.2, pp. 424-434, 1844.
- [17] E.W. Beth, G. Choquet, J. Dieudonné, C. Gattegno, A. Lichenrowicz e G. Piaget, **L'Enseignement des Mathématiques**, Delacheaux & Niestlé, Paris. 1955.