



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE ANGICOS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

GABRIELA PEREIRA DA SILVA

A INTEGRAL NAS DICIPLINAS DO CURSO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
(C&T): CONCEITOS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS

ANGICOS/RN

2021

GABRIELA PEREIRA DA SILVA

**A INTEGRAL NAS DICIPLINAS DO CURSO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
(C&T): CONCEITOS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS**

Monografia apresentada à
Universidade Federal Rural do
Semiárido – UFERSA, Campus
Angicos, para obtenção do título
de Interdisciplinar Bacharel em
Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Jakcney Luan
Azevedo de Sousa.

ANGICOS/RN

2021

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

P586i Pereira da Silva , Gabriela .
A Integral nas disciplinas do curso de Ciência
e Tecnologia (C&T): Conceitos físicos e
geométricos / Gabriela Pereira da Silva . - 2021.
45 f. : il.

Orientador: Jakcney Luan Azevedo de Sousa .
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2021.

1. CÁLCULO. 2. INTEGRAL. 3. CIÊNCIA E
TECNOLOGIA. I. Azevedo de Sousa , Jakcney Luan ,
orient. II. Título.

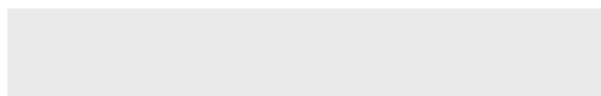
GABRIELA PEREIRA DA SILVA

**A INTEGRAL NAS DISCIPLINAS DO CURSO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
(C&T): CONCEITOS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS**

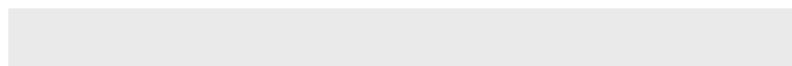
Monografia apresentada à
Universidade Federal Rural do Semi-
Árido – UFRSA, Campus Angicos,
para obtenção do título de Bacharel
em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 01/ 06/ 2021.

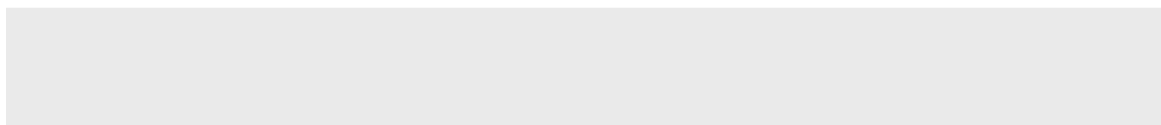
BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. Jakcney Luan Azevedo de Sousa. (UFRSA)
Presidente da Banca



Prof. Me. Tanny da Silva Maciel. (UNIVASF)
Examinador Externo



Prof. Me. Isabelly Camila Diniz de Oliveira Farias. (UNIESP)
Examinador Externo

AGRADECIMENTOS

Deus nos presenteia com tantas pessoas boas ao nosso redor, oportunidades e conquistas que devemos ser gratos primeiramente a 'Ele. Então, agradeço primeiramente a Deus por tudo e até onde cheguei. Agradeço também com toda intensidade a minha Mãe Regilânia Pereira e ao meu Pai Jucivan Fonseca, por todo apoio e amor que recebi deles, são as pessoas mais importante da minha vida.

Agradeço também ao meu irmão Regivan Pereira, que está sempre presente em minha vida me ajudando, é quem admiro tão grande a determinação.

Agradeço ao meu namorado Mateus Vítor pelo amor e carinho, por todo apoio que me dá e, por estar sempre ao meu lado disposto a ajudar.

Sou grata a toda minha família, por acreditarem em mim. Grata também aos meus amigos, e a alguns que a faculdade me presenteou, em especial Ingrid Tito por estar sempre me ajudando, obrigada por serem tão presentes em minha vida.

Não poderia deixar de mencionar os mestres educadores que tive a honra de aprender com eles. Portanto, agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha educação, pois a única coisa que não pode ser tirada das pessoas é o conhecimento.

*“Não há nada a temer na vida, apenas
tratar de compreender”*

Marie Curie

RESUMO

Este trabalho está estruturado primeiramente pela história do Cálculo, dando ênfase nas divergências encontradas por grandes nomes da matemática e física, a partir das teorias de Arquimedes (287-212 a.C.), e o desdobramento dos conceitos de cálculo por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1643-1716), afim de obter e chegar a uma definição concreta do conceito de integral. Em diante, apresentamos as definições da integral para cada tipo, com cálculos, explicações teóricas, aplicações e exemplos de cada integral abordada. Apresentamos também o Teorema Fundamental do Cálculo para o desenvolvimento da integral, no qual, é de suma importância para o entendimento descomplicado das definições. Por fim, é apresentado a importância da integral no curso de ciência e tecnologia e, o real sentido de ser usada através de aplicações.

Palavras-chave: CÁLCULO, INTEGRAL, CIÊNCIA E TECNOLOGIA.

ABSTRACT

This work is structured primarily by the history of Calculus, emphasizing the divergences found by great names in mathematics and physics, based on the theories of Archimedes (287-212 BC), and the unfolding of calculus concepts by Isaac Newton (1643-1727) and Gottfried Wilhelm Leibniz (1643-1716), in order to obtain and arrive at a concrete definition of the concept of integral. Onwards, we present the definitions of the integral for each type, with calculations, theoretical explanations, applications and examples of each integral addressed. We also denote the Fundamental Theorem of Calculus for the development of the integral, in which it is of paramount importance for the uncomplicated understanding of definitions. Finally, the importance of integral is presented in the science and technology course and, the real meaning of being used through applications.

Keywords: CALCULUS, INTEGRAL, SCIENCE AND TECHNOLOGY.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Isaac Newton	13
Figura 2 - Wilhelm Leibniz	13
Figura 3 - Eixo cartesiano.....	16
Figura 4 - Família de parábolas de $y=x^2 + C$	17
Figura 5 - Área S definida sob a curva $f(x)$ no intervalo definido $[a,b]$	18
Figura 6 - Área da região A	20
Figura 7 - Área do conjunto	21
Figura 8 - Representação do sólido S que está acima da região R e abaixo do gráfico de f.....	22
Figura 9 - Divisão de R em sub - retângulos	23
Figura 10 - Sólido Tetraedro.....	24
Figura 11 - Cilindro circular reto	27
Figura 12 - Demonstração da integral de linha.....	29
Figura 13 - Trabalho realizado por uma força	30
Figura 14 - Parábola.....	31
Figura 15 - Representação de uma força paralela ao deslocamento	34
Figura 16 - Tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal.....	36
Figura 17 - Campo magnético	40

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
CAPÍTULO 1	12
Aspectos Históricos: Divergências Intelectuais.....	12
CAPÍTULO 2	15
Definições da Integral	15
2.1. Integral Indefinida.....	15
2.2. Integral Definida:	17
2.3. Teorema Fundamental do Cálculo	19
2.4. Integrais Duplas.....	22
2.4.1 Integrais Duplas Sobre um Retângulo.....	22
2.5. Integrais Triplas.....	26
2.6. Integrais de Linha.....	28
2.6.1. Trabalho Realizado por uma força ao Longo de uma Trajetória	30
CAPÍTULO 3	33
Aplicações da integral no curso de C&T	33
3.1. Mecânica Clássica.....	34
3.2. Mecânica Geral e Resistência dos Materiais.....	34
3.3. Cálculo Numérico	38
3.4. Eletricidade.....	39
3.5. Equações Diferenciais.....	40
CONCLUSÃO	43
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44

INTRODUÇÃO

O cálculo e a matemática, juntamente com conceitos físicos e geométricos, começaram a ser conceituados visando as questões do cotidiano das pessoas, atendendo necessidades básicas e resolvendo problemas, dos financeiros até os sociais em geral. E a partir dos estudos no curso de ciência e tecnologia, e nas ramificações da matemática, o conceito da integral surge da necessidade de se calcular a área.

Dando ênfase no cálculo Integral continuamente, este atuou com a questão de determinar uma função a partir da referência a respeito da taxa de variação, possibilitando o cálculo da posição final de um corpo a partir de sua posição inicial, caracterizando os preceitos físicos, logo, conhecendo-se as forças atuantes sobre ele, a propósito das áreas de regiões irregulares no plano, do volume, da massa de sólidos arbitrários e o paralelo do comprimento de curvas, objetivando assim a parte geométrica nos estudos.

Estudamos a integral de maneira formal, analisando definições e propriedades, e a presença dela nas disciplinas do ciclo básico, como Cálculo I, II e III, e Equações diferenciais, além da presença em outras disciplinas de cursos mais específicos, como podemos citar Ondas e Magnetismo, Eletricidade e Magnetismo e Resistência dos Materiais.

Sendo assim, os conceitos físicos e geométricos a partir da integral, sempre estiveram ligados a abordagem de estudo de cada época, igualmente na atualidade, com a mesma finalidade, ajudando a compreender áreas distintas do conhecimento, como também, proporcionar a facilidade e exatidão precisa para resolução de problemas envolvendo cálculos.

O estudo da integral simbolicamente representado por $\int$, é iniciado partindo dos conceitos da integral indefinida e definida. Tendo em cada caso, suas propriedades e especificidades a serem levadas em consideração a depender da situação-problema em questão.

Esta pesquisa tem como ênfase relacionar e amplificar a aprendizagem dos alunos por meio da integral matemática, juntamente com conceitos físicos e geométricos abordados no curso de C&T, listando os tipos de integrais e

mostrando a diferenças entre elas, envolvendo estudos dos padrões de movimento contínuo e suas variações ao deslocamento de corpos, áreas de regiões; fluxo de líquidos; expansão de gases; forças físicas como magnetismo e eletricidade; corpos em queda livre na Terra.

O devido trabalho adota como objetivo identificar os conceitos e abordar a integral em múltiplas disciplinas ofertadas no curso de C&T, tais como disciplinas de física como de cálculo, a fim dos alunos adentrarem ao curso de engenharia contendo uma boa base. Além do mais, exercita e desenvolve o raciocínio lógico do aluno a partir de ferramentas para as aplicações, como as fórmulas, servindo também, para entender a principal função da integral.

Logo, o trabalho será dividido em três capítulos. No primeiro capítulo apresentamos o contexto histórico em que a integral é inserida com os principais físicos e matemáticos que expandiram a história do cálculo para ser estudado e desenvolvido cada vez mais. No segundo capítulo é apresentado as definições da integral e seus conceitos e exemplos, juntamente com suas propriedades e, por fim, no último capítulo é denotado as aplicações da integral nas diversas disciplinas do curso de ciência e tecnologia.

CAPÍTULO 1

Aspectos Históricos: Divergências Intelectuais

O cálculo integral é um mecanismo fundamental, que vem sendo aprimorado e estudado desde longos anos atrás, usado notadamente para se descobrir áreas, problemas geométricos e outros. A partir do século XVII foram se concretizando as análises com o cálculo diferencial e integral de grandes nomes como o físico e matemático Arquimedes, transformadas e aprimoradas por Newton e Leibniz e, depois destes ainda teve grande envolvimento e trabalho com as integrais, os irmãos Bernoulli, Johann, no qual, justamente criou o nome “cálculo integral” e, Jacques, seu irmão, no qual, publicou este nome em 1690.

Dando ênfase para problemas de áreas, os gregos matemáticos Arquimedes e Eudoxo de Cnides foram os principais contribuintes para o método da exaustão prioritariamente utilizado para calcular área de figuras em geral com inserções de polígonos cuja soma das áreas convergem para a área da figura desejada. Este método merece destaque pois aborda um conceito geométrico assim como na integral, como mecanismo para resoluções envolvendo áreas, diante dessa aproximação com o atual cálculo integral, notamos a semelhança com a integração definida, na qual, chega a resultados precisos sobre problemas de áreas e volumes, no qual, foi aplicado da melhor maneira por Arquimedes. E, a partir, disso suas ideias tiveram estudos e aprimoramento para exercer e fortificar o cálculo integral de maneira mais compreensível.

Logo depois veio à tona os princípios e planejamento do físico Isaac Newton, inicialmente, no ano de 1665 ainda estudante, começou seu gosto para com cálculos diferenciais e integrais, levando em conta mais tarde a criação do Teorema Fundamental do cálculo.

Caracterizado por duas operações essenciais do cálculo, a diferenciação e integração, consideradas uma o inverso da outra. Com conjecturas de curvaturas, quadraturas e retificações, Newton trabalhou para contribuir significativamente na percussão desses cálculos principais, adotou o método dos fluxos, conhecido atualmente como o cálculo diferencial, no qual, o resultado

obteve várias aplicações para tangentes e curvas, máximos e mínimos, pontos de inflexão, convexidade e etc.

Na mesma época também trabalhou Leibniz, o cientista alemão, este adotou uma simbologia diferente da qual Newton teria adotado, causando desavenças entre eles. O cientista alemão e também filósofo foi o primeiro a utilizar o símbolo da integral como um “S alongado” ($\int$), caracterizando o conceito de soma. Suas ideias e regras deduzidas divergentes de Newton são utilizadas até hoje nos cursos de exatas e, portanto, ganhou mais influências e destaques, para representação da simbologia dos cálculos, e como Leibniz era mais comunicativo, obteve o auxílio também dos irmãos Bernoulli.

Porém, como o matemático e físico Isaac Newton foi o primeiro a apresentar suas teorias e raciocínio sobre cálculo, ele é considerado o **pai do cálculo**.

Figura 1 - Isaac Newton



Fonte: (Castro, 2006)

Figura 2 - Wilhelm Leibniz



Fonte: (Velez, 2020)

Os irmãos Bernoulli então difundiram e aperfeiçoaram o cálculo a partir desses dois grandes nomes, (Newton e Leibniz). Os irmãos estudaram notadamente as publicações do cientista alemão, e com a aprendizagem desenvolveram métodos para resolver equações diferenciais e aumentaram os campos de aplicações para diversas áreas de trabalho, como a mecânica, construção civil, trabalho hidrostático e outros. Ainda assim, um dos irmãos foi contratado pelo Marquês L'Hospital para lhe ensinar cálculo e como consequência desse ensinamento feito pelo irmão italiano Johann Bernoulli, foi criado um livro e também a regra de L'Hospital, criada pelo Marquês Guillaume François Antoine. A regra de L'Hospital diz respeito sobre calcular um limite de uma função, na qual, os valores do numerador e denominador possam tender ao infinito ou a zero, ou seja, remete-se a calcular limites indeterminados do tipo $0/0$ e ∞/∞ . Em contrapartida, houve uma descoberta no ano de 1922, de que o verdadeiro autor da regra atribuída por L'Hospital tinha sido, na verdade, feita e idealizada por Johann Bernoulli, onde foi encontrada uma cópia do trabalho do italiano para o Marquês.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Com a história e desenvolvimento do Cálculo realizado por grandes nomes da matemática e da física, foram conservados e apresentados teoremas, regras e diversas aplicações atualmente estudadas nos cursos em que apresenta cálculos diferenciais e integrais, problemas nos quais antes não era possível serem resolvidos e, portanto com os avanços foram se tornando imagináveis e justificáveis da melhor maneira para a compreensão do lecionado, foi também adotado crescentemente por faculdades da engenharia, para aprimorar a visão dos alunos para problemas geométricos e cálculos diversos para aplicações em campos abrangentes, necessitando dos ideais criadores do cálculo e sendo avançado cada vez mais.

CAPÍTULO 2

Definições da Integral

As integrais são simbolizadas por seus diferentes tipos, nos quais, iremos tratar neste capítulo, caracterizando e definindo a finalidade de cada uma delas e exemplificando seu cálculo de forma inteligível. Primeiramente, a integral fixa a ideia de ser determinada para se obter uma áreas de regiões delimitadas por curva e expressar também taxas de variação a partir de funções, logo, para evidenciar matematicamente sua melhor definição e espaço de aplicação, a integral é dividida primeiramente em duas, a integral definida e a integral indefinida.

2.1. Integral Indefinida

O conceito da integral indefinida surge de buscar a primitiva (ou antiderivada) das funções. Ocorre que podemos encontrar primitivas iguais para funções diferentes. Por exemplo, $f(x) = x$ têm primitivas $F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$, $G(x) = \frac{x^2}{2} + 2$, (...). Logo, para cobrir esses casos, representamos a primitiva como $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, onde C é uma constante. Como poderemos ter infinitos " C ", teremos infinitas possibilidades para a primitiva. Sendo assim, o conjunto de todas essas primitivas serão representadas por uma nova simbologia, que é a integral indefinida.

A definição de primitiva pode ser dada da seguinte forma,

Uma função F é dita primitiva ou antiderivada da função f em um intervalo I , se

$$F'(x) = f(x),$$

para todo $x \in I$.

Ao compreender a integral indefinida, notamos que seu resultado é sempre uma função. Usando como exemplo a função $f(x) = 5x^2 - 8x + 3$, a derivada de f será expressa por $f'(x) = 10x - 8$, observamos então que a derivada da constante 3 é 0. Ao integrar a derivada de f , teremos:

$$\int (10x - 8)dx = \frac{10x^2}{2} - 8x + C$$

$$\int f(10x - 8) = 5x^2 - 8x + C$$

A integral indefinida é o oposto da derivada, assim como adição e subtração, disso ficamos cientes, agora observamos que não é possível encontrar a constante da função $f(x)$. Então, ao se calcular uma integral indefinida devemos acrescentar a constante presente na antiderivada, representada por C , onde C é uma constante qualquer.

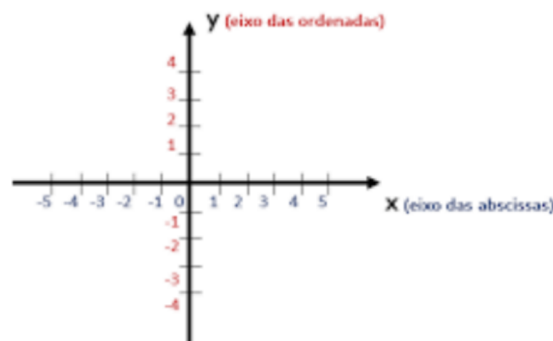
Logo, a integral da função f será expressa por,

$$\int f(10x - 8) = 5x^2 - 8x + C$$

e para determinação da constante de integração temos que, pode ser determinada a partir de algumas condições iniciais, isto é, quando se apresenta o valor da integral para algum valor da variável, ou seja, quando se dá o valor para achar C . E em meio as suas determinações encontramos significados tanto geométricos quanto físicos.

Para a relação geométrica com a integral, dada uma função do segundo grau mais uma constante C e, atribuindo valores a essas constantes, podemos obter a partir da função, várias parábolas, com eixos coincidindo com a ordenada, e tendo C como ponto de interseção com esta ordenada.

Figura 3 - Eixo cartesiano



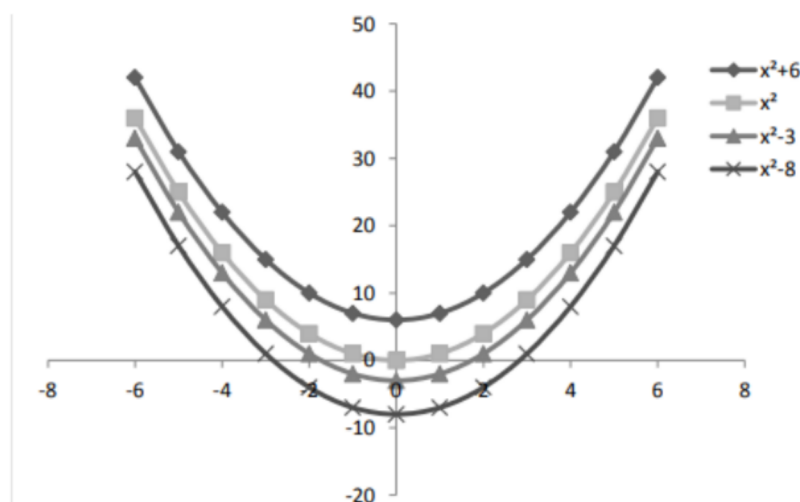
Fonte: (Ferreto, 2018)

Como é o caso do seguinte exemplo:

$$y = x^2 + 6$$

Podendo formar uma família de parábolas do tipo, $y = x^2 + C$, adotando um valor real para C como mostra a figura a seguir.

Figura 4 - Família de parábolas de $y = x^2 + C$



Fonte: (Matemática, 2014)

Já para a relação física com a integral, tomando a medida de aceleração, podemos integrar a taxa de variação da velocidade de um objeto em relação ao tempo, como por exemplo a função já integrada $v = at + C$, onde podemos determinar C , diante da velocidade inicial (v_0) dada.

2.2. Integral Definida:

É caracterizada por ter numericamente um valor real em seu resultado, sem depender da variável x , na qual, esta variável pode ser alterada por outra sem mudar o resultado da integral. Em sua definição, é encontrado somatórios e limites, necessitando o conhecimento destes. Logo, o principal propósito da integral definida é calcular uma área resultante de uma figura que possui lados curvos notadamente, para ser calculada.

Antes de partirmos para a definição formal da integral definida é necessário mencionar o conceito e definição do limite, no qual, é de suma importância para prosseguirmos.

Inicialmente, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

“O limite de $f(x)$, quando x tende à a , é igual a L ”.

Sendo assim, sua definição precisa diz que, seja uma função f definida em um certo intervalo aberto que apresente o número a , com exceção do próprio a . Afirmamos que o limite de $f(x)$, quando x tende à a , este é igual a L .

A partir dessa definição, compreendemos que ao tornar o valor de x próximo de a , é notório que a função $f(x)$ se aproxime também de L , porém x diferente de a , se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

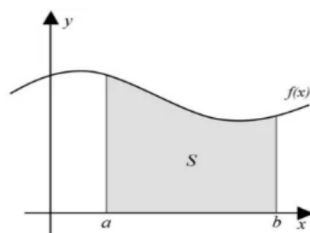
Voltando para a especificação do conceito e definição precisa da integral temos que, dada uma função f contínua e definida por $a \leq x \leq b$, iremos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesma dimensão, temos $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, e seja, x_k um valor respectivo ao k -ésimo intervalo, para $k = 1, 2, 3, \dots, n$, então a integral de f determinada no intervalo $[a, b]$ será definida por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

onde este somatório é denominado soma de Riemann.

Logo, pode-se afirmar que a integral definida usada para calcular áreas principalmente de lados curvos está definida por uma soma de Riemann e a um limite de intervalo definido $[a, b]$.

Figura 5 - Área S definida sob a curva $f(x)$ no intervalo definido $[a, b]$.



Fonte: (Silva, s.d.)

Ainda assim, nesta parte apresentada da integral definida, deparamos com várias propriedades de integração e, ainda nos é fornecido o teorema

fundamental do cálculo, no qual, na parte dois do teorema é apresentado uma forma mais simples e prática para se calcular a integral sem necessitar do uso do limite e, diante desses cálculos é mostrado também aplicações para área e volume.

2.3. Teorema Fundamental do Cálculo

O teorema fundamental do cálculo nos demonstra uma maneira mais fácil e prática de se desenvolver a integral definida, desde que seja apresentado sua primitiva.

1º teorema fundamental do cálculo: Sejam f uma função integrável em $[a, b]$ e F uma primitiva de f em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

A partir deste teorema podemos apresentar com facilidade, as seguintes proposições.

Proposição: sejam f uma função integrável em $[a, b]$.

- i. Se $a < b$, então $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- ii. Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Ainda assim, podemos denotar a diferença de $F(b) - F(a)$ por $F(x) \Big|_a^b$.

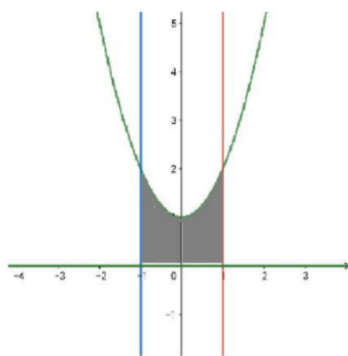
Demonstremos aqui alguns exemplos do cálculo de área de regiões planas através do teorema apresentado.

Exemplo 1: Calcular a área da região plana limitada pela curva $y = x^2 + 1$, pelo eixo x ($y=0$) e pelas verticais $x = -1$ e $x=1$.

Solução:

Inicialmente iremos usar a integral definida para calcular a área da região delimitada na figura a seguir:

Figura 6 - Área da região A



Fonte: Autoria própria.

Desse modo, a área da região A é dada pela fórmula,

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Notemos que os limites de integração são as interseções das retas verticais com o eixo x, mostrados na figura, assim, temos que

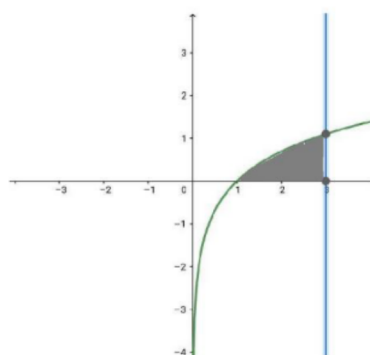
$$A = \int_{-1}^1 (x^2 + 1)dx \rightarrow A = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{-1}{3} - 1 \right) = 2 + \frac{2}{3} \rightarrow A = \frac{8}{3} \text{ u. a}$$

Encontramos no curso de cálculo II diversos métodos de integração que são muito importantes, os mais comuns são o método da substituição e o método da integração por partes, nos quais, é essencial ser estudado para o desenvolvimento nas demais disciplinas de cálculo, em especial o curso de equações diferenciais.

Exemplo 2: Calcular a área do conjunto do plano limitado pelas curvas $y = \ln x$, $x = 3$ e o eixo x

Solução: O conjunto para o qual vamos calcular a área, está representado geometricamente na figura a seguir.

Figura 7 - Área do conjunto



Fonte: Autoria própria.

Dada a figura, temos que a área do conjunto é expressa pela integral,

$$A = \int_1^3 \ln x \, dx$$

A integral do logaritmo normal ($\ln$) é facilmente calculada pelo método da integração por partes. Dessa forma, fazendo a integração por partes, temos

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x) * g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$f(x) = \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = x$; $g'(x) = 1$. Logo,

$$\int (\ln x)dx = \int (\ln x) 1dx \rightarrow x * \ln x - \int \frac{1}{x} * x \, dx = x \ln x - x + C.$$

Partindo agora para o cálculo da integral definida para a área, temos

$$\int_1^3 \ln x \, dx = (x \ln x - x) \Big|_1^3$$

$$=(3 \ln 3 - 3) - (1 \ln 1 - 1) = 3 \ln 3 - 2 \rightarrow A = \ln(27) - 2 \text{ u. a.}$$

Neste exemplo, não foi especificado que a área a ser calculada deveria estar entre as retas $x=1$ e $x=3$, foi relatado somente a reta $x=3$. Logo, seria necessário fazer o esboço do gráfico a fim de obter a segunda reta a partir da interseção entre a curva e o eixo x .

2.4. Integrais Duplas

Começamos o desenvolvimento da integral dupla a partir das funções de duas variáveis $f(x, y)$, onde estudamos na disciplina de introdução a funções de várias variáveis, mais conhecido como cálculo III no curso de ciência e tecnologia.

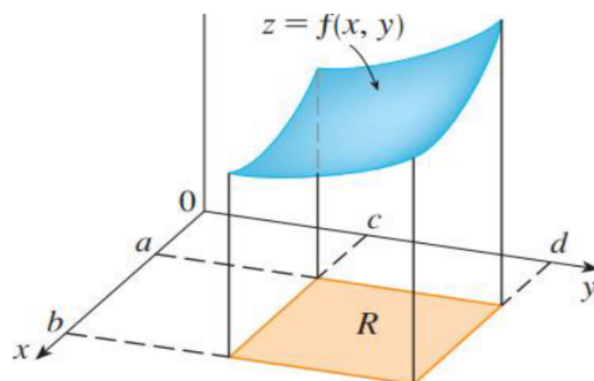
2.4.1 Integrais Duplas Sobre um Retângulo

Vamos considerar uma função f de duas variáveis em um retângulo fechado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

e vamos inicialmente supor $f(x, y) \geq 0$. O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x, y)$. Seja S o sólido que está acima da região R e abaixo do gráfico de f (Figura 9), isto é, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$.

Figura 8 - Representação do sólido S que está acima da região R e abaixo do gráfico de f



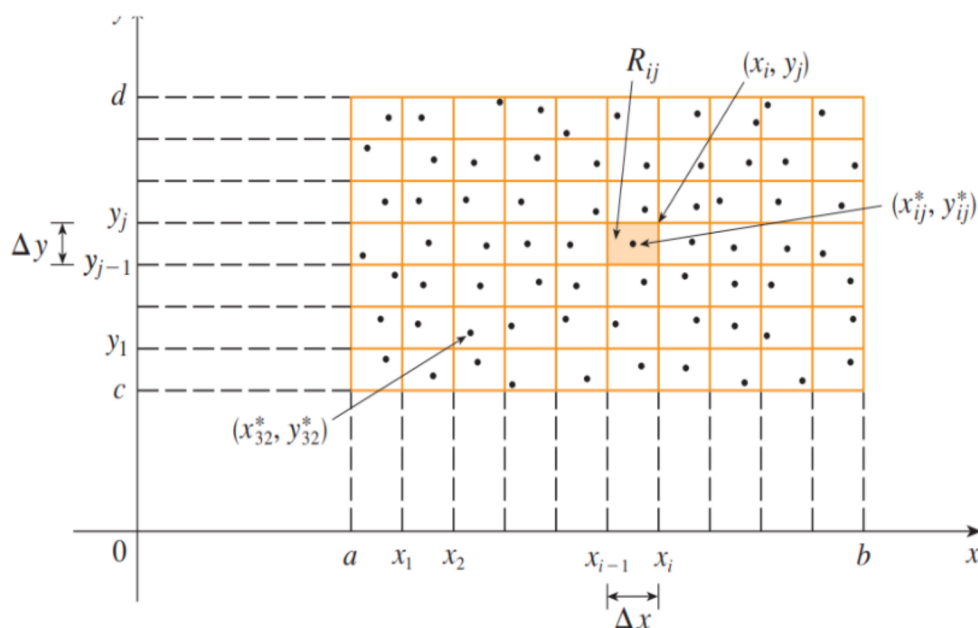
Fonte: (STEWART, 2013, p. 874).

Vamos agora dividir o retângulo R em sub- retângulos. Dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/m$ e dividindo também o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de mesmo comprimento $\Delta y = (d - c)/n$. Traçando retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelas extremidades dos subintervalos, como na figura 5, formamos assim os sub- retângulos.

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

Cada um dos quais com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Figura 9 - Divisão de R em sub - retângulos



Fonte: (STEWART, 2013, p. 875).

Definição: A integral dupla de f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A^1$$

se o limite existir.

Note que esta definição nos fornece o valor do volume de sólido S .

As integrais duplas consistem evidentemente em integrar uma área bidimensional, esse tipo de integral, é também usada para o cálculo notadamente de volume dos sólidos. Diante disso, observamos que podemos

¹ $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$ é chamada **soma dupla de Riemann** e é utilizada como uma aproximação do valor da integral dupla.

encontrar o volume por meio de gráficos, como também, uma região retangular do plano xy , calculando assim a integral de uma função.

$$\int_{y1}^{y2} \left(\int_{x1}^{x2} f(x, y) dx \right) dy$$

Assim conceituamos uma integral dupla.

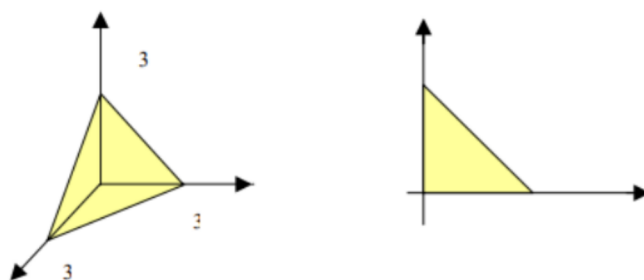
Pode-se mudar a ordem de integração, para ficar em função de x ou de y . em função de x , temos

$$\int_{x1}^{x2} \left(\int_{y1}^{y2} f(x, y) dy \right) dx$$

A integral dupla ainda se relaciona com as integrais iteradas, com fórmulas de redução e como um limite de somas de Riemann por coordenadas polares.

Exemplo 1: Determinar o volume do Sólido limitado pelos planos coordenados pelo plano $x + y + z = 3$ no 1º octante.

Figura 10 - Sólido Tetraedro



Fonte: (Universidade Federal Fluminense, 2017)

$$\text{Planos Coord.} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$R = \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 - x \end{cases}$$

Solução: Para solucionar esse exemplo iremos utilizar a integral dupla.

$$V = \int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{3-x} (3-x-y) dy dx$$

$$V = \int_0^3 3y - xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{3-x} dx$$

$$V = \int_0^3 \left(\frac{9}{2} - 3x + \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$V = \frac{9x}{2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \Big|_0^3$$

$$V = \frac{27}{2} - \frac{27}{2} + \frac{27}{6}$$

$$V = \frac{9}{2} u.v.$$

Exemplo 2: Calcular a integral dupla a seguir.

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+2) dy dx$$

Solução:

$$\int_0^1 (x+2)y \Big|_0^2$$

$$\int_0^1 (x+2)2 dx$$

$$= 2 \int_0^1 (x+2) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right] \Big|_0^1$$

$$= 2 \left(\frac{2}{5} \right)$$

$$= 10.$$

2.5. Integrais Triplas

Basicamente a única diferença das integrais triplas para as integrais duplas, é que trabalharemos agora com funções de três variáveis em uma determinada região, em um espaço tridimensional, é definida também num sistema de coordenadas xyz. Elas são escritas de forma abstrata como,

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz$$

- R é uma determinada região no espaço tridimensional;
- $f(x, y, z)$ é alguma função escalar que captura pontos do espaço tridimensional como entrada.
- $dx dy dz$ são pequenas quantidades de massa, capacidade ou volume, ou seja, são tamanhos de um corpo.

Neste tipo de integral é principalmente destacado o cálculo para determinar a massa de um sólido, como dada uma função peso e a variação de volume de tal sólido, podemos obter a massa desejada. Diante disso, denotamos que a integral tripla é usada para se calcular a massa de sólidos do espaço e, como os outros tipos possuem algumas propriedades, assim temos para a integral tripla, são estas a linearidade, ordem, propriedade aditiva e, propriedade do valor médio. São propriedades que ajudam no entendimento do cálculo e como resolver este cálculo, sendo necessário um maior conhecimento sobre esses conceitos matemáticos.

Vejamos alguns exemplos utilizando as integrais triplas.

Exemplo 1: Calcule a expressão $\int_0^2 \int_0^x \int_0^{4-x^2} xyz \, dz dy dx$.

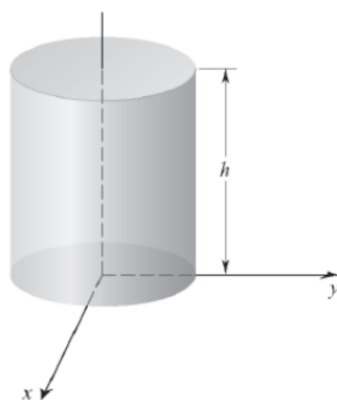
Solução:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^x \int_0^{4-x^2} xyz \, dz dy dx &= \int_0^2 \int_0^x \left(\int_0^{4-x^2} xyz \, dz \right) dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^x \left(\left[\frac{1}{2} xyz^2 \right]_0^{4-x^2} \right) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^x x(4-x^2)^2 y \, dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^x x(4-x^2)^2 y \, dy \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\left[\frac{1}{2} x(4-x^2)^2 y^2 \right]_0^x \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^2 x^3 (4-x^2)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x^3 (16-8x^2+x^4) dx \\
&= \frac{1}{4} \left[4x^4 - \frac{8}{6} x^6 + \frac{1}{8} x^8 \right]_0^2 = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2: Encontre a massa do cilindro circular reto sólido de raio r e altura h , dado que a densidade de massa em um ponto é diretamente proporcional à distância do ponto à base inferior.

Figura 11 - Cilindro circular reto



Fonte: (Salas, Hille, & Etgen, 2005)

Solução: denotando o sólido por T , temos que as coordenadas são, $-r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}, 0 \leq z \leq h$.

Como a densidade em um ponto é diretamente proporcional à distância do ponto à base inferior, temos que a função $\lambda(x, y, z) = kz$, onde, $k > 0$ é a constante de proporcionalidade. Logo,

$$M = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_0^h kz \, dz dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{2} kh^2 dy dx \\
&= 4 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{2} kh^2 dy dx \quad (\text{usando a simetria}) \\
&= 2kh^2 \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx.
\end{aligned}$$

Podemos calcular essa integral agora usando a substituição trigonométrica, de qualquer modo, temos que,

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2} dx = \frac{1}{4} \pi r^2.$$

Segue que,

$$M = 2kh^2 \left(\frac{1}{4} \pi r^2 \right) = \frac{1}{2} kh^2 r^2 \pi.$$

2.6. Integrais de Linha

Na integral de linha estudaremos a integração ao longo de curvas e superfícies. Em meio a esse assunto está presente três principais teoremas, o Teorema de Green, o Teorema de Gauss e o Teorema de Stokes. Estes teoremas se baseiam no Teorema Fundamental do cálculo e caracterizam uma integral sobre um conjunto S , ou seja, uma integral relacionada sobre a fronteira de S .

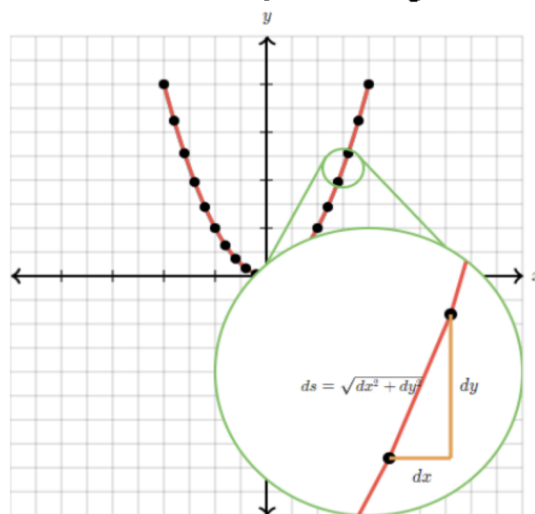
Supondo que S seja um subconjunto do plano ou do espaço. Dada uma função que relaciona um escalar a cada ponto de S , seja por exemplo a temperatura naquele ponto ou a densidade de massa naquele ponto, temos um conceito de campo escalar. Uma função que relaciona um vetor a cada ponto de S , seja por exemplo uma velocidade do vento ou gradiente naquele ponto de uma função f é chamado de campo vetorial, portanto, usaremos essa abordagem para a definição de integral de linha.

Definição: Se f é definida em uma curva C fornecida parametricamente por $\mathbf{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + k(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$, então a **integral de linha de f sobre C** é

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k,$$

Contanto que esse limite exista.

Figura 12 - Demonstração da integral de linha



Fonte: (Academy, Integral de Linha, s.d.)

Diante disso, foi suposto que $f(x, y, z)$ seja uma função de valores reais que desejamos integrar sobre a curva C que está dentro do domínio de f e é parametrizada por $\mathbf{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + k(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$.

Os valores de f ao longo da curva são fornecidos pela função composta $f(g(t), h(t), k(t))$, integrando essa composta com relação ao comprimento de arco de $t = a$ a $t = b$.

Inicialmente separando a curva C em um número finito n de sub-arcos. O sub-arco típico tem comprimento Δs_k . Em cada sub-arco escolhemos um ponto (x_k, y_k, z_k) e formamos a seguinte soma

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k,$$

Na qual é semelhante a soma de Riemann. Dependendo de como é dividida a curva C e selecionamos (x_k, y_k, z_k) no k -ésimo sub-arco, podemos obter valores diferentes para S_n .

Esse tipo de integral também nos permite calcular notadamente o trabalho realizado por uma força ao longo de uma trajetória.

2.6.1. Trabalho Realizado por uma força ao Longo de uma Trajetória

Consideramos um objeto que se move através de um campo magnético ou de um campo gravitacional. A trajetória percorrida por uma partícula nesse espaço irá se movimentar ao longo de uma curva C sob ação de uma força F , cujo é o conceito de trabalho realizado. Logo, esse trabalho será calculado a partir da integral de linha.

Desejamos definir o trabalho total realizado por F ao longo da curva C , primeiramente para realizar essa definição, vamos supor que um objeto se mova ao longo de uma curva

$$C: \mathbf{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}, \quad u \in [a, b]$$

Sujeita a uma força F . (O campo vetorial F pode variar de um ponto para outro, não apenas em tamanho, mas também em direção e sentido.) Vamos supor que a curva seja suave, isto é, que o vetor tangente r seja contínuo e nunca se anule.

Observando o que acontece em um pequeno intervalo do parâmetro $[u, u + h]$. Para uma estimativa para o trabalho realizado neste intervalo, podemos usar o produto interno

$$F(\mathbf{r}(u)) \cdot [\mathbf{r}(u + h) - \mathbf{r}(u)].$$

Dessa maneira, estamos calculando o vetor força F em $\mathbf{r}(u)$ e substituindo a curva de $\mathbf{r}(u)$ a $\mathbf{r}(u + h)$ pelo segmento de reta de $\mathbf{r}(u)$ a $\mathbf{r}(u + h)$. Se definirmos

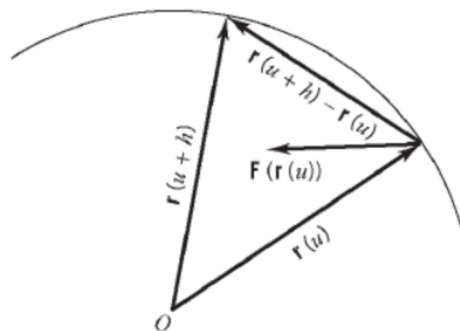
$W(u)$ = trabalho total realizado por F de $\mathbf{r}(a)$ a $\mathbf{r}(u)$ e

$W(u + h)$ = trabalho total realizado por F de $\mathbf{r}(a)$ a $\mathbf{r}(u + h)$,

então o trabalho realizado por F de $\mathbf{r}(u)$ a $\mathbf{r}(u + h)$ tem que ser a diferença

$$W(u + h) - W(u).$$

Figura 13 - Trabalho realizado por uma força



Fonte: (Salas, Hille, & Etgen, 2005)

Chegando-se à equação aproximada

$$W(u + h) - W(u) \cong F(\mathbf{r}(u)) \cdot [\mathbf{r}(u + h) - \mathbf{r}(u)],$$

E dividindo por h , obtemos

$$\frac{W(u+h) - W(u)}{h} \cong F(r(u)) \cdot \frac{[r(u+h) - r(u)]}{h}.$$

Os quocientes apresentam taxas de variação média e a equação é apenas uma aproximação, logo, o conceito de trabalho é tomado preciso quando ambos os lados tem exatamente o mesmo limite e h tende a 0, impondo-se que

$$W'(u) = F(r(u)) \cdot r'(u)$$

Por fim, fica determinado que,

$$W(a) = 0 \text{ e } W(b) = \text{trabalho realizado por } F \text{ em } C.$$

temos:

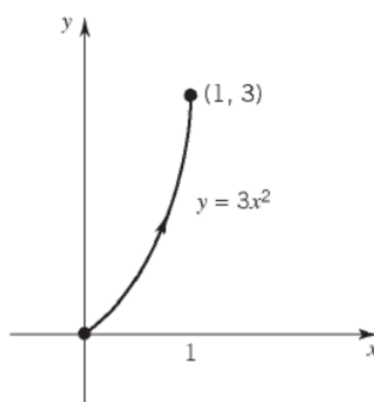
$$C = W(b) - W(a) = \int_a^b W'(u) du = \int_a^b [F(r(u)) \cdot r'(u)] du.$$

Chegando à seguinte definição de trabalho:

$$W = \int_a^b [F(r(u)) \cdot r'(u)] du.$$

Exemplo 1: Um objeto, sob a ação de várias forças, move-se ao longo da parábola $y = 3x^2$, dá origem até o ponto $(1,3)$, mostrado na figura abaixo. Uma das forças agindo sobre o objeto é $F(x,y) = x^3i + yj$. Calcule o trabalho realizado por F .

Figura 14 - Parábola



Fonte: (Salas, Hille, & Etgen, 2005)

Solução: Parametrizando a curva por

$$C: \mathbf{r}(u) = u\mathbf{i} + 3u^2\mathbf{j}, u \in [0,1].$$

$$x(u) = u, \quad y(u) = 3u^2$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) = [x(u)]^3 x'(u) + y(u) y'(u) = u^3(1) + 3u^2(6u) = 19u^3$$

$$\begin{aligned} W &= \oint F(r) dr = \int_0^1 19u^3 du \\ &= \frac{19}{4} J. \end{aligned}$$

Exemplo 2:

Integre $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre o segmento de reta C unindo a origem ao ponto $(1,1,1)$.

Solução:

Escolhemos a parametrização mais simples que pudermos imaginar:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Os componentes possuem derivadas de primeira ordem contínuas e $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ nunca é 0, portanto a parametrização é lisa.

Uma superfície parametrizada

$$\vec{r}(u, v) = f(u, v)\vec{i} + g(u, v)\vec{j} + h(u, v)\vec{k}.$$

É lisa se $\vec{r}_u$ e $\vec{r}_v$ forem contínuas e $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ não se anular no domínio dos parâmetros

A integração de f sobre C é

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_0^1 f(t, t, t)(\sqrt{3}) dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3} dt = \sqrt{3} \int_0^1 (2t - 3t^2) dt = \sqrt{3} [t^2 - t^3]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

Aplicações da integral no curso de C&T

Neste capítulo iremos discutir as principais aplicações da integral em meio ao curso de ciência e tecnologia e abordando campos do conhecimento como a geometria e a física. Notamos que é de suma importância o entendimento para como e em que ser usada o conceito de integral, e qual seu real sentido para o cálculo em que estudamos. Para os alunos de C&T a integral é vista praticamente em 80% do curso, e muitos ainda não sabem sua principal função ou para o que serve tal aplicação e tal uso, muitos calculam a integral sem saber o porquê está calculando-a, ou seja, sem saber o seu propósito no cálculo e no curso retratado. Diante disso, vamos apresentar de forma clara e sucinta o emprego da integral a seguir.

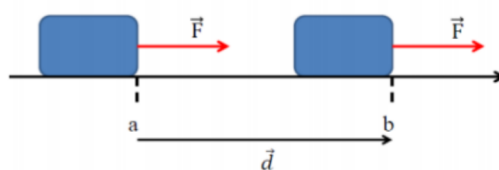
Observamos que é bastante comum a integral em diversas aplicações de áreas, volumes, massas, como também, trabalho, fluxo de calor, energia potencial, e outros contextos, na qual, a integral é calculada. No ensino superior de ciência e tecnologia cursamos algumas disciplinas que empregam a integral, algumas destas são Ondas e Termodinâmica, Mecânica Clássica, Mecânica Geral, Fenômenos dos Transportes, Cálculo I e II, Introdução as Funções de Várias Variáveis, Equações Diferenciais, Resistência dos Materiais, Cálculo Numérico e, Eletricidade Básica, assim como, Eletricidade e Magnetismo.

Em cada disciplina dessa estudada, calculamos e é apresentada de alguma forma a integral para aplicações, sejam estas para definição de trabalho, campo magnético, tensão, flexão ou cargas. Já incluímos no capítulo dois definições e exemplos, nos quais, fazem parte das disciplinas de cálculo I, cálculo II e introdução de funções de várias variáveis (cálculo III) e assim demonstramos aplicações de problemas envolvendo volume, massa, trabalho realizado por forças, abordagem de campo escalar e vetorial, e portanto, agora mencionaremos outras disciplinas a partir de suas aplicações com a problemática da integral afim de desenvolver a compreensão dos discentes.

3.1. Mecânica Clássica

Na disciplina de mecânica clássica vista no segundo período de C&T, estudamos vários conceitos físicos e dentre eles está a definição de trabalho de uma força F realizado ao longo de um caminho C , dada pela integral de linha, onde apresentamos no capítulo anterior. Portanto, esta disciplina nos permite entender o uso da integral e sua função, para obter o resultado de uma força, ou seja, pode-se calcular de forma geral o trabalho de uma dada força usando a integral de linha ou também caracterizada pela integral de Riemann.

Figura 15 - Representação de uma força paralela ao deslocamento



Fonte: (Barros, 2011)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(c_j)\Delta x$$

Definida como integral de Riemann.

3.2. Mecânica Geral e Resistência dos Materiais

Em seguida, relacionando as disciplinas de mecânica geral e resistência dos materiais I, apresentamos também aplicações da integral para definições de carga axial, torção, flexões e outras.

Para o conteúdo de carga axial, é discutido como determinar a deformação de elementos carregados axialmente e, a partir disso, é desenvolvido métodos para determinar reações nos apoios quando essas reações não puderem ser determinadas exatamente pelas equações de equilíbrio.

Portanto podemos verificar o uso da integral nessa aplicação, em que diz respeito a deformação elástica de um elemento submetido a carga axial. Esta

aplicação se dá usando a Lei de Hooke, na qual, se diz respeito quando uma mola sofre deformação por alguma força externa, determinada de força elástica sendo realizada na mesma direção e no sentido oposto à força externa, por sua vez, a força elástica é caracterizada sendo uma variável e depende do tamanho da deformação que é sofrida pela mola, e ainda assim, tem-se as definições de tensão e deformação, afim de obter uma equação para calcular seu objetivo.

Para chegar na presença da integral, com seus conceitos e definições, temos que, uma barra com comprimento L , com as expressões de tensão e deformação é dada por

$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \text{ e } \epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

Usando a Lei de Hooke,

$$d\delta = \frac{P(x)dx}{A(x)E}$$

Logo, devemos integrar essa expressão para determinar o deslocamento da extremidade exigido,

$$\int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E}$$

Onde

δ = deslocamento de um ponto na barra relativo a um outro ponto;

L = distância original entre os pontos;

$P(x)$ = força axial interna na seção, localizada a uma distância x de uma extremidade;

$A(x)$ = área da seção transversal da barra, expressa em função de x ;

E = módulo de elasticidade para o material.

Ainda assim, mais uma aplicação da integral é demonstrada pela tensão térmica dada a partir da integral abaixo, na qual, uma mudança na temperatura pode causar alterações nas dimensões de um material.

$$\delta_T = \int_0^L \alpha \Delta T dx$$

Onde

ΔT = variação na temperatura do elemento;

L = comprimento inicial do elemento;

δ_T = variação no comprimento do elemento.

Assim, apresentamos as aplicações da integral para o conteúdo de carga axial, sendo denotada ainda para deformações inelásticas.

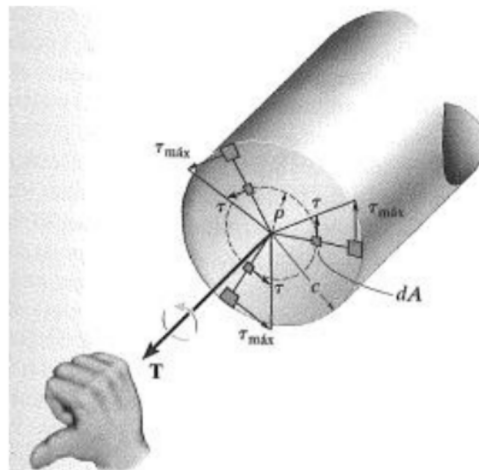
No conteúdo de torção, apresentamos a própria fórmula de torção, caracterizada quando um torque externo é aplicado a um eixo, criando um torque interno que corresponde no interior do eixo.

A integral nesse aspecto fará parte da equação que relaciona esse torque interno com a distribuição da tensão de cisalhamento na seção transversal de um eixo ou tubo circular. Logo, apresentamos a seguinte equação

$$T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA$$

Nesta equação a integral depende somente da geometria do eixo, representa então o momento polar de inércia da área da seção transversal do eixo, calculada em torno da linha central longitudinal do eixo.

Figura 16 - Tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal



Fonte: (R.C.Hibbeler, 2012)

Pode-se ainda ser relacionado com o eixo maciço e definir uma nova equação com a integral, para calcular o momento polar de inércia.

Ainda assim no conteúdo de torção, podemos apresentar a integral no cálculo de obtenção do ângulo de torção. Demonstrada a seguir,

$$\varphi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{J(x)G}$$

Nessa expressão,

φ = ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra extremidade, medida em radianos;

$T(x)$ = torque interno na posição arbitrária x , determinado pelo método das seções e pela equação de equilíbrio de momento aplicada em torno da linha central do eixo;

$J(x)$ = momento polar de inércia do eixo expresso em função da posição x ;

$G(x)$ = módulo de elasticidade ao cisalhamento do material.

Em tensão de cisalhamento média, encontramos a integral de linha. Nessa parte indica que a integração é feita ao redor de toda a borda da área, assim representada pelo símbolo de integral de linha.

$$T = \oint h\tau_{média}t ds$$

Assim como para o conteúdo de carga axial, a integral também é utilizada para torção inelástica e outras aplicações.

Na flexão, ultimo conteúdo que mencionamos da disciplina de resistência e mecânica geral visto no curso de C&T para apresentar a integral em suas aplicações temos então a aplicabilidade na própria fórmula de flexão. Portanto, o cálculo será desenvolvido para relacionar a distribuição de tensão longitudinal em uma viga e o momento fletor interno resultante que age na seção transversal da viga.

Logo, a integral se faz presente no cálculo para chegar à fórmula exata da flexão, na expressão

$$M = \frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y^2 dA$$

Temos que, a integral nessa expressão representa o momento de inércia da área da seção transversal, calculada em torno do eixo neutro.

Então, todos esses conteúdos de resistência dos materiais e mecânica geral, estudado em meio ao curso superior, pode nos dá uma noção e representação básica da integral, veremos mais aplicações a seguir a partir de outras disciplinas.

3.3. Cálculo Numérico

O Cálculo Numérico nos permite encontrar métodos matemáticos a partir de estudos de algoritmos para resoluções de problemas que podem ser representados de uma maneira mais fácil.

Na disciplina de cálculo numérico denotamos a integral por meio da Regra de Simpson, essa regra é caracterizada assim como na Regra dos Trapézios, utilizando o polinômio linear de Lagrange e, usada também para o cálculo de erro. O conteúdo notadamente visto por aplicação de integração numérica é dado pelas Fórmulas de Newton Côtes.

O objetivo desse conteúdo é estudar métodos numéricos que aproxime a integral definida de uma função $f(x)$ num intervalo $[a, b]$. A integração numérica é apenas aplicada quando a primitiva da função não é conhecida ou também quando conhecemos a função $f(x)$ num conjunto discreto de pontos.

Logo, as Fórmulas de Newton Côtes são estabelecidas para estratégia de aproximar a função dada por um polinômio interpolador e assim aproximamos a integral pela integral do polinômio. As aproximações são apresentadas a seguir,

$$\int_a^b f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

Os pontos devem ser igualmente espaçados, $x_k = x_0 + kh$, com $h = \frac{(b-a)}{n}$, e os coeficientes A_i são determinados pelo polinômio escolhido para aproximar a função dada.

3.4. Eletricidade

Em seguida, no curso de C&T estudamos também a disciplina de eletricidade básica que pode ser relacionada com outra disciplina do curso, esta é eletricidade e magnetismo. Podemos então destacar a aplicação da integral de linha para o conteúdo de campo magnético pela Lei de Ampère.

A Lei de Ampère é entendida por estabelecer um campo magnético $\vec{B}$ criado por um condutor retilíneo percorrido por uma corrente elétrica de intensidade i , a uma distância (R) do condutor.

Considerado o campo magnético produzido por um condutor retilíneo com corrente I , logo o campo é gerado da seguinte forma,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Onde,

B = Campo magnético;

μ_0 = Soma algébrica das correntes;

I = Corrente;

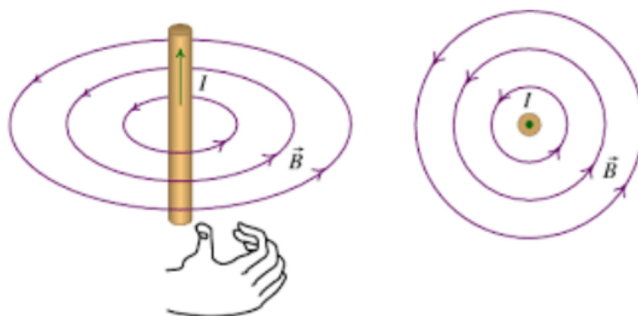
$2\pi r$ = Área da circunferência.

Então, a Lei de Ampère nos permite calcular um campo magnético usando a simetria, definida com base em uma integral de linha em função de B em torno de uma trajetória fechada.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Em uma dada circunferência B e $d\vec{l}$ são paralelos, logo $B \cdot d\vec{l} = B dl$, como r é constante em torno da circunferência, B também será constante, observamos então que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ será o comprimento da circunferência. A expressão é definida por um produto escalar entre o campo magnético em um dado ponto e seu elemento infinitesimal. É uma integral em um caminho fechado, logo, será caracterizado por uma integral de linha.

Figura 17 - Campo magnético



Fonte: (Porto, 2016)

Estudamos que o campo magnético total em B em qualquer ponto do caminho é obtido pela soma vetorial dos campos dados pelos condutores próprios. Assim, a integral do campo B é igual a μ_0 vezes a soma algébrica das correntes i .

Partindo para,

$$\oint B \, dl = \mu_0 I$$

Diante disso, a Lei de Ampère nos permite calcular um campo magnético usando a simetria, definida com base em uma integral de linha denominada B em torno de uma trajetória fechada.

3.5. Equações Diferenciais

Apresentando também a disciplina de Equações Diferenciais envolvendo integrais, encontramos aplicações de ED com soluções a partir do método de integração, no qual, resolvemos facilmente as equações diferenciais de primeira ordem.

Exemplo: Dada uma equação diferencial:

$$y' = 6x^2 - 5$$

Solução:

$$y = \int (6x^2 - 5) \, dx$$

$$2x^3 - 5x + C$$

Notamos que a equação diferencial pode ser solucionada facilmente usando o método de integração.

Em meio a disciplina estudamos também as Transformadas de Laplace de funções. Esta simplesmente nos ajuda a transformar uma função em uma forma mais agradável. Podemos caracterizar a transformada da seguinte forma,

$$D\{f(t)\} = f'(t)$$

Transformando para o operador da integração, expresso como

$$I\{f(t)\} = \int_0^a f(t)dt$$

Notamos que a integral reverte a diferenciação.

Então definimos que a Transformada de Laplace é uma transformada integral com limites de integração 0 e ∞ e o núcleo e^{-st} . É explicita por L , e a Transformada de Laplace de uma função é definida como

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Essa transformada envolve a integral em relação a um intervalo ilimitado. Para isto, apresentamos uma integral imprópria,

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} f(t)dt$$

Como entendimento, usaremos letras minúsculas para representar a função dada e a mesma letra maiúscula para representar sua Transformada de Laplace. Chaves serão usadas para envolver a função de t . Por exemplo, a Transformada de Laplace da função $f(t)$ será expressa como

$$L\{f(t)\} = F(s).$$

Por fim, sabemos que existem diversas aplicações para a integral, das principais disciplinas estudadas e cursadas em Ciência e Tecnologia. Nesse aspecto, apresentamos o principal objetivo, em que é necessário e essencial

mostrar aos alunos que a integral é um método de solução, aplicável nos mais diversos conteúdos que foi destacado ao longo desse capítulo, envolvendo conceito físicos e geométricos.

O curso de ciência e tecnologia nos fornece conceitos novos, e aprimoramento do ensino. Diante disso, é notório que possamos estabelecer métodos e encontrar fáceis soluções para problemas, nos quais, não sabemos definir e por muitas vezes não sabemos calcular tal expressão. Portanto, o entendimento é tão essencial para as nossas vidas e por meio do curso de C&T podemos aprender a utilização da integral e seu real sentido.

CONCLUSÃO

O trabalho apresentado sobre a integral, conteúdo do cálculo, é estabelecido para aplicações que envolve campos de conteúdo como a física e a geométrica, e também, é apresentado os diferentes tipos de integrais, cada tipo de integral com sua essencial aplicação, em que nos permite calcular áreas, curvas, volumes, massas.

Diante dessas aplicações de integral, nas quais, estudamos no decorrer do curso de ciência e tecnologia, o cálculo fornecido e seu entendimento para cada disciplina que utiliza-se a integral, é necessário para concluir-se que a integral é um método de solução em que nos permite resolver variados problemas de cálculo.

Em síntese, é notório que podemos enaltecer mais ainda o cálculo a partir da integral, e podemos mostrar aos alunos como calcular tal método. Demonstrar o seu uso e para que serve notadamente no curso de C&T, ou seja, atribuir todo o conhecimento possível aos discentes sobre a integral, afim de preparar estes para as próximas conquistas ao terminar o curso, obtendo uma boa base superior para o futuro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

“Aplicações da Integral”. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/webby/up/39/o/Cap%C3%ADtulo_11.pdf. Acesso em: 18/05/2021

BOYLESTAD, Robert L. Introdução à Análise de Circuitos. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.

“Cálculo Numérico”. Disponível em: <https://sites.google.com/site/calculus10/home/lista-5/metodos/regra-de-simpson>. Acesso em: 19/05/2021

“CAPÍTULO 2 – REVISÃO DE TÓPICOS DE CÁLCULO – INTEGRAIS”. 2014. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4694902/mod_resource/content/0/CAP%C3%8DTULO%202%20Matem%C3%A1tica%202014%20Integrais%20revisado.pdf. Acesso em: 08/05/2021

CÔRREA, Rejane Izabel Lima; FREITAS, Raphael de Oliveira. Cálculo: Integrais e Funções de Várias Variáveis. Porto Alegre: Sagah, 2019. 270 p.

ÇENGEL, Yunus A. et al. Equações Diferenciais. 2. ed. Porto Alegre: Amgh, 2014. 585 p. Marco Elisio Marques.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração. 6. ed. Florianópolis: Pearson Education, 2006. 448 p.

HIBBELER, R. C.. Resistência dos Materiais. 7. ed. São Paulo: Pearson Education, 2009. 637 p. Arlete Simille Marques.

“HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL”. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/228914601.pdf>. Acesso em: 23/03/2021

MACÊDO, Maria Joseane Felipe Guedes. Cálculo II. Mossoró: Edufersa, 2013. 92 p. 92 f.

SALES; HILLE; ETGEN. Cálculo: volume 2. 9. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2005. Valéria de Magalhães Lorio.

SANTOS, Diego Flexa dos; BARROS, Sâmia Costa de. TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA: UMA APLICAÇÃO DA INTEGRAL DE

RIEMANN. 2016. 46 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016

SILVA, Mário Olivero da; CARDIM, Naney. Cálculo II. 2. ed. Rio de Janeiro: Tereza Queiroz, 2009. 234 p.

TANAKA, Hugo Shiguelo. Lei de Ampère. Todo Estudo. Disponível em: <<https://www.todoestudo.com.br/fisica/lei-de-ampere>>. Acesso em: 21/05/2021