

**JEOVANIZELIO FIRMINO GOMES**

**UMA SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA PARA A MODELAGEM DO BULBO  
MOLHADO NA IRRIGAÇÃO POR GOTEJAMENTO SUPERFICIAL**

**MOSSORÓ-RN**

**2009**

**JEOVANIZELIO FIRMINO GOMES**

**UMA SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA PARA A MODELAGEM DO BULBO  
MOLHADO NA IRRIGAÇÃO POR GOTEJAMENTO SUPERFICIAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Irrigação e Drenagem.

**ORIENTADOR: D. Sc. Walter Martins Rodrigues**

**MOSSORÓ-RN**

**2009**

**Ficha catalográfica preparada pelo setor de classificação e  
catalogação da Biblioteca “Orlando Teixeira” da UFERSA**

G633s Gomes, Jeovanizelio Firmino.

Uma solução semi-analítica para a modelagem do bulbo  
molhado na irrigação por gotejamento superficial /  
Jeovanizelio Firmino Gomes. -- Mossoró, 2009.  
96f.

Dissertação (Mestrado em Irrigação e Drenagem) –  
Universidade Federal Rural do Semi-Árido.

Orientador: Prof. D.Sc. Walter Martins Rodrigues.

1.Irrigação por gotejamento. 2.Fluxo de água no solo.  
3.Modelo matemático. I.Título.

CDD: 631.587

Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa  
CRB/4 1254

**JEOVANIZELIO FIRMINO GOMES**

**UMA SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA PARA A MODELAGEM DO BULBO  
MOLHADO NA IRRIGAÇÃO POR GOTEJAMENTO SUPERFICIAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Irrigação e Drenagem.

Aprovada pela banca examinadora em: 28 / 08 / 2009

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. D.Sc. João de Deus Lima – UERN  
Conselheiro

---

Prof. D.Sc. Sérgio Luiz Aguilar Levien – UFERSA  
Conselheiro

---

Prof. D.Sc. Walter Martins Rodrigues - UFERSA  
Orientador

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho, à minha querida esposa Rita Franco pelo companheirismo e paciência; aos meus maravilhosos filhos Wallace Linderman e Jeovania Brenna pelas alegrias que me servem como estímulos e aos meus irmãos pelos incentivos, em especial, à Nerialba (in memoriam) por sua incomensurável vontade de viver.

## **AGRADECIMENTOS**

A Jeová Deus, pela força e a determinação que me dá todos os dias.

À minha esposa, filhos e aos meus irmãos por acreditarem na minha capacidade.

À Universidade Federal Rural do Semi-Árido e ao Departamento de Ciências Ambientais pela oportunidade em realizar este curso.

Ao professor Walter Martins Rodrigues, pelas sugestões, orientação e dedicação ao longo do curso, que foram de suma importância para a realização deste trabalho.

Ao professor Sérgio Luiz Aguilar Levien, pelas contribuições e sugestões apresentadas.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Irrigação e Drenagem, pelas orientações transmitidas durante as aulas.

Ao Grupo de Matemática Aplicada da Universidade Federal Rural do Semi-Árido pela oportunidade de realizar este curso.

Aos colegas de Pós-graduação, pelo companheirismo ao longo do curso.

Ao professor Raimundo Braz dos Santos, chefe do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, pelos incentivos demonstrados.

A todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta.

## RESUMO

GOMES, Jeovanizelio Firmino. Uma solução semi-analítica para a modelagem do bulbo molhado na irrigação por gotejamento superficial. 2009. 96 p. Dissertação (Mestrado em Irrigação e Drenagem) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2009.

O conhecimento das características do bulbo molhado é substancialmente importante para o dimensionamento da irrigação por gotejamento. Devido à complexidade dos fenômenos físicos envolvidos no processo de infiltração e redistribuição de água no solo, desenvolver um modelo matemático que simule o fluxo de água no solo é uma tarefa não muito simples. O objetivo desse trabalho é desenvolver um modelo matemático semi-analítico para estimar as dimensões do bulbo molhado que depende de parâmetros de fácil obtenção no campo, tal como o diâmetro superficial do bulbo molhado. O modelo permite a simulação do formato e as dimensões do bulbo molhado por três formas diferentes: quando é dado o diâmetro do bulbo em duas profundidades de fácil obtenção no campo, isto é, na superfície do solo e na profundidade de 10 cm; a partir do diâmetro superficial e padrões existentes para a profundidade máxima de acordo com a textura do solo; a partir das superfícies de respostas. O modelo matemático foi obtido por simulação numérica das equações que governam o fluxo de água no solo, originando assim, solução semi-analítica para a formação do bulbo molhado. O modelo foi validado, a partir de dados de campo de um solo com textura média e, em seguida comparados com os dados simulados. As comparações realizadas demonstram que o modelo proposto estima satisfatoriamente as dimensões do bulbo molhado e pode ser utilizado como ferramenta auxiliar no dimensionamento da irrigação por gotejamento.

**Palavras-chaves:** Fluxo de água no solo. Irrigação por gotejamento. Infiltração. Modelo matemático. Simulação. Volume molhado.

## ABSTRACT

GOMES, Jeovanizelio Firmino. A semi-analytical solution for the wetted bulb modeling in the surface drip irrigation. 2009. 96 p. Dissertation (Master of Science in Irrigation and Drainage) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2009.

The knowledge of the characteristics and dimensions of wetted bulb is substantially important in the measured of the drip irrigation. Due to the complexity of the physical phenomena involved in the infiltration and redistribution process of water in the soil, develop a mathematical model that simulates the flow of water in the soil is not a very simple task. The objective of this work was developed a mathematical model semi-analytic for predicting dimensions of wetted bulb that it depends on parameters of easy obtaining in the field, just as, the superficial diameter of the wetted bulb. The model allows the simulation of the format and dimensions of the wetted bulb for three different forms: when the diameter of the bulb is given in two depths of easy obtaining in the field, that is, in the surface of the soil and in the depth of 10 cm; starting from the superficial diameter and standards existent for the maximum depth in agreement with the texture of the soil; starting from the surfaces of answers. The mathematical model was obtained by numeric simulation of the equations that govern the flow of water in the soil, originating like this, semi-analytic solution for the formation of the wetted bulb. The model was validate, starting from field data of a soil with medium texture after compared with the simulate data. The accomplished comparisons demonstrate that the proposed model predicting the dimensions of the wetted bulb satisfactorily and it can be used as auxiliary tool in the measurement of the drip irrigation.

**Key words:** Soil water flow. Drip irrigation. Infiltration. Mathematical model. Simulation. Wetted volume.



## LISTA DE FIGURAS

|             |                                                                                                        |    |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 2.1  | Triângulo de classificação textural.....                                                               | 19 |
| FIGURA 2.2  | Representação do solo como meio poroso.....                                                            | 25 |
| FIGURA 2.3  | Diagrama representativo de uma função $f$ de domínio $D$ e imagem $Z$ .....                            | 28 |
| FIGURA 2.4  | Gráfico de uma função $f$ representado pela superfície $S$ .....                                       | 28 |
| FIGURA 2.5  | Representação das curvas de níveis de uma função de duas variáveis usando o software MATLAB.....       | 29 |
| FIGURA 2.6  | Elemento de volume de solo situado em torno de um ponto genérico $M$ no perfil de solo.....            | 33 |
| FIGURA 2.7  | Curvas de retenção de água no solo para duas texturas e dois níveis de compactação.....                | 40 |
| FIGURA 2.8  | Fenômeno de histerese em curva de retenção do solo.....                                                | 43 |
| FIGURA 2.9  | Geometria do bulbo molhado num perfil de solo na irrigação por gotejamento.....                        | 47 |
| FIGURA 2.10 | Forma do bulbo molhado para solos homogêneos de diferentes texturas.....                               | 48 |
| FIGURA 2.11 | Modelo ilustrativo do disco saturado e da área superficial molhada.....                                | 48 |
| FIGURA 3.1  | Representação dos níveis de umidade por curvas elípticas.....                                          | 59 |
| FIGURA 3.2  | Representação esquemática da modelagem.....                                                            | 60 |
| FIGURA 3.3  | Curvas de níveis representando padrões de umidade através de projeção de planos plotado no Matlab..... | 61 |
| FIGURA 3.4  | Representação gráfica da umidade em função da distância $L$ , no tempo $t$ .....                       | 62 |
| FIGURA 3.5  | Representação da frente de umidade do bulbo molhado no tempo $t = t_0$ .....                           | 63 |

|             |                                                                                                                                               |    |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 3.6  | Representação da frente de umidade do bulbo molhado no tempo $t = t_1$ .....                                                                  | 63 |
| FIGURA 3.7  | Representação da frente de umidade do bulbo molhado no tempo $t = t_2$ .....                                                                  | 63 |
| FIGURA 3.8  | Representação da frente de umidade do bulbo molhado no tempo $t = t_3$ .....                                                                  | 64 |
| FIGURA 3.9  | Forma elíptica do bulbo molhado e os parâmetros $D_{max}$ , $Z_{Dmax}$ e $Z_{max}$ .....                                                      | 65 |
| FIGURA 3.10 | Planilha eletrônica que simula o bulbo molhado.....                                                                                           | 66 |
| FIGURA 3.11 | Planilha eletrônica que simula a umidade do solo na frente de molhamento.....                                                                 | 67 |
| FIGURA 3.12 | Representação das dimensões do bulbo molhado.....                                                                                             | 68 |
| FIGURA 3.13 | Representação dos pontos A, B e C da fronteira do bulbo molhado, usados na simulação das isolinhas através de planilhas eletrônicas.....      | 69 |
| FIGURA 3.14 | Representação dos parâmetros usados na simulação das isolinhas através de planilhas eletrônicas associada a uma ferramenta de otimização..... | 70 |
| FIGURA 3.15 | Região do plano limitada pela curva $x = \varpi(z)$ , o eixo $z$ e as retas $z = 0$ e $z = -(h+b)$ .....                                      | 74 |
| FIGURA 4.1  | Representação das isolinhas de umidade para uma vazão $1 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas.....                    | 77 |
| FIGURA 4.2  | Representação das isolinhas de umidade para uma vazão $2 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas.....                    | 77 |
| FIGURA 4.3  | Representação das isolinhas de umidade para uma vazão $4 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas.....                    | 78 |
| FIGURA 4.4  | Representação das isolinhas de umidade para uma vazão $8 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas.....                    | 78 |
| FIGURA 4.5  | Evolução de bulbo ao longo do tempo para vazão $1 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas.....                           | 79 |
| FIGURA 4.6  | Evolução de bulbo ao longo do tempo para vazão $2 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas.....                           | 79 |

|             |                                                                                                                                                |    |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 4.7  | Evolução de bulbo ao longo do tempo para vazão $4 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas.....                            | 79 |
| FIGURA 4.8  | Evolução de bulbo ao longo do tempo para vazão $8 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas.....                            | 80 |
| FIGURA 4.9  | Representação das isolinhas de umidade para uma vazão $1 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas com o uso do Solver..... | 81 |
| FIGURA 4.10 | Representação das isolinhas de umidade para uma vazão $2 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas com o uso do Solver...   | 81 |
| FIGURA 4.11 | Representação das isolinhas de umidade para uma vazão $4 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas com o uso do Solver..... | 82 |
| FIGURA 4.12 | Representação das isolinhas de umidade para uma vazão $8 \text{ L.h}^{-1}$ simuladas através de planilhas eletrônicas com o uso do Solver..... | 82 |
| FIGURA 4.13 | Evolução do bulbo para cada vazão nos tempos de 1, 2, 4 e 7 h, simulada através de planilhas eletrônicas.....                                  | 83 |
| FIGURA 4.14 | Relação entre os valores medidos e os valores estimados de $D_{sup}$ , $D_{max}$ , $Z_{max}$ e $Z_{Dmax}$ obtida pelo Modelo1.....             | 84 |
| FIGURA 4.15 | Relação entre os valores medidos e os valores estimados de, $D_{max}$ , $Z_{Dmax}$ e $Z_{max}$ obtida pelo Modelo2.....                        | 85 |
| FIGURA 4.16 | Relação entre os valores medidos e os valores estimados de $D_{max}$ , $Z_{max}$ e $Z_{Dmax}$ , obtida pelo Modelo 3.....                      | 86 |
| FIGURA 4.17 | Relação entre os modelos com os parâmetros $D_{max}$ , $Z_{max}$ e o $Z_{Dmax}$ .....                                                          | 88 |
| FIGURA 4.18 | Relação entre os valores medidos e estimados de $D_{max}$ e $Z_{Dmax}$ em cada modelo.....                                                     | 89 |

## LISTA DE TABELAS

|            |                                                                                                       |    |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| TABELA 2.1 | Valores da densidade do solo e porosidade total para três classes texturais de solo.....              | 24 |
| TABELA 2.2 | Fluxo de massa através da superfície de controle de um volume de controle diferencial retangular..... | 35 |
| TABELA 2.3 | Fluxo de massa através da superfície de controle de um volume de controle diferencial cilíndrico..... | 37 |
| TABELA 2.4 | Equações de ajuste para a curva de retenção.....                                                      | 41 |
| TABELA 2.5 | Valores médio, mínimo e máximo para os parâmetros de van Genuchten.....                               | 42 |
| TABELA 2.6 | Função condutividade hidráulica.....                                                                  | 45 |
| TABELA 3.1 | Padrões de estimativas de $Z_{max}$ e $R_{sup}$ em função do volume.....                              | 71 |
| TABELA 3.2 | Padrões de estimativas do $Z_{max}$ em função da vazão e do tempo.....                                | 71 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                       |                                                                     |              |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------|
| $K$                   | Condutividade hidráulica                                            | $L T^{-1}$   |
| $K(\theta)$           | Condutividade hidráulica em função da umidade                       | $L T^{-1}$   |
| $K_s$                 | Condutividade hidráulica do solo saturado                           | $L T^{-1}$   |
| $K_r = \frac{K}{K_s}$ | Condutividade hidráulica relativa                                   | $L T^{-1}$   |
| $K_x$                 | Condutividade hidráulica na direção x                               | $L T^{-1}$   |
| $K_y$                 | Condutividade hidráulica na direção y                               | $L T^{-1}$   |
| $K_z$                 | Condutividade hidráulica na direção z                               | $L T^{-1}$   |
| $q$                   | Densidade de fluxo                                                  | $L T^{-1}$   |
| $q$                   | Vazão do emissor                                                    | $L^3 T^{-1}$ |
| $Q$                   | Volume de água no volume de solo                                    | $L^3 T^{-1}$ |
| $q_x$                 | Densidade de fluxo na direção x                                     | $L T^{-1}$   |
| $q_y$                 | Densidade de fluxo na direção y                                     | $L T^{-1}$   |
| $q_z$                 | Densidade de fluxo na direção z                                     | $L T^{-1}$   |
| $d_p$                 | Densidade das partículas                                            | $M.L^{-3}$   |
| $D_{max}$             | Diâmetro máximo do bulbo molhado                                    | $L$          |
| $D_{sup}$             | Diâmetro superficial do bolbo molhado                               | $L$          |
| $L$                   | Distância na superfície do solo do emissor até a fronteira do bulbo | $L$          |
| $R_{max}$             | Raio máximo alcançado pelo bulbo                                    | $L$          |
| $R_{sup}$             | Raio do bulbo molhado na superfície do solo                         | $L$          |
| $t$                   | Tempo de aplicação de água                                          | $T$          |
| $m$                   | Parâmetro de ajuste da equação de van Genuchten                     | —            |
| $n$                   | Parâmetro de ajuste da equação de van Genuchten                     | —            |
| $Z_{max}$             | Profundidade máxima do bulbo molhado                                | $L$          |
| $Z_{Dmax}$            | Profundidade onde ocorre o diâmetro máximo                          | $L$          |
| $H$                   | Potencial hidráulico                                                | $L$          |
| $\theta$              | Umidade volumétrica do solo                                         | $L^3 L^{-3}$ |
| $\theta_i$            | Umidade inicial do solo                                             | $L^3 L^{-3}$ |
| $\theta_0$            | Umidade do solo na fronteira do bulbo                               | $L^3 L^{-3}$ |
| $\theta_r$            | Umidade residual do solo                                            | $L^3 L^{-3}$ |

|             |                                   |              |
|-------------|-----------------------------------|--------------|
| $\theta_s$  | Umidade de saturação do solo      | $L^3 L^{-3}$ |
| $\psi$      | Potencial total da água no solo   | L            |
| $\psi_g$    | Potencial gravitacional           | L            |
| $\psi_m$    | Potencial matricial               | L            |
| $\psi_{os}$ | Potencial osmótico                | L            |
| $\psi_p$    | Potencial de pressão              | L            |
| $\nabla H$  | Gradiente do potencial hidráulico | $L L^{-1}$   |

## SUMÁRIO

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO.....</b>                                     | <b>17</b> |
| <b>2</b> | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>                          | <b>19</b> |
| 2.1      | TEXTURA DO SOLO.....                                       | 19        |
| 2.2      | ESTRUTURA DO SOLO.....                                     | 20        |
| 2.2.1    | Densidade das partículas de solo.....                      | 21        |
| 2.2.2    | Densidade do solo.....                                     | 21        |
| 2.2.3    | Porosidade do solo.....                                    | 22        |
| 2.3      | POTENCIAL DA ÁGUA NO SOLO.....                             | 25        |
| 2.3.1    | Componente de pressão.....                                 | 25        |
| 2.3.2    | Componente gravitacional.....                              | 26        |
| 2.3.3    | Componente osmótica.....                                   | 26        |
| 2.3.4    | Componente matricial.....                                  | 26        |
| 2.4      | FERRAMENTA MATEMÁTICA.....                                 | 27        |
| 2.4.1    | Funções de duas variáveis.....                             | 27        |
| 2.4.2    | Gráficas funções de duas variáveis.....                    | 28        |
| 2.4.3    | Curvas de nível.....                                       | 29        |
| 2.4.4    | Função com três ou mais variáveis.....                     | 29        |
| 2.4.5    | Derivadas parciais.....                                    | 30        |
| 2.5      | LEI DE DARCY-BUCKINGHAM.....                               | 32        |
| 2.6      | LEI DA CONSERVAÇÃO DA MASSA.....                           | 33        |
| 2.6.1    | Sistema de coordenadas retangulares.....                   | 33        |
| 2.6.2    | Sistema de coordenadas cilíndricas.....                    | 35        |
| 2.7      | EQUAÇÃO DE RICHARDS EM REGIME DE FLUXO TRANSIENTE.....     | 37        |
| 2.8      | EQUAÇÃO DE RICHARDS EM REGIME DE FLUXO NÃO-TRANSIENTE..... | 38        |
| 2.9      | CURVA DE RETENÇÃO DE ÁGUA NO SOLO.....                     | 39        |
| 2.9.1    | O fenômeno da histerese.....                               | 42        |
| 2.10     | CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA.....                              | 43        |
| 2.11     | FORMAÇÃO DO BULBO MOLHADO.....                             | 46        |
| 2.12     | GEOMETRIA DO BULBO MOLHADO.....                            | 46        |
| 2.13     | DISCO SATURADO.....                                        | 48        |
| 2.14     | MODELAGEM.....                                             | 49        |
| 2.14.1   | Modelo conceitual e empírico.....                          | 50        |
| 2.14.2   | Modelo Físico.....                                         | 50        |
| 2.14.3   | Modelo analógico.....                                      | 50        |
| 2.15     | MODELOS MATEMÁTICOS.....                                   | 51        |
| 2.15.1   | Modelos determinísticos e estocásticos.....                | 51        |
| 2.15.2   | Modelos discretos e contínuos.....                         | 52        |
| 2.15.3   | Modelos lineares e não lineares.....                       | 53        |
| 2.15.4   | Modelos diferenciais.....                                  | 53        |
| 2.15.5   | Modelos integrais.....                                     | 53        |
| 2.16     | SOLUÇÕES DE MODELO.....                                    | 54        |
| 2.16.1   | Solução analítica.....                                     | 55        |
| 2.16.2   | Solução numérica.....                                      | 55        |

|              |                                                                                                                   |           |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.17         | LIMITAÇÕES DE UM MODELO.....                                                                                      | 55        |
| 2.18         | MODELAGEM MATEMÁTICA NA IRRIGAÇÃO POR GOTEJAMENTO.....                                                            | 56        |
| <b>3</b>     | <b>MATERIAIS E MÉTODOS.....</b>                                                                                   | <b>59</b> |
| 3.1          | CONDIÇÕES INICIAIS.....                                                                                           | 59        |
| 3.2          | DESCRIÇÃO DO MODELO.....                                                                                          | 59        |
| <b>3.2.1</b> | <b>Definição da função umidade.....</b>                                                                           | <b>61</b> |
| <b>3.2.2</b> | <b>Definição da função nível de umidade.....</b>                                                                  | <b>64</b> |
| 3.3          | FERRAMENTA COMPUTACIONAL.....                                                                                     | 66        |
| 3.4          | SIMULAÇÃO DO BULBO MOLHADO.....                                                                                   | 68        |
| <b>3.4.1</b> | <b>Estimativa em função do diâmetro superficial e do diâmetro a uma profundidade de 10 cm – Modelo 1.....</b>     | <b>68</b> |
| <b>3.4.2</b> | <b>Estimativa em função do diâmetro superficial medido e os padrões para <math>Z_{max}</math> – Modelo 2.....</b> | <b>70</b> |
| <b>3.4.3</b> | <b>Estimativa em função de superfície de resposta – Modelo 3.....</b>                                             | <b>72</b> |
| 3.5          | ESTIMATIVA DO VOLUME DE SOLO MOLHADO.....                                                                         | 72        |
| 3.6          | ESTIMATIVA DO DIÂMETRO SUPERFICIAL.....                                                                           | 74        |
| 3.7          | CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA DO SOLO EM FUNÇÃO DE $D_{max}$ E $Z_{max}$ .....                                         | 75        |
| <b>4</b>     | <b>VALIDAÇÃO DO MODELO.....</b>                                                                                   | <b>76</b> |
| 4.1          | ESTIMATIVA EM FUNÇÃO DO DIÂMETRO SUPERFICIAL E DO DIÂMETRO A UMA PROFUNDIDADE DE 10 CM – MODELO 1.....            | 76        |
| 4.2          | ESTIMATIVA USANDO $D_{sup}$ MEDIDO E OS PADRÕES PARA $Z_{max}$ – MODELO 2.....                                    | 80        |
| 4.3          | DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....                                                                                     | 83        |
| <b>4.3.1</b> | <b>Modelo 1: estimativa a partir de três pontos superficiais.....</b>                                             | <b>84</b> |
| <b>4.3.2</b> | <b>Modelo 2: estimativa em função do diâmetro superficial medido e os padrões para <math>Z_{max}</math>.....</b>  | <b>85</b> |
| <b>4.3.3</b> | <b>Modelo 3: estimativa a partir de superfície de respostas.....</b>                                              | <b>86</b> |
| 4.4          | COMPARAÇÕES ENTRE OS MODELOS.....                                                                                 | 87        |
| <b>4.4.1</b> | <b>Comparação entre os modelos 1 e 2.....</b>                                                                     | <b>87</b> |
| <b>4.4.2</b> | <b>Comparação entre os modelos 1 e 3.....</b>                                                                     | <b>87</b> |
| <b>4.4.3</b> | <b>Comparação entre os modelos 2 e 3.....</b>                                                                     | <b>88</b> |
| <b>5</b>     | <b>CONCLUSÕES.....</b>                                                                                            | <b>90</b> |
| <b>6</b>     | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>                                                                                  | <b>91</b> |
|              | <b>REFERÊNCIAS.....</b>                                                                                           | <b>92</b> |



## 1 INTRODUÇÃO

O estudo do fluxo da água no solo desempenha um papel importante nas Ciências Agrárias, assim como em outras áreas. Uma das principais necessidades hoje, é racionalização do uso dos recursos hídricos, que cada vez mais se torna emergentes. Nas ciências agrárias, a prática da irrigação assume um papel importante, no desenvolvimento do agronegócio. Mas, em contra partida, na prática da irrigação a demanda de água é grande, tornando assim os recursos hídricos um fator limitante.

No processo de nutrição da planta, compreender o processo de infiltração e fluxo da água no solo, também desempenha um papel importante, tendo em vista de ser a água o veículo condutor dos nutrientes até a zona radicular da planta. Outro ponto que deve ser levado em consideração, são impactos ambientais, uma vez que o fluxo de água no solo possibilita de alguma forma a contaminação do solo.

Diante dessas dificuldades, o estudo do fluxo da água no solo torna-se essencial nas Ciências Agrárias, principalmente na irrigação, pois auxilia no monitoramento da quantidade de água necessária à planta, na distribuição de nutrientes para a planta, como também, no controle da contaminação do solo, em particular a salinização. Dessa forma, o conhecimento acerca do estudo do fluxo da água no solo, ganha importância substancial, na tentativa de amenizar os efeitos dos fatores limitantes da agricultura irrigada. Em particular, na irrigação por gotejamento, cuja prática tem sido intensificada nos últimos tempos talvez, pelo potencial econômico apresentado por esse sistema. O sistema de irrigação por gotejamento, é caracterizado pela aplicação da água diretamente na zona radicular, em pequena intensidade e alta frequência, formando assim, uma região úmida tridimensional, denominada de bulbo molhado. O estudo do fluxo de água no solo no sistema de irrigação por gotejamento, se faz necessário, devido a crescente demanda de informações nesta área. É importante destacar, que a forma e o tamanho do bulbo molhado dependem principalmente, da textura do solo, vazão do gotejador e frequência de aplicação.

Visando uma melhor interpretação dos fatores que influem na formação do bulbo molhado, muitos trabalhos de diferentes metodologias foram desenvolvidos, objetivando caracterizar o bulbo molhado, pois estas são extremamente importantes, por exemplo, no cálculo do espaçamento entre emissores na irrigação por gotejamento. Algumas dessas metodologias têm-se usado como ferramenta matemática os métodos numéricos, obtendo assim, soluções numéricas. A solução numérica, na maioria dos casos, se chega a bons

resultados, mas, no entanto, não expressa em sua plenitude a realidade problema. Isto ocorre, tanto pelas simplificações feitas na modelagem do problema, quanto aos problemas de natureza da própria ferramenta numérica utilizada, tais como a instabilidade numérica e a dificuldade de convergência das soluções. Mas de um modo geral, o tratamento da variabilidade espacial e a não linearidade das equações que regem o fluxo de água no solo, são os fatores que mais dificultam a modelagem do problema. Em outras metodologias no tratamento deste problema, são utilizadas funções potências na obtenção de soluções analíticas ou semi-analíticas, entretanto, a utilização de tais funções como ferramenta de modelagem, requer o uso de ferramentas matemáticas mais complexas, tais como: As transformadas de Laplace e a teorias das funções analíticas, que na maioria dos casos, dificulta a avaliação da sensibilidade dos parâmetros físicos envolvido no problema. Embora que, em alguns casos, o uso de ferramentas matemáticas mais elaboradas, possibilita a obtenção de soluções analíticas mais precisas.

Neste trabalho, propõe-se um modelo semi-analítico para a formação do bulbo molhado obtido com o uso de técnicas clássicas de funções de varias variáveis. Tal modelo foi obtido a partir da exploração da relação entre campos direcionais e curvas de níveis descritas a partir de simulação das equações que governam o fluxo de água no solo, ou seja, identifica-se uma equação diferencial ordinária com solução analítica que descreve a variação da umidade para cada tempo. Dessa forma, determinou-se uma aproximação da solução do problema inicial e, obteve-se uma representação algébrica da função que descreve aproximações para solução do problema. Tal estratégia permite utilização de parâmetros de mais fácil mensuração para simulação da estrutura geométrica associada à equação.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 TEXTURA DO SOLO

A textura do solo refere-se à distribuição das partículas areia, silte e argila no solo. Cada solo recebe uma designação quanto à sua textura, designação essa que nos dá idéia do tamanho das partículas mais freqüentes. A textura é uma característica de grande importância para os solos, já que grande parte das reações que ocorrem no sistema solo-água-plantas, são fenômenos de superfícies, que tem sua magnitude dependente do tamanho das partículas envolvidas. Para Resende (2002) a análise e a determinação da distribuição das partículas, de uma amostra de solo quanto ao seu tamanho, é em geral denominada análise mecânica do solo ou análise textural.

A proporção de partículas grosseiras, médias e finas que são denominadas de areia, silte e argila, determinam combinações que são utilizadas para classificar o solo segundo sua textura. A determinação do tamanho das partículas é feita em laboratórios e é denominada análise mecânica do solo. Denomina-se de areia as partículas de diâmetro entre 2 e 0,02 mm, de silte ou limo as partículas de diâmetro entre 0,02 e 0,002 mm de diâmetro, e de argila as de diâmetro menor que 0,002 mm (REICHARDT, 1990). Na Figura 2.1 pode ser visto a representação esquemática, do triângulo de classificação textural, que é utilizado para designar o solo de acordo com as porcentagens de areia, silte e argila presentes no mesmo.

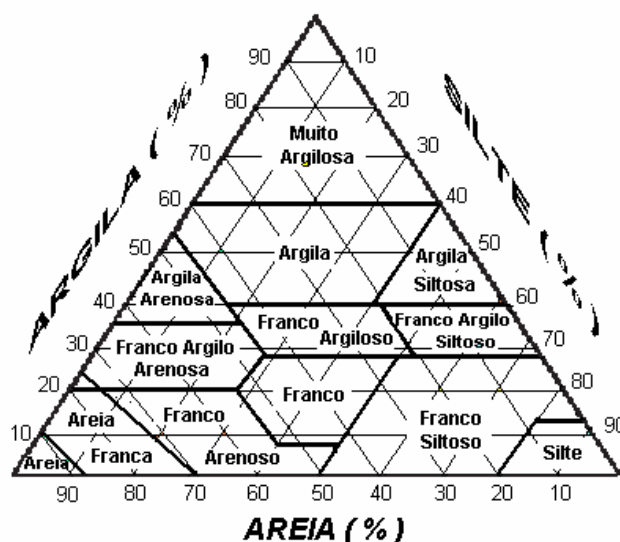


Figura 2.1 – Triângulo de classificação textural

Fonte: Reichardt e Timm (2004)

## 2.2 ESTRUTURA DO SOLO

A estrutura do solo refere-se ao arranjo das partículas e à adesão de partículas menores na formação de partículas maiores que são denominadas por agregados. Na proximidade da superfície, a estrutura do solo é afetada pelo preparo do solo e, nos horizontes mais profundos, ela é típica para cada solo. Solo sem estrutura é massivo, pesado para ser trabalhado, com problemas de penetração de água e de raízes.

Reichardt e Timm (2004) destacam que o termo estrutura é usado para descrever o solo no que se refere ao arranjo, orientação, organização e à adesão das partículas menores na formação de aglomerados maiores denominados de agregados. A estrutura define também a geometria dos espaços porosos.

Os principais tipos de arranjos dessas partículas são classificados segundo a forma (prismáticos, laminares, colunares, granulares e em blocos) e segundo ao tamanho, de acordo com o seu diâmetro: muito pequeno, pequeno, médio, grande e muito grande (PRADO, 1991).

A estrutura do solo, ao contrário da textura, pode ser modificada. Ela pode ser mantida ou mesmo melhorada com práticas agrícolas adequadas, tais como a rotação de culturas, cultivo apropriado e incorporação de matéria orgânica (adubo verde ou esterco). Ciclos de secamento e de molhamento melhoram a estrutura do solo. A umidade do solo no momento de seu preparo (aração e gradagem) é importante, pois solos preparados quando muito úmidos ou muito secos, perdem a estrutura.

A propriedade da fase sólida do solo em formar unidades estruturais complexas a partir de unidades menores chama-se “capacidade de agregação do solo”. A estrutura começa a se formar através da fragmentação das rochas.

A estrutura dos solos pode agrupar-se em três tipos principais: grãos simples (partículas completamente desunidas umas das outras), maciça (as partículas são unidas entre si, formando grandes blocos), são comuns aos subsolos pesados encontrados em regiões úmidas e a água se move muito lentamente, agregados (é um tipo intermediário entre os dois anteriores) dentro dos blocos, as partículas são unidas de forma mais ou menos estável entre si.

Solos argilosos ou de textura fina possuem teores elevados de argila coloidal, sendo plásticos e coesos quando úmidos, tornando-se duros, com formação de torrões, quando secos.

Os solos arenosos são friáveis, desagregáveis, de boa drenagem, aeração adequada e aração fácil, porém tem baixas capacidades de retenção e condução de água e nutrientes.

A compactação do solo está diretamente ligada à estrutura. Como o solo é um material poroso, por compressão, a mesma massa de material sólido pode ocupar um volume menor. Isto afeta a sua estrutura, o arranjo de poros, o volume de poros e as características de retenção de água.

### 2.2.1 Densidade das partículas de solo

A densidade das partículas (ou densidade real) do solo depende da constituição do solo, e sendo o quartzo componente freqüente nos solos, a densidade das partículas do solo varia em torno de  $2,65 \text{ g cm}^{-3}$  que a densidade das partículas do quartzo. Para uma grande variedade de solo a média da densidade das partículas é de  $2,70 \text{ g cm}^{-3}$ , e pode assumir um valor inferior a  $2,65 \text{ g cm}^{-3}$  em solos com muita matéria orgânica. Matematicamente, a densidade das partículas pode ser representada por:

$$d_p = \frac{m_s}{V_s} \quad (2.1)$$

onde:  $d_p$  é a densidade das partículas;  $m_s$  é a massa das partículas sólidas e  $V_s$  é o volume das partículas sólidas do solo.

### 2.2.2 Densidade do solo

A densidade do solo ou densidade aparente ou densidade global do solo indica a relação entre a massa das partículas sólidas ( $m_s$ ) e o volume total da amostra ( $V_T$ ). Matematicamente é representada por:

$$d_s = \frac{m_s}{V_T} \quad (2.2)$$

Nesse caso, consideram-se o volume total como sendo:

$$V_T = V_s + V_l + V_g \quad (2.3)$$

onde  $V_s$  é o volume ocupado pelas partículas sólidas;  $V_l$  é o volume ocupado pela partículas líquidas. Neste caso,  $V_l + V_g$  representa os poros ou vazios.

Tendo em vista que a razão que representa a densidade de solo ou densidade aparente do solo, ter como denominador o volume total da amostra, tem-se que quanto mais estruturado e maior o teor de matéria orgânica do solo menor será seu peso específico aparente, que varia de 0,9 a 1,8 g cm<sup>-3</sup>. Os solos arenosos, que são menos porosos e mais pobres em matéria orgânica, são mais densos que os argilosos. Segundo Reichardt e Timm (2004), um solo bem estruturado apresenta boa quantidade de poros de tamanho relativamente grande. Dessa forma, a densidade de solo é um índice do grau de compactação de um solo. Como o solo é um material poroso, por compressão a mesma massa de material sólido pode ocupar um volume menor. Isto afeta a sua estrutura, o arranjo, o volume dos poros e as características de retenção de água.

Na irrigação, a densidade de solo é importante, entre outros objetivos, para a quantificação de água a aplicar no solo em projetos de irrigação, reduzindo assim a perda por percolação profunda.

### 2.2.3 Porosidade do solo

O volume total de poros do solo ( $V_p$ ) se chama de espaço poroso. O tamanho, a forma e as combinações dos poros variam consideravelmente, pois são resultados de partículas enormemente variáveis em tamanho, forma e características superficiais.

A porosidade total ( $\alpha$ ), também denominada volume total de poros (VTP), de um solo é definida por:

$$\alpha = \frac{V_p}{V_T} = \frac{V_T - V_s}{V_T} \quad (2.4)$$

sendo que

$$V_p = V_l + V_g = V_T - V_s \quad (2.5)$$

Assim, expressando a equação (2.4) em percentagem, tem-se:

$$\alpha\% = \left( \frac{V_T - V_s}{V_T} \right) \cdot 100 \quad (2.6)$$

Substituindo a equação (2.1) na equação (2.2), tem-se:

$$\frac{d_s}{d_p} = \frac{V_s}{V_T} \quad (2.7)$$

Na equação (2.6), fazendo  $V_s = V_T - V_p$ , tem-se:

$$\frac{d_s}{d_p} = 1 - \frac{V_p}{V_T} \quad (2.8)$$

Substituindo a equação (2.4) na equação (2.7), obtém-se:

$$\alpha = 1 - \frac{d_s}{d_p} \quad (2.9)$$

ou ainda,

$$\alpha\% = \left( 1 - \frac{d_s}{d_p} \right) \cdot 100 \quad (2.10)$$

Na equação (2.9), fica evidente que a porosidade está inversamente relacionada com a densidade do solo, isto é, quanto maior essa densidade, menor a porosidade. Alguns valores representativos de  $d_s$  e  $\alpha$  para as classes de textura de argila, franco e areia são representados na Tabela 2.1:

Tabela 2.1 – Valores da densidade do solo e porosidade total para três classes texturais de solo

| Classe textural | $d_s(\text{kg m}^{-3})$ | $\alpha \%$ |
|-----------------|-------------------------|-------------|
| Argila          | 1000 – 1250             | 61,5 – 52,8 |
| Franco          | 1250 – 1400             | 52,8 – 47,2 |
| Areia           | 1400 – 1800             | 47,2 – 32,1 |

Fonte: Libardi (2005)

Em Física do Solo, define-se tamanho de poro como o diâmetro da maior esfera inscrita no interior do espaço ocupado pelo poro. É por esse motivo que os poros do solo são classificados em termos de diâmetro de poro (LIBARDI, 2005).

Segundo Koorevaar et al. (1983) os poros do solo são classificados, empiricamente, em três grupos:

- a) *macroporos* – poros com diâmetro maior do que  $100 \mu\text{m}$ . São responsáveis pela aeração e escoamento da água no solo;
- b) *mesoporos* – poros com diâmetro entre 30 e  $100 \mu\text{m}$ . São responsáveis pela distribuição da água no espaço poroso e;
- c) *microporos* – poros com diâmetro menor do que  $30 \mu\text{m}$ . São responsáveis pela retenção da água no solo. Estes poros são chamados de poros capilares.



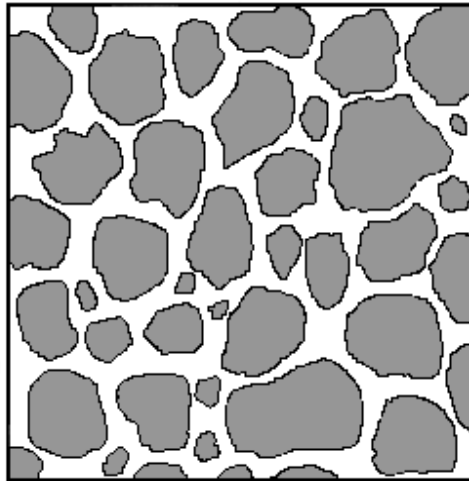


Figura 2.2 – Representação do solo como meio poroso

## 2.3 POTENCIAL DA ÁGUA NO SOLO

O movimento água no solo é ocasionado, pela diferença de potencial total  $\psi$ . Assim, toda vez que o potencial total  $\psi$ , for constante não existirá movimento, por outro lado sempre o potencial  $\psi$  variar, haverá movimento. O potencial total é composto pelas seguintes componentes: componentes de pressão ( $\Psi_p$ ); componente gravitacional ( $\Psi_g$ ); componente osmótica ( $\Psi_{os}$ ); componente matricial ( $\Psi_m$ ). Assim,

$$\Psi = \psi_p + \Psi_g + \Psi_{os} + \Psi_m \quad (2.11)$$

### 2.3.1 Componente de pressão

A pressão a qual a água pode estar submetida é, na verdade, energia por volume. Daí, quanto maior a pressão, maior o estado de energia da água, e esta energia referente à pressão é denominada de componente de pressão  $\psi_p$ . A componente de pressão é medida em relação a uma condição padrão, tomada como sendo a da água submetida à pressão atmosférica local e, nestas condições, assume-se que o seu valor é nulo.

### 2.3.2 Componente gravitacional

Considerando apenas o campo gravitacional, a água tem uma energia potencial gravitacional, que depende da posição na qual ela se encontra, em relação a um dado plano referencial. Esta é a componente gravitacional, que tem valor zero no plano de referência, positiva acima dele e negativa abaixo dele.

### 2.3.3 Componente osmótica

Considerando os íons e outros solutos encontrados na água do solo, a água adquire uma energia potencial osmótica e esta é a componente  $\psi_{os}$ . Observa-se que quanto mais concentrada a solução, menor o estado de energia da água e, portanto, mais negativo o valor de  $\psi_m$ .

### 2.3.4 Componente matricial

Esta componente se refere aos estados de energia da água devidos à sua interação com as partículas sólidas do solo, também chamadas de matrizes do solo. Esta interação se refere aos fenômenos de capilaridade e adsorção e eles conferem à água estados de energia menores do que o estado da água “livre” à pressão atmosférica e, como para este último é atribuído o valor zero (estado padrão), a componente matricial  $\psi_m$  será sempre negativa. No solo  $\psi_m$  está relacionado com a umidade ( $\theta$ ), assim quanto maior for  $\theta$ , maior será  $\psi_m$  (ou melhor, menos negativos). Daí o fato, de que o potencial matricial ser denominado de potencial capilar, sucção ou até mesmo de pressão negativa.

## 2.4 FERRAMENTA MATEMÁTICA

Os fenômenos ligados ao escoamento de fluidos, transferência de calor, massa e espécies químicas são alguns exemplos de inúmeros processos naturais. De um modo geral, muitos problemas que tentam explicar alguns processos naturais não têm solução analítica. Neste caso, é exigida ao profissional da área, não só o conhecimento desse fato, como também, meios de solucionar o problema proposto. Por exemplo, a formulação matemática das leis de conservação consiste em um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não lineares que deve ser resolvido geralmente em um domínio regular sujeito a diversos tipos de condições iniciais e de contorno. Assim, a escolha de uma ferramenta matemática adequada, poderá dar ao problema uma solução aceitável com pouco esforço computacional.

### 2.4.1 Funções de duas variáveis

Uma função  $f$  de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais  $(x,y)$  de um conjunto  $D$  um único valor real denotado por  $f(x,y)$ . O conjunto  $D$  é o domínio de  $f$ , e sua imagem é o conjunto de valores possíveis de  $f$ , ou seja,  $\{ f(x,y) / (x,y) \in D \}$ .

Freqüentemente escreve-se  $z = f(x,y)$  para tornar explícito os valores tomados por  $f$  num ponto genérico  $(x,y)$ . As variáveis  $x$  e  $y$  são variáveis independentes, e  $z$  a variável dependente.

Uma função de duas variáveis é uma função cujo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  (conjunto de pontos do plano) e cuja imagem é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Uma forma de visualizar tal função é pelo diagrama de flechas (Figura 2.3), onde o domínio  $D$  é representado como um subconjunto do plano  $xy$ .

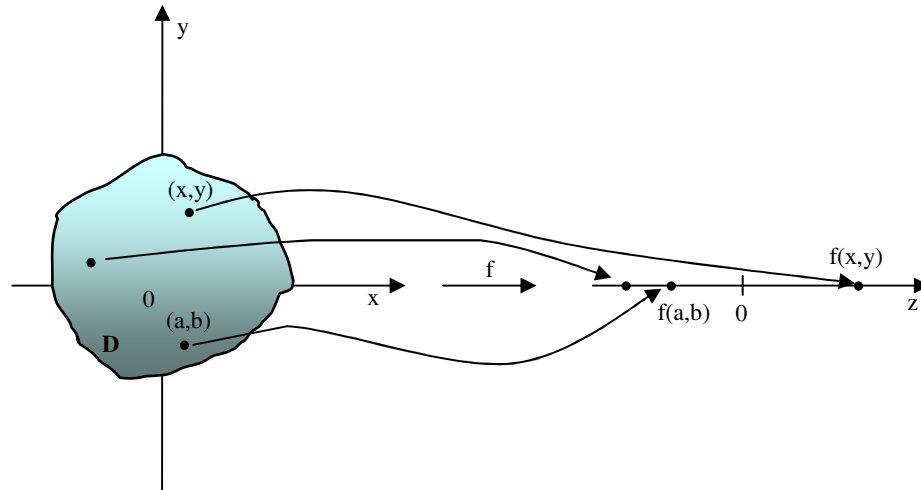


Figura 2.3 – Diagrama representativo de uma função  $f$  de domínio  $D$  e imagem  $Z$   
 Fonte: Confeccionada pelo autor

#### 2.4.2 Gráfico de funções de duas variáveis

Se  $f$  é uma função de duas variáveis com domínio  $D$ , então o gráfico de  $f$  é o conjunto de todos os pontos  $(x,y,z)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $z = f(x,y)$  e  $(x,y)$  pertence a  $D$ .

Assim como o gráfico de uma função de uma única variável é uma curva  $C$  com equação  $y = f(x)$ , o gráfico de uma função com duas variáveis é uma superfície  $S$  com equação  $z = f(x,y)$ . Podemos visualizar a superfície  $S$  de  $f$  como estando diretamente em cima ou abaixo de seu domínio  $D$  que está no plano  $xy$ , como pode ser visto na Figura 2.4.

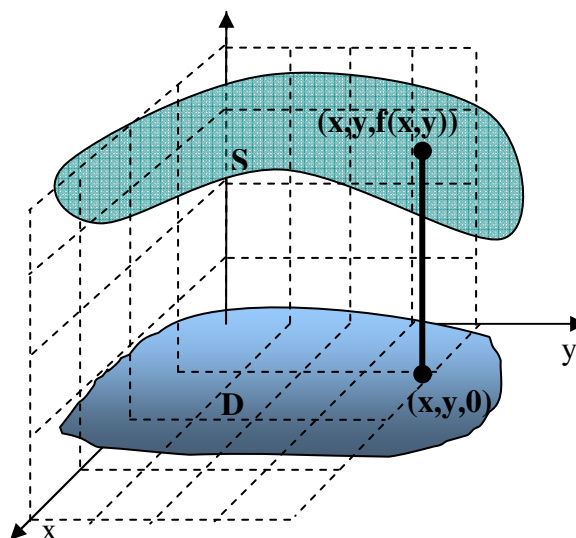


Figura 2.4 – Gráfico de uma função  $f$  representado pela superfície  $S$   
 Fonte: Confeccionada pelo autor

### 2.4.3 Curvas de nível

As curvas de níveis de uma função  $f$  de duas variáveis são as curvas com equação  $f(x,y) = k$ , onde  $k$  é uma constante (no domínio de  $f$ ).

Uma curva de nível  $f(x,y) = k$  é o conjunto de todos os pontos do domínio de  $f$  na qual o valor de  $f$  é  $k$ . Em outras palavras, mostra onde o gráfico de  $f$  tem altura  $k$  (Figura 2.5).

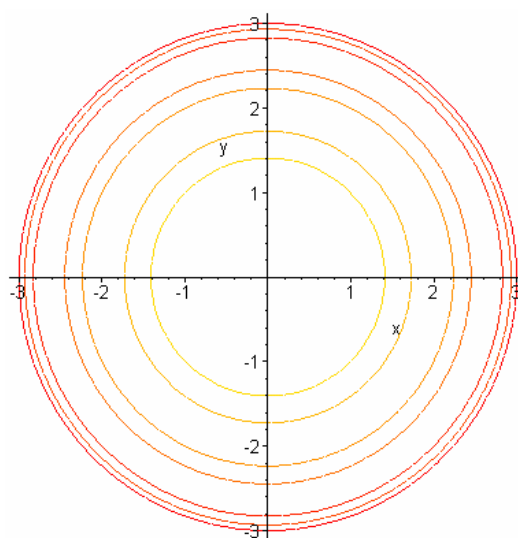


Figura 2.5 – Representação das curvas de níveis de uma função de duas variáveis usando o software MATLAB

### 2.4.4 Função com três ou mais variáveis

Uma função com três variáveis,  $f$ , é uma função que associa a cada tripla de ordenada  $(x,y,z)$  em um domínio  $D \subset \mathbb{R}^3$  um único número real denotado por  $f(x,y,z)$ .

Em geral, é muito difícil visualizar uma função  $f$  de três variáveis por seu gráfico, uma vez que teríamos de estar em um espaço de quatro dimensões.

### 2.4.5 Derivadas parciais

Se  $f$  é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são as funções  $f_x$  e  $f_y$  definidas por:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad (2.12)$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \quad (2.13)$$

Se  $z = f(x, y)$ , pode-se usar as seguintes notações para derivadas parciais em relação a  $x$ :

$$f_x(x, y); f_x; \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial x} f(x, y); \frac{\partial z}{\partial x}; D_x f$$

Analogamente, as derivadas parciais em relação a  $y$ , são:

$$f_y(x, y); f_y; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial y} f(x, y); \frac{\partial z}{\partial y}; D_y f$$

No cálculo de  $f_x(x, y)$ , determina-se a diferencial de  $f(x, y)$ , onde  $y$  é visto como uma constante. Analogamente, no cálculo  $f_y(x, y)$ , determina-se a diferencial de  $f(x, y)$ , onde  $x$  é visto como uma constante.

As derivadas parciais podem ser estendidas para funções de três ou mais variáveis. Em geral, se  $u$  é uma função de  $n$  variáveis, isto é:

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.14)$$

Assim, sua derivada parcial em relação a  $i$ -ésima variável  $x_i$  é:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_i+h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} \quad (2.15)$$

A condição para que uma função seja diferenciável é que suas derivadas parciais existam. Assim, dada a função  $z = f(x, y)$ , sua diferencial total é:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (2.16)$$

Analogamente, a diferencial total de uma função  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variáveis é dada por:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n \quad (2.17)$$

Sendo  $f$  uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  são funções de duas variáveis, neste caso pode-se considerar novamente suas derivadas parciais  $(f_x)_x$ ,  $(f_x)_y$ ,  $(f_y)_x$  e  $(f_y)_y$ , denominadas de derivadas parciais de segunda ordem de  $f$ . Se  $z = f(x, y)$ , então:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (2.18)$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (2.19)$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (2.20)$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (2.21)$$

Se  $z = f(x,y)$  é uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , onde  $x = g(t)$  e  $y = h(t)$  são funções diferenciáveis de  $t$ . Então, pode-se considerar a derivada de  $z$  em relação a  $t$  por:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (2.22)$$

Se  $z = f(x,y)$  é uma função diferenciável de  $x$  e  $y$ , onde  $x = g(s,t)$  e  $y = h(s,t)$  são funções diferenciáveis de  $t$ . Então, pode-se considerar a derivada parciais de  $z$  em relação a  $s$  e  $t$  por:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2.24)$$

## 2.5 LEI DE DARCY-BUCKINGHAM

Darcy, em 1856, realizou pela primeira vez o experimento que viabilizou quantificar a densidade do fluxo em meio poroso saturado, que pode ser representada a través da equação:

$$q = -K \frac{\partial H}{\partial z} \quad (2.25)$$

onde:  $q$  é a densidade de fluxo ( $\text{m s}^{-1}$ );  $K$  é a condutividade hidráulica do solo na saturação ( $\text{m s}^{-1}$ );  $H$  é o potencial hidráulico ( $\text{mH}_2\text{O}$ );  $z$  é a coordenada de posição ( $\text{m}$ ).

Enquanto, que para solo não-saturado, só foi considerado algum tempo depois por Buckingham que propôs a seguinte equação:

$$q = -K(\theta) \frac{\partial H}{\partial z} \quad (2.26)$$



onde  $K(\theta)$  é a condutividade hidráulica em função da umidade  $\theta$ .

## 2.6 LEI DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

### 2.6.1 Sistema de coordenadas retangulares

Seja um elemento de volume  $\Delta V$  de solo em torno do ponto genérico M, situado no perfil de solo em estudo e indicado na Figura 2.6.

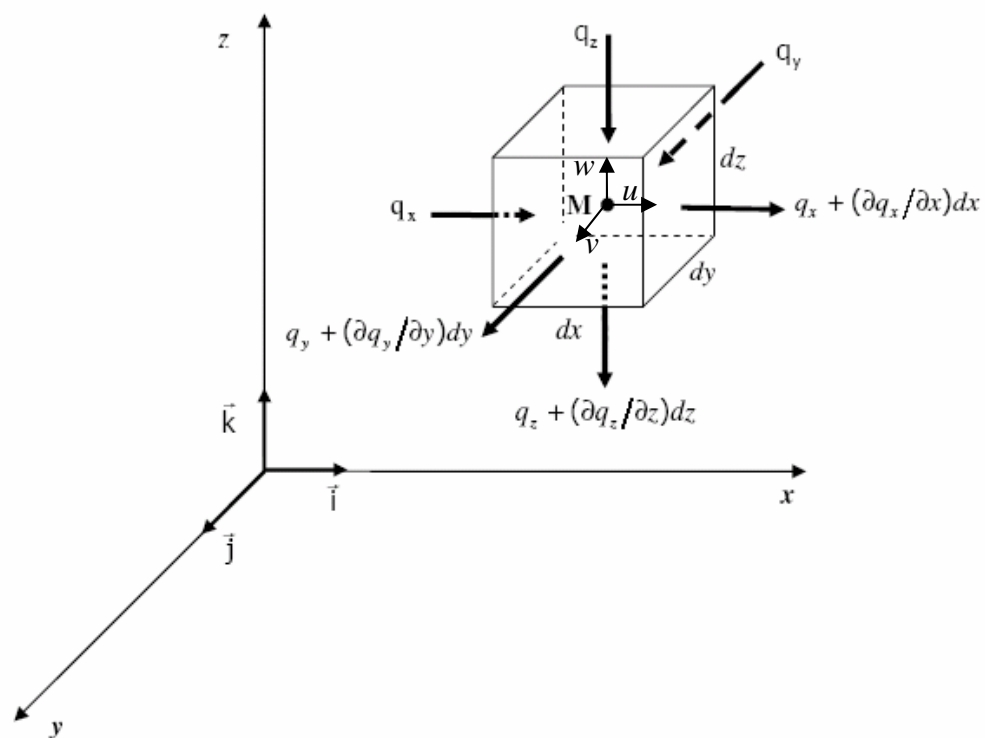


Figura 2.6 – Elemento de volume de solo situado em torno de um ponto genérico M no perfil de solo

Fonte: Prevedello (1996)

A quantidade de água que entra pela face  $dydz$  (na direção de x) por unidade de tempo é  $q_x dydz$ .

Considerando que ao longo da direção  $x$  a densidade de fluxo  $q_x$  sofra variação ao longo de  $x$ , temos que  $\partial q_x / \partial x$  é a variação de  $q_x$  por unidade de  $x$ . Temos que, ao longo de  $dx$ , a variação do fluxo  $q_x$  é  $q_x + (\partial q_x / \partial x) dx$ . Assim, o fluxo que sai pela face oposta é  $[q_x + (\partial q_x / \partial x) dx] dydz$ .

O volume de água por unidade de tempo acumulado no elemento de volume de solo, na direção  $x$  (devido a densidade de fluxo) é dado pela diferença entre o volume de entrada na direção  $x$  ( $Ve_x$ ) e o volume de saída na direção  $x$  ( $Vs_x$ ), isto é,

$$Ve_x - Vs_x = q_x dydz - [q_x + (\partial q_x / \partial x) dx] dydz = -(\partial q_x / \partial x) \Delta V \quad (2.27)$$

Analogamente, para as direções  $y$  e  $z$  tem-se respectivamente,

$$Ve_y - Vs_y = q_y dxdz - [q_y + (\partial q_y / \partial y) dy] dxdz = -(\partial q_y / \partial y) \Delta V \quad (2.28)$$

$$Ve_z - Vs_z = q_z dxdy - [q_z + (\partial q_z / \partial z) dz] dxdy = -(\partial q_z / \partial z) \Delta V \quad (2.29)$$

Ou, ainda com mais detalhes, na Tabela 2.2.

Assim, a taxa total de acumulação de água  $\partial Q / \partial t$  no elemento de volume de solo é dada pela soma nas três direções, ou seja:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \Delta V \quad (2.30)$$

Mas, o volume de água  $Q$  no volume de solo  $\Delta V$  pode ser dado por  $\theta \Delta V$ . Assim, teremos:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\theta \Delta V) = \Delta V \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.31)$$

Portanto, a taxa de acumulação de água por unidade de tempo no elemento de solo pode ser escrita por,

$$\Delta V \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \Delta V \quad (2.32)$$

ou, ainda,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \quad (2.33)$$

que é a equação da continuidade ou a lei da conservação da massa.

Tabela 2.2 – Fluxo de massa através da superfície de controle de um volume de controle diferencial retangular

| Superfície            | Fluxo de massa                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Esquerda</i> (-x)  | $-\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}\right] \left[u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}\right] dydz = -\rho u dydz + \frac{1}{2} \left[u \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] dx dydz$   |
| <i>Direita</i> (+x)   | $\left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}\right] \left[u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}\right] dydz = \rho u dydz + \frac{1}{2} \left[u \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] dx dydz$     |
| <i>Fundo</i> (-y)     | $-\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}\right] \left[v - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}\right] dx dz = -\rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[v \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx dydz$ |
| <i>Topo</i> (+y)      | $\left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}\right] \left[v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}\right] dx dz = \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[v \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx dydz$   |
| <i>Posterior</i> (-z) | $-\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] \left[w - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] dx dy = -\rho w dx dy + \frac{1}{2} \left[w \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] dx dydz$ |
| <i>Frontal</i> (+z)   | $\left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] \left[w + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] dx dy = \rho w dx dy + \frac{1}{2} \left[w \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] dx dydz$   |

### 2.6.2 Sistema de coordenadas cilíndricas

A massa específica no centro do volume de controle é assumida como  $\rho$ , e a velocidade neste ponto, é considerada como sendo  $\vec{V} = \hat{e}_r V_r + \hat{e}_\theta V_\theta + \hat{k} V_z$ , sendo  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$  e  $\hat{k}$  são

vetores unitários nas direções  $r, \theta$  e  $z$ , respectivamente, e  $V_r, V_\theta$  e  $V_z$  são as componentes da velocidade nas direções  $r, \theta$  e  $z$ , respectivamente.

A taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle, cujos detalhes são mostrados na tabela 2.3, é dada por:

$$\left[ \rho V_r + r \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right] dr d\theta dz \quad (2.34)$$

Por outro lado, a massa dentro do volume de controle diferencial, em qualquer instante, é o produto da massa por unidade de volume,  $\rho$ , e o volume  $rd\theta dr dz$ . Assim a taxa de variação da massa no interior do volume de controle é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} rd\theta dr dz \quad (2.35)$$

Portanto, a equação da conservação da massa em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\rho V_r + r \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + r \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.36)$$

ou, ainda,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.37)$$

Tabela 2.3 – Fluxo de massa através da superfície de controle de um volume de controle diferencial cilíndrico

| Superfície            | Fluxo de massa                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Interna</i> (-r)   | $-\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] \left[V_r - \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] \left(r - \frac{dr}{2}\right) d\theta dz = -\rho V_r r d\theta dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta dz +$ $+ \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz + V_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz$ |
| <i>Externa</i> (+r)   | $\left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] \left[V_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\theta dz = \rho V_r r d\theta dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta dz +$ $+ \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz + V_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz$   |
| <i>Frontal</i> (-θ)   | $-\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] \left[V_\theta - \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] dr dz = -\rho V_\theta dr dz + \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz +$ $+ V_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz$                           |
| <i>Posterior</i> (+θ) | $\left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] \left[V_\theta + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] dr dz = \rho V_\theta dr dz + \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz +$ $+ V_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz$                             |
| <i>Fundo</i> (-z)     | $-\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] \left[V_z - \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] r d\theta dr = -\rho V_z r d\theta dz + \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dz +$ $+ V_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dz$                                                                |
| <i>Topo</i> (+z)      | $\left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] \left[V_z + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] r d\theta dr = \rho V_z r d\theta dz + \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dz +$ $+ V_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dz$                                                                  |

## 2.7 EQUAÇÃO DE RICHARDS EM REGIME DE FLUXO TRANSIENTE

Richards, em 1928, usando o princípio de Buckingham, consolidou a base teórica que descreve o fluxo de água no solo. Em 1931, Richards utilizando o princípio da conservação da massa e formulou a equação geral que governa o movimento de água em meio poroso não-saturado, em regime de fluxo transiente, que pode ser assim expressa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_x(\theta) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K_y(\theta) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_z(\theta) \frac{\partial H}{\partial z} \right] \quad (2.38)$$

## 2.8 EQUAÇÃO DE RICHARDS EM REGIME DE FLUXO NÃO-TRANSIENTE

Em regime de fluxo não transiente, ambos,  $\theta$  e  $H$  não variam no tempo, mas variam no espaço. Assim, podem-se considerar dois casos: regime de fluxo não transiente uniforme e regime fluxo não transiente variado. No primeiro caso a densidade de fluxo é constante, não varia com a posição ( $\partial q_x / \partial x = \partial q_y / \partial y = \partial q_z / \partial z = 0$ ). Por outro lado, no regime de fluxo não transiente variado, a densidade de fluxo varia com a posição, de modo que a soma dessas variações seja nula, pois a umidade não varia. Assim, a equação da continuidade pode ser escrita por:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad (2.39)$$

que combinada com a lei de Buckingham obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ K_x(\theta) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K_y(\theta) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_z(\theta) \frac{\partial H}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.40)$$

que é a equação diferencial que governa o movimento de água em solos não saturados, em regime não transiente (PREVEDELLO, 1996). No caso particular do solo ser isotrópico, isto é,  $K_x = K_y = K_z = K$  (constante), a equação passa a ser a equação de Laplace, ou seja:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (2.41)$$

## 2.9 CURVA DE RETENÇÃO DE ÁGUA NO SOLO

Determinar a retenção da água no solo consiste em calcular a umidade através do registro de peso da amostra, depois de constatado o equilíbrio hidrostático entre a água retida nos poros do solo e a tensão de sucção. Da aplicação de diferentes tensões numa mesma amostra, obtém-se a umidade equivalente a cada sucção, o que permite a elaboração da “curva característica de umidade do solo” ou simplesmente “curva de retenção” (REICHARDT; TIMM, 2004). Esta curva relaciona a energia potencial matricial  $\psi_m$ , representada pelas tensões de sucções empregadas, ao conteúdo de água que permanece no solo após a aplicação desta sucção. As curvas de retenção da água são construídas a partir da determinação de uma coleção de pares de umidade do solo correspondente a um dado potencial matricial aplicado. Reichardt e Timm (2004) afirmam que a curva de retenção ou curva característica é única, a menos que a geometria do sistema varie com o tempo; dessa forma não é necessário ser determinada a cada experimento. Esses autores destacam ainda que a estrutura do solo afeta a retenção da água pelo solo, uma vez que ela determina o arranjo das partículas, que por sua vez irá determinar a distribuição de poros. Na Figura 2.7, podem ser vistas curvas de retenção esquemáticas, para solos de textura bem distinta e solos com diferente grau de compactação. Comumente, estas curvas são ajustadas utilizando-se o modelo de van Genuchten e representadas pela seguinte equação:

$$\theta = \theta_r + \frac{(\theta_s - \theta_r)}{\left[1 + (\alpha \psi_m)^n\right]^b} \quad (2.42)$$

onde:  $\theta$  é a umidade do solo no potencial  $\psi_m$ ;  $\theta_s$  é a umidade de saturação da amostra ( $\text{cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ );  $\theta_r$  é a umidade residual ( $\text{cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ );  $\psi_m$  é a sucção aplicada (cm de água);  $\alpha$ ,  $b$  e  $n$  são parâmetros de ajuste do modelo.

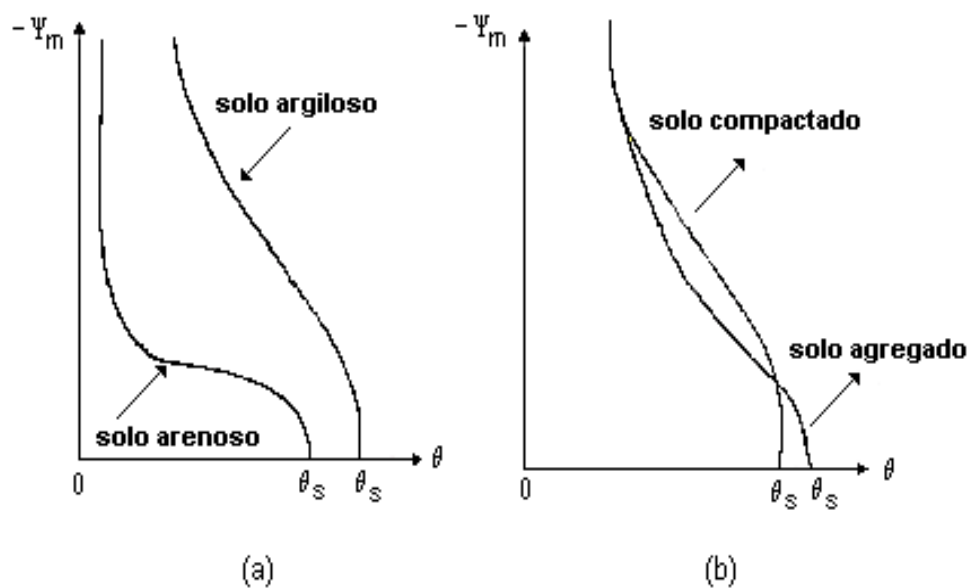


Figura 2.7 – Curvas de retenção de água no solo para duas texturas e dois níveis de compactação

Fonte: Reichardt e Timm (2004)

Em muitos modelos assume-se, na equação de Van Genuchten, que:

$$m = 1 - \frac{1}{n}, n > 1 \quad (2.43)$$

Outras equações de ajuste para a curva de retenção podem ser vistas na Tabela 2.4.

Na Tabela 2.5 constam os valores médio, mínimo e máximo para os parâmetros da curva de retenção do modelo de van Genuchten para cinco classes texturais de acordo com a classificação Belga, onde na tabela,  $N$  é o número de observações para o cálculo da média apresentada.



Tabela 2.4 – Equações de ajuste para a curva de retenção

| Equação                                                                                                  | Simplificação                                   | Termos auxiliares                                                                                                                        | Origem                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $\Theta = \left( \frac{\psi_b}{\Psi} \right)^\lambda$                                                    | $a_2 = a_5 = 0$<br>$a_7 = 0$<br>$b = 1$         | $b_2 = -\lambda$<br>$a_4/a_1 = (\psi_b)^\lambda$                                                                                         | Brooks e Corey (1964)                                     |
| $\ln \Theta = A + B \cdot \ln \psi$                                                                      | -                                               | $A = \ln(a_4/a_1)$<br>$B = b_2$                                                                                                          | Williams et al. (1983), para solos australianos           |
| $\Theta = \left\{ \frac{1}{\ln \left[ e + \left( \frac{\Psi}{a} \right)^n \right]} \right\}^m$           | $a_1 = a_5 = 0$<br>$a_3 = 1$                    | $a_7/a_1 = e = \text{base natural dos logaritmos}$<br>$a_4/a_2 = (1/a)^{b_2}$<br>$b_1 = m \text{ e } b_2 = n$<br>a, n e m são constantes | Fredlund e Xing (1994)                                    |
| $\psi = \psi_{cr} \cdot \exp[\alpha \cdot (1 - \Theta)]$                                                 | $a_1 = a_5 = 0$<br>$a_7 = 0$<br>$b_1 = b_2 = 1$ | $\Psi_{cr} = \text{valor da entrada de ar}$<br>$\alpha = \text{constante}$                                                               | Farrel e Larson (1972)                                    |
| $\Theta = C(\psi) = \left\{ \frac{1}{\ln \left[ e + \left( \frac{\Psi}{a} \right)^n \right]} \right\}^m$ | -                                               | $\gamma(\psi) = 1 - \frac{\ln \left( 1 + \frac{\psi}{\psi_r} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{1\,000\,000}{\psi_r} \right)}$                | Fredlund e Xing (1994); introduz o fator de correção C(ψ) |

Fonte: Leong e Rahardjo (1997)

Tabela 2.5 – Valores médio, mínimo e máximo para os parâmetros de van Genuchten

| Classe Textural        | N  | Médio | Mínimo | Máximo |
|------------------------|----|-------|--------|--------|
| <b>Argiloso</b>        | 10 |       |        |        |
| $\theta_s$             |    | 0,44  | 0,39   | 0,49   |
| $\theta_r$             |    | 0,16  | 0,00   | 0,30   |
| $\alpha \cdot 10^{-3}$ |    | 2,00  | 2,00   | 7,77   |
| $n$                    |    | 0,63  | 0,30   | 0,96   |
| <b>Franco</b>          | 33 |       |        |        |
| $\theta_s$             |    | 0,42  | 0,38   | 0,46   |
| $\theta_r$             |    | 0,11  | 0,04   | 0,14   |
| $\alpha \cdot 10^{-3}$ |    | 1,56  | 0,40   | 4,20   |
| $n$                    |    | 0,80  | 0,42   | 1,44   |
| <b>Franco Arenoso</b>  | 55 |       |        |        |
| $\theta_s$             |    | 0,41  | 0,36   | 0,48   |
| $\theta_r$             |    | 0,09  | 0,00   | 0,22   |
| $\alpha \cdot 10^{-3}$ |    | 2,29  | 0,20   | 5,70   |
| $n$                    |    | 0,86  | 0,32   | 1,23   |
| <b>Areia Franca</b>    | 10 |       |        |        |
| $\theta_s$             |    | 0,41  | 0,32   | 0,53   |
| $\theta_r$             |    | 0,09  | 0,07   | 0,14   |
| $\alpha \cdot 10^{-3}$ |    | 7,42  | 3,41   | 20,61  |
| $n$                    |    | 1,21  | 0,76   | 1,27   |
| <b>Areia</b>           | 62 |       |        |        |
| $\theta_s$             |    | 0,39  | 0,30   | 0,54   |
| $\theta_r$             |    | 0,04  | 0,00   | 0,10   |
| $\alpha \cdot 10^{-3}$ |    | 12,30 | 1,60   | 37,10  |
| $n$                    |    | 1,68  | 0,69   | 2,62   |

Fonte: Hartmann (2001)

### 2.9.1 O fenômeno da histerese

Existem dois métodos de se obter a Curva de Retenção do solo: por secagem (drenagem): toma-se uma amostra de solo inicialmente saturada e aplicando-se gradualmente sucções maiores, fazendo medidas sucessivas de tensão em função de  $\theta$ ; e por molhamento (umedecimento): toma-se uma amostra de solo inicialmente seca ao ar e permitindo-se seu umedecimento gradual por redução de tensão.

Reichardt e Timm (2004) descrevem que cada método fornece uma curva contínua, mas em geral, diferentes, ou seja, a relação entre a sucção matricial e a umidade não é unívoca. Este fenômeno é denominado histerese. Na Figura 2.8 apresentado o fenômeno da

histerese, onde temos os ramos principais de secamento e de molhamento dispostos em posições distintas. Se o solo não estiver completamente seco antes do umedecimento ou não estiver completamente saturado antes da secagem, o resultado observado é que as curvas resultantes recaem entre as curvas principais. A curva AB é um exemplo dessas curvas secundárias, conhecidas como scanning curves. Para esses autores, a histerese dificulta o ajuste de modelos para as curvas de retenção, além disso, traz sérios problemas para modelagem matemática do fluxo de água no solo. Por este motivo, em muitos casos, a histerese passa a ser desconsiderada.

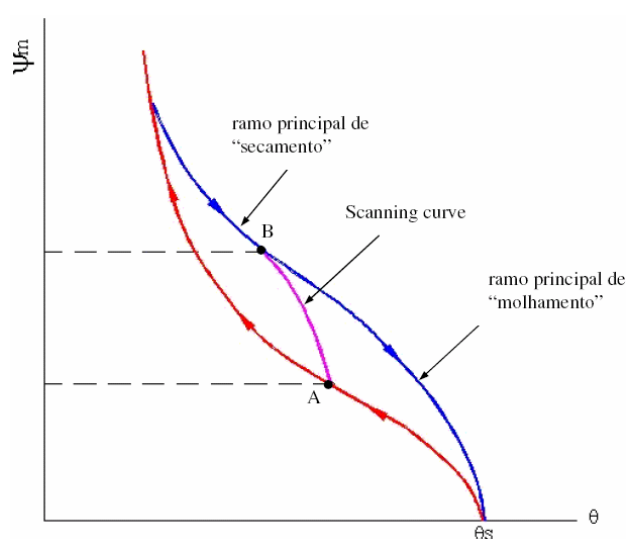


Figura 2.8 – Fenômeno de histerese em curva de retenção do solo  
Fonte: Reichardt e Timm (2004)

## 2.10 CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA

A condutividade hidráulica de solo é um coeficiente que expressa a facilidade de a água se movimentar através do solo, sua variação depende tanto das propriedades da água como as propriedades do solo. A principal propriedade do solo que afeta a condutividade hidráulica é a porosidade do solo. Por outro lado, as propriedades da água são: a massa específica e a viscosidade. Porém, alguns autores, como Tavenas et al. (1983) e Smiles, Barnes e Gardner (1985), chamam atenção de que a temperatura e a salinidade também interferem de forma significativa, tanto nos solos saturados como nos solos não saturados. No entanto, como forma de facilitar a modelagem matemática, assume-se que a condutividade

hidráulica  $K$  varia apenas com a variação da umidade, ou seja, a condutividade hidráulica  $K$  é função da umidade  $K = K(\theta)$ . Em solo saturado a condutividade hidráulica é constante, neste caso é freqüentemente denominada de condutividade hidráulica do solo saturado ( $K_s$ ).

A condutividade hidráulica é tanto maior quanto mais úmido o solo, atingindo seu valor máximo quando o solo está saturado. O valor de  $K$  decresce bruscamente com a redução de umidade (REICHARDT; TIMM, 2004).

Desde que o solo não alcança totalmente a condição de saturação através de crescente umedecimento natural, pois uma pequena parcela de ar sempre fica retida nos poros do solo, o valor de  $K_s$ , referente ao valor de  $\theta_s$ , é sempre inferior à porosidade total do solo (SMITH; WARRICK, 2007).

Diferentes metodologias expressam a condutividade hidráulica em função da umidade. A Tabela 2.6 descreve algumas equações propostas para a função condutividade hidráulica em solo não saturado.

Tabela 2.6 – Função condutividade hidráulica

| Função condutividade hidráulica                                                             | Referência             | Observações                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $K = a\psi + b$                                                                             | Richards (1931)        |                                                                                                |
| $K_r = \Theta^n, n = 3,5$                                                                   | Avemajov (1950)        |                                                                                                |
| $K = K_r \left[ \frac{(S_r - S_{ru})}{(1 - S_{ru})} \right]^3$                              | Irmay (1954)           | $a, b, \alpha, n$ = parâmetros de ajuste das equações proposta                                 |
| $K = \alpha \Psi^{-n}$                                                                      | Wind (1955)            | $K$ = condutividade hidráulica não saturada                                                    |
| $K = K_r \left[ \frac{(S_r - S_{ru})}{(1 - S_{ru})} \right]^4$                              | Corey (1957)           | $K_s$ = condutividade hidráulica saturada                                                      |
| $K_r = \exp(-\alpha \cdot \psi)$                                                            |                        |                                                                                                |
| $K = \frac{K_s}{(a \cdot \psi^n + 1)}$                                                      | Gardner (1958)         | $K_r = \frac{K}{K_s}$ = condutividade hidráulica relativa                                      |
| $K = K_s [1 - n \cdot (1 - S_r)]$                                                           | Scott (1963)           | $\Theta = \frac{(\theta - \theta_s)}{(\theta_s - \theta_r)}$ = umidade volumétrica normalizado |
| $K = K_s$ , para $\psi \leq \psi_{aev}$                                                     |                        | $\theta_s$ = teor de umidade volumétrica saturada                                              |
| $K_r = \left( \frac{\psi}{\psi_{aev}} \right)^{-n}$ , para $\psi \geq \psi_{aev}$           | Brooks e Corey (1964)  | $\theta_r$ = teor de umidade volumétrica residual                                              |
| $K = K_s$ , para $\psi \leq \psi_{aev}$                                                     |                        |                                                                                                |
| $K_r = \exp[-\alpha(\psi - \psi_{aev})]$ ,<br>para $\psi_{aev} \leq \psi \leq \psi_1$       | Ritjem (1965)          | $\psi_{aev}$ = sucção no valor da pressão de entrada de ar<br>$\psi_r$ = sucção residual       |
| $K_r = K_1 \left( \frac{\psi}{\psi_1} \right)^{-n}$ , para $\psi \geq \psi_1$               |                        | $K_1$ = condutividade hidráulica para $\psi = \psi_1$                                          |
| $K = K_s \cdot S_r^n$                                                                       | Brutsaert (1968)       | $S_r$ = grau de saturação                                                                      |
| $K = K_s \cdot \exp[\alpha(\theta - \theta_s)]$                                             | Davidson et al. (1969) | $S_{ru}$ = grau de saturação residual                                                          |
| $K = K_s \cdot \left( \frac{\theta}{\theta_s} \right)^n$                                    | Campbell (1973)        | $S_{rs}$ = grau de saturação de campo                                                          |
| $K = K_s \cdot \Theta^{1/2} \cdot \left\{ 1 - \left[ 1 - \Theta^{1/n} \right]^m \right\}^2$ | van Genuchten (1980)   | $S_e = \frac{(S_r - S_{ru})}{(S_{rs} - S_{ru})}$ = grau de saturação efetivo                   |
| $K = K_s \cdot S_e^n \cdot \left[ 1 - \left( 1 - S_e^{1/m} \right)^m \right]^2$             | Nielsen et al. (1986)  |                                                                                                |

Fonte: Vilar (2002)

## 2.11 FORMAÇÃO DO BULBO MOLHADO

De acordo com Folch e Fábrega (1999), o volume molhado do solo é definido como sendo a forma tridimensional que ocupa a frente de molhamento da água da irrigação proveniente de ponto de aplicação.

A irrigação por gotejamento é caracterizada pela aplicação de pequenas quantidades de água em alta frequência e diretamente na zona radicular, mantendo a umidade próxima ao limite superior de disponibilidade de água, em um volume de solo (DASBERG; BRESLER, 1985).

O conhecimento das dimensões do bulbo demonstra ser de suma importância na questão do dimensionamento do sistema de irrigação, em especial na escolha dos fatores tais como: espaçamento entre gotejadores, vazão e volume a ser aplicado. Tendo em vista, que um dimensionamento eficiente, trará benefícios de ordem financeira aliado ao uso racional de água, por reduzir as perdas por percolação profunda.

A distribuição de água no bulbo molhado é dependente do volume total de água aplicado, da vazão, da posição do gotejador (na superfície do solo ou enterrado), da disposição dos gotejadores (fonte pontual ou fonte em linha), das condições iniciais e de contorno, das propriedades físicas do solo e de sua distribuição espacial, da atividade do sistema radicular das plantas e do manejo da irrigação (BRANDT et al., 1971, LEVIN; VAN ROOYEN, 1979; TAGHAVI; MARIÑO; ROLSTON, 1984; DASBERG; BRESLER, 1985; GOLDBERG; GORNAT; RIMOM, 1986; COELHO; OR, 1996).

A estimativa adequada da distribuição e do armazenamento da água dentro do bulbo molhado é de fundamental importância para a determinação do número de emissores por planta e da sua localização em relação à planta ou fileira de plantas (BERNARDO; SOARES; MANTOVANI, 2006).

## 2.12 GEOMETRIA DO BULBO MOLHADO

Diferentes metodologias foram desenvolvidas com um objetivo comum de descrever a forma e o tamanho do bulbo molhado. Em alguns desses trabalhos tais como Zur (1996) e Mitchell e Goodwin (1998), a metodologia está fundamentada na aceitação de

suposta forma para a frente de molhamento para estabelecer determinadas correlações com o volume molhado obtido.

Ben-Asher, Charach e Zemel (1986) descreveram um modelo com base analítica, admitindo que a frente de molhamento formado por um gotejador posicionado na superfície do solo pode ser aproximado por uma semi-esfera. Neste modelo o raio molhado do bulbo obtido foi calculado em função da vazão do gotejador e da variação do teor de água antes da irrigação, e o maior teor de água após a irrigação. Ben-Asher e Phene (1993), utilizando a metodologia de Ben-Asher, Charach e Zemel (1986), aplicada num sistema de irrigação por gotejamento subsuperficial, propuseram um modelo esférico para frente de molhamento. Na Figura 2.9 é mostrada a frente de molhamento do volume de solo úmido na irrigação por gotejamento.



Figura 2.9 – Geometria do bulbo molhado num perfil de solo na irrigação por gotejamento  
Fonte: Souza (2008)

Bresler (1978) considerou que a profundidade molhada é determinada pela força da gravidade, afetando assim, a forma do bulbo que é mais achatado nos solos argilosos e mais alongado nos solos arenosos, como pode ser visto na Figura 2.10.

Quanto à frequência de irrigação, Rodrigo López et al. (1992) afirmam que a capacidade de retenção de água no solo aumenta à medida que o solo vai secando. Assim, tensões elevadas reduzem a velocidade do movimento da água no solo, resultando em um bulbo demasiadamente estreito.

Evans, Wu e Smajstrala (2007), destacam que a formação do bulbo molhado é afetada pela umidade inicial do solo, vazão do emissor, frequência e duração da irrigação, movimento capilar da água e a capacidade de retenção de água do solo. Destacam ainda que, em áreas áridas, o emissor gera padrões de molhamento do solo que determinam o tamanho e forma da zona radicular da cultura.

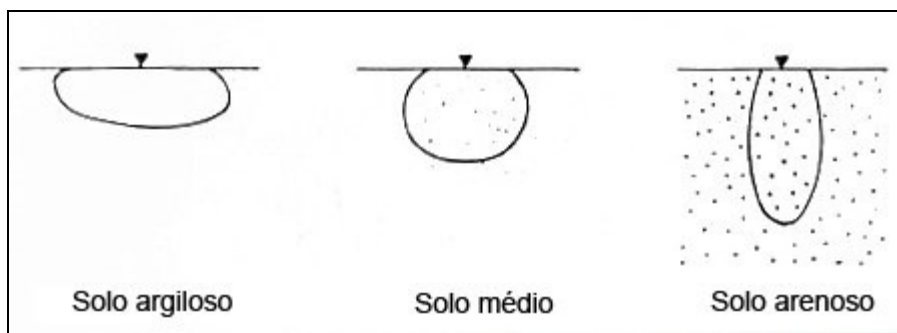


Figura 2.10 – Forma do bulbo molhado para solos homogêneos de diferentes texturas  
 Fonte: Pizarro Cabello (1990)

### 2.13 DISCO SATURADO

Uma vez iniciado o processo de irrigação, dá-se também o início da formação de uma região na superfície solo, denominada de disco saturado, zona saturada ou charco. Para Dasberg e Bresler (1985), é através desse charco que a água infiltra no solo, cuja área cresce com o tempo vindo a se estabilizar após atingir o estado de equilíbrio dinâmico.

Souza et al. (2006) monitoraram o tamanho do disco saturado formado no momento da infiltração e o avanço da frente de umedecimento da superfície do solo, por meio de régua milimetrada. Desta forma, pode-se avaliar o disco saturado e a área superficial molhada, em função do tempo e do volume aplicado. A Figura 2.11, ilustra o disco saturado e a área superficial molhada.



Figura 2.11 – Modelo ilustrativo do disco saturado e da área superficial molhada  
 Fonte: Souza et al (2006)

Berger (1994) expressou o raio máximo ( $\rho_{max}$ ) em função da vazão do emissor e da condutividade hidráulica saturada, através da equação:



$$\rho_{max} = \left( \frac{q}{\pi \cdot K_s} \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

onde  $q$  é a vazão de gotejador e  $K_s$  a condutividade hidráulica do solo saturado.

Roth (1974 apud LUBANA; NARDA, 2001), expressou o raio do disco molhado, isto é o raio do bulbo na superfície do solo ( $r_s$ ) em função de vazão ( $q$ ), do tempo ( $t$ ) e das umidades inicial ( $\theta_i$ ) e final ( $\theta_f$ ), assumindo que o bulbo molhado possui a forma de um hemisfério e que o solo varia de uma umidade volumétrica inicial ( $\theta_i$ ) para uma umidade volumétrica final ( $\theta_f$ ). Assim,  $r_s$  em metros (m), é expressa por:

$$r_s = \left( \frac{3 \cdot q \cdot t}{2\pi \cdot (\theta_f - \theta_i)} \right)^{1/3} \quad (2.45)$$

onde  $q$  é a vazão do gotejador, em  $m^3 h^{-1}$ ;  $t$  é o tempo de aplicação de água, em h.

## 2.14 MODELAGEM

Segundo Wendland (2001), modelo é a reprodução idealizada de algumas ou todas as características físicas de um processo natural em escala adequada. É através de um modelo que se consegue sistematizar as informações de um processo natural. Para este autor um modelo em si, não é o objetivo do problema inicial, mais sim, uma ferramenta capaz de solucionar o problema e, portanto, alcançar objetivos. Na modelagem, é importante destacar que o modelo não precisa necessariamente ser o mais descritível, mas sim, o mais simples possível que represente o fenômeno estudado. É evidente que o problema é mais complexo e mais interessante, no entanto a sua solução é o que se tem de mais importante. Portanto, desprezar algumas características em certos modelos pode resultar um modelo menos preciso, mas que pode funcionar melhor do um modelo com um grau de complexibilidade.

### **2.14.1 Modelo conceitual e empírico**

Um modelo é dito conceitual, quando as funções utilizadas na sua elaboração levam em consideração os processos físicos. Esta definição é estabelecida para diferenciar os modelos que consideram os processos físicos, dos modelos ditos “caixa-preta”. Os modelos do tipo “caixa-preta” ou empíricos são aqueles em que se ajustam os valores calculados aos dados observados, através de funções que não têm, necessariamente, nenhuma relação com os processos físicos envolvidos. A definição do modelo conceitual é artificial, já que funções empíricas são também usadas (equações de Darcy, Horton etc...), mas estão relacionadas com a física do problema (WENDLAND, 2001).

### **2.14.2 Modelo físico**

O modelo físico representa o sistema por um protótipo em escala menor, na maior parte dos casos. Na Hidráulica, por exemplo, a teoria da semelhança é utilizada para o estabelecimento dos modelos reduzidos.

### **2.14.3 Modelo analógico**

O modelo analógico está baseado na analogia entre diferentes processos físicos. Vale-se da analogia das equações que regem diferentes fenômenos, para modelar no sistema mais conveniente, o processo desejado. A analogia entre as equações do escoamento hidráulico e de um circuito elétrico permite a representação do sistema hidráulico por um circuito elétrico, que tem um custo mais reduzido.

## 2.15 MODELOS MATEMÁTICOS

Os modelos matemáticos, também chamados de digitais, são os que representam a natureza do sistema, através de equações matemáticas. Estes modelos são mais versáteis, porque se pode facilmente modificar a sua lógica, obtendo-se resultados de diferentes situações de um mesmo sistema ou de diferentes sistemas, além da grande velocidade de resposta. A desvantagem desse tipo de modelo está na discretização de processos contínuos e na dificuldade na representação matemática de alguns processos físicos. Em determinadas áreas de estudo, ainda não existem funções matemáticas, que representem convincentemente certos fenômenos físicos (TUCCI, 2005).

Atualmente, duas tendências podem ser apontadas na modelação matemática aplicada. A primeira constrói modelos tão simples quanto possível e adapta-os aos dados iniciais sem uma observação mais profunda do processo em causa. Assim, os modelos lineares têm sido cada vez mais usados. Esta técnica é bastante utilizada em diferentes áreas de conhecimentos, pois tem dado bons resultados, em muitos casos. A segunda tendência consiste em elaborar modelos matemáticos que refletem uma estrutura interna dos sistemas em estudo de forma completa, tendo em conta alguns pormenores delicados. Isto leva, de um modo geral, a problemas matemáticos mais complexos. A sua elaboração reflete uma lógica interna do desenvolvimento científico: o desenvolvimento da matemática pura e aplicada não seria possível se novos modelos não fossem criados.

### 2.15.1 Modelos determinísticos e estocásticos

Sempre que se está em presença de sistemas complexos, de grandes dimensões e incerteza de inter-relações inerentes ao próprio sistema, os modelos mais usados para descrever são os determinísticos, em desfavor dos estocásticos (probabilísticos). Isto se deve, provavelmente, à complexidade injustificada da descrição matemática proveniente de fatores estocásticos, sem que se tenha verificado uma análise mais pormenorizada à essência do próprio processo.

Os modelos probabilísticos tornam-se muito úteis para a análise de processos em que seja possível o acesso a dados repetitivos, uma vez que requerem uma grande amostra

inicial de dados na modelagem. Mas a implementação deste modelo, em processos evolutivos é quase sempre única e é acompanhada pela escassez de dados. Portanto, não pode ser ignorada uma análise compreensiva, inclusive estatística, de toda a informação disponível sobre tais processos.

### 2.15.2 Modelos discretos e contínuos

Dependendo da técnica de descrição do processo, os modelos matemáticos são subdivididos em contínuos e discretos, isto é, operam respectivamente com variáveis discretas e contínuas. Os diferentes tipos de dados distinguem estes problemas. Assim, os modelos discretos operam com vetores do tipo  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , enquanto que os modelos contínuos operam com funções da forma  $x(t)$  de uma variável independente  $t$  (vetor ou escalar). Por exemplo, em modelos dinâmicos uma das variáveis independentes é usualmente o tempo  $t$  definido num certo intervalo,  $t \in [t_0, T]$ .

Um modelo discreto pode ser representado na forma genérica por

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, j = 1, \dots, m \quad (2.46)$$

em que  $F_j(\cdot)$  representa, em geral, funções não lineares de  $n$  variáveis escalares. Por outro lado, um modelo contínuo pode ser representado por:

$$\varphi(x) = 0 \quad (2.47)$$

em que,  $\varphi(\cdot)$  é um funcional da função  $x(\cdot)$ . Um funcional é definido como sendo uma aplicação  $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa toda função  $x(\cdot) \in \Omega$  a um número real. O conjunto  $\Omega$  é denominado espaço funcional e  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais.

### 2.15.3 Modelos lineares e não lineares

A escolha entre modelos lineares e não lineares depende do comportamento do processo em estudo ou do rigor da aproximação pretendido. No entanto, processos não lineares tornam-se mais fáceis de serem aplicados ou descritos, quando são representados por modelos lineares, obviamente pelo fato de ser mais simples.

### 2.15.4 Modelos diferenciais

Os modelos diferenciais são representados por uma relação funcional entre uma função e algumas das suas derivadas. Tais modelos foram desenvolvidos inicialmente com o objetivo de descrever apenas processos dinâmicos, isto é, processos que se desenvolvem num determinado instante  $t$ . Nota-se que os modelos diferenciais são mais simples e mais eficientes em estudos analíticos e numéricos, sendo por isso mais comuns.

### 2.15.5 Modelos integrais

Quando o funcional  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , for linear, isto é, quando para todo  $x, y \in \Omega$  e todo  $w \in \mathbb{R}$ , o potencial  $\phi$  satisfaz:

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \text{ e } \phi(wx) = w\phi(x) \text{ para todo } w \in \mathbb{R}. \quad (2.48)$$

diz-se que o modelo é linear contínuo. Se em tal modelo linear for restrito a uma variável independente  $t$ , então o funcional linear  $\phi(x)$  relativamente à função  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$  pode ser descrito pelo seguinte integral:

$$\phi(x) = \int_{t_0}^T F(t)x(t)dt \quad (2.49)$$

onde  $F(t)$  é uma função dada. Neste caso, os modelos deste tipo são denominados de modelos integrais contínuos.

## 2.16 SOLUÇÕES DE MODELO

A solução do modelo proposto é diferente de acordo com os antecedentes científicos do modelador. Em geral, há uma tendência em se desenvolver modelos numéricos e, cujas suas soluções também são numéricas. No entanto, surgem com esta tendência, dois níveis de dificuldade. A primeira é com respeito a computação numérica direta que, pode falhar devido a uma deficiente formulação ou instabilidade das equações. Pode ainda acontecer que a computação limite a visão do modelo se as questões não forem colocadas adequadamente. Isto pode ainda ser agravado por um pré-tratamento deficiente das equações. A título de exemplo, torna-se perfeitamente inútil resolver um problema sem este ter sido previamente adimensionalizado. A presença de parâmetros adimensionais pode servir de indicador, face à sua grandeza, de perturbações ou instabilidade. De fato, esta inconveniência numérica pode facilitar o uso de métodos de perturbação, que podem ser usados para se ter uma melhor visão das soluções, facilitando a sua análise. A segunda dificuldade reside na habilidade de usar computadores de grande porte para resolver os problemas diretamente. Nesta situação, o procedimento correto consiste em analisar o problema para valores extremos e usar os resultados numéricos como um teste para predições. A modelação matemática bem sucedida necessita de combinar diferentes aproximações, mais do que elevar qualquer problema ou fenômeno a uma ascendência confusa (FOWLER, 1998).

No caso dos modelos determinísticos podem ocorrer dois tipos de solução: solução analítica e solução numérica.

### 2.16.1 Solução analítica

Tais soluções são obtidas em problemas de geometria simples, parâmetros homogêneos e relações lineares. Na sua obtenção podem ser empregadas diferentes técnicas matemáticas tais como:

- separação de variáveis;
- função de Green;
- teoria da perturbação;
- transformada de Laplace;
- transformada de Fourier;
- transformada de Kirchhoff.

### 2.16.2 Solução numérica

Podem ser obtidas para problemas gerais, independentemente da complexidade geométrica, dos parâmetros físicos e das relações constitutivas. São empregadas diferentes técnicas numéricas, tais como:

- método de diferenças finitas (FDM);
- método de elementos finitos (FEM);
- método de volumes finitos (FVM);
- método de elementos de contorno (BEM).

## 2.17 LIMITAÇÕES DE UM MODELO

Wendland (2001), considera que após a decisão sobre a utilização de um modelo, deve-se considerar os seguintes pontos:

- a) todos os modelos têm vantagens e desvantagens;
- b) quanto à solução de um modelo, pode ocorrer:
  - solução errada para problema bem elaborado;

- solução correta para problema errado.

c) o modelo é somente uma ferramenta para apoiar decisão. Estas só podem ser tomadas, quando existe a familiaridade necessária com os conceitos, técnicas, empregos e limitações da modelação.

Deve-se, no entanto, ter em mente que nenhum modelo é capaz de descrever exatamente os processos naturais, devido a existências de alguns fatores limitantes, a saber:

- a complexidade dos processos naturais, que em geral, dificulta a modelagem;
- a dificuldade obter parâmetros requeridos;
- as simplificações e generalizações que são introduzidas.

Portanto, a resposta do modelo é altamente dependente de acertadas simplificações e da exatidão dos parâmetros de entrada.

## 2.18 MODELAGEM MATEMÁTICA NA IRRIGAÇÃO POR GOTEJAMENTO

Soluções analíticas para a equação de Richards para fluxo não saturado sob vários limite e condições iniciais são difíceis de obter por causa da não linearidade dos parâmetros hidráulicos do solo. Esta dificuldade é exagerada no caso do solo ser heterogêneo. Geralmente, temos que recorrer às aproximações numéricas para predizer o movimento da umidade em solo não saturado, até mesmo para solos homogêneos. Porém, aproximações numéricas são freqüentemente afetadas por problemas de convergência e balanço de massa (MILLY, 1985; CELIA; BOULOUTAS; ZARBA, 1990).

Vasconcelos e Amorim (2001), usando o método das diferenças finitas (FDM) e o método iterativo de Picard, obtiveram um modelo numérico que simula o fluxo de água no solo. Tal modelo foi validado por com uma solução semi-analítica, que satisfaz a lei da conservação da massa, mantém a estabilidade numérica e fornece resultado acurado com pouco esforço computacional.

Durante as últimas décadas, foram desenvolvidas muitas soluções analíticas e quasi-analíticas para a equação de fluxo não saturada (PHILIP, 1969). A maioria das soluções analíticas obtidas para as equações que governam o fluxo de água no solo, estão baseadas no modelo exponencial proposto por Gardner (1958). Uma vez que o modelo exponencial facilita a linearização dessas equações. Possibilitando assim, a obtenção de solução analítica para as



equações que governam o fluxo de água no solo. Uma revisão detalhada desta aproximação para problemas de fluxo não saturados foi apresentada por Pullan (1990).

Para simular o fluxo de água em solo não-saturado é necessário resolver equações diferenciais parciais, que no caso mais geral são as equações de Richards. A equação de Richards que é a equação diferencial que governa o fluxo de água no solo se origina da combinação da lei de Darcy-Buckingham e do princípio da conservação da massa.

Em 1971, Frezze desenvolveu o primeiro modelo para resolver a equação de Richards, cuja solução foi obtida pela técnica “Line Sucessive Overrelaxation”. Mas, com a solução vieram também alguns problemas inerentes ao método numérico utilizado, tais como instabilidade numérica e dificuldade de convergência.

Com a utilização de outras técnicas numéricas surgiram muitos trabalhos que apresentavam soluções para a equação de Richards, entre eles: Neuman (1973), Narasimham e Witherspoon (1983), Haverkamp et al. (1977), Hayhoe (1978), Haverkamp e Vauclin (1979). Mas, as soluções apresentadas nestes trabalhos acompanhavam também, significativos erros no balanço de massa.

Ross e Bristow (1990), em seu trabalho usaram a técnica de linearizar a equação, que além de não fornecer, em geral bons resultados, requisitou um maior esforço computacional.

Srivastava e Yeh (1991), apresentaram em seu trabalho, solução analítica da equação de Richards, através do processo de linearização. Tal solução foi obtida pela substituição dos termos da equação de Richards, que são funções não-lineares por funções exponenciais. Na obtenção dessa solução analítica, foi considerado uma infiltração vertical de água a uma taxa constante em dois casos: solos homogêneos e em solos com duas camadas. Nestes modelos, as transformadas de Laplace e a teoria das funções analíticas. No entanto, apesar de ter sido obtido soluções razoavelmente aceitáveis, as ferramentas matemáticas utilizadas não são de tão simples manuseio e compreensão, não no ponto de vista da engenharia. Além disso, traz dificuldades operacionais, pois em geral, há excesso de simplificação, que resulta em perda de sentido do significado dos parâmetros, dificultado assim, avaliar a sensibilidade dos parâmetros envolvido. Por outro lado, a existência de soluções obtidas por funções analíticas, indica que pontualmente aproximações polinomiais podem descrever bem a solução em aproximações numéricas.

Embora as soluções baseadas nas relações funcionais exponenciais podem ser muito restritas para qualquer aplicação prática, servem como um meio para verificar muitos modelos numéricos para fluxo não saturado, especialmente para infiltração. Pode-se ainda,

avaliar modelos numéricos para solos estratificados, pois neste caso, tais modelos são frequentemente afetados por problemas de convergência e equilíbrio de massa. Além disso, as soluções analíticas podem aumentar nossa compreensão do processo de infiltração nas camadas de solo em regime transiente. (SRIVASTAVA; YEH, 1991).

Maia (2005) usou modelo potencial de superfície de resposta no dimensionamento do bulbo molhado, e obteve bons resultados. Neste trabalho, foram desenvolvidos modelos matemáticos que possibilitam estimar a profundidade máxima e o diâmetro máximo do bulbo molhado em função de variáveis de fácil mensuração no campo, isto é,

$$Z_{max} = f(D_{sup}, t, q) \quad (2.50)$$

e

$$D_{max} = g(D_{sup}, t, q) \quad (2.51)$$

Essas superfícies de respostas são representadas por funções potenciais do tipo  $aq^bt^c$  em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais, que descrevem  $Z_{max}$  e  $D_{max}$  em função de  $q$  e  $t$ .

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

#### 3.1 CONDIÇÕES INICIAIS

O modelo proposto neste trabalho foi desenvolvido tendo as seguintes condições iniciais:

- a) o bulbo molhado tenha curvas de nível na forma de elipses truncada com centros variando ao longo do eixo  $z$ , conforme pode ser visto na Figura 3.1 (a);
- b) no bulbo molhado a umidade tem variação contínua;
- c) em cada tempo umidade na faixa limitada pela curva de nível  $L_1$ , é a umidade de saturação, e a umidade na faixa entre as curvas de nível  $L_j$  e  $L_{j+1}$  é a umidade inicial do solo, conforme a ilustração da Figura 3.1 (b);

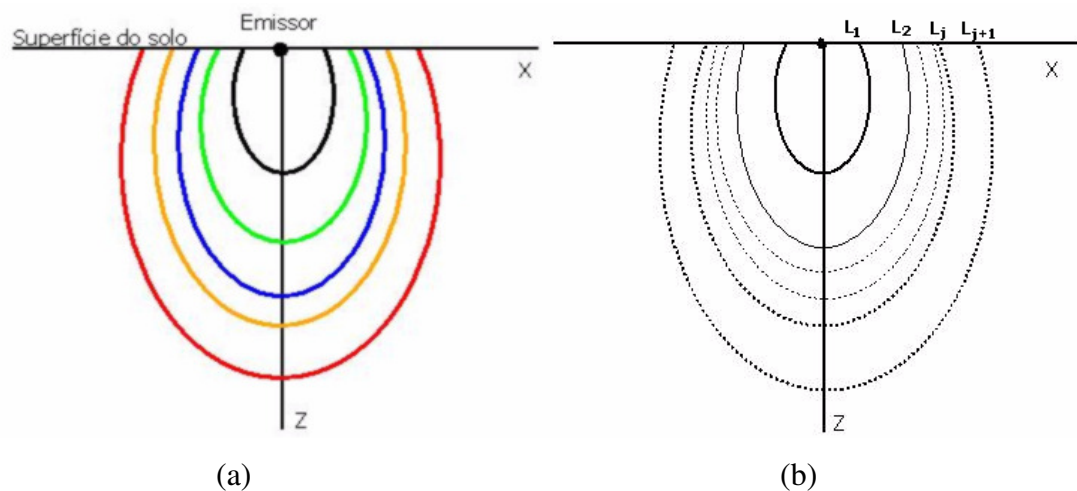


Figura 3.1 – Representação dos níveis de umidade por curvas elípticas

#### 3.2 DESCRIÇÃO DO MODELO

A solução semi-analítica que está sendo proposta é obtida determinando-se inicialmente uma solução analítica do problema simplificado. Definiremos problema simplificado, como sendo um conjunto de equações diferenciais ordinárias que descreve o

equilíbrio dinâmico apresentado pela simulação das equações que governam o fluxo de água no solo do problema inicial ou problema físico. A simplificação consiste num processo através do qual um modelo é modificado, o que na maioria das vezes se consegue desprezando alguns termos. Assim, o procedimento é descrito do seguinte modo: A partir das equações de Richards, obtém-se, por simulação numérica, padrões para umidade; a partir desses padrões, obtém-se uma família de equações diferenciais ordinárias; resolvendo as equações diferenciais ordinárias obtém-se a solução analítica do problema simplificado. Isto é, Equação de Richards  $\Rightarrow$  Simulação  $\Rightarrow$  Padrões  $\Rightarrow$  Família de EDO's  $\Rightarrow$  Solução analítica.

A solução analítica do problema simplificado representa a solução semi-analítica do problema físico inicial. Em geral, para obter soluções semi-analíticas para problemas de fluidos, precisa recorrermos aos métodos numéricos, ou realizar alguma transformação que simplifique as equações de governam o fluxo. No entanto, neste trabalho foram utilizadas as transformações, na fase de simplificação. Na Figura 3.2 pode ser visto um esquema de obtenção das soluções semi-analíticas.

O modelo foi formulado a partir de duas funções: a função umidade e a função nível de umidade. Assim, por meio da composição dessas funções, obteve-se uma solução semi-analítica para a modelagem do bulbo molhado na irrigação por gotejamento superficial.

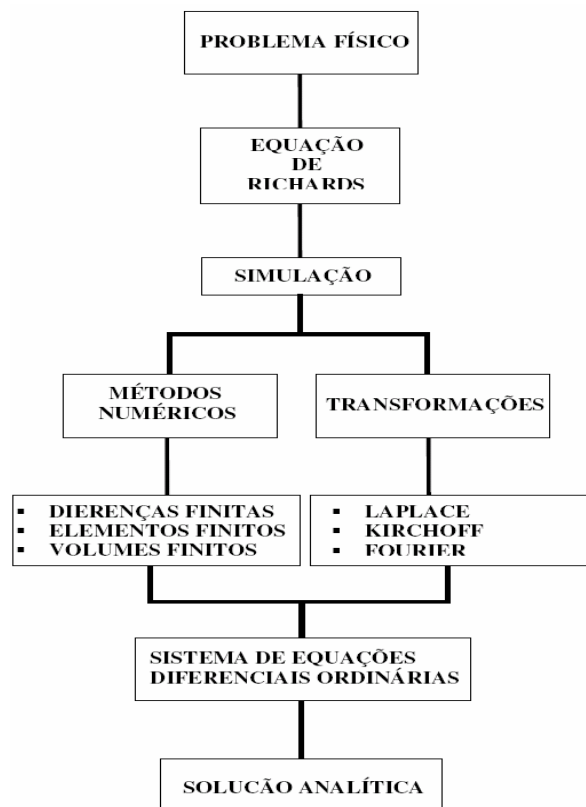


Figura 3.2 – Representação esquemática da modelagem

### 3.2.1 Definição da função de umidade

Através da projeção de planos horizontais e verticais simulados a partir da equação de Richards e das equações apresentadas nas Tabelas 2.2 e 2.3, chega-se a identificação do padrão aproximado da variação da umidade  $\theta$  em cada plano, como é visto na Figura 3.3.

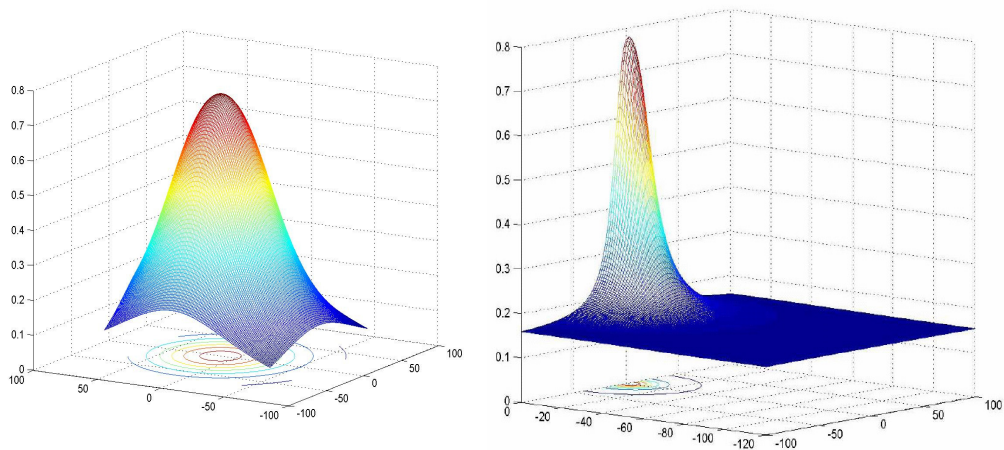


Figura 3.3 – Curvas de níveis representando padrões de umidade através de projeção de planos plotado no Matlab

Os campos de direções obtidos a partir da simulação das equações das Tabelas 2.2 e 2.3 comprovam que a variação da umidade em relação à distância  $L$  é proporcional à umidade  $\theta$  e proporcional à diferença entre a umidade de saturação  $\theta_s$  e a umidade  $\theta$  na fronteira do bulbo. Assim, a taxa de variação da umidade em relação à distância  $L$  é proporcional ao produto da umidade  $\theta$  pela diferença  $(\theta_s - \theta)$ , onde a constante de proporcionalidade é a condutividade hidráulica ( $K$ ). Expressando matematicamente, teremos o seguinte problema de contorno:

$$\frac{d\theta}{dL} = -K\theta(\theta_s - \theta), \begin{cases} \theta(L) = \theta_s, & 0 < L < L_1 \\ \theta(L) = \theta_j & L_j < L < L_{j+1} \end{cases} \quad (3.1)$$

Resolvendo o problema de contorno dado pela equação (3.1), isto é, expressando a umidade  $\theta$  em função da distância  $L$ , obtém-se a função  $\theta(L)$ , limitada inferiormente pela

umidade mínima ou umidade inicial,  $\theta_i$  e superiormente pela umidade saturação  $\theta_s$ , que é uma solução de equação (3.1). Obtém-se assim, a equação:

$$\theta(L) = \frac{\theta_s \cdot \theta_i}{\theta_i + (\theta_s - \theta_i) \cdot e^{-k(L_f - L)}} \quad (3.2)$$

onde  $\theta_i$  é a umidade mínima;  $\theta_s$  é a umidade de saturação do solo;  $e$  é a base do logaritmo natural;  $k$  é a condutividade hidráulica do solo,  $L$  é distância na direção do eixo x na superfície do solo e  $L_f$  é distância final na superfície do solo. A umidade inicial  $\theta_i$  na equação (3.2) é definida como sendo umidade do solo antes da aplicação de água. A equação (3.2) é a função umidade para um tempo fixo  $t$ . O comportamento dessa equação pode ser visto graficamente na Figura 3.4.

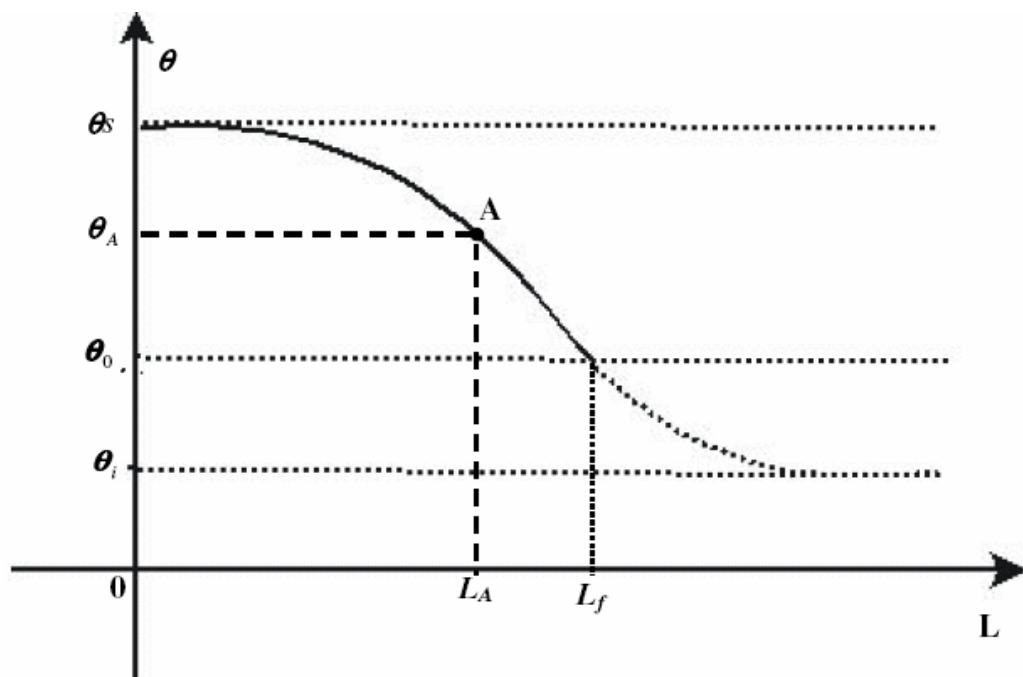


Figura 3.4 – Representação gráfica da umidade em função da distancia  $L$ , no tempo  $t$   
Fonte: confeccionada pelo autor

Nas Figuras 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 pode ser visto a fronteira do bulbo para cada tempo e a variação da umidade no tempo correspondente. Os valores  $L_0, L_1, L_2$  e  $L_3$  representam a distância do emissor até a fronteira da faixa saturada do bulbo, nos tempos  $t_0, t_1, t_2$  e  $t_3$  respectivamente.

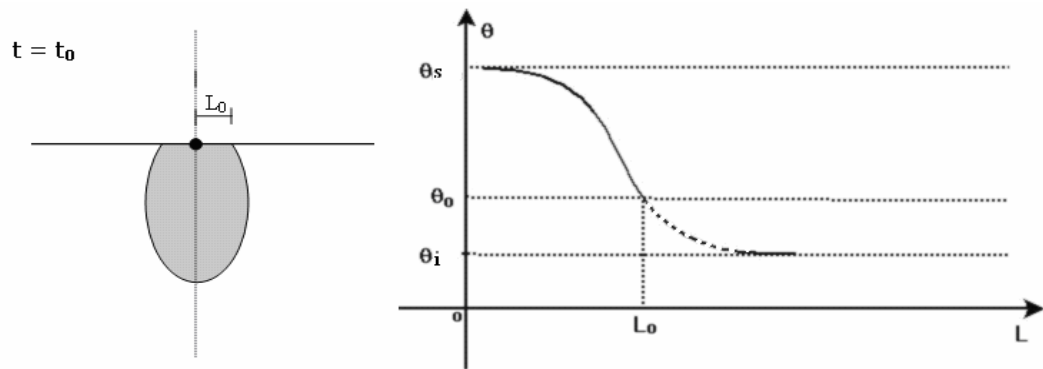


Figura 3.5 – Representação da frente de umidade do bulbo molhado no tempo  $t = t_0$   
 Fonte: Confeccionada pelo autor

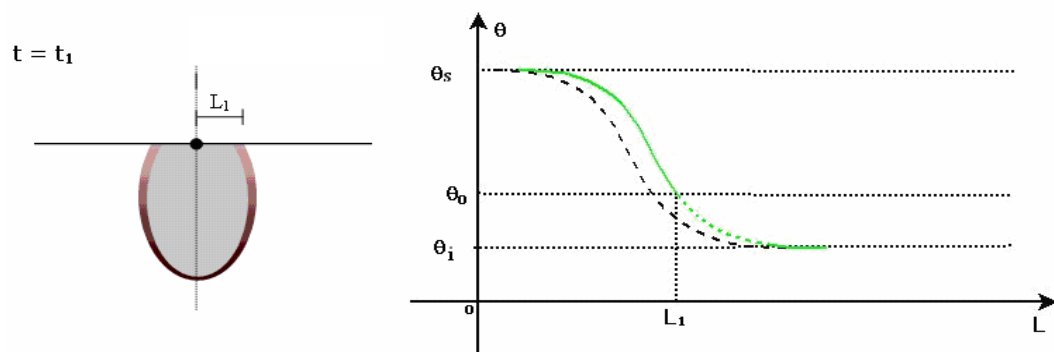


Figura 3.6 – Representação da frente de umidade do bulbo molhado no tempo  $t = t_1$   
 Fonte: Confeccionada pelo autor

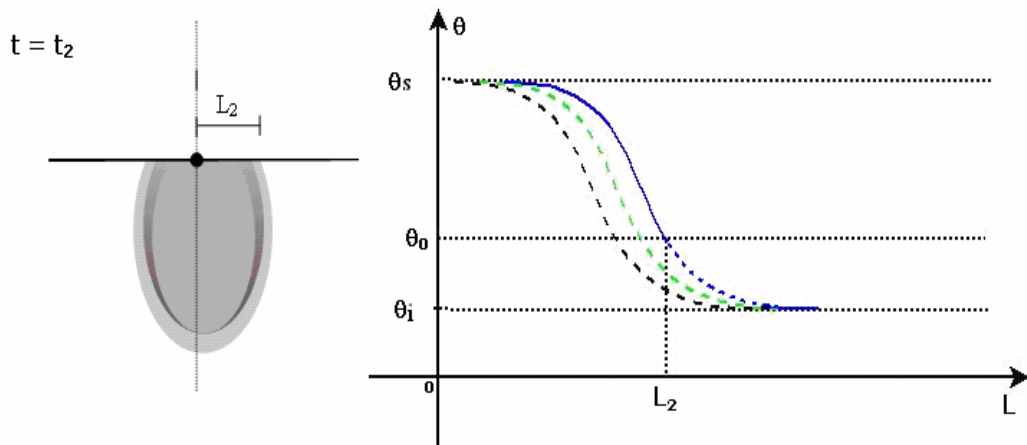


Figura 3.7 – Representação da frente de umidade do bulbo molhado no tempo  $t = t_2$   
 Fonte: Confeccionada pelo autor

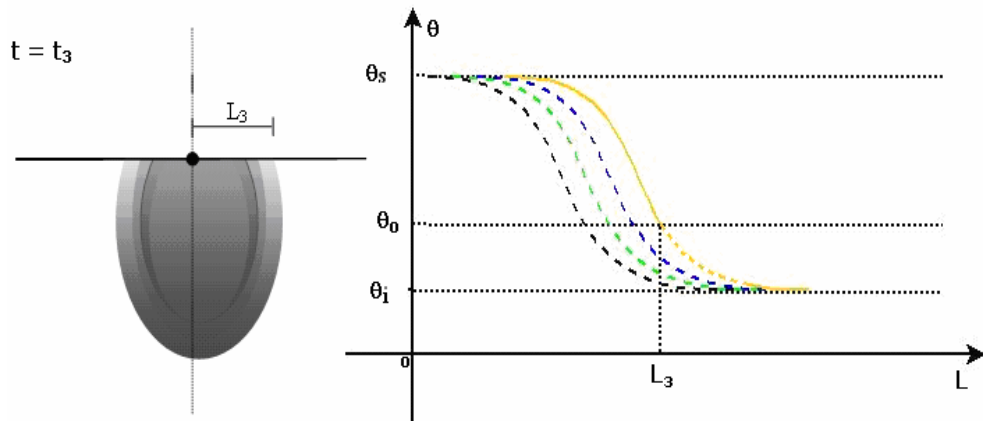


Figura 3.8 – Representação da frente de umidade do bulbo molhado no tempo  $t = t_3$   
 Fonte: Confeccionada pelo autor

### 3.2.2 Definição da função nível de umidade

Zur (1996) propôs o modelo da elipse truncada para representar a geometria do bulbo molhado, tal como é representado na Figura 3.9. Assim, assumindo essa forma geométrica para o bulbo molhado, pode-se representar a projeção do nível de umidade por uma função de três variáveis, denominada de função nível de umidade, que pode ser expressa por:

$$L(x, z, t) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(z - c(t))^2}{b^2} \quad (3.3)$$

onde  $a$  é a metade do diâmetro máximo ( $D_{\max}/2$ );  $b$  representa a diferença entre a profundidade máxima e a profundidade onde ocorre o  $D_{\max}$ , isto é,  $Z_{\max} - Z_{D_{\max}}$  e  $t$  é o tempo. O parâmetro  $c(t)$  na equação (3.3) é uma função que expressa a variação do centro em relação ao tempo.

É importante destacar que a variação dos centros das elipses não é linear, neste caso as curvas de níveis não são rigorosamente homotéticas (uma curva não é uma homotetia da outra), ou descrevem famílias concêntricas. A função  $c(t)$ , na verdade expressa a variação do centro da elipse com o tempo e também com a faixa de umidade. Mas, por questão de simplificação, foi assumido que o centro só varia com o tempo.



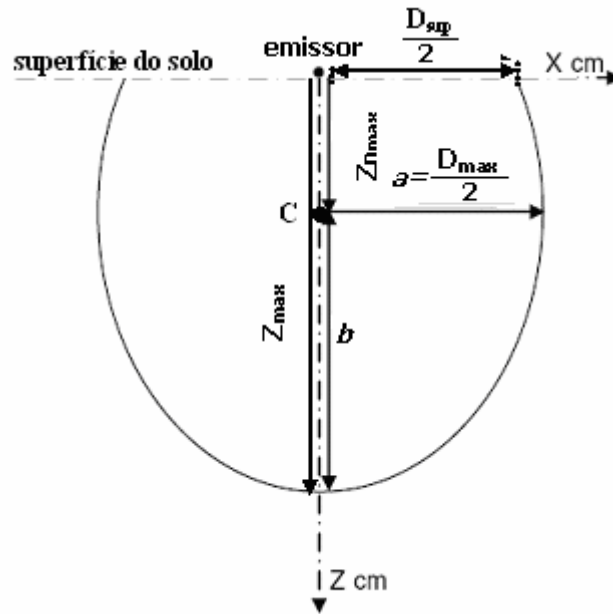


Figura 3.9 – Forma elíptica do bulbo molhado e os parâmetros  $D_{max}$ ,  $Z_{Dmax}$  e  $Z_{max}$   
 Fonte: Zur (1996), modificada pelo autor

O modelo proposto consiste em correlacionar a funções umidade dada por  $\theta(L)$  com a função nível de umidade, expressa por  $L(x, z, t)$ , através de uma composição de funções. Assim, foi obtida a função  $h = \theta \circ L$  que é a composição da função  $\theta$  com a função  $L$  e, é chamada de função composta de  $\theta$  com  $L$  que pode ser representada pela seguinte expressão:

$$h(x, z, t) = \frac{\theta_s \cdot \theta_i}{\theta_i + (\theta_s - \theta_i) \cdot e^{-k \left( \sqrt{x_f^2 + (y_f - c(t))^2} - \left[ \frac{x^2}{a^2} + \frac{(z - c(t))^2}{b^2} \right] \right)}} \quad (3.4)$$

A equação (3.4) representa um modelo semi-analítico para a formação do bulbo molhado, obtido a partir do conhecimento das isolinhas de umidade. Tal formulação algébrica é decorrente de aproximações da solução por meio de métodos gráficos, uma vez que foi assumido um campo direcional. Por esse motivo, é que a equação proposta representa uma solução semi-analítica para o problema.

### 3.3 FERRAMENTA COMPUTACIONAL

Não se realizou nenhuma programação estruturada para simular as equações das Tabelas 2.2 e 2.3; entretanto, na simulação dos campos vetoriais, na representação gráfica bi e tri-dimensional do problema e na interpretação dos resultados, foram usados apenas recursos computacionais básicos, tais como planilhas eletrônicas do MS Excel (Microsoft) e BrOffice.org calc (sistema Linux – versão Debian) e os software MatLab® e o SciLab. Para essas simulações foi construído um algoritmo que permite a simulação para frente de molhamento do bulbo molhado, usando apenas planilhas eletrônicas simples e, em outros casos, planilha eletrônica associado a uma ferramenta de otimização tal como o Solver. No entanto para obter resultados mais precisos, isto é, com menor erro na simulação, pode-se aplicar o algoritmo em uma linguagem de programada estruturada. Nas Figuras 3.10 e 3.11 são vistos simuladores, a partir uma planilha eletrônica, para o bulbo molhado e para a umidade do solo na frete de molhamento.

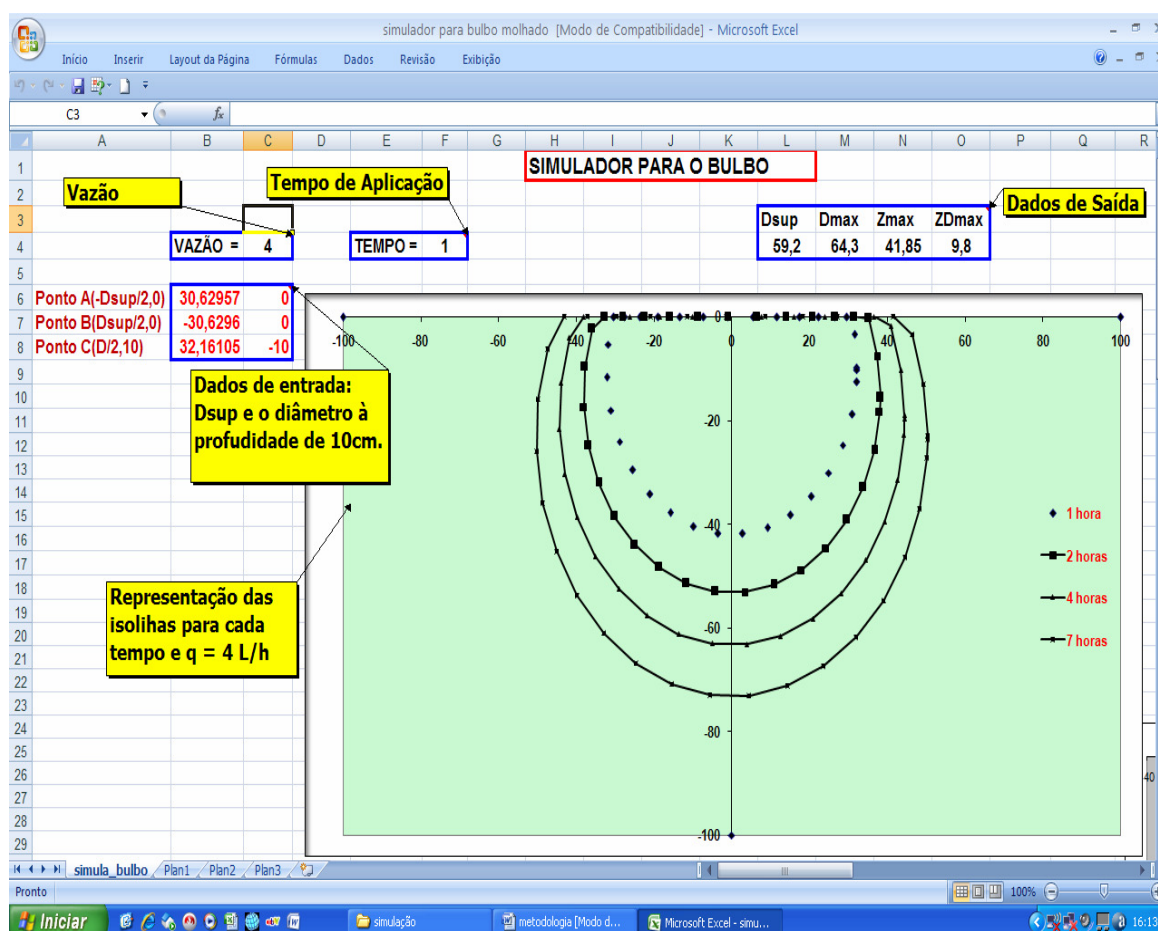


Figura 3.10 – Planilha eletrônica que simula o bulbo molhado

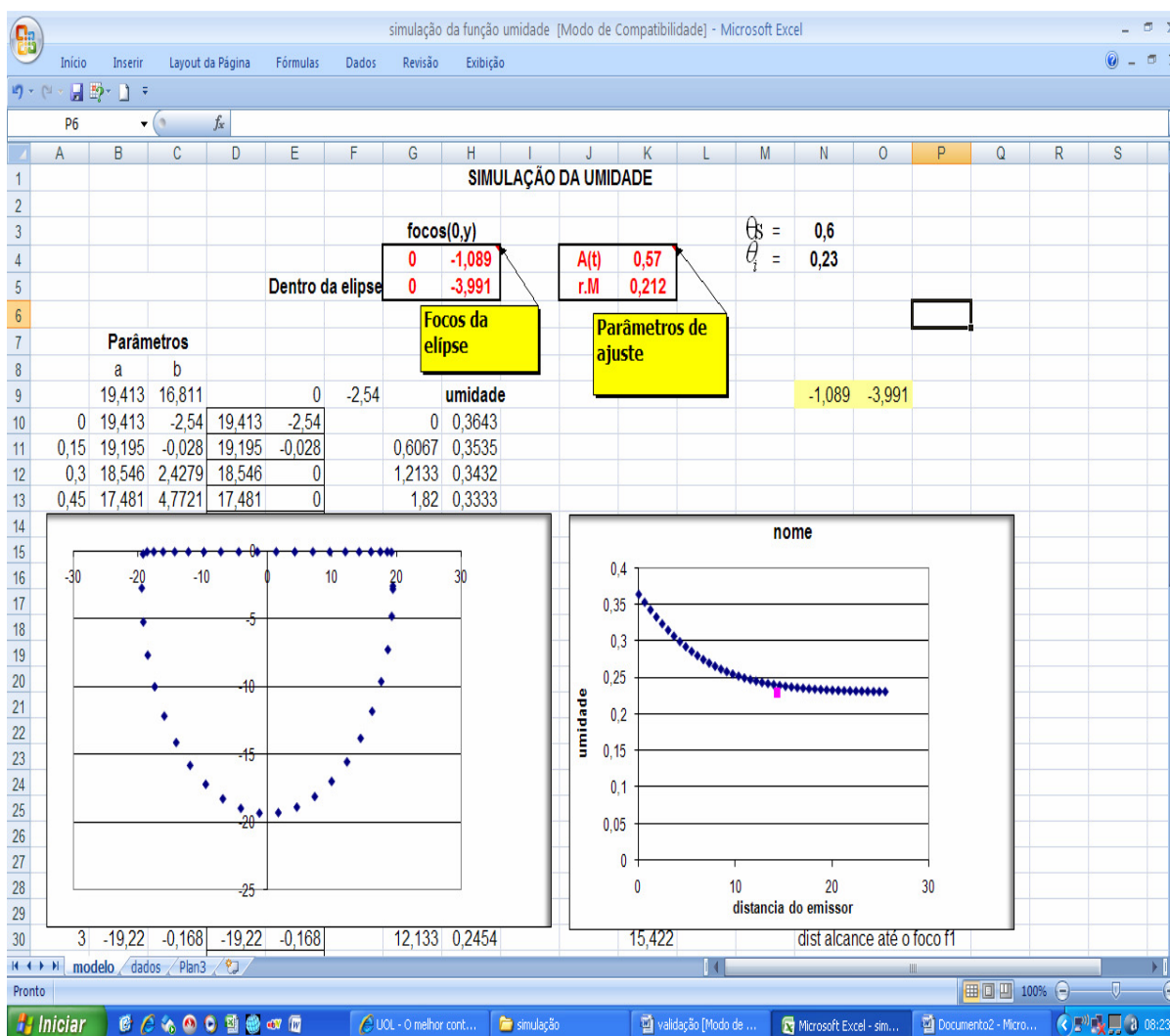


Figura 3.11 – Planilha eletrônica que simula a umidade do solo na frente de molhamento

Assim, com o conhecimento do campo de direção da umidade do solo, obtidos por meio de simulação, podem-se obter as dimensões do bulbo molhado, isto é: o diâmetro superficial ( $D_{sup}$ ); diâmetro máximo ( $D_{max}$ ); profundidade máxima ( $Z_{max}$ ) e a profundidade que está o diâmetro máximo ( $Z_{Dmax}$ ), tais parâmetros podem ser identificados na Figura 3.12. A obtenção desses parâmetros, por diversas formas, tais como: a partir de três pontos de uma dada isolinha; a partir do conhecimento do alcance superior ( $D_{sup}$ ),  $Z_{max}$  e a relação entre  $D_{sup}$  e  $D_{max}$  ou entre  $D_{max}$  e  $Z_{max}$ ; a partir dos padrões clássicos (da literatura) e a leitura do  $D_{sup}$  e a partir do conhecimento da superfície de resposta que descreva  $Z_{max}$ ,  $D_{max}$  e  $D_{sup}$ .

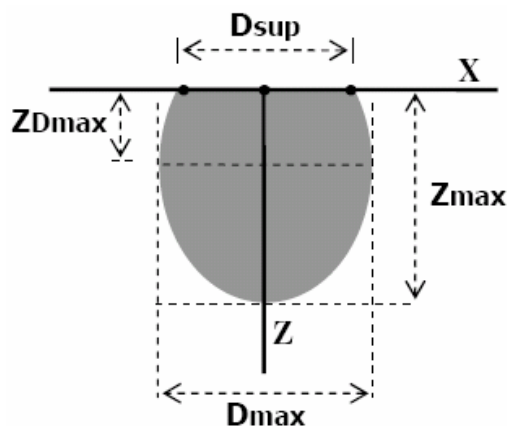


Figura 3.12 – Representação das dimensões do bulbo molhado

Fonte: Confeccionada pelo autor

### 3.4 SIMULAÇÃO DO BULBO MOLHADO

A simulação do volume de solo úmido foi realizada como meio de dimensionar o bulbo o molhado, estimando assim  $D_{max}$ ,  $Z_{max}$  e  $Z_{Dmax}$  utilizando parâmetros de fácil obtenção. Dependendo da disponibilidade dos parâmetros de entrada, podem ser considerados três modelos de estimativas: o primeiro modelo tem como dados de entradas dois diâmetros do bulbo molhado, um na superfície do solo ( $D_{sup}$ ) e outro a uma profundidade de 10 cm ( $D_{prof(10)}$ ); o segundo modelo, tem como dados de entradas o  $D_{sup}$  e um padrão para  $Z_{max}$ ; no terceiro modelo são utilizadas expressões que descrevem  $D_{max}$ ,  $Z_{max}$  e  $Z_{Dmax}$  em função da vazão e do tempo, e são denominadas de superfícies de respostas.

#### 3.4.1 Estimativa em função do diâmetro superficial e do diâmetro a uma profundidade de 10 cm – Modelo 1

Considerando que o diâmetro superficial do bulbo molhado é um parâmetro de fácil obtenção no campo, foram simuladas as dimensões do bulbo molhado a partir do diâmetro superficial medido e do diâmetro do bulbo na profundidade de 10 cm. Isto é, a partir dos valores medidos desses diâmetros, foram estimados: o diâmetro superficial ( $D_{sup}$ ); o

diâmetro máximo ( $D_{max}$ ); a profundidade máxima ( $Z_{max}$ ) é a profundidade onde ocorre o diâmetro máximo ( $Z_{D_{max}}$ ), do bulbo molhado. O diâmetro superficial e o diâmetro na profundidade de 10 cm, utilizados como dados de entrada, foram obtidos experimentalmente no campo, medindo-se o avanço da frente de molhamento do bulbo, formado por gotejamento superficial, nos tempos de 1, 2, 4 e 7 h e vazões de 1, 2, 4 e 8 L h<sup>-1</sup>. Assim, para cada tempo e cada vazão foi obtido o valor do diâmetro na superfície de solo e o diâmetro na profundidade de 10 cm. Neste caso, foram utilizados na simulação, o simulador apresentado na Figura 3.10, e como dados de entradas e os pontos A, B e C da fronteira do bulbo. Os pontos A e B estão localizados na superfície do solo, representando assim as extremidades de diâmetro superficial medido no campo. O ponto C, localizado no interior do solo, representa uma das extremidades do diâmetro na profundidade de 10 cm ( $D_{prof(10)}$ ), conforme é visto na Figura 3.13. Portanto, utilizando parâmetros de fácil obtenção no campo, foram simuladas as isolinhas de umidades em função do tempo de irrigação e vazão do gotejador, possibilitando assim a estimar o  $D_{sup}$ ,  $D_{max}$ ,  $Z_{D_{max}}$  e  $Z_{max}$  do bulbo molhado na irrigação por gotejamento superficial.

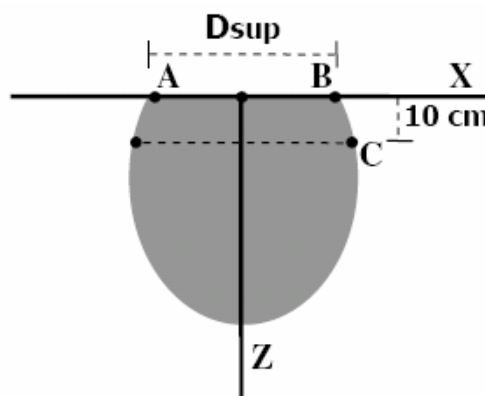


Figura 3.13 – Representação dos pontos A, B e C da fronteira do bulbo molhado, usados na simulação das isolinhas através de planilhas eletrônicas

Fonte: Confeccionada pelo autor

### 3.4.2 Estimativa em função do diâmetro superficial medido e os padrões para $Z_{max}$ – Modelo 2

Nesta simulação, foi utilizado o  $D_{sup}$  como dado inicial ou de entrada e o padrão para  $Z_{max}$ , profundidade máxima, conforme pode ser visto na Figura 3.14. O padrão para a profundidade máxima, depende da classificação textural do solo, da vazão e do tempo de irrigação. Assim, utilizando-se planilhas eletrônicas e uma ferramenta de otimização, obteve-se as estimativas dos parâmetros: diâmetro máximo,  $D_{max}$  e a profundidade onde ocorre  $D_{max}$ ,  $Z_{Dmax}$ .

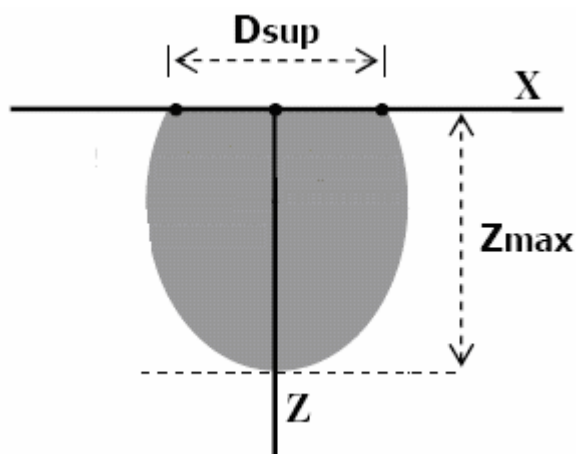


Figura 3.14 – Representação dos parâmetros usados na simulação das isolinhas através de planilhas eletrônicas associada a uma ferramenta de otimização

Fonte: Confeccionada pelo autor

As estimativas aqui obtidas são decorrentes do fato de que o  $D_{sup}$  pode ser obtido em função da vazão  $q$  e do tempo  $t$ , por se tratar de um parâmetro superficial, portanto, fácil de ser medido. Além disso, Rodrigo Lopez (1996) utilizou um banco de dados que relaciona a profundidade máxima ( $Z_{max}$ ) com o volume de água aplicado, e desenvolveu programas computacionais aplicados à irrigação localizada. A partir desses programas, Rodrigo Lopez e Ordoñez (2003), desenvolveram o programa RiegoLoc2002 para Windows e, cujo banco de dados, estabeleceu padrões de estimativas para o  $Z_{max}$  função do volume de água aplicado, de acordo com a classificação textural do solo, como pode ser visto na Tabela 3.1. Utilizando a interpolação linear bivariada, foi feita uma adaptação, que expressa o  $Z_{max}$  em função do volume aplicado, obtendo assim outra tabela que expressa o  $Z_{max}$  em função da vazão e do

tempo como é visto na Tabela 3.2. Os valores com a referência (\*), foram obtidos por meio da interpolação bivarida. Uma vez estabelecidos esses novos padrões, foi possível estimar o  $D_{max}$  e o  $Z_{max}$  a partir em função do  $D_{sup}$  medido (ou observado), sendo esses utilizados como parâmetros de entrada.

Tabela 3.1 – Padrões de estimativas de  $Z_{max}$  e  $R_{sup}$  em função do volume

| Volume<br>(L) | Solo             |             |                  |             |                  |             |
|---------------|------------------|-------------|------------------|-------------|------------------|-------------|
|               | Argiloso         |             | Franco           |             | Arenoso          |             |
|               | $Z_{max}$<br>(m) | Raio<br>(m) | $Z_{max}$<br>(m) | Raio<br>(m) | $Z_{max}$<br>(m) | Raio<br>(m) |
| 2,00          | 0,12             | 0,21        | 0,15             | 0,15        | 0,18             | 0,14        |
| 4,00          | 0,20             | 0,34        | 0,25             | 0,20        | 0,32             | 0,17        |
| 8,00          | 0,27             | 0,40        | 0,35             | 0,25        | 0,50             | 0,22        |
| 12,00         | 0,34             | 0,47        | 0,44             | 0,28        | 0,62             | 0,25        |
| 16,00         | 0,40             | 0,52        | 0,51             | 0,30        | 0,67             | 0,26        |
| 20,00         | 0,45             | 0,55        | 0,58             | 0,32        | 0,77             | 0,28        |
| 24,00         | 0,50             | 0,59        | 0,64             | 0,34        | 0,84             | 0,29        |
| 28,00         | 0,55             | 0,63        | 0,69             | 0,35        | 0,91             | 0,30        |
| 32,00         | 0,57             | 0,63        | 0,73             | 0,36        | 0,96             | 0,31        |
| 40,00         | 0,66             | 0,70        | 0,85             | 0,40        | 1,15             | 0,33        |
| 50,00         | 0,75             | 0,75        | 0,96             | 0,42        | 1,32             | 0,36        |
| 60,00         | 0,83             | 0,79        | 1,07             | 0,45        | 1,46             | 0,38        |
| 80,00         | 0,97             | 0,85        | 1,25             | 0,49        | 1,73             | 0,42        |

Fonte: Rodrigo Lopez (1996); Rodrigo Lopez e Ordoñez (2003), modificado pelo autor

Tabela 3.2 – Padrões de estimativas do  $Z_{max}$  em função da vazão e do tempo

| tempo<br>(h) | vazão<br>(L h <sup>-1</sup> ) | Solo             |                  |                  |
|--------------|-------------------------------|------------------|------------------|------------------|
|              |                               | Argiloso         | Franco           | Arenoso          |
|              |                               | $Z_{max}$<br>(m) | $Z_{max}$<br>(m) | $Z_{max}$<br>(m) |
| 1            | 1                             | 0,09*            | 0,12*            | 0,16*            |
| 1            | 2                             | 0,12             | 0,15             | 0,18             |
| 1            | 4                             | 0,20             | 0,25             | 0,32             |
| 1            | 8                             | 0,27             | 0,35             | 0,50             |
| 2            | 1                             | 0,12             | 0,15             | 0,18             |
| 2            | 2                             | 0,20             | 0,25             | 0,32             |
| 2            | 4                             | 0,27             | 0,35             | 0,50             |
| 2            | 8                             | 0,40             | 0,51             | 0,67             |
| 4            | 1                             | 0,20             | 0,25             | 0,32             |
| 4            | 2                             | 0,27             | 0,35             | 0,50             |
| 4            | 4                             | 0,40             | 0,51             | 0,67             |
| 4            | 8                             | 0,57             | 0,73             | 0,96             |
| 7            | 1                             | 0,43*            | 0,54*            | 0,71*            |
| 7            | 2                             | 0,47*            | 0,59*            | 0,77*            |
| 7            | 4                             | 0,55             | 0,69             | 0,91             |
| 7            | 8                             | 0,68*            | 0,87*            | 1,15*            |

Fonte: Rodrigo Lopez (1996); Rodrigo Lopez e Ordoñez (2003) adaptado pelo autor

### 3.4.3 Estimativa em função de superfície de resposta – Modelo 3

Outra forma de simular e dimensionar o bulbo molhado é fazendo uso das superfícies de resposta, pois as mesmas, descrevem muito bem  $Z_{max}$ ,  $D_{max}$  e  $Z_{Dmax}$  em função da vazão  $q$  e do tempo  $t$  através de funções potenciais do tipo  $aq^bt^c$  em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais. Maia (2005) usou superfície de respostas e expressou  $D_{sup}$ ,  $D_{max}$ ,  $Z_{max}$  e  $Z_{Dmax}$  em função da vazão e do tempo. Usando essas superfícies de respostas expressou-se  $D_{max}$ ,  $Z_{max}$  e  $Z_{Dmax}$  em função do  $D_{sup}$ .

### 3.5 ESTIMATIVA DO VOLUME DE SOLO MOLHADO

Considerando a geometria do bulbo molhado de acordo com Zur (1996), conforme é ilustrado na Figura 3.9, pode-se representar a frente de molhamento pela expressão:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(z+h)^2}{b^2} = 1 \quad (3.5)$$

que representa a equação de uma elipse de centro  $C(0, -h)$ , onde

$$a = \frac{D_{max}}{2} \quad (3.6)$$

$$h = Z_{Dmax} \quad (3.7)$$

$$b = Z_{max} - Z_{Dmax} \quad (3.8)$$

Explicitando  $x$  na equação (3.5), e considerando apenas os valores positivos, teremos:



$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (z + h)^2} \quad (3.9)$$

Assim, a frente de molhamento pode ser representada por uma função que depende da profundidade ( $z$ ), então da equação (3.9) podemos escrever:

$$\omega(z) = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (z + h)^2} \quad (3.10)$$

para todo valor de  $z$  no intervalo  $-(h + b) \leq z \leq 0$ .

Pela teoria do Volume de um Sólido de Revolução e usando o método do disco circular e do anel circular, podemos determinar o volume de um sólido de revolução gerado pela rotação de uma região qualquer do plano em torno de uma reta no mesmo plano, denominada de “eixo de revolução”. Sendo  $\omega$  uma função contínua no intervalo fechado  $[-(h + b), 0]$  e assumindo que  $\omega(z) \geq 0$  para todo  $z$  em  $[-(h + b), 0]$ , podemos definir o sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do  $z$ , da região  $S$  limitada pela curva  $x = \omega(z)$ , o eixo  $z$  e as retas  $z = 0$  e  $z = -(h + b)$  que pode ser visto na Figura 3.15. Logo, se  $V$  for o número de unidades cúbicas no volume desse sólido de revolução, então  $V$  é dado por:

$$V = \pi \int_{-(h+b)}^0 [\omega(z)]^2 dz \quad (3.11)$$

ou

$$V = \pi \int_{-(h+b)}^0 \left[ \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (z + h)^2} \right]^2 dz \quad (3.12)$$

que resolvendo a integral definida que aparece na equação (3.12) e substituindo os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $h$ , obtém-se:

$$V = \pi \frac{D_{\max}^2 Z_{\max}}{12(Z_{\max} - Z_{D\max})^2} \left[ 2(Z_{\max} - Z_{D\max})^2 + Z_{D\max} Z_{\max} - 2Z_{D\max}^2 \right] \quad (3.13)$$

que expressa o volume de solo molhado.

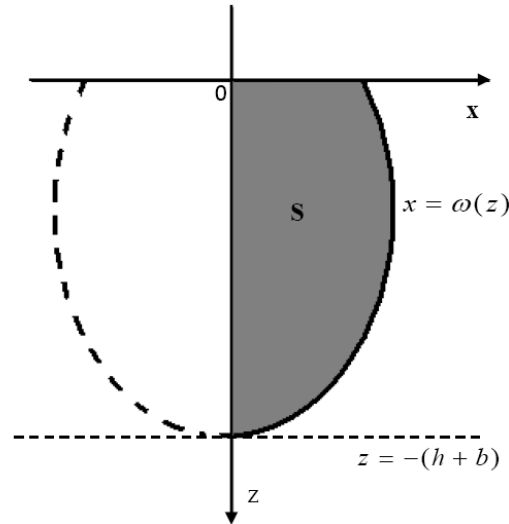


Figura 3.15 – Região do plano limitada pela curva  $x = \omega(z)$ , o eixo  $z$  e as retas  $z = 0$  e  $z = -(h + b)$

Fonte: Confeccionada pelo autor

### 3.6 ESTIMATIVA DO DIÂMETRO SUPERFICIAL

Na equação (3.9), fazendo  $z = 0$  obtém-se para cada tempo,  $x = \frac{D_{\text{sup}}}{2}$  e, portanto, podemos expressar o diâmetro superficial,  $D_{\text{sup}}$  em função do  $D_{\max}$ ,  $Z_{\max}$  e  $Z_{D\max}$  pela seguinte equação:

$$D_{\text{sup}} = D_{\max} \sqrt{1 - \left( \frac{Z_{D\max}}{Z_{\max} - Z_{D\max}} \right)^2} \quad (3.14)$$

que será utilizada para estimar os demais parâmetros  $D_{\max}$ ,  $Z_{\max}$  e  $Z_{D\max}$ .

### 3.7 CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA DO SOLO EM FUNÇÃO DE $D_{max}$ E $Z_{max}$

A condutividade hidráulica do solo é outro dado importante na solução semi-analítica expressa pela equação (3.4), e se pode utilizar diferentes metodologias, sejam elas baseadas em métodos de campos ou baseadas em modelos empíricos. No entanto, devido os parâmetros envolvidos, foi utilizada neste trabalho a condutividade do solo baseada no modelo proposto por Schwartzman e Zur (1986), que através da equação:

$$d = 1,32 \cdot z^{0,35} \cdot q^{0,33} \cdot K_s^{-0,33} \quad (3.15)$$

onde:  $d = D_{max}$  (m) é o diâmetro máximo,  $z = Z_{max}$  (m) é a profundidade máxima,  $q$  ( $m^3 s^{-1}$ ) é a vazão do emissor e  $K_s$  ( $m s^{-1}$ ) é a condutividade hidráulica do solo saturado. Assim a condutividade pode ser expressa por:

$$K_s = q \cdot \left( \frac{1,32 \cdot Z_{max}^{0,35}}{D_{max}} \right)^{\frac{1}{0,33}} \quad (3.16)$$

## 4 VALIDAÇÃO DO MODELO

O desempenho do modelo para simular o bulbo molhado proposto neste trabalho, foi verificado com os dados de um solo de textura média, classificado de acordo com Embrapa (1999) como Latossolo Vermelho. O solo foi submetido às vazões 1, 2, 4 e 8 L h<sup>-1</sup> para o tempo de 1, 2, 4, e 7 h. Segundo Maia (2005), foi feito um monitoramento das dimensões do bulbo com o uso de fita métrica, para cada vazão após os tempos pré-determinados, onde foram avaliadas as seguintes características: diâmetro superficial ( $D_{sup}$ ), diâmetro máximo ( $D_{max}$ ), profundidade máxima ( $Z_{max}$ ) e profundidade onde ocorre o  $D_{max}$  ( $Z_{D_{max}}$ ). Foram também medidos os diâmetros a cada 5 ou 10 cm de profundidade. Todos os dados utilizados na validação do modelo foram obtidos do trabalho proposto por Medeiros, Levien e Maia (2004).

### 4.1 ESTIMATIVA EM FUNÇÃO DO DIÂMETRO SUPERFICIAL E DO DIÂMETRO A UMA PROFUNDIDADE DE 10 cm – MODELO 1

A simulação realizada considerou apenas as extremidades do  $D_{sup}$  e uma das extremidades do diâmetro a uma profundidade de 10 cm, produzindo as isolinhas de umidade para cada vazão em cada tempo, como é visto nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4.

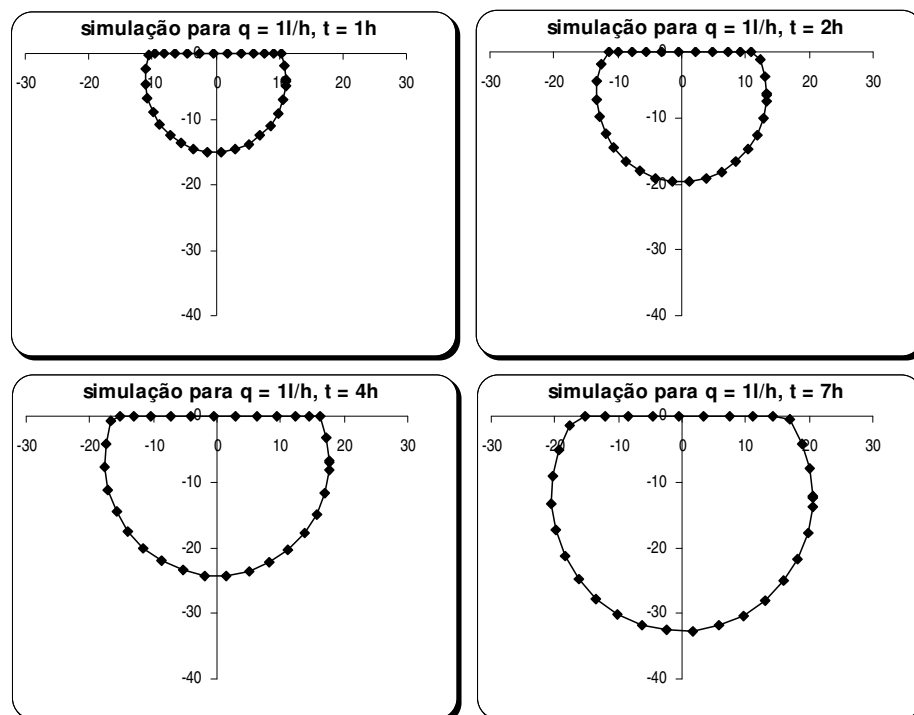


Figura 4.1 – Representação das isolinhas de unidade para uma vazão  $1 \text{ L h}^{-1}$ , simuladas através de planilhas eletrônicas

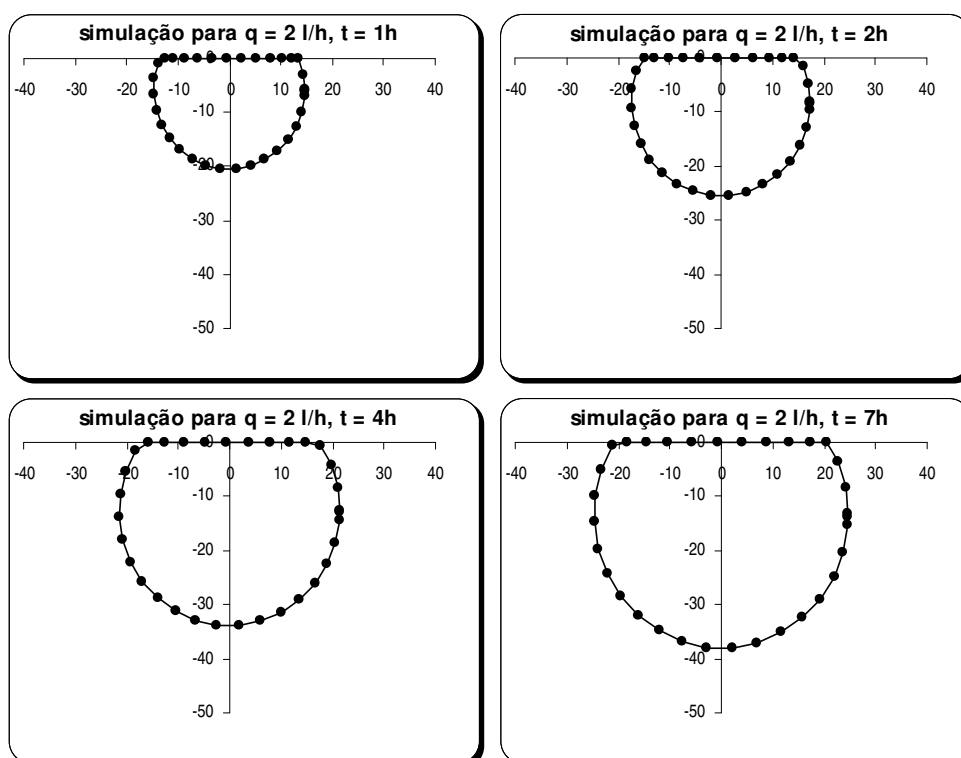


Figura 4.2 – Representação das isolinhas de unidade para uma vazão  $2 \text{ L h}^{-1}$ , simuladas através de planilhas eletrônicas

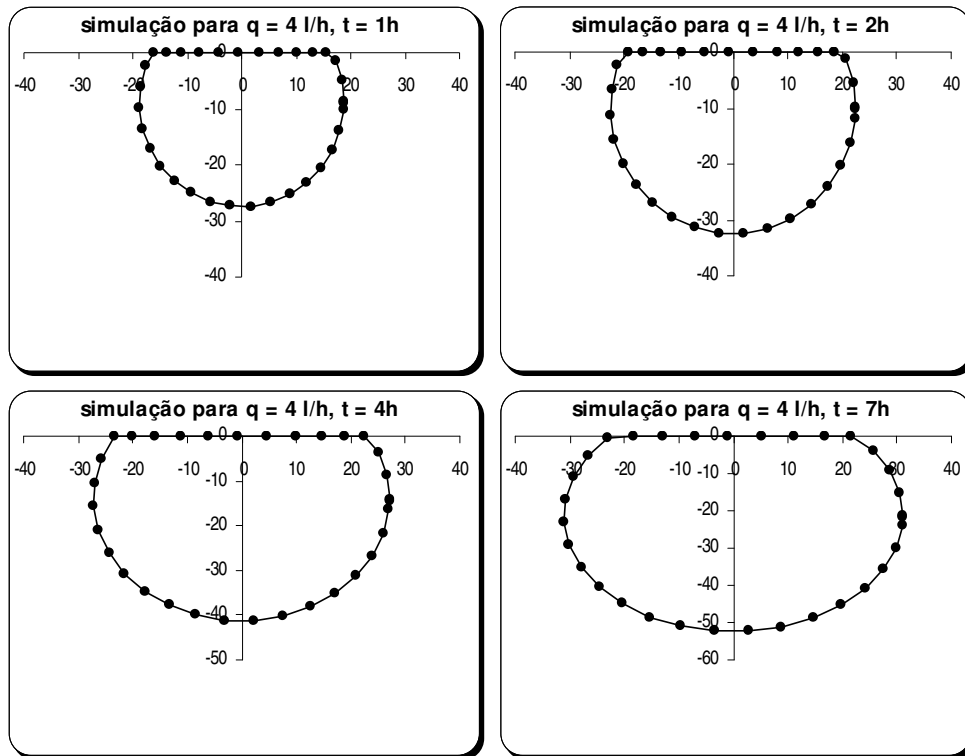


Figura 4.3 – Representação das isolinhas de unidade para uma vazão  $4 \text{ L h}^{-1}$ , simuladas através de planilhas eletrônicas

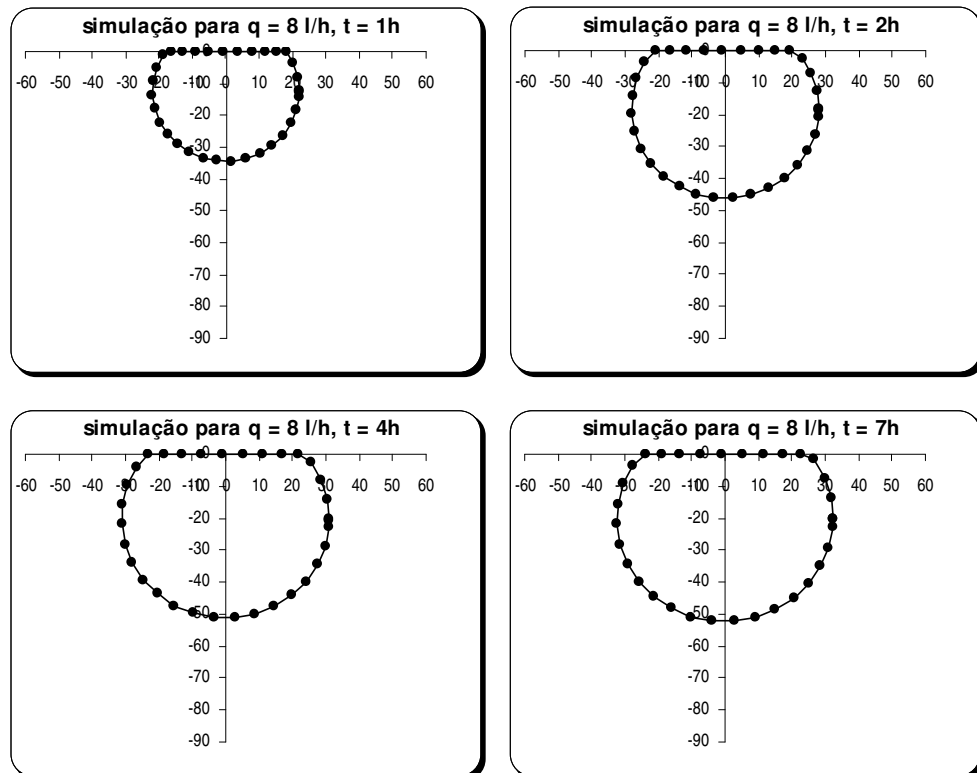


Figura 4.4 – Representação das isolinhas de unidades para uma vazão  $8 \text{ L h}^{-1}$ , simuladas através de planilhas eletrônicas

Nas Figuras 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 estão representadas as isolinhas da frente de molhamento ao longo do tempo para cada vazão.

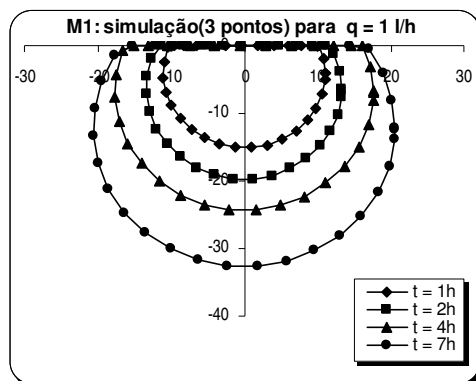


Figura 4.5 – Evolução de bulbo ao longo do tempo para vazão  $1 \text{ L h}^{-1}$ , simulada através de planilhas eletrônicas

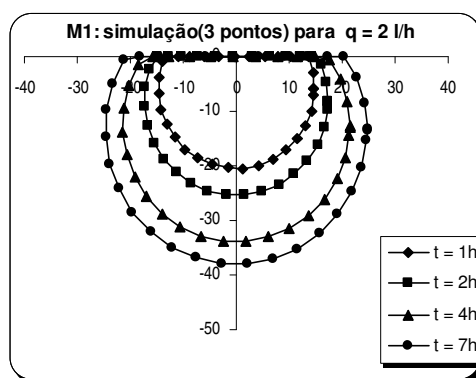


Figura 4.6 – Evolução de bulbo ao longo do tempo para vazão  $2 \text{ L h}^{-1}$ , simulada através de planilhas eletrônicas

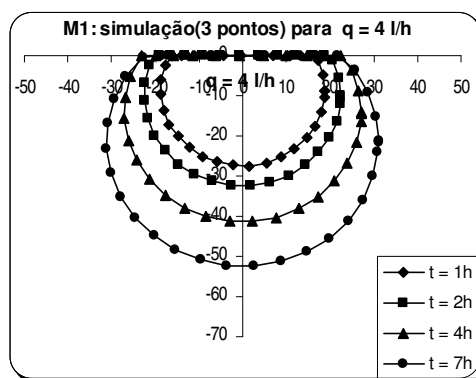


Figura 4.7 – Evolução de bulbo ao longo do tempo para vazão  $4 \text{ L h}^{-1}$ , simulada através de planilhas eletrônicas

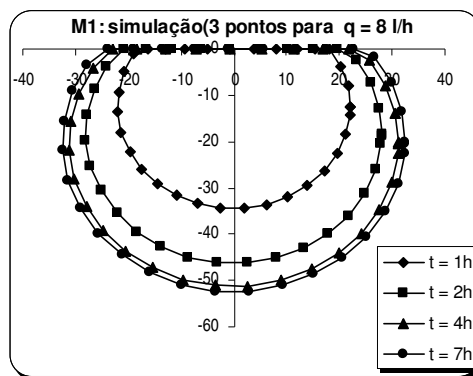


Figura 4.8 – Evolução de bulbo ao longo do tempo para vazão  $8 \text{ L h}^{-1}$ , simulada através de planilhas eletrônicas

#### 4.2 ESTIMATIVA USANDO $D_{\text{sup}}$ MEDIDO E OS PADRÕES PARA $Z_{\text{max}}$ – MODELO 2

Assumindo como parâmetro de entrada o diâmetro superficial observado,  $D_{\text{sup}}$  e usando os padrões existentes, conforme a textura do solo, apresentada na Tabela 3.2, e com a equação (3.11) foi estimado o  $D_{\text{max}}$  e o  $Z_{D_{\text{max}}}$ , cujos valores obtidos foram bem correlacionados com os valores observados. As estimativas aqui obtidas, foram em decorrência do uso de uma ferramenta de otimização aplicado na equação (3.11), tendo como dados iniciais o  $D_{\text{sup}}$  e o  $Z_{\text{max}}$  do padrão. Nas Figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 representam as isolinhas para cada vazão em relação ao tempo e na Figuras 4.13 estão representadas as isolinhas após cada tempo para cada vazão, simuladas por planilhas eletrônicas e o Solver.

Pode também simular as dimensões do bulbo, a partir da equação (3.11), sem usar os padrões apresentados na Tabela 3.2. Neste caso, será necessário conhecer o raio do bulbo em três níveis quaisquer, por exemplo,  $D_{\text{sup}}$  e os raios para as profundidades de 5 e 10 cm de profundidade, e substituindo-os na equação (3.11) obtém-se assim, a determinação de estimativas para  $Z_{D_{\text{max}}}$ ,  $Z_{\text{max}}$  e  $D_{\text{max}}$  através da resolução de um sistemas de três equações e três incógnitas, o que pode ser resolvido facilmente usando uma ferramenta de otimização.



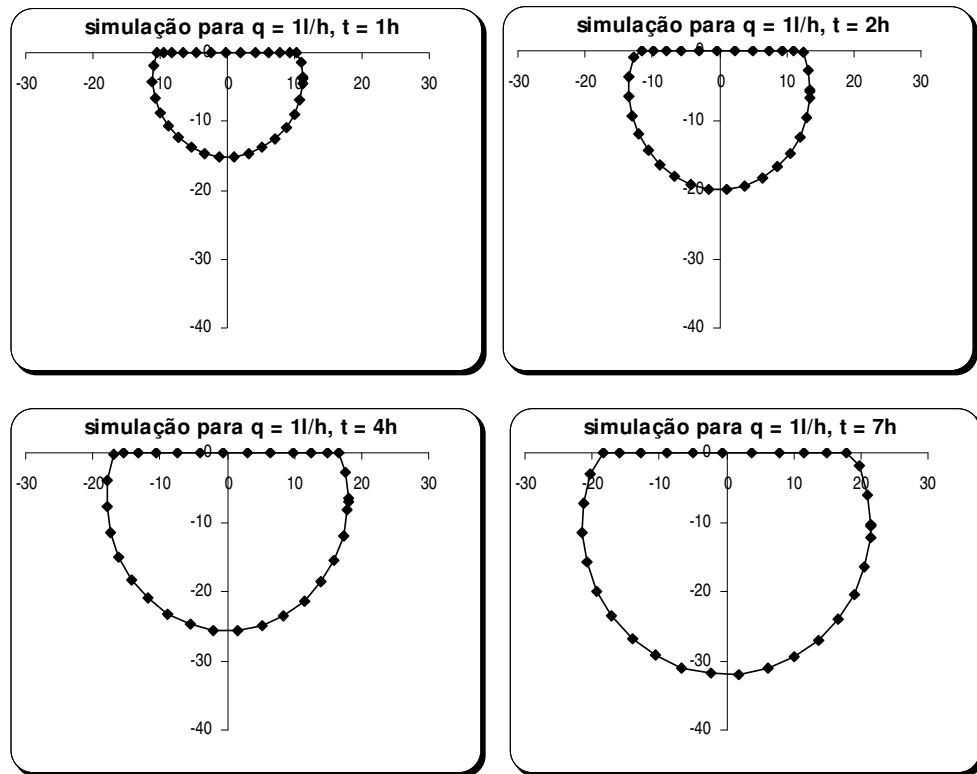


Figura 4.9 – Representação das isolinhas de umidade para uma vazão  $1 \text{ L h}^{-1}$ , simuladas através de planilhas eletrônicas com o uso do Solver

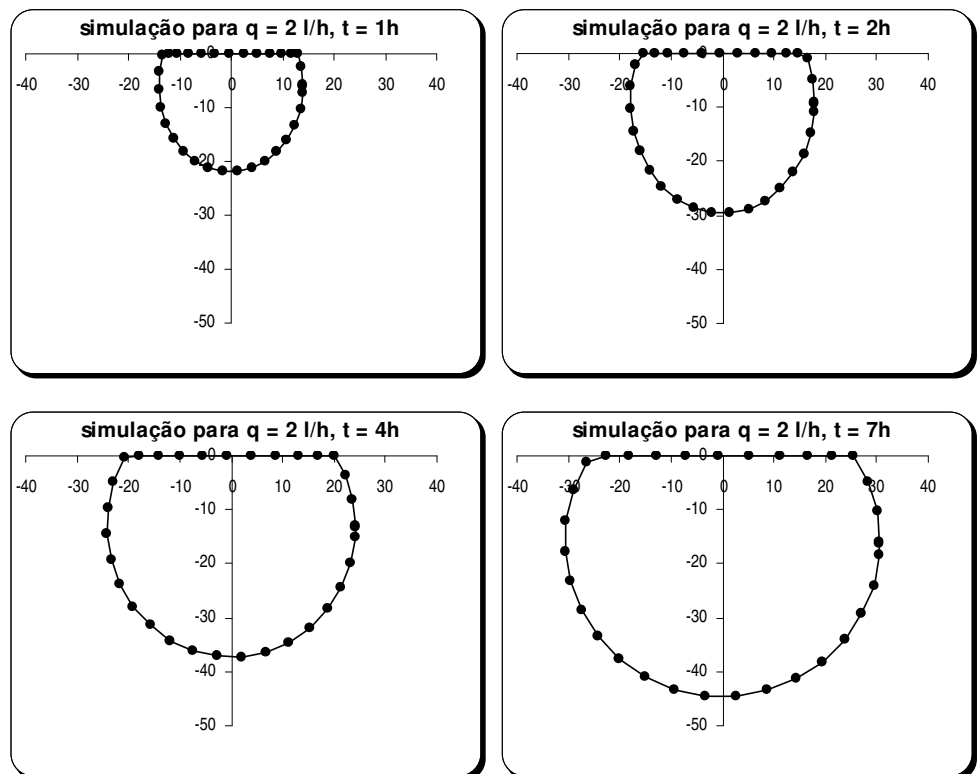


Figura 4.10 – Representação das isolinhas de umidade para uma vazão  $2 \text{ L h}^{-1}$ , simuladas através de planilhas eletrônicas com o uso do Solver

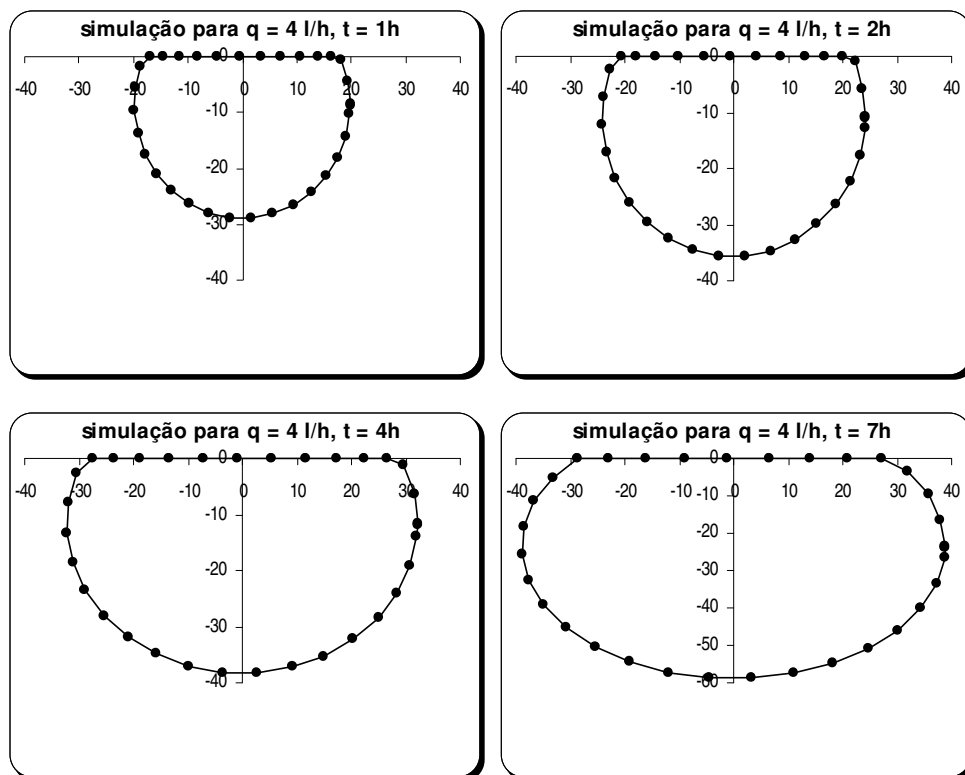


Figura 4.11 – Representação das isolinhas de umidade para uma vazão  $4 \text{ L h}^{-1}$ , simuladas através de planilhas eletrônicas com o uso do Solver

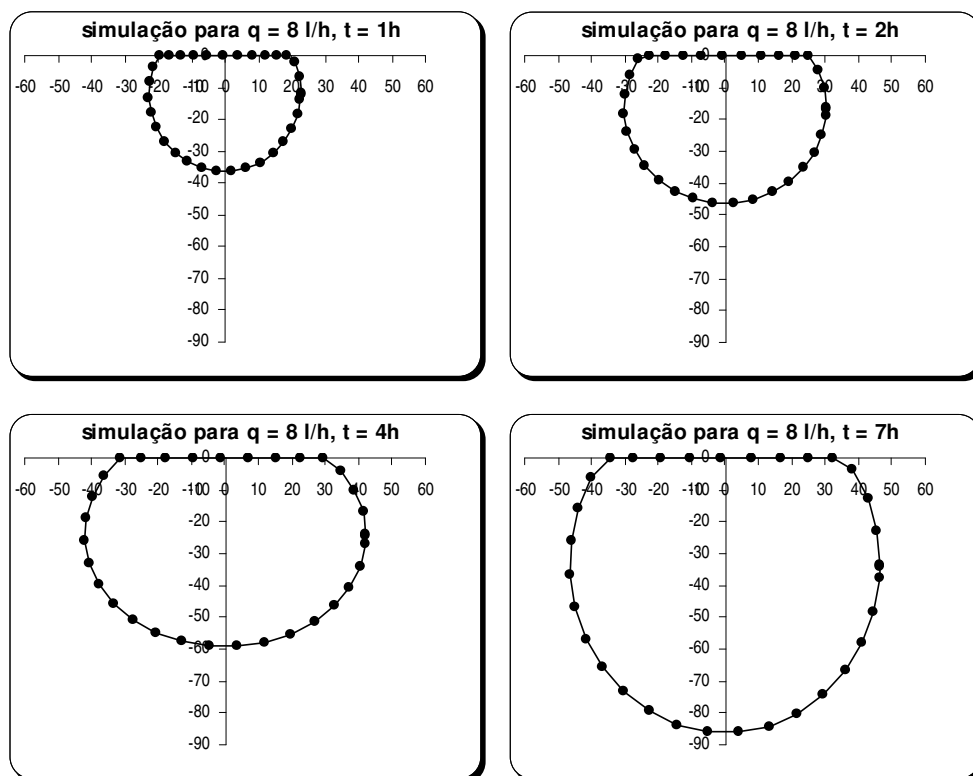


Figura 4.12 – Representação das isolinhas de umidade para uma vazão  $8 \text{ L h}^{-1}$ , simuladas através de planilhas eletrônicas com o uso do Solver

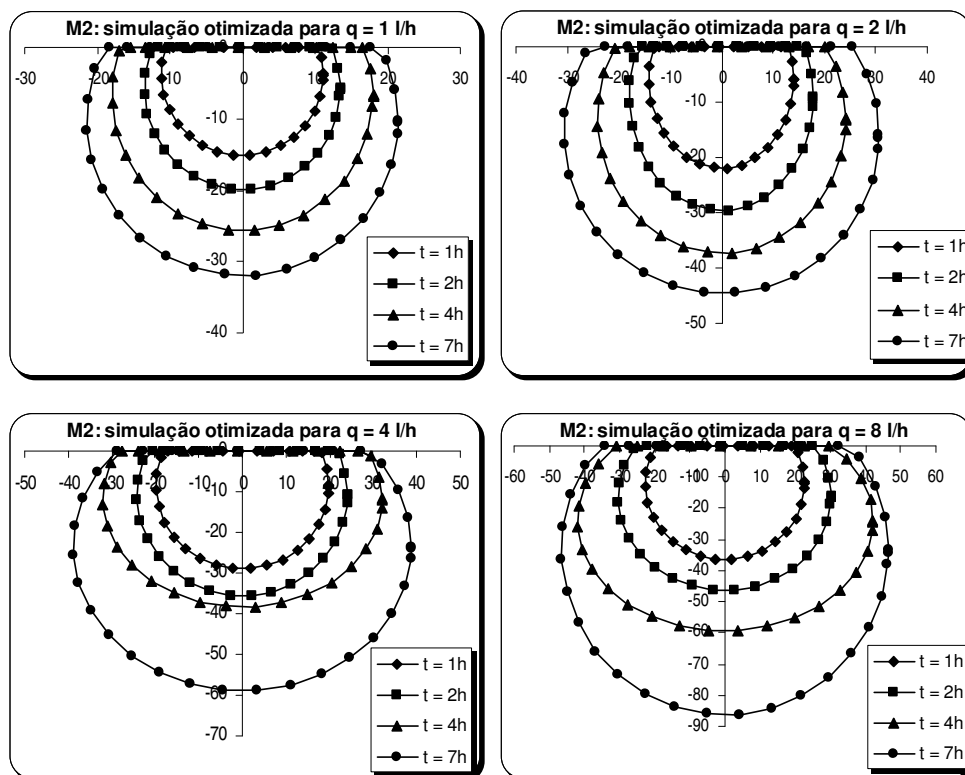


Figura 4.13 – Evolução do bulbo para cada vazão nos tempos de 1, 2, 4 e 7 h, simulada através de planilhas eletrônicas

### 4.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No dimensionamento do bulbo molhado foram estimados os parâmetros diâmetro superficial ( $D_{sup}$ ), diâmetro máximo ( $D_{max}$ ), profundidade máxima ( $Z_{max}$ ) e profundidade onde ocorre o diâmetro máximo ( $Z_{Dmax}$ ). A estimativa desses parâmetros depende de alguns dados do volume de solo molhado, que pode ser obtido experimentalmente pelo monitoramento da frente de molhamento do bulbo ou de alguma outra forma.

As estimativas aqui obtidas foram simuladas a partir de dados medidos no campo, e, portanto dados observados. As avaliações das estimativas desses parâmetros foram baseadas em metodologia com o uso do coeficiente de correlação linear com intercepto igual a zero, entre os dados medidos (observados) e estimados.

### 4.3.1 Modelo 1: estimativa a partir de três pontos superficiais

Na estimativa de  $D_{sup}$ ,  $D_{max}$ ,  $Z_{max}$  e  $Z_{Dmax}$  no solo em que se aplicou este modelo, classificado como latossolo vermelho, apresentou bons resultados. Foi feita a correlação entre o valor medido e o valor estimado e observou-se que o modelo subestimou os parâmetros obtidos. O valor  $D_{sup}$  cerca de 5% a menos do valor medido,  $D_{max}$  17%;  $Z_{max}$  16% e  $Z_{Dmax}$  com a menor estimativa ficou em torno de 38% a menos do valor medido, como pode ser observado na Figura 4.14.

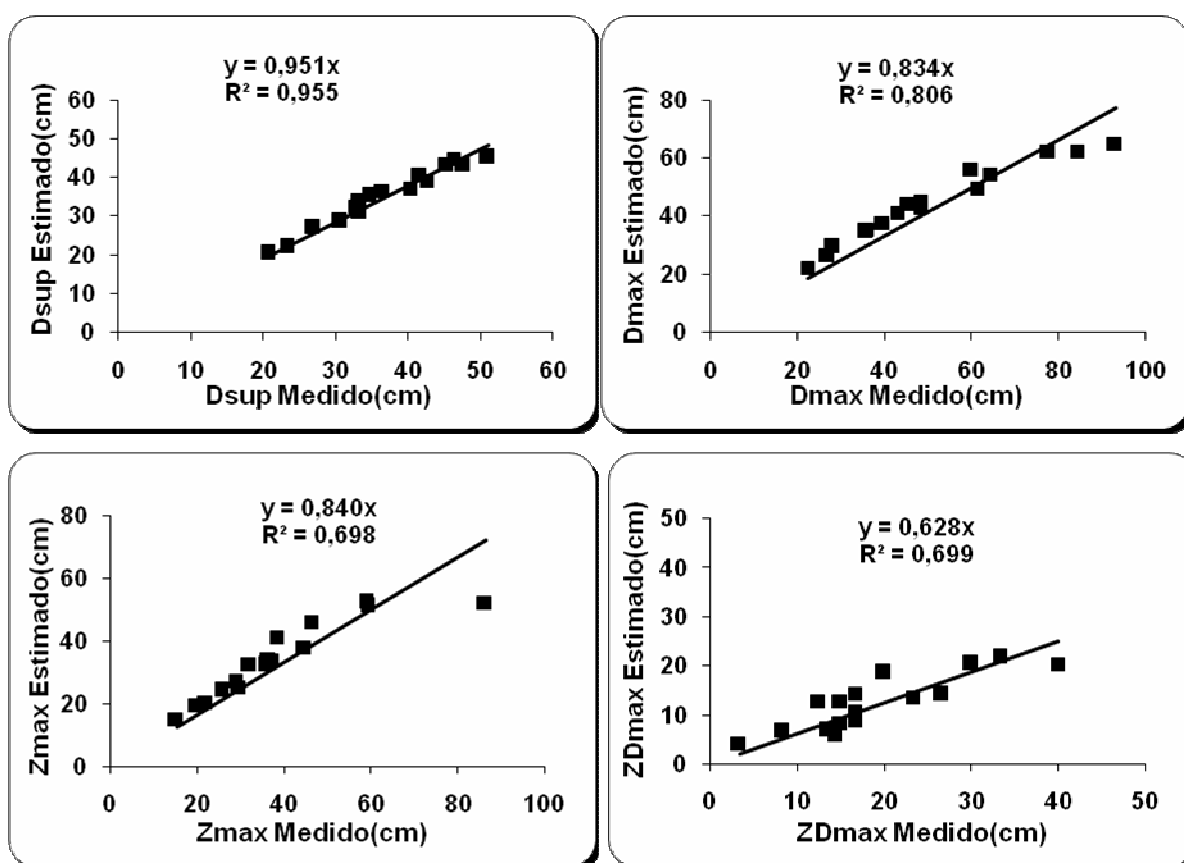


Figura 4.14 – Relação entre os valores medidos e os valores estimados de  $D_{sup}$ ,  $D_{max}$ ,  $Z_{max}$  e  $Z_{Dmax}$ , obtida pelo Modelo 1

### 4.3.2 Modelo 2: estimativa em função do diâmetro superficial medido e os padrões para $Z_{\max}$

As estimativas nessa simulação mostraram-se bem representativas em relação aos dados obtidos no campo de acordo o coeficiente de correlação linear ( $R^2$ ), que está baseado na metodologia de comparação do intercepto zero. O  $D_{\max}$  estimado ficou em torno de 16% menor que o valor do  $D_{\max}$  obtido no campo, com um coeficiente de correlação de 0,806. O valor  $Z_{D\max}$  estimado ficou em torno de 4,3% a mais que o valor do  $Z_{D\max}$  obtido no campo, sendo o coeficiente de correlação igual a 0,885. Essas estimativas foram baseadas nos padrões para o  $Z_{\max}$  em função da vazão do emissor e do tempo de aplicação de água, para solo franco, que comparado com os valores medidos no campo expressaram boa correlação, sendo  $Z_{\max}$  obtido no padrão 9,6% maior que o valor do  $Z_{\max}$  medido no campo, com um coeficiente de correlação de 0,867. Na Figura 4.15 estão representadas as comparações para esses parâmetros.

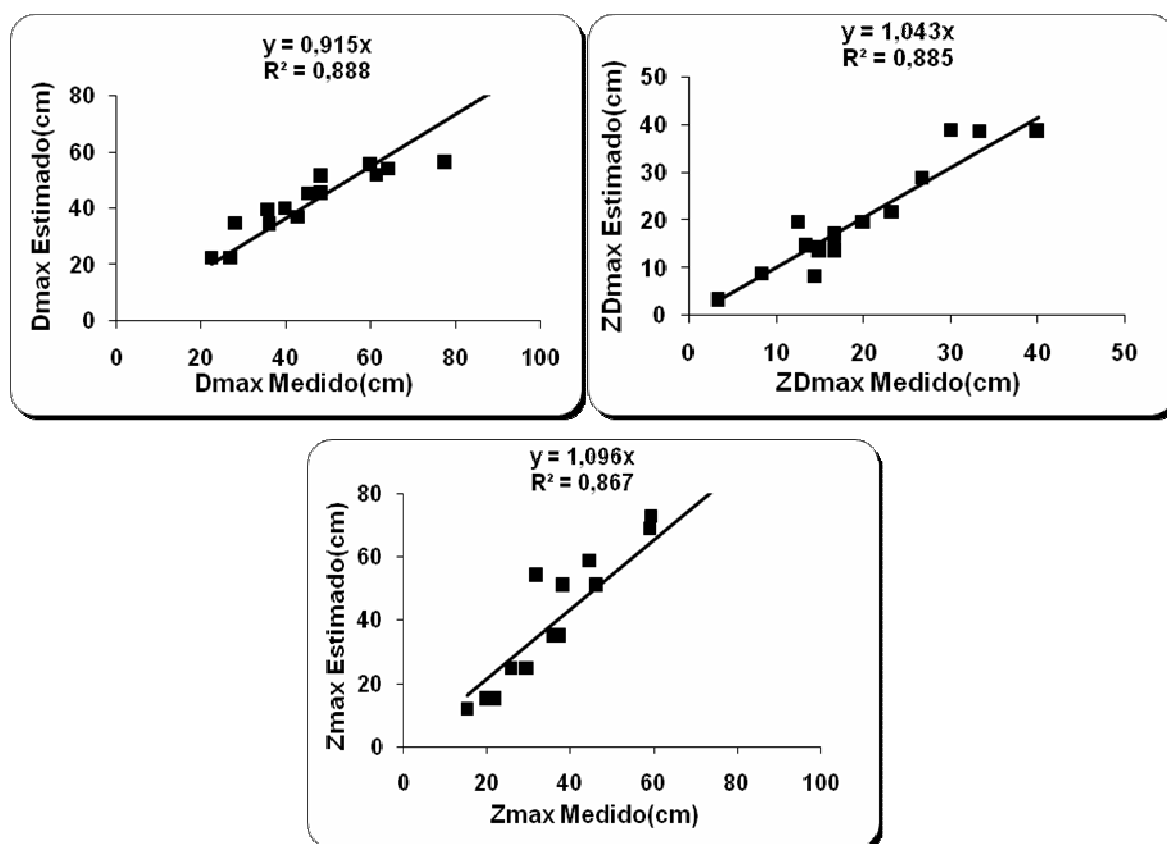


Figura 4.15 – Relação entre os valores medidos e os valores estimados de,  $D_{\max}$ ,  $Z_{D\max}$  e  $Z_{\max}$ , obtida pelo Modelo 2

### 4.3.3 Modelo 3: estimativa a partir de superfície de respostas

Usando superfície de resposta proposto por Maia (2005), estimou-se o  $D_{max}$ , o  $Z_{max}$  e o  $Z_{Dmax}$  em função de  $D_{sup}$  num solo classificado como Latossolo vermelho. A simulação mostrou-se ter estimado bem os parâmetros em relação aos dados obtidos com a superfície de resposta, sendo o  $D_{max}$  estimado praticamente o mesmo valor obtido com a superfície de resposta, com o valor de 0,994 para o coeficiente de determinação ( $R^2$ ), o  $Z_{max}$  estimado ficou com 2% a mais do valor obtido com a superfície de resposta, sendo 0,963 o valor do coeficiente de determinação ( $R^2$ ). Na estimativa do  $Z_{Dmax}$ , parâmetro de correlação mais distante, a estimativa ficou em 15% a menos dos valores obtidos por superfícies de resposta, com um coeficiente de determinação ( $R^2$ ) de 0,888. Na Figura 4.16, pode ser visto o resultado dessa análise.

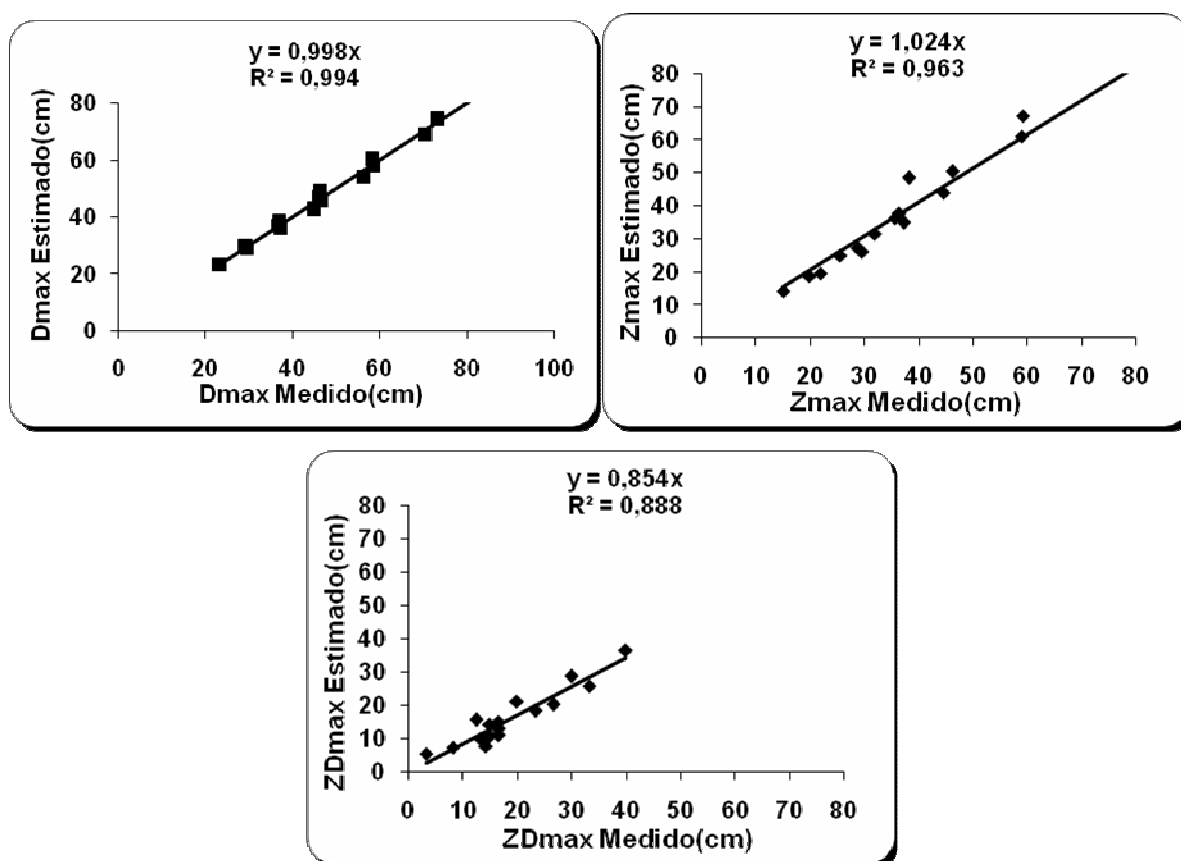


Figura 4.16 – Relação entre os valores medidos e os valores estimados de  $D_{max}$ ,  $Z_{max}$  e  $Z_{Dmax}$ , obtida pelo Modelo 3

#### 4.4 COMPARAÇÕES ENTRE OS MODELOS

Considerando os parâmetros  $D_{max}$ ,  $Z_{max}$  e  $Z_{Dmax}$  estimados fez-se a comparação dos Modelos 1, 2 e 3 a partir do coeficiente de correlação linear ( $R^2$ ), e tendo como base a metodologia do intercepto zero.

##### 4.4.1 Comparação entre os modelos 1 e 2

Comparando o  $D_{max}$  estimado pelo Modelo 1,  $D_{max(M1)}$ , com o  $D_{max}$  estimado pelo Modelo 2,  $D_{max(M2)}$ , constatou-se a relação linear entre eles da forma  $D_{max(M2)} = 1,085 \cdot D_{max(M1)}$ , com um coeficiente de correlação linear ( $R^2$ ) de 0,829.

Foi relacionado o  $Z_{max}$  estimado pelo Modelo 1,  $Z_{max(M1)}$ , e o  $Z_{max}$  estimado pelo Modelo 2,  $Z_{max(M2)}$ , obtendo assim, a relação linear  $Z_{max(M2)} = 1,275 \cdot Z_{max(M1)}$ , com um coeficiente de correlação linear ( $R^2$ ) de 0,858.

No caso do  $Z_{Dmax}$ , a relação entre o  $Z_{Dmax}$  estimado pelo Modelo 1,  $Z_{Dmax(M1)}$ , e o  $Z_{Dmax}$  estimado pelo modelo 2,  $Z_{Dmax(M2)}$ , foi expressa por  $Z_{Dmax(M2)} = 1,606 \cdot Z_{Dmax(M1)}$ , sendo o coeficiente de correlação linear igual a 0,811.

##### 4.4.2 Comparação entre os modelos 1 e 3

De forma análoga, relacionando  $D_{max}$ ,  $Z_{max}$  e  $Z_{Dmax}$  estimados pelo Modelo 1 com os  $D_{max}$ ,  $Z_{max}$  e  $Z_{Dmax}$  estimados pelo Modelo 3, foi obtido as seguintes expressões:

$$D_{max(M3)} = 1,118 \cdot D_{max(M1)}, \text{ com } R^2 = 0,927;$$

$$Z_{max(M3)} = 1,187 \cdot Z_{max(M1)}, \text{ com } R^2 = 0,858;$$

$$Z_{Dmax(M3)} = 1,321 \cdot Z_{Dmax(M1)}, \text{ com } R^2 = 0,845.$$

#### 4.4.3 Comparação entre os modelos 2 e 3

Assim com nos casos anteriores, estabeleceu-se uma relação linear dos parâmetros estimados pelos Modelos 2 e 3, sendo expressas por:

$$D_{\max(M3)} = 1,019 \cdot D_{\max(M2)}, \text{ com } R^2 = 0,906;$$

$$Z_{\max(M3)} = 0,913 \cdot Z_{\max(M2)}, \text{ com } R^2 = 0,887;$$

$$Z_{D\max(M3)} = 0,805 \cdot Z_{D\max(M2)}, \text{ com } R^2 = 0,863.$$

Nas Figuras 4.17 e 4.18 estão representadas todos os ajustes realizados na comparação dos modelos apresentados.

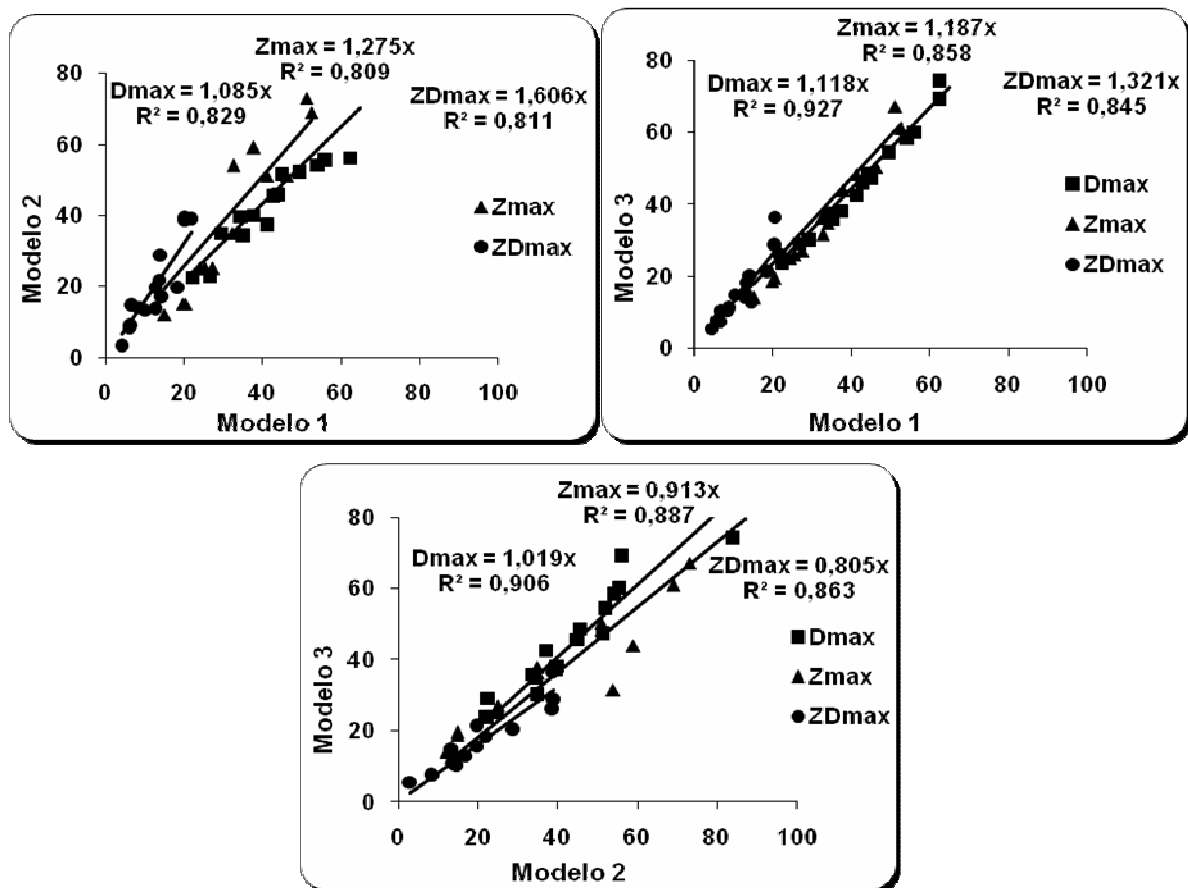


Figura 4.17 – Relação entre os modelos com os parâmetros  $D_{\max}$ ,  $Z_{\max}$  e  $Z_{D\max}$



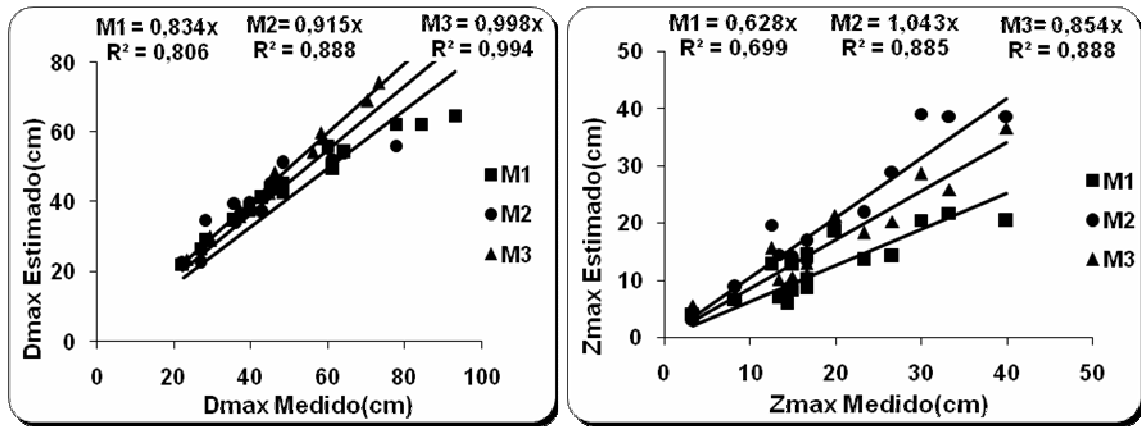


Figura 4.18 – Relação entre os valores medidos e estimados de  $D_{max}$  e  $Z_{Dmax}$ , em cada modelo

## 5 CONCLUSÕES

De acordo com os dados simulados e discutidos, pode-se tirar as seguintes conclusões:

- o modelo proposto para estimar as dimensões do bulbo apresenta resultado satisfatório quando comparado com os dados de campo;
- os modelos propostos de estimativa de  $Z_{max}$  e  $D_{max}$  em função de valores observados de  $D_{sup}$  para um solo de textura média apresentam uma pequena dispersão na predição de dados;
- $D_{max}$  e  $Z_{Dmax}$  foram melhor estimados pelo modelo 2 e pelo modelo 3;
- $Z_{Dmax}$  é o parâmetro mais sensível ao aumento da vazão;
- a equação proposta para  $D_{sup}$  pode ser utilizada como meio de estimar os outros parâmetros do bulbo molhado;
- é possível, a partir de ferramentas matemáticas elementares, simular a formação do bulbo molhado, estimando, assim, suas dimensões em função do diâmetro superficial,  $D_{sup}$ , parâmetro de fácil obtenção no campo.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim como todo e qualquer processo de modelagem, uma questão a ser levada em consideração é que todo modelo tem suas vantagens e limitações. No caso da modelagem do bulbo molhado, o modelo proposto neste trabalho, não é diferente. Algumas vantagens e limitações do modelo são as seguintes:

a) Vantagens:

- os parâmetros de entradas são parâmetros de fácil obtenção no campo, tal como o diâmetro superficial do bulbo molhado;
- a ferramenta matemática utilizada é relativamente simples, tendo em vista ter sido utilizado basicamente, a teoria das funções de várias variáveis;
- as soluções obtidas por serem soluções semi-analíticas são mais convergentes que as soluções numéricas;
- as soluções obtidas não requerem muito esforço computacional.

b) Limitações

- na fase de simplificação do processo foi assumido que na faixa de umidade entre a umidade inicial ( $\theta_i$ ) e a umidade de saturação ( $\theta_s$ ), a umidade varia continuamente;
- o modelo é válido para a situação de bulbo isolado;
- a formação do bulbo molhado ocorre por gotejamento superficial;
- o modelo evidencia o processo de infiltração, mas, não evidencia a redistribuição de água;
- na fase de simplificação, os padrões de umidade que originaram as equações diferenciais ordinárias foram obtidos por simulação numérica.

## REFERÊNCIAS

BEN-ASHER, J.; CHARACH, C.; ZEMEL, A. Infiltration and water extraction from trickle irrigation source: The effective hemisphere model. **Soil Science Society America Journal**, Madison, v.50, n.4. p.882-887, 1986.

BEN-ASHER, J.; PHENE, C.J. The effect of surface drip irrigation on soil water regime evaporation and transpiration. In: **International Conference on Irrigation**, v.6, 1993, Tel-Aviv, Israel, p.35-42. 1993.

BERGER, I.A.G. **Modelação da rega gota-a-gota**: transferências de água e de nitratos no solo. 1994. 156p. Dissertação (Mestrado em Engenharia da Rega e dos Recursos Agrícolas), Instituto Superior de Agronomia, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 1994.

BERNARDO, S.; SOARES, A.A.; MANTOVANI, E.C. **Manual de irrigação**. 8. ed. Viçosa: UFV, Imprensa Universitária, 2006. 611p.

BRANDT, A.; BRESLER, E.; DINER, N.; BEN-ASHER, I.; HELLER, J.; GOLDEBERG, D. Infiltration from a trickle source: I. Mathematical models. **Soil Science Society of América Journal**, v.35, p.675-682, 1971.

BRESLER, E. Analysis of trickle irrigation with application to design problems. **Irrigation Science**, Heidelberg, v.1, n. 1, p.3-17, 1978.

CELIA, M. A.; BOULOUTAS, E.T.; ZARBA, R.L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. **Water Resources Research**, v.26, n.7, p.1483-1496. 1990.

COELHO, E.F.; OR, D. Applicability of analytical solutions for flow from point sources to drip irrigation management. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v.61, n.4, p.1331-1341, 1996.

DASBERG, S.; BRESLER, E. **Drip irrigation manual**. Bet Dagan: International Irrigation Information Center, 1985. 95p.

EMBRAPA. Centro Nacional de Pesquisa de Solos. **Sistema brasileiro de classificação de solos**. Rio de Janeiro, 1999. 412p.

EVANS, R.G.; WU, I.; SMAJSTRALA, A.G. Microirrigation systems. In: HOFFMAN, G.J.; EVANS, R.G.; JENSEN, M.E.; MARTIN, D.L.; ELLIOTT, R.L. **Design and operation of farm irrigation systems**. 2. ed. St. Joseph: American Society of Agricultural and Biological Engineers, 2007. cap.17, p.632-683.

FOLCH, J.R.; FÁBREGA, J.A.G. El volumem húmedo del suelo em el riego localizado: Importancia y evaluación. In: CARPENA, R.M.; RITTER, A.; TASCÓN, C. (eds): **Estudios de la zona no saturada del suelo**. ICIA, p.11-17, 1999.

FOWLER, A. C. **Mathematical models in the applied sciences**, Cambridge University Press, 1998.

FREZZE, R. A. Three-dimensional, transient, saturated-unsaturated flow in a groundwater Basin. **Water Resources Research**, v.7, n.2, p.347-366, 1971.

GARDNER, W.R. Some steady state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from water table. **Soil Science**, v.85, n.4, p.228-232, 1958.

GOLDBERG, D.; GORNAT, B.; RIMOM, D. **Drip irrigation: principles, design and agricultural practices**. Israel: DIS publications, 1986.

HARTMANN, R. Lecture notes: soil physics. **Faculty of Agriculture & Applied Biological Sciences**, Ghent - Belgium, 2001.

HAVERKAMP, R.; VAUCLIN, M.; TOUMA, J.; WIERENGA, P.; VAUCHAUD, G. Comparison of numerical-simulation models for one-dimensional infiltration. **Soil Science Society of America Journal**, v.41, n.2, p.285-294, 1977.

HAVERKAMP, R.; VAUCLIN, M. A note on estimating finite difference interblock hydraulic conductivity values for transient unsaturated flow problems. **Water Resources Research**, v. 15, p. 181-187, 1979.

HAYHOE, H. N. Study of the relative efficiency of finite difference and Galerkin techniques for modeling soil-water transfer. **Water Resources Research**, v.14, p.97-102, 1978.

KOOREVAAR, P.; MENELIK, G.; DIRKSEN, C. **Elements of Soil Physics**. Amsterdam: Development of Soil Science, 1983. 228p.

LEONG, E.C.; RAHARDJO, H. Review of soil-water characteristic curve equations. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, v.123, n.12, p.1106-1117, 1997.

LEVIN, I.; van ROOYEN, F.C. The effect of discharge rate and intermittent water application by point-source irrigation on the soil moisture distribution pattern. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v.43, p.8-16, 1979.

LIBARDI, P.L. **Dinâmica da água no solo**. São Paulo: EDUSP, 2005. 335p.

LUBANA, P.P.S.; NARDA, N.K. Modelling soil water dynamics under trickle emitters - a review. **Journal of Agricultural Engineering Research**, v.78, n.3, p.217-232, 2001.

MAIA, C. E. **Modelos matemáticos para estimativa da geometria do volume de bulbo molhado por irrigação por gotejamento superficial no agropolo Assú-Mossoró**. 2005. 127p. Tese (Doutorado em Recursos Naturais) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, 2005.

MEDEIROS, J.F.; LEVIEN, S.L.A.; MAIA, C.E. **Caracterização de bulbo úmido em solos utilizados na irrigação localizada na região de fruticultura irrigada no Agropolo Assu-Mossoró**. 2004. Escola Superior de Agricultura de Mossoró. Relatório Técnico, CNPq. 89p.

MILLY, P. C. D. A mass conservative procedure for time-stepping in models of unsaturated flow. **Water Resources Research**, v.8, p.32-36, 1985.

MITCHELL, D.; GOODWIN, I. **Wetting patterns**. Australian nutgrower. p.6–8, 1998.

NARASIMHAM, T. N.; WITHERSPOON, P. A. An integral finite difference method for analyzing fluid flow in porous media. **Water Resources Research**, v.12, p.57-64, 1976.

PHILIP, J. R. **Theory of infiltration**. Adv. Hydrosc, v.5, p.215-296, 1969.

PIZARRO CABELLO, F. **Riegos localizados de alta frecuencia (RLAF): goteo, microaspersión, exudación**. 2. ed. Madrid: Ediciones Mundi-Prensa, 1990. 471p.

PRADO, H. **Manejo dos solos: descrições pedológicas e suas implicações**. Nobel: São Paulo, 1991, 116p.

PREVEDELLO, C.L. **Física do solo**. Curitiba: Salesward-discovery, 1996. 446p.

PULLAN, A. J. The quasi linear approximation for unsaturated porous media flow. **Water Resources Research**, v.26, n.6, p.32-36, 1985.

REICHARDT, K. **A água em sistemas agrícolas**. São Paulo: Manole. cap.3, p.27-65, 1990.

REICHARDT, K.; TIMM, L.C. **Solo, planta e atmosfera: conceitos, processos e aplicações**. Barueri: Manole, 2004. 478p.

REZENDE, L.R.; CAMAPUM DE CARVALHO, J.; CARDOSO, F.B.F.; CAMPELLO, C.S. Estudos laboratoriais de dois solos finos estabilizados com cal, In: **I Simpósio sobre Solos Tropicais e Processos Erosivos no Centro-Oeste**, Brasília, p.207-217, 2002.

RODRIGO LOPEZ, J.; HERNÁNDEZ ABREU, J.M.; PÉREZ REGALADO, A.; GONZÁLEZ HERNÁNDEZ, J. F. **Riego localizado**. Madrid: Ediciones Mundi-Prensa, 1992. 405 p.

RODRIGO LOPEZ, J. **Riego localizado II: programas informaticos**. 2 ed. Madrid: Ediciones Mundi-Prensa, 1996.

RODRIGO LOPEZ, J.; ORDOÑEZ, L. C. **Riego localizado: programas informaticos para windows**. Madrid: Ediciones Mundi-Prensa, 2003.

ROSS, P. J.; BRISTOW, K. L. Simulating water movement in layered and gradational soil using the Kirchoff transform. **Soil Science Society of America Journal**, v.54, p.1519-1524, 1990.

SCHWARTZMAN, M.; ZUR, B. Emitter spacing and geometry of wetted soil volume. **Journal of Irrigation and Drainage Engineering**, New York, v.112, p.242-253, 1986.

SMILES, D.E.; BARNES, C.J.; GARDNER, W.R. Water relation on saturated bentonit: some effects of temperature and solution salt concentration. **Soil Science Society America Journal**, v.49, n.1, 1985.

SMITH, R.E.; WARRICK, A.W. Soil water relationships. In: HOFFMAN, G.J.; EVANS, R.G.; JENSEN, M.E.; MARTIN, D.L.; ELLIOTT, R.L. **Design and operation of farm irrigation systems**. 2. ed. St. Joseph: American Society of Agricultural and Biological Engineers, cap.6, p.120-159, 2007.

SOUZA, C. F.; SILVA E. F. F.; FOLEGATTI, M.V.; OR, D. Irrigação por gotejamento: disco saturado e área superficial molhada versus distribuição e armazenamento da água no solo. **Revista Brasileira de Ciências Agrárias**, v.1, n.único, p.65–71, 2006.

SRIVASTAVA, R.; YEH, T.J. Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils. **Water Resources Research**, v.27, n.5, p.753-762, 1991.

TAVENAS, F.; LEBLOND, P.; JEAN, P.; LEROUEIL, S. (1983) The permeability of natural soft clays. Part I: Methods of Laboratory Measurement. **Canadian Geotechnical Journal**, v.20, n.4.

TAGHAVI, S.A.; MARIÑO, M.A.; ROLSTON, D.E. Infiltration from trickle irrigation source. **Journal of Irrigation and Drainage Engineering**. New York, v.110, n.4, p.331-341, 1984.

TUCCI, C.E.M. **Modelos hidrológicos**. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS, 1998.

VAN GENUCHTEN, M.T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. **Soil Science Society of America Journal**, Madison, v.44, p.892-898, 1980.

VASCONCELLOS, C.A.B.; AMORIM, J.C.C. Numerical simulation of unsaturated flow in porous media using a mass-conservative model. In: XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlândia, 2001. **Anais...** Uberlândia: ABCM, v.8, p.139-148, 2001.

WENDLAND, E. **Modelos matemáticos e métodos numéricos em recursos hídricos** – SHS 5896, Notas de Aula, EESC/USP, 2001.

ZUR, B. Wetted soil volume as a design objective in trickle irrigation. **Irrigation Science**, v.16, p.101-105, 1996.