



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
CAMPUS CARAÚBAS

ILKENNE CASSIO RODRIGUES VITORINO

**PROJETO – BANCADA EXPERIMENTAL DIDÁTICA DE
FLAMBAGEM**

CARAÚBAS - RN

2018

ILKENNE CASSIO RODRIGUES VITORINO

**PROJETO – BANCADA EXPERIMENTAL DIDÁTICA DE
FLAMBAGEM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia
da Universidade Federal Rural do Semiárido -
Caraúbas, para cumprimento dos requisitos para
obtenção do Título de Bacharel em Ciência e
Tecnologia.

Orientador: Dr.Jackson de Brito Simões

Coorientador: Eng. Ana Paula Florentino dos
Santos

CARAÚBAS – RN

2018

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

R696p RODRIGUES VITORINO, ILKENNE CASSIO .
PROJETO - BANCADA EXPERIMENTAL DIDÁTICA DE
FLAMBAGEM / ILKENNE CASSIO RODRIGUES VITORINO. -
2018.
57 f. : il.

Orientador: JACKSON DE BRITO SIMÕES.
Coorientadora: ANA PAULA FLORENTINO DOS SANTOS.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2018.

1. CARGA CRÍTICA. 2. EULER. 3. FLAMBAGEM. 4.
COLUNA. 5. BANCADA. I. DE BRITO SIMÕES, JACKSON,
orient. II. FLORENTINO DOS SANTOS, ANA PAULA, co-
orient. III. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

ILKENNE CASSIO RODRIGUES VITORINO

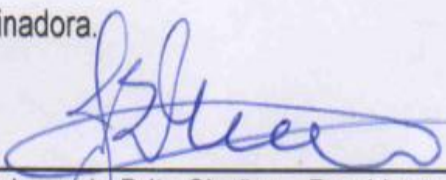
**PROJETO – BANCADA EXPERIMENTAL DIDÁTICA DE
FLAMBAGEM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia
da Universidade Federal Rural do Semiárido -
Caraúbas, para cumprimento dos requisitos para
obtenção do Título de Bacharel em Ciência e
Tecnologia.

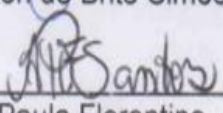
Aprovado: 20 /03 / 2018

BANCA EXAMINADORA

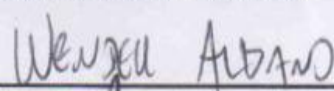
Assinatura dos membros da Banca Examinadora.



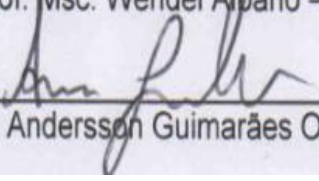
Prof. Dr. Jackson de Brito Simões - Presidente



Profª. Ana Paula Florentino - Membro



Prof. Msc. Wendel Albano – Membro



Prof. Msc. Andersson Guimarães Oliveira - Membro

CARAÚBAS-RN

2018

RESUMO

Este estudo teve como objetivo a construção de uma bancada experimental didática, a fim de melhorar a metodologia de ensino/aprendizado em sala de aula da disciplina de resistência dos materiais II. O trabalho foi alicerçado nos conceitos da flambagem de colunas de Euler contemplado na ementa. Esse trabalho foi motivado pela dificuldade dos alunos em visualizar o fenômeno físico na prática. Dessa forma, a utilização de bancadas didáticas experimentais que reproduza os conteúdos vistos em sala de aula é sem sombra de dúvidas uma metodologia eficaz. O projeto e execução dessa bancada irá facilitar a visualização e entendimento dos alunos quanto ao fenômeno de flambagem de colunas, segundo Euler, submetidas a diferentes configurações de apoio. Ainda irá ajudar o professor por ser uma ferramenta prática, podendo ser usada em sala de aula e em laboratório. Levando em conta a importância da prática no estudo das ciências tecnológicas bem com na engenharia, este estudo também abordou a teoria conceitual do trabalho de maneira simplificada, detalhada visando à fácil compreensão. Por fim, visto que a UFERSA não dispõe de laboratórios para algumas disciplinas, como Resistência dos Materiais, e os investimento para educação no Brasil são cada vez mais escassos, a construção de uma bancada experimental didática de baixo custo é um ponto diferencial no quesito ensino-aprendizado dessa componente curricular tão importante para as engenharias.

PALAVRAS-CHAVE: Construção de Bancada Experimental Didática. Flambagem de Colunas. Flambagem de Euler.

ABSTRACT

The purpose of the current study was the building of an educational experimental row of seats, to improve methodology of learning and teaching engineering mechanics II. This study was supported on concept of Euler's column buckling included in syllabus. This work was motivated by the students' difficulty to visualize the physical phenomenon in practice, in this way, a use of experimental didactics that reproduces the contents learned in the classroom is very important. The design and execution of this row of seats will facilitate the visualization and understanding of the students regarding the phenomenon of buckling of columns, according to Euler, submitted to different support configurations. Supporting the professor as it is a practical form and can be used in the classroom and in the laboratory. Seeing the importance of practice in the study of technological sciences as well as in engineering, this study also addressed the conceptual theory of work in a simplified, for easy understanding. Finally, since UFERSA does not have laboratories for some programs, such as engineering mechanics II, and investments for education in Brazil are increasingly scarce, a construction of an experimental didactic row of seats of low cost is a differential point in the teaching-learning aspect of this curricular component as important as engineering.

WORD-KEY: building of an educational experimental row of seats, column buckling, Euler's buckling

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Flambagem em torno do eixo mais fraco	11
Figura 2 - Mecanismo de duas barras presas por pinos.....	12
Figura 3 - Mecanismo de duas barras em deflexão lateral	13
Figura 4 - Diagrama de corpo livre do mecanismo de duas barras	13
Figura 5 - Representação gráfica dos equilíbrios para o mecanismo	15
Figura 6 - Coluna ideal presa por pinos defletida.....	16
Figura 7 - Representação gráfica dos equilíbrios de uma coluna presa por pinos.....	18
Figura 8 – Representação gráfica da equação (12) em função do índice de esbeltez.....	19
Figura 9 – Representação gráfica de uma coluna engastada na base e livre no topo	20
Figura 10 - Ilustração de diferentes configurações de apoio	22
Figura 11 - Coluna curta com carga aplicada a uma curta distância excêntrica.....	24
Figura 12- Representação gráfica de uma coluna carregada a uma curta distância excêntrica e	26
Figura 13 - Representação gráfica fórmula de Euler	28
Figura 14 - WP 121	29
Figura 15 – Diagrama de execução do trabalho	29
Figura 16 - Projeto conceitual da bancada no Inventor	30
Figura 17 - Projeto conceitual da bancada no Inventor	31
Figura 18 - Diagrama de execução da planilha de cálculos	32
Figura 19 - Protótipo da bancada.....	35
Figura 20 - Teste de carga no protótipo.....	35
Figura 21 - Balança de alta precisão- AUY220.....	36
Figura 22 - Balança de baixa precisão- LS200.....	36
Figura 23 - Corpo de prova.....	37
Figura 24 - Tubo de seção retangular no processo de corte	38

Figura 25 - Corte no tubo de seção retangular 50 x 30 mm de 90°	39
Figura 26 - Corte no tubo de seção retangular 50 x 30 mm de 45°	39
Figura 27 - Tubo de seção retangular superior no processo de perfuração	40
Figura 28 - Processo de acabamento da bancada	40
Figura 29 - Suporte superior da bancada	41
Figura 30 - Suporte superior da bancada	41
Figura 31 - Bancada finalizada.....	42
Figura 32 - Representação da seção transversal do corpo de prova	43
Figura 33 - Teste de carga no protótipo.....	46
Figura 34 - Teste de carga final	47
Figura 35 - Guia do suporte superior.....	48

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	5
SUMÁRIO	11
1 INTRODUÇÃO	8
2 JUSTIFICATIVAS E MOTIVAÇÕES	9
3 FLAMBAGEM DE COLUNAS.....	10
3.1 INTRODUÇÃO.....	10
3.2 ÍNDICE DE ESBELTEZ.....	10
3.3 CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO	12
3.3.1 Equilíbrio estável.....	14
3.3.2 Equilíbrio Instável	14
3.3.3 Equilíbrio Neutro.....	14
3.4 COLUNA IDEAL PRESA POR PINOS	15
3.5 INFLUÊNCIAS DAS DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DOS APOIOS.....	19
3.6 FÓRMULA DA SECANTE.....	23
4 METODOLOGIA	28
4.1 PROJETO CONCEITUAL	30
4.2 CÁLCULO TEÓRICO DA FLAMBAGEM	32
4.3 PROTÓTIPO DA BANCADA	34
4.4 TESTE NO PROTÓTIPO	35
4.5 CONSTRUÇÃO DA BANCADA EXPERIMENTAL DIDÁTICA	37
4.6 TESTE DE CARGA NA BANCADA	42
5 RESULTADOS E DISCURSÕES	42
6 CONCLUSÃO GERAL	50
7 TRABALHOS FUTUROS.....	51
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52
APÊNDICE A – DESENHOS TÉCNICOS DA BANCADA EXPERIMENTAL	53
APÊNDICE B – DESENHO TÉCNICO DO PROTÓTIPO DA BANCADA.....	56
ANEXO I – FICHA DE PREÇO DO MODELO WP 121	58

1 INTRODUÇÃO

Nos cursos de engenharia, existe uma certa dificuldade por parte de alguns alunos em observar os comportamentos de alguns fenômenos físicos, principalmente quando não há experimentos para reprodução de práticas. Para o professor é um desafio fazer com que os alunos absorvam de maneira suficiente os conceitos teóricos, principalmente na área das ciências exatas. Sendo assim, se faz necessário buscar métodos e materiais diferenciados e práticos com o intuito de aprimorar o entendimento dos conteúdos ministrados em sala de aula pelos discentes. O tema e os conceitos abordados neste trabalho é, a flambagem de colunas.

A resistência dos materiais estuda as relações entre cargas aplicadas num corpo e as intensidades das forças internas a que o mesmo esteja submetido. Partindo da análise um elemento infinitesimal até uma estrutura complexa, de forma a quantificar a resistência do material aos mais diversos tipos de carregamentos se fazem necessária objetivando manter o projeto em condições adequadas para suas funcionalidades.

Dentre vários elementos estruturais, as colunas geralmente são responsáveis por suportar as maiores quantidades de esforços, visto que são elementos longos e esbeltos. Associados a essas colunas, existe uma característica de estabilidade, que é a sua capacidade de suportar um carregamento axial sem que haja uma deflexão lateral repentinamente. O fenômeno de instabilidade elástica que é oriunda do carregamento axial é chamado flambagem. Quando o carregamento axial na coluna, têm seu limite crítico ultrapassado, um regime instável é alcançado, isto é, qualquer perturbação lateral fará com que a coluna carregada axialmente se mantenha numa configuração irreversível mesmo quando retirada a força perturbadora. A carga crítica de flambagem de colunas depende de alguns fatores tais como apoios, momento de inércia e material.

O projeto e construção da bancada experimental para ensaios de flambagem teve como objetivo mostrar na prática como funciona o comportamento de uma coluna em quatro (04) diferentes configurações de apoio carregada axialmente. Essa bancada é de fácil manuseio e transporte, podendo ser usada por qualquer professor que leciona a disciplina ou até mesmo por alunos interessados em estudar e entender melhor o fenômeno de flambagem.

A utilização de ferramentas didáticas é de suma importância no que se refere ao processo de aprendizado, visto que quanto mais claro e iterativo for à exposição do conteúdo,

maior será a facilidade de entendimento por parte dos alunos. Diante disso, novas ferramentas, novos materiais e métodos de ensino devem ser desenvolvidos e construídos conjuntamente com os alunos buscando auxiliar a prática.

2 JUSTIFICATIVAS E MOTIVAÇÕES

Um dos maiores desafios dos professores e também um dever, é o ensino ligado à aprendizagem, que faz com que o aluno não decore simplesmente um conteúdo para passar em uma prova escrita, mas que o mesmo absorva o que lhe for possível do conteúdo de forma que leve este conhecimento a diante. Existe um certo desgaste do aluno, quando este tem dificuldade em assimilar o conteúdo proposto em sala de aula em se tratando das ciências exatas onde estão presentes, segundo o Ministério da Educação, as maiores taxas de evasão no ensino superior.

Em cursos como Física, Química e principalmente as Engenharias são fundamentais para o ensino e aprendizagem as práticas e os exercícios práticos junto aos conteúdos teóricos expostos em sala de aula. Por exemplo, na resistência dos materiais em situações práticas é possível visualizar a ruptura por tração de material submetido a carga de ruptura. A observação do fenômeno é importante, pois, o aluno tem uma experiência visual o que facilita a absorção dos conceitos ligados aquele fenômeno. Deseja-se ressaltar a importância da prática trazida junto aos conceitos teóricos para o entendimento dos mesmos.

Muitos professores enfrentam dificuldades no exercício de suas funções como a falta de laboratórios e materiais laborais para a elaboração e execução de exercícios e experimentos práticos. Como alternativa para esta situação, são elaboradas bancadas didáticas, pequenos experimentos, exercícios práticos, dentre outras ideias a partir da criatividade dos mesmos. O uso de ferramentas didáticas, é de suma importância no que se refere ao ensino, visto que quanto mais clara e objetiva a exposição do conteúdo, mais fácil se torna o entendimento por parte dos discentes.

Existem muitos conteúdos em várias disciplinas de diversos cursos, em que se faz necessária uma abordagem diferenciada quando se trata da qualidade na exposição aos alunos. Com este intuito, este trabalho objetiva o projeto e construção de uma ferramenta que irá auxiliar no entendimento de um conteúdo específico, que é a flambagem de colunas de Euler, que está inserido no conteúdo programático da disciplina Resistência de Materiais II em

curiosos de engenharias. Assim, esse trabalho é justificado pela escassez de bancadas experimental didáticas nos cursos de engenharias da UFERSA Caraúbas.

3 FLAMBAGEM DE COLUNAS

3.1 INTRODUÇÃO

Todo e qualquer projeto estrutural tem como função suportar esforços de diversos tipos, cargas concentradas, carregamentos distribuídos, cargas axiais, de flexão e de torção ou uma combinação delas. Neste estudo, o interesse está voltado ao fenômeno de flambagem em colunas que é uma deflexão lateral causada por um-carregamento axial de compressão em um elemento estrutural considerado esbelto.

Segundo Hibeller (2010): “Elementos estruturais longos e esbeltos, e sendo sujeitos a cargas axiais de compressão são denominados de colunas. A deflexão lateral oriunda do carregamento axial de compressão é denominada de flambagem”. Já Beer (1995. P. 1084) diz que: “Uma coluna pode ser considerada como uma viga colocada em posição vertical e submetida a uma força axial”. Sendo assim, o estudo será focado nesse elemento esbelto submetido a carregamentos axiais de compressão que vai promover o fenômeno de instabilidade elástica a partir de um carregamento crítico como será mostrado adiante. O carregamento crítico ou carga crítica é a maior carga axial que a coluna suporta na eminência de sofrer flambagem, ou seja, o limite entre sua forma reta e flambada.

3.2 ÍNDICE DE ESBELTEZ

Um parâmetro importante no estudo de colunas é o **índice de esbeltez** que segundo Hibeller (2010) nada mais é a que razão geométrica entre o comprimento da coluna e o menor raio de giração da coluna, dado pela equação (1).

$$\frac{L}{r} \quad (1)$$

O raio de giração é dado pela equação (2):

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2)$$

Onde:

r = é o raio de giração da seção transversal

I = é o menor momento de inércia da área da seção transversal da coluna

A = é a área da seção transversal da coluna

Quanto maior esse índice, maior será a facilidade da coluna em flambar. Esse parâmetro pode ainda ser reescrito em termos do índice de esbeltez efetivo dado pela equação (3), onde L_e é o comprimento efetivo da coluna que inclui a dependência das condições dos apoios como será mostrado adiante.

$$\frac{L_e}{r} \quad (3)$$

Os menores índices de esbeltez são obtidos quando se igualha as tensões de escoamentos com as tensões crítica, para valores menores ocorre o escoamento do material. O menor momento de inércia de uma seção transversal, ou eixo mais fraco, é obtido a partir dos cálculos geométricos da seção transversal, e ocorrendo flambagem em torno deste eixo mais fraco, que dependerá do referencial adotado como mostrado na figura 1.

Figura 1- Flambagem em torno do eixo mais fraco



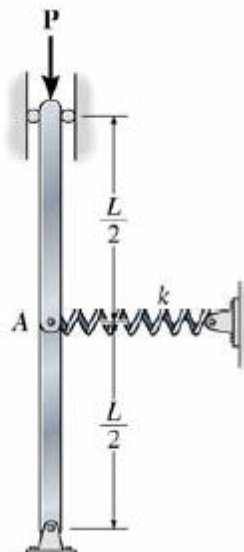
Fonte: HIBELLER 2010

3.3 CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Quando uma coluna é submetida a uma carga axial de compressão, esta torna-se estável se a carga imprimida for menor que sua carga crítica de flambagem, podendo sofrer deflexão e ainda retornar sua posição inicial. Uma característica para melhor entendimento deste fenômeno, é, qualquer pequena força lateral atribuída a coluna fará com que ela tenha um “empenamento”, que é a deflexão lateral. A coluna está submetida a três tipos de equilíbrio, dependendo da carga que está sendo a ela atribuída. Equilíbrio estável, equilíbrio instável e equilíbrio neutro.

Como nos assegura Hibeller (2010), a instabilidade a que está sujeita a coluna é melhor explicada com o auxílio de um mecanismo composto de duas barras rígidas, sem peso e presas por pinos nas extremidades, dispostas na vertical, conectadas em A por uma mola de rigidez k não esticada, e uma pequena força P aplicada na vertical como ilustra a figura 1.

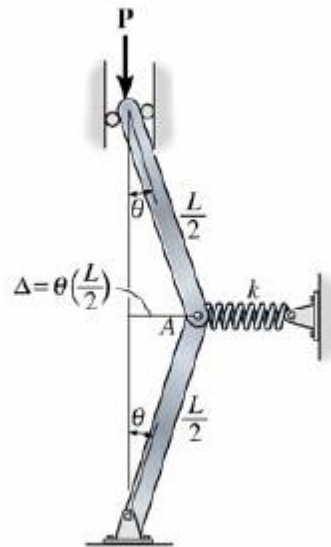
Figura 2 - Mecanismo de duas barras presas por pinos.



Fonte: HIBELLER, 2010

Ao aplicar a força perturbadora P nesse sistema em ponto A, e orientada da esquerda para direita transversal as barras, um pequeno deslocamento do ponto A igual a Δ ocorrerá figura 2.

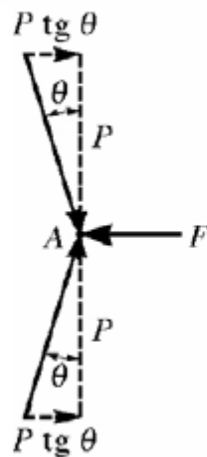
Figura 3 - Mecanismo de duas barras em deflexão lateral



Fonte: HIBELLER, 2010

Quando o ponto A é deslocado, a mola produz uma força de restauração $F = k\Delta$, enquanto isso a carga P produz duas componentes na horizontal $P_x = P \operatorname{tg} \theta$, tendendo a empurrar o ponto A ainda mais para fora da posição de equilíbrio, como mostra a figura 3.

Figura 4 - Diagrama de corpo livre do mecanismo de duas barras



Fonte: HIBELLER, 2010

Sendo θ um ângulo pequeno, é possível aproximar $\Delta \approx \theta(L/2)$ e $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$. Sendo assim, a força de restauração que a mola produz torna-se $F = k\theta L/2$, e a força perturbadora torna-se $2P_x = 2P\theta$.

O mesmo método de avaliação deste problema foi trazido por (POPOV, 1978. P. 489), “Aqui para simplicidade, uma barra perfeitamente rígida de comprimento L , é mantida na posição vertical, por meio de uma mola em A , com rigidez torcional k . Em seguida, aplica-se uma força vertical P e outra horizontal F no topo da barra.” Sendo o mesmo problema diferenciando somente as condições de contorno.

3.3.1 Equilíbrio estável

Segundo Hibeller (2010), a condição estável é quando a força de restauração (da mola na condição de equilíbrio) é maior que a força perturbadora, ou seja, $k\theta L/2 > 2P\theta$, resolvendo explicitando P teremos a equação (4).

$$P < \frac{kL}{4} \quad (4)$$

Esta condição permite observar que, a mola tem condições de devolver o mecanismo para a posição de equilíbrio, isto é, se houver uma perturbação externa e ela for retirada o mecanismo volta a sua posição inicial.

3.3.2 Equilíbrio Instável

Com a força de restauração sendo menor que a força perturbadora, ou seja, $k\theta L/2 < 2P\theta$, resolvendo explicitando P teremos a equação (5).

$$P > \frac{kL}{4} \quad (5)$$

Na condição de equilíbrio instável, se a carga P for aplicada e houver um deslocamento do ponto A , o mecanismo não voltará a posição de equilíbrio quando retirada a força perturbadora.

3.3.3 Equilíbrio Neutro

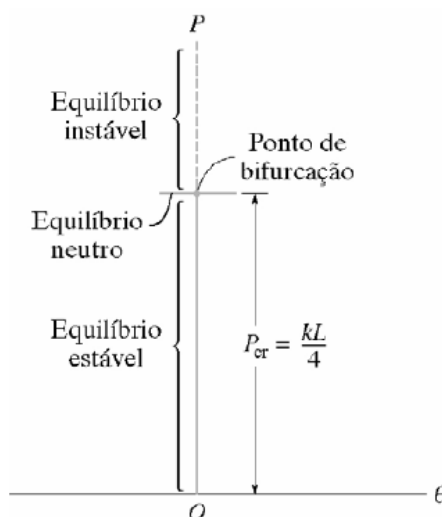
Quando a força de perturbação for igual a força de restauração, temos que $k\theta L/2 = 2P\theta$, que resultará na carga crítica dada pela equação (6).

$$P_{cr} = \frac{kL}{4} \quad (6)$$

Esta condição implica a carga crítica quando a coluna está na eminência de flambar, assim em equilíbrio neutro, qualquer incremento de carga resultará na deflexão lateral, e conseqüentemente entrará no equilíbrio instável. Qualquer perturbação não fará com que o mecanismo se afaste mais do equilíbrio, nem que ele retorne a sua posição inicial. Assim sendo, as barras continuarão na posição defletida. Quando a carga P é igual a carga crítica P_{cr} , temos o ponto de bifurcação onde o equilíbrio muda do Neutro para o Instável.

Uma coluna que venha a flambar não necessariamente falha, mesmo na forma defletida este elemento ainda suportará um excedente relativamente considerável, mas a consequência disso é o aumento da deflexão que pode não ser tolerada no projeto por questões estéticas ou estruturais, assim afirma Hibeller (2010). Os três (03) tipos de equilíbrios apresentados estão representados na figura 4.

Figura 5 - Representação gráfica dos equilíbrios para o mecanismo



Fonte: HIBELLER, 2010

3.4 COLUNA IDEAL PRESA POR PINOS

Coluna ideal é uma coluna perfeitamente reta antes do carregamento, feita de material homogêneo onde a carga é aplicada no centroide da sua seção transversal, o material comporta-se de maneira linear elástica e que a coluna sofre flambagem em um único plano.

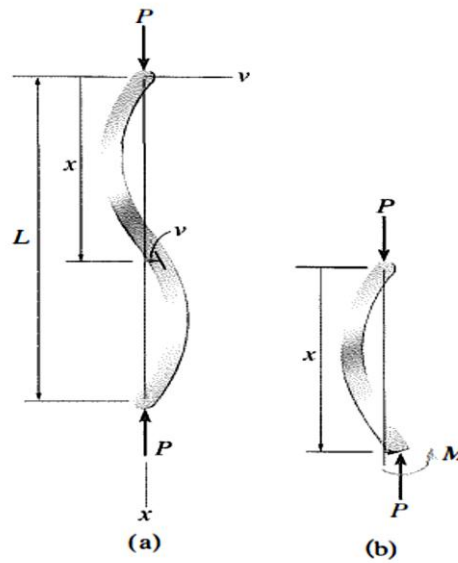
Como deixa claro Hibeller (2010), uma coluna continuar estável ou torna-se instável quando carregada axialmente acima da carga crítica, depende de sua elasticidade. Para determinar a carga crítica e sua forma flambada uma segunda abordagem pode ser utilizada.

Assim, aplicando a equação que relaciona o momento fletor interno da coluna e sua forma defletida, que é dada pela equação (7):

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M \quad (7)$$

Quando a coluna está na forma defletida, como mostra a figura 5, o momento fletor interno pode ser determinado pelo método das seções.

Figura 6 - Coluna ideal presa por pinos defletida



Fonte: - HIBELLER, 2010

Pelo diagrama de corpo livre da figura 5 b, a deflexão v e o momento interno M são mostrados na direção positiva segundo critérios adotados para a equação (6). Somando os momentos obtemos, $M = -Pv$. Logo a equação (7) se torna

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -Pv$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI} \right) v = 0 \quad (8)$$

A equação (8) é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Sua solução é dada pela equação (9) e pode ser mostrada por substituição direta ou pelo método das equações diferenciais, que é

$$v = C_1 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) \quad (9)$$

Tanto C_1 quanto C_2 são determinadas pelas condições de contorno nas extremidades da coluna. Onde $v = 0$ em $x = 0$, logo $C_2 = 0$. E $v = 0$ em $x = L$.

$$C_1 \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$$

Essa equação será satisfeita se $C_1 = 0$, mas $v = 0$, o que resulta numa solução trivial da equação e exige que a coluna permaneça sempre reta, mesmo que a carga faça a coluna trona-se instável. A outra solução é

$$\operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$$

Que pode ser satisfeita se

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n\pi$$

Reescrevendo obtemos a equação (10), que é a carga crítica.

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (10)$$

Portanto, o menor valor de P é obtido quando $n = 1$, de modo que a carga crítica para a coluna é.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

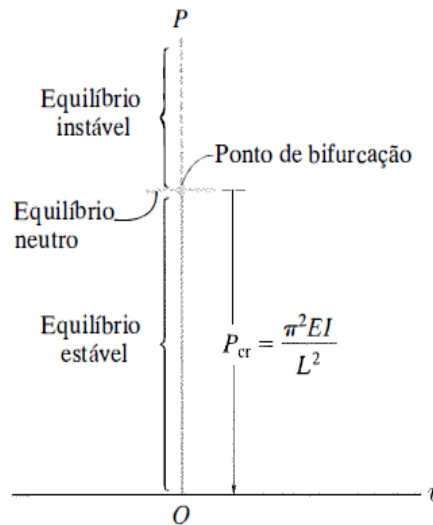
Essa carga é denominada carga de Euler, devido a Leonhard Euler, matemático que resolveu este problema. A forma flambada da coluna é definida por

$$v = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi \lambda}{L}$$

Onde C_1 representa a deflexão máxima, que ocorre no ponto médio da coluna. Considerando a deflexão como sendo pequena.

Como no mecanismo de duas barras, podemos representar as características da deflexão da coluna pelo gráfico da figura (6). Sendo o ponto de bifurcação a representação do equilíbrio neutro.

Figura 7 - Representação gráfica dos equilíbrios de uma coluna presa por pinos



Fonte: HIBELLER, 2010

A equação da flambagem para uma coluna carregada axialmente e esbelta apoiada por pinos pode ser reescrita como sendo a equação (11)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (11)$$

Onde:

P_{cr} – carga crítica, carga máxima na coluna imediatamente antes de sofrer flambagem

E - módulo da elasticidade do material da coluna

I – menor momento de inércia da área da seção transversal

L – comprimento da coluna sem apoio.

Substituindo $I = Ar^2$, na equação (11), onde A é a área da seção transversal e r é o raio de giração da área de seção transversal, tem-se

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E (Ar^2)}{L^2}$$

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

Ou ainda

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (12)$$

Sendo a equação (12) a tensão crítica de Euler, onde:

σ_{cr} – Tensão crítica, é a tensão média na coluna imediatamente antes de flambar

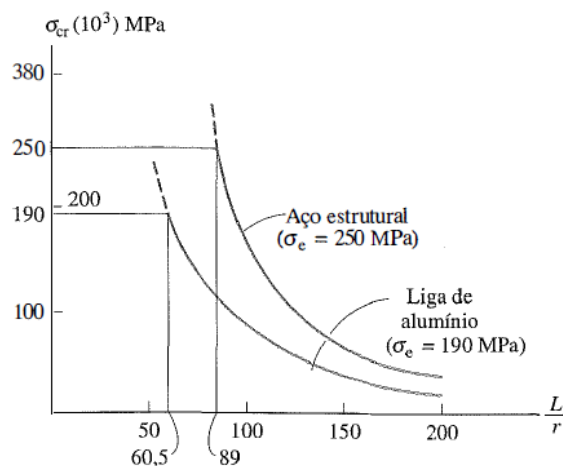
E – Módulo da elasticidade do material da coluna

L – Comprimento da coluna sem apoio.

r – Menor raio de giração da coluna, determina pela equação (2)

O gráfico da figura 7 é a representação da equação (12), para as ligas de alumínio e a de aço, tendo a tensão crítica em função do índice de esbeltez. As curvas são hiperbólicas e validas somente para tensões críticas abaixo do limite de escoamento do material. Tendo em vista que o material deve se comportar elasticamente, para o aço temos que a tensão de escoamento é $(\sigma_e)_{aço} = 250 \text{ MPa}$ e $E_{aço} = 200 \text{ GPa}$, e para o alumínio, $(\sigma_e)_{al} = 190 \text{ MPa}$ e $E_{al} = 70 \text{ GPa}$. Substituindo $\sigma_{cr} = \sigma_e$ na equação (12), os menores índices de esbeltez para colunas de aço e alumínio são respectivamente $\left(\frac{L}{r}\right)_{aço} = 89$ e $\left(\frac{L}{r}\right)_{al} = 60,5$, com índices abaixo destes ocorrem o escoamento do material antes que seja possível atingir a carga crítica de flambagem.

Figura 8 – Representação gráfica da equação (12) em função do índice de esbeltez



Fonte: HIBELLER, 2010

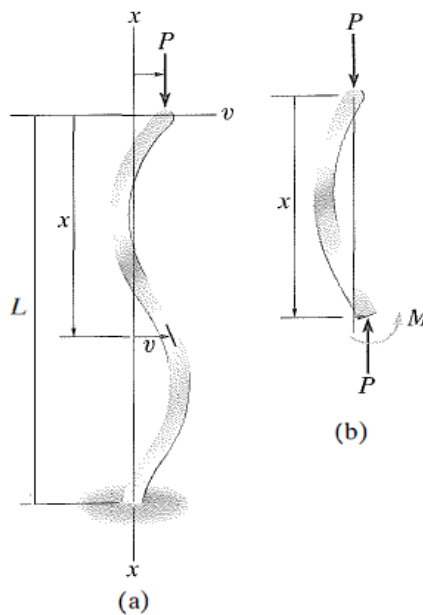
3.5 INFLUÊNCIAS DAS DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DOS APOIOS

Existem várias configurações de apoio para colunas, sejam elas aplicadas a estruturas estáticas ou elementos mecânicos, assim como uma coluna biarticulada, pode-se encontrar

equações que regem as cargas máximas e a forma fletida nestes elementos quando sujeitos a uma carga axial.

Hibeller (2010) mostra que de modo análogo às colunas biarticuladas, a determinação da carga crítica de flambagem de uma configuração de apoio engastada na base e livre no topo, segue o mesmo método. A figura 8 mostras essa configuração em particular.

Figura 9 – Representação gráfica de uma coluna engastada na base e livre no topo



Fonte: HIBELLER, 2010

Pelo diagrama de corpo livre da figura 8 b, o momento interno na seção é $M = P(\delta - v)$, logo a equação diferencial para a curva de deflexão é dada pela equação (13)

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = P(\delta - v)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{P}{EI}\delta \quad (13)$$

Essa equação não é homogênea por ter um termo não nulo do lado direito da equação, logo sua solução consiste em uma complementar juntamente com uma solução particular, de modo que

$$v = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta$$

As constantes também serão determinadas pelas condições de contorno. Sendo que $x = 0, v = 0$, de modo que $C_2 = -\delta$. Ainda

$$\frac{d^2v}{dx^2} = C_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - C_2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

Em $x = 0, \frac{dv}{dx} = 0$, de modo que $C_1 = 0$. A curva de flexão é definida então pela equação (14).

$$v = \delta \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \right] \quad (14)$$

Considerando que a deflexão no topo da coluna é δ , ou seja, em $x = L, v = \delta$, isto exige que

$$\delta \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

Logo a solução trivial $\delta = 0$, indica que não ocorre flambagem, independente da carga P , para que isso não ocorra tem-se

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

Ou ainda

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = \frac{n\pi}{2}$$

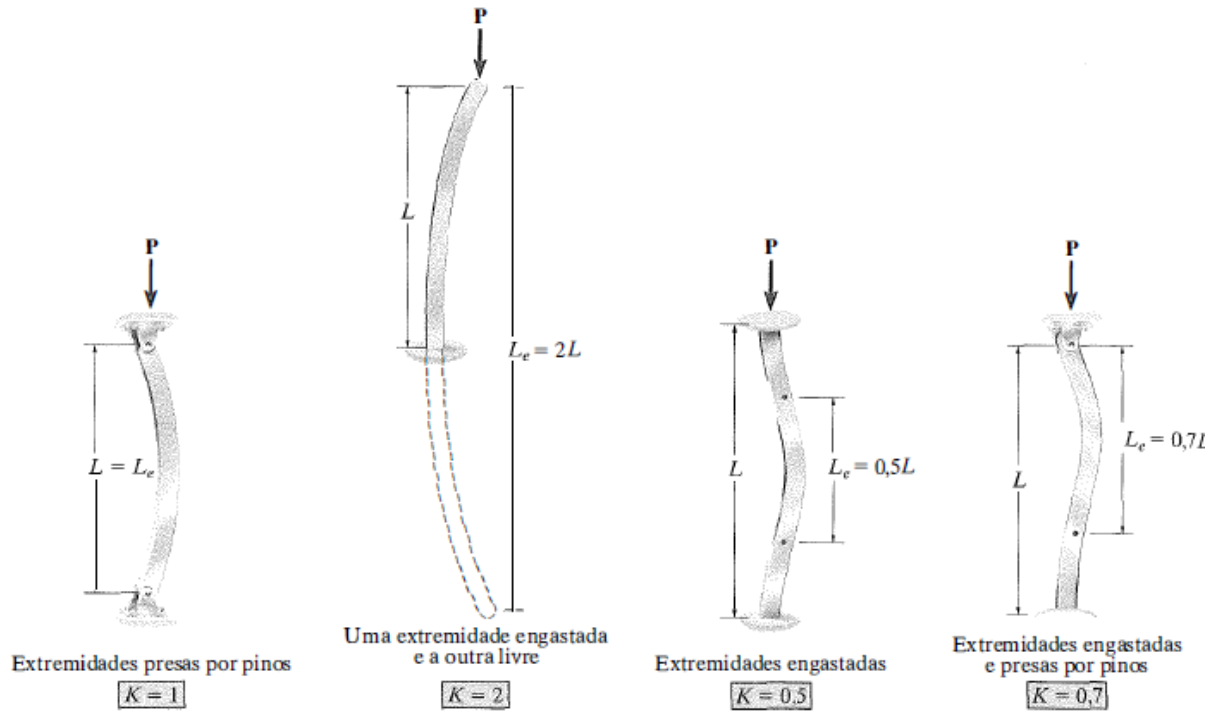
A menor carga crítica ocorre quando $n = 1$, explicitando P temos

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (15)$$

A equação (10) foi desenvolvida com a condição de biarticulada. L representa na equação, a distância entre os pontos de momento nulo. Desse modo outras configurações de apoio consistem em distâncias diferentes, esta distância é denominada comprimento efetivo da coluna, que é representada por L_e . Como já foi desenvolvido anteriormente, o comprimento efetivo da coluna biarticulada é $L_e = L$, e a coluna engastada na base e livre no topo é $L_e = 2L$.

Resolvendo as equações diferenciais pelo mesmo método usado anteriormente, tem-se que os comprimentos efetivos das colunas bi - engastadas, engastada na base e articulada no topo serão respectivamente, $L_e = 0,5L$ e $L_e = 0,7L$. Para melhor visualização estes apoios estarão dispostos na figura 9

Figura 10 - Ilustração de diferentes configurações de apoio



Fonte: HIBELLER, 2010

Muitos manuais e códigos de projeto atribuem um coeficiente adimensional K denominado fator de comprimento efetivo, onde este fator é dado pela equação (16).

$$L_e = KL \quad (16)$$

Podemos ainda expressar a formula de Euler como a equação (17)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (17)$$

E ainda a tensão crítica dada pela equação (18)

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad (18)$$

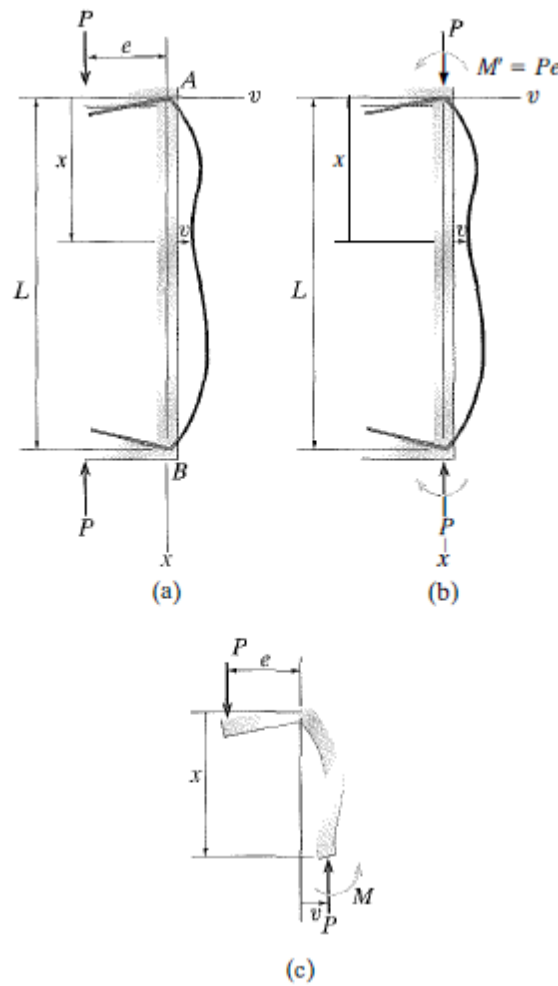
Onde (KL/r) é o índice de esbeltez efetivo da coluna.

3.6 FÓRMULA DA SECANTE

Uma das características da formula de Euler é que a carga axial tem que estar centralizada na seção da coluna, e também a coluna deve ser perfeitamente retilínea, mas estas condições não serão atingidas na realidade. Por este motivo a coluna sofre flambagem muito pequenas assim que são carregadas, resultando que o critério de aplicação de carga ficará limitado a uma deflexão específica da coluna ou a não permitir que a tensão máxima na coluna ultrapasse a tensão admissível.

Aplicando a carga P na coluna, a uma curta distância excêntrica e em relação a centroide da seção transversal mostrada na figura 10 a. A carga na coluna é estaticamente equivalente a carga axial P e ao momento fletor $M' = Pe$ mostrado na figura 10 b. Nos dois casos as extremidades A e B são suportadas de maneira que fiquem livres para girar, ou seja (presa por pinos). Considerando pequenas inclinações e deflexões e o comportamento linear elástico do material. E o plano $x - v$ é o plano de simetria para a área da seção transversal, Hibeller (2010).

Figura 11 - Coluna curta com carga aplicada a uma curta distância excêntrica



Fonte: HIBELLER, 2010

Observando o diagrama de corpo livre da figura 10 c, temos que o momento interno na coluna é dado pela equação (19)

$$M = -P(e + v) \quad (19)$$

Analogamente as formulas de Euler, teremos uma equação diferencial para a curva de deflexão, sendo que

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -P(e + v)$$

Ou ainda

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = -\frac{P}{EI}e$$

Sendo uma equação diferencial semelhante à equação (13) e tem uma solução geral que dispõe de solução complementar e particular, sendo ela dada pela equação (20)

$$v = C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x - e \quad (20)$$

Para encontrar as constantes novamente recorreremos as condições de contorno. Onde $x = 0$, $v = 0$, portanto $C_2 = e$. Já em $x = L$, $v = 0$, resultando em

$$C_1 = \frac{e[1 - \cos(\sqrt{P/EI}L)]}{\operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}L)}$$

Como $1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 2\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$ e também $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 2\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$, então termos

$$C_1 = e \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

Com isso a curva de deflexão equação (20), pode ser reescrita na forma:

$$v = e \left[\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - 1 \right] \quad (21)$$

Para a deflexão máxima devido a simetria da carga, a deflexão máxima e tensão máxima, ocorrem no ponto médio da coluna. Então quando $x = L/2$, $v = v_{\max}$, logo teremos a equação (22) representando a deflexão máxima.

$$v_{\max} = e \left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1 \right] \quad (22)$$

Se e tender a zero, $v_{\max}$ tenderá a zero. Mas se os termos entre colchetes tenderem ao infinito quando e tender a zero, então $v_{\max}$ terá um valor não nulo. Matematicamente falando, isso representaria o comportamento de uma coluna com carga axial no momento da falha quando sujeita a carga crítica P_{cr} . Logo para determinar a carga crítica é necessário que

$$\sec\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\frac{L}{2}\right) = \infty$$

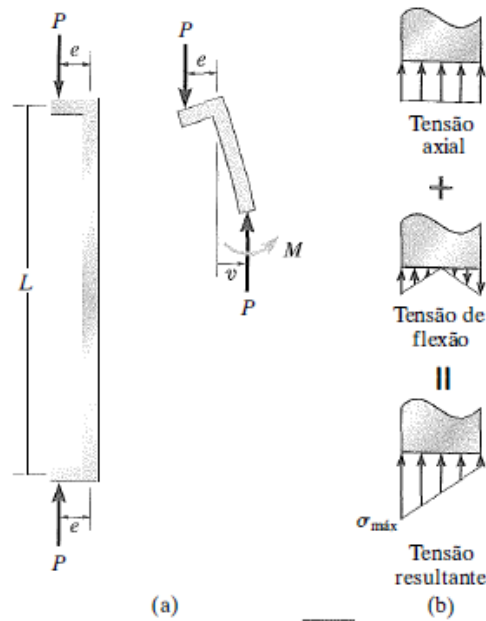
$$\sqrt{\frac{P_{cr} L}{EI} \frac{L}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (23)$$

Sendo assim a equação (23) o mesmo resultado obtido com a formula de Euler equação (11).

A tensão máxima como sugere Hibeller (2010), pode ser determinada entendendo-se que ela é provocada pela carga axial juntamente com o momento mostrado na figura 11. Usando as equações (19) e (22),

Figura 12- Representação gráfica de uma coluna carregada a uma curta distância excêntrica e



Fonte: HIBELLER, 2010

$$M = -P(e + v)$$

$$M = Pe \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI} \frac{L}{2}}\right) \quad (24)$$

Pela figura 11 b, a tensão máxima na coluna é de compressão e seu valor é dado por

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} + \frac{M_C}{I}; \quad \sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} + \frac{P_{ec}}{A} \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}\right)$$

Tendo o raio de giração definido pela equação (2) podendo ser reescrita como

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}}\right) \right] \quad (25)$$

Onde

$\sigma_{m\acute{a}x}$ – Tensão elástica máxima na coluna

P – Carga vertical aplicada na coluna. $P < P_{cr}$ a menos que $e = 0$, então $P = P_{cr}$.

e – Excentricidade da carga P , medida do eixo neutro da área da seção transversal da coluna até a linha de ação de P .

c – Distância do eixo neutro até a fibra externa da coluna onde ocorre a $\sigma_{m\acute{a}x}$.

A – Área da seção transversal da coluna.

L – Comprimento não apoiado da coluna n plano de flexão.

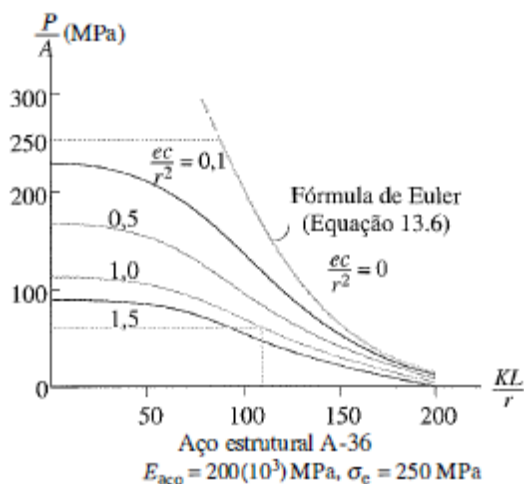
E – Modulo de elasticidade do material da coluna

r – Raio de giração em torno do eixo neutro ou de flexão.

Para Hibeller (2010), a equação (25) identicamente como a equação (22), indica uma relação não linear entra a carga e a tensão. Consequentemente o princípio da superposição não pode ser aplicado, e portanto, as cargas tem que ser somadas antes de determinar a tensão. Por essa relação não linear qualquer fator de segurança deve ser aplicado na carga, e não na tensão.

Para uma tensão $\sigma_{m\acute{a}x}$, a equação (25) pode ser representada graficamente, como sendo KL/r em relação a P/A para vários valores de excentricidade ec/r^2 . A figura 12 representa um conjunto específico de curvas para o aço estrutural grau A-36 com ponto de escoamento $\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_e = 250MPa$ e modulo de elasticidade $E_{aço} = 200GPa$.

Figura 13 - Representação gráfica fórmula de Euler



Fonte: HIBELLER, 2010

Quando $e \rightarrow 0$, ou $\frac{ec}{r^2} \rightarrow 0$, a equação (25) nos diz que $\sigma_{m\acute{a}x} = P/A$, onde P é a carga crítica da coluna definida pela formula de Euller. Resultando assim na equação (12), estas equações são validas apenas para cargas elásticas, as tensões mostradas na figura (7) não podem ultrapassar $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$.

As curvas da figura 12 mostram que a diferença no índice de excentricidade tem efeito marcante na capacidade de carga com índices de esbeltez pequeno. Mas colunas com índices de esbeltez grandes tendem a falhar na carga crítica de Euller, independente do índice de excentricidade. Sendo assim, colunas de alto índice de esbeltez podem ser projetadas usando a formula de Euller.

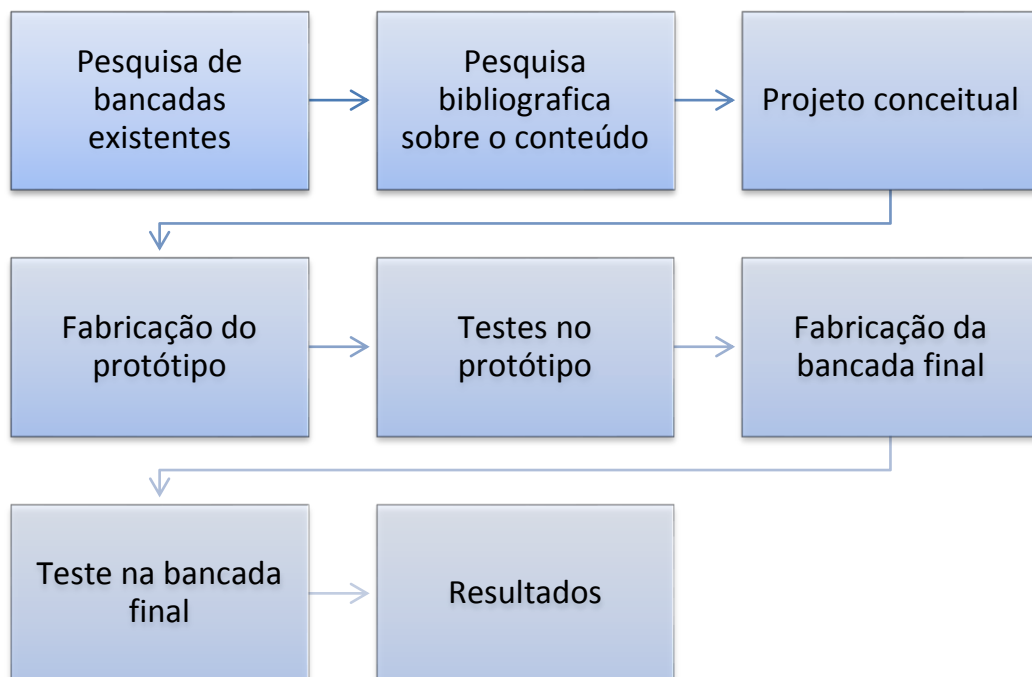
4 METODOLOGIA

A metodologia para o desenvolvimento desse trabalho partiu primeiramente de um projeto de concepção inicial de uma bancada tomando como base o modelo WP 121, figura 13, fabricado pela GUNT HAMBURG. E disponível em SYSTEMES DIDACTIQUES s.a.r.l que tem seu custo avaliado em R\$ 26.580,00, especificado no Anexo 1. Em seguida foram definidos os materiais utilizados, a construção e testes da bancada.

Figura 14 - WP 121

Fonte: <www.systemes-didactiques.fr/produit/161063>

O diagrama da figura 14, detalha como foi a sequência seguida para execução deste trabalho, visando a organização do mesmo.

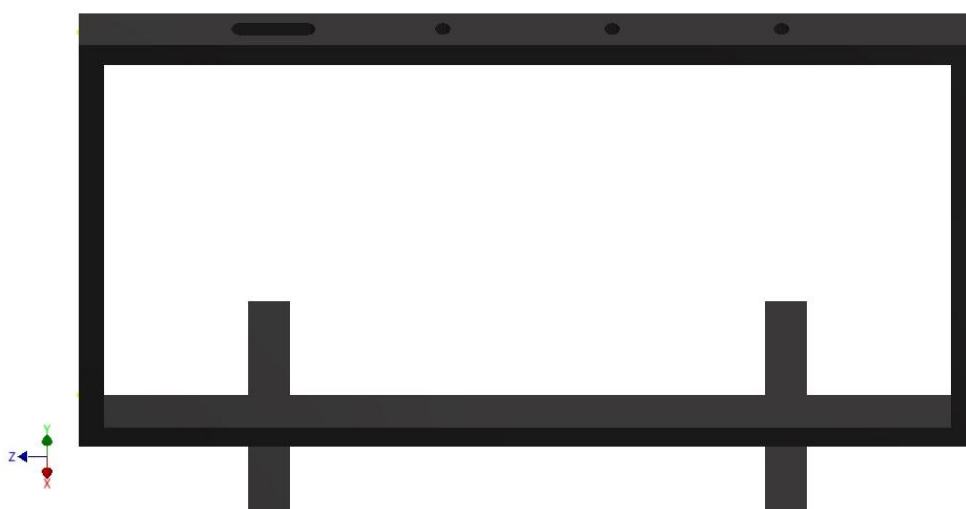
Figura 15 – Diagrama de execução do trabalho

Fonte: Própria autoria

4.1 PROJETO CONCEITUAL

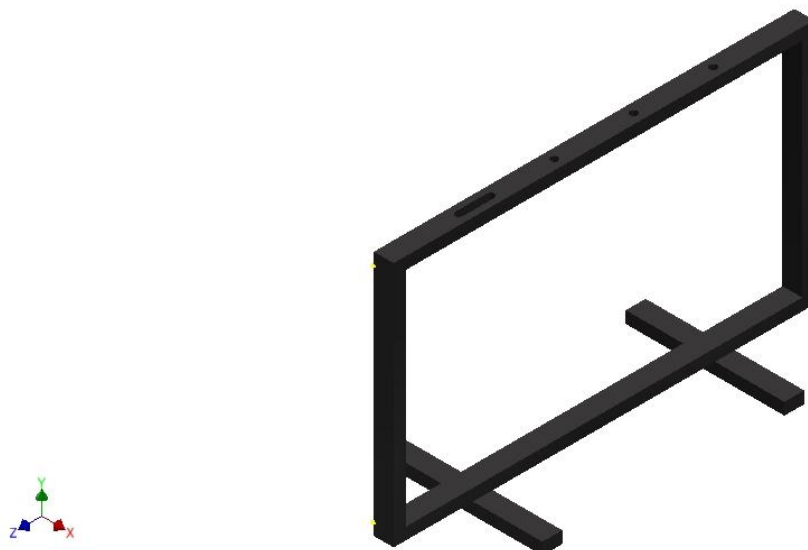
Para o dimensionamento da bancada, foi adotado quatro corpos de prova com mesmos comprimentos e seção transversal. E com essa informação, foi possível partir para o projeto final da bancada. Foi utilizado o software Inventor da Auto Desk, para desenho e modelagem de peças, e ainda plotar o desenho em folha de impressão para construção. Todos os desenhos do projeto conceitual estão no APÊNDICE A. O esboço do projeto desenvolvido no software Inventor está disposto nas figuras 15 e 16.

Figura 16 - Projeto conceitual da bancada no Inventor



Fonte: Própria autoria

Figura 17 - Projeto conceitual da bancada no Inventor



Fonte: Própria autoria

Para dimensionar este projeto, foram levados em consideração três fatores primordiais, sendo eles, comprimento do corpo de prova, material mínimo e mobilidade da bancada. Por se tratar apenas de uma estrutura de sustentação das colunas, onde os esforços envolvidos não iriam interferir nos cálculos do experimento de flambagem, o dimensionamento da estrutura não foi realizado, apenas atribuído com base em uma bancada preexistente já citada.

Sendo o comprimento do corpo de prova o fator mais importante, pois é a partir dele que se obtém as cargas necessárias para êxito do experimento com a bancada. Visando um projeto de baixo custo, não sendo viável o uso de material excessivo na construção da bancada, pesquisar por materiais mais acessíveis foi necessário afim de minimizar ao máximo o custo final do projeto. Por fim, dispor de uma bancada que viabilizasse o transporte sem muito esforço. O projeto se propôs a ter um peso relativamente baixo, de modo que pudesse ser exposto em sala de aula, que não ficasse preso em um único local, que pudesse ser usada pelo professor ou aluno de maneira prática

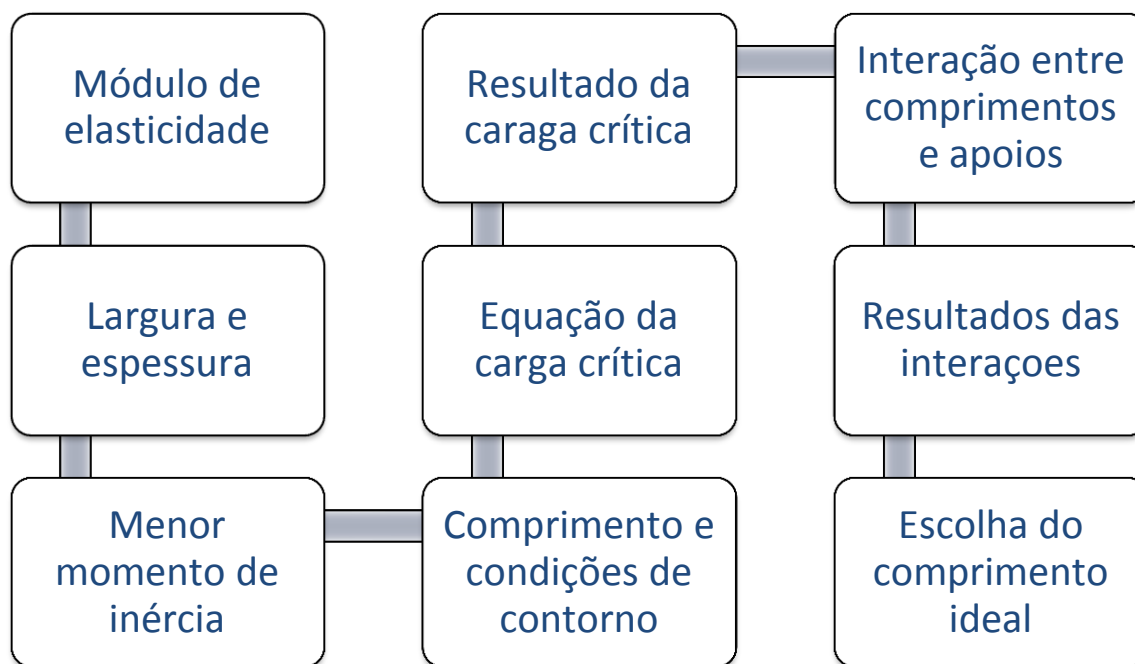
Uma parte essencial da bancada são suas relações de apoio, estão dispostas quatro configurações de apoio diferentes na bancada. A primeira configuração consiste nos apoios livre-engastado superior e inferior respectivamente. Que como já visto na solução das equações diferenciais tem o valor da constante $K=2$ devido as condições de contorno a que a coluna está sujeita. A segunda configuração é pino-pino, superior e inferior respectivamente. Esta conta com a constante $K=1$. A terceira configuração é engastada-engastada, e tem o valor

da constante $K=0,5$. E a última configuração consiste no engate da base e articulada na parte superior, que tem o valor da constante $K=0,7$.

4.2 CÁLCULO TEÓRICO DA FLAMBAGEM

A fórmula de Euler foi utilizada para calcular as cargas críticas para diferentes tipos de apoios, usado o software Excel 2016 para construção de uma planilha; foi feito um diagrama resumindo as etapas da planilha, figura 17. Esse estudo possibilitou que diferentes configurações de comprimento de coluna constantes, referentes aos apoios e a carga crítica de Euler, permitisse a visualização do fenômeno, sem que fosse necessário utilizar uma carga excessiva.

Figura 18 - Diagrama de execução da planilha de cálculos



Fonte: Própria autoria

A planilha ainda foi utilizada para maximizar os cálculos das cargas críticas com quatro diferentes configurações de apoio e facilitar a comparação dos mesmos. A partir de várias interações entre comprimento de coluna e diferentes configurações de apoio, chegou-se as dimensões ótimas.

Tendo em vista o peso total das cargas sobre os corpos de prova, foi estipulada uma faixa de peso que varia de 150 N à 250 N. Trabalhando nesta faixa, e associando com a tabela

1, pode-se então escolher um comprimento apropriado respeitando o índice de esbeltez. Essa faixa de peso foi escolhida para que as dimensões da bancada tivessem um tamanho adequado para que fosse visualizada de forma didática em sala de aula.

Inicialmente foram coletados e reunidos os dados necessários para os cálculos:

- Módulo de Elasticidade – Aço Inox
- Largura do corpo de prova;
- Espessura do corpo de prova;
- Menor momento de inercia.

Em seguida foram realizados os cálculos iniciais:

- Área da secção transversal;
- Comprimento do corpo de prova;
- Carga crítica.

O procedimento seguinte foi tabelar possíveis valores desejados para o comprimento (L) dos corpos de provas dispostos na tabela 1, para posterior projeto dimensional da bancada. Escolheu-se para os cálculos e análises comprimentos de 0,4 a 1,4 m, variando 0,1 m, como tem-se na primeira coluna da tabela 1.

Em seguida, para cada comprimento foi calculada a carga crítica para a configuração de apoio $k = 2$, depois a carga crítica para $k = 1$, idem para $k = 0,7$ e $k = 0,5$.

O próximo cálculo foi para estipular o peso máximo que a bancada iria suportar considerando o comprimento em questão das quatro barras, cada uma em sua configuração de apoio. Assim sendo, para o cálculo desse peso para cada comprimento (L) considerado foram somadas as quatro cargas críticas, por exemplo, para o comprimento $L = 0,4$ m, o peso máximo a ser suportado pela bancada seria:

$$P_{max} = (12,7 + 50,9 + 104 + 203,7) = 371,3 \text{ N}$$

Assim sendo, considerando as barras de comprimento de 0,4 m, se as quatro barras fossem levadas a carga crítica ao mesmo tempo, a bancada seria submetida a suportar 371,3 N.

Os resultados desses cálculos estão na tabela 1, sendo que o comprimento escolhido foi o de 0,5 m, este foi escolhido devido a proporção entre comprimento e peso suportado ser satisfatória para cumprir os requisitos de mobilidade e visualização. Com estes dados sobre comprimento carga crítica, relações de apoio, tensão crítica e de escoamento, foi possível a

viabilização de um protótipo afim de obter valores práticos das cargas críticas para os referentes apoios trabalhados.

Tabela 1 – Ilustração da planilha de cálculos

L (m)	Valores de K para cada Configuração				Peso Total (N)
	2	1	0,7	0,5	
	Carga Crítica (N)				
0,4	12,7	50,9	104,0	203,7	371,3
0,5	8,1	32,6	66,5	130,4	237,6
0,6	5,7	22,6	46,2	90,6	165,1
0,7	4,2	16,6	33,9	66,5	121,2
0,8	3,2	12,7	26,0	50,9	92,8
0,9	2,5	10,1	20,5	40,2	73,3
1	2,0	8,1	16,6	32,6	59,3
1,1	1,7	6,7	13,7	26,9	49
1,2	1,4	5,7	11,6	22,6	41,3
1,3	1,2	4,8	9,8	19,3	35,1
1,4	1,0	4,2	8,5	16,6	30,3

4.3 PROTÓTIPO DA BANCADA

Inicialmente foi construído um protótipo da bancada em madeira, para fins de análise das condições de apoio e teste de carga. O protótipo está disposto na figura 18, seguindo os parâmetros do projeto da bancada, neste caso, sendo o mais importante a altura, que tem como objetivo, representar identicamente o comprimento do corpo de prova do projeto.

O protótipo foi inicialmente executado de modo a representar três configurações diferentes, sendo elas: pino-pino ($K=1$), engastado-engastado ($K=0,5$) e engastado-pino ($K=0,7$). Sendo que as condições de contorno foram reproduzidas coerentemente com as teóricas dentro de nossas limitações de estrutura de laboratório. O desenho técnico do protótipo da bancada está disposto no Apêndice B.

Figura 19 - Protótipo da bancada



Fonte: Própria autoria

4.4 TESTE NO PROTÓTIPO

Com os dados referentes as cargas críticas, foi possível definir a carga para o teste prático, logo após, foram adicionados pesos gradativamente em cada uma das relações de apoio mostradas na figura 19, de modo a observar a quantidade de carga suficiente para que houvesse flambagem no corpo de prova e comparar com a literatura aferindo o erro.

Figura 20 - Teste de carga no protótipo



Fonte: Própria autoria

Repetido o processo para cada configuração subsequente, e monitorando os resultados para que fosse possível uma comparação com os valores teóricos. Para efetuar as medidas de peso foi usada duas balanças, uma de alta precisão da SHIMADZU modelo AUY220 com precisão de 0,1 mg, mostrada na figura 20, outra balança da MARTE modelo LS200 com precisão de 50g, mostrada na figura 21.

Figura 21 - Balança de alta precisão- AUY220



Fonte: Própria autoria

Figura 22 - Balança de baixa precisão- LS200



Fonte: Própria autoria

4.5 CONSTRUÇÃO DA BANCADA EXPERIMENTAL DIDÁTICA

O ponto de partida do projeto se deu na escolha da geometria da seção transversal da coluna, visto que a flambagem ocorre no eixo de menor momento de inércia, uma coluna de seção circular ou quadrada não seria possível definir em torno de que eixo a flambagem iria acontecer, uma seção retangular satisfaz a condição da direção da flambagem.

Definida a geometria da seção, deu-se continuidade com o estudo entre o peso e as dimensões, uma relação que está diretamente ligada é a (carga crítica/índice de esbeltez), como visto, o índice de esbeltez está diretamente associado a seção e o comprimento da coluna. Sendo assim o ponto ideal para o início do processo de dimensionamento do corpo de prova.

O corpo de prova escolhido e utilizado foi uma régua de aço inoxidável tendo $1,2 \times 30,245 \text{ mm}$ mostrado na figura 22, tendo em vista a dificuldade e um custo de fabricação considerável de um corpo de prova específico. Esta solução, foi uma alternativa encontrada mediante o material e suas propriedades atenderem as expectativas de elasticidade e resistência do projeto conceitual.

Figura 23 - Corpo de prova



Fonte: Própria autoria

Com as devidas medições referentes ao corpo de prova, foi calculado o índice de esbeltez, no intuito de verificar a possibilidade do uso da teoria de Euler para carga crítica. Todas as dimensões do corpo de prova foram feitas com o auxílio de um paquímetro (*Vernier Caliper With Titanium Plated Beam 0 – 150 x 0,05 mm 0 – 6 x 0,001" code 1219 – 1502*). As medidas da seção foram coletadas e transferidas para

uma planilha, foi adotado o módulo de elasticidades em torno dos 190 GPa (NORTON, 2013), para o aço inoxidável.

Foram empregados na construção da bancada os seguintes materiais:

- Tubo de seção retangular galvanizado de seção $50\text{mm} \times 30\text{mm}$;
- Tubo de seção quadrada galvanizado de seção $20\text{mm} \times 20\text{mm}$;
- Chapa de aço de seção $2\text{mm} \times 19\text{mm}$;
- Tubo de aço de seção circulas 19mm de diâmetro;
- Parafusos sextavados e porcas;
- Ponteiras de plástico $50\text{mm} \times 30\text{mm}$;
- Solda;
- Tinta específica para metais;
- Réguas de aço inoxidável (corpos de prova);
- Lixa específica para metais 220 grãos por cm^2 .

O projeto devidamente impresso, disposto no apêndice A, foi levado ao laboratório de usinagem da UFERSA Campus Caraúbas, onde o processo de fabricação teve início com os tubos de seção retangulares, todas as peças foram cortadas usando uma serra específica, sendo os cortes feitos com os ângulos de 45° e 90° . As imagens 23, 24 e 25, mostram o processo de corte das partes da bancada.

Figura 24 - Tubo de seção retangular no processo de corte



Fonte: Própria autoria

Figura 25 - Corte no tubo de seção retangular 50 x 30 mm de 90°



Fonte: Própria autoria

Figura 26 - Corte no tubo de seção retangular 50 x 30 mm de 45°



Fonte: Própria autoria

Após as barras serem devidamente cortadas, a barra superior foi levada a furadeira. Onde foram feitos os furos superiores onde posteriormente se encaixariam os suportes dos pesos. O processo de perfuração está sendo representado pela imagem 26.

Figura 27 - Tubo de seção retangular superior no processo de perfuração

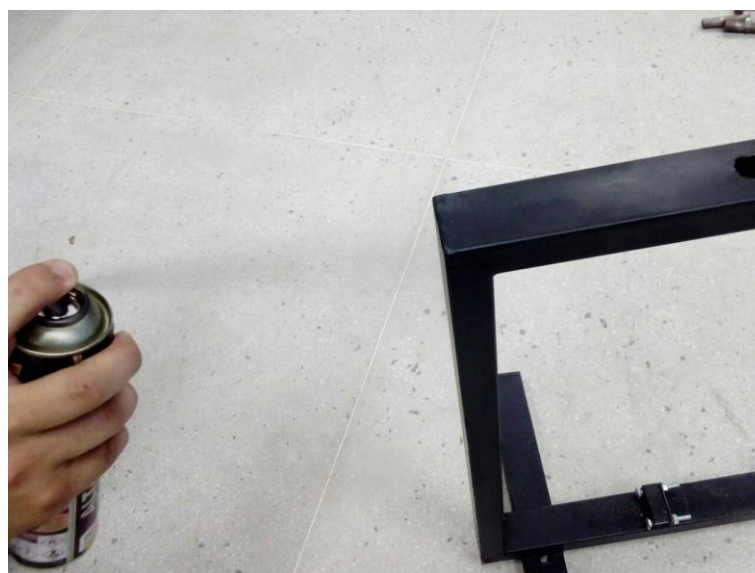


Fonte: Própria autoria

Após os cortes, todas as peças foram soldadas de modo a formarem a estrutura representada no projeto. Também foram soldados os apoios na barra inferior.

Após a soldagem da bancada, a mesma passou por um processo de acabamento, sendo lixada com uma lixa de 220 grãos por cm^2 e pintada com tinta apropriada para metais. A imagem 27 exibe o processo de acabamento da bancada.

Figura 28 - Processo de acabamento da bancada



Fonte: Própria autoria

Posteriormente foram confeccionados os suportes superiores utilizando a barra de seção circular e uma peça de madeira, mostrados nas imagens 28 e 29. Assim concluindo-se o processo de fabricação do projeto físico. Sendo mostrado na imagem 30 a bancada finalizada.

Figura 29 - Suporte superior da bancada



Fonte: Própria autoria

Figura 30 - Suporte superior da bancada



Fonte: Própria autoria

Figura 31 - Bancada finalizada



Fonte: Própria autoria

4.6 TESTE DE CARGA NA BANCADA

Os testes na bancada final seguiram os mesmos passos dos testes realizados no protótipo.

5 RESULTADOS E DISCURSSÕES

Tendo uma seção transversal retangular do corpo de prova alternativo, foi necessário saber se este realmente seria capaz de atender as necessidades do projeto. Para tal foi necessário saber se o mesmo se encaixa nas condições para que a teoria de Euler fosse aplicada.

Índice de esbeltez da coluna – Barra Aço Inoxidável

Para que uma carga crítica de flambagem seja calculada pela fórmula de Euler, a mesma deve ter um índice de esbeltez maior ou igual a 89 para o aço.

$$\left(\frac{L_e}{r}\right)_{aço} \geq 89 \quad (I)$$

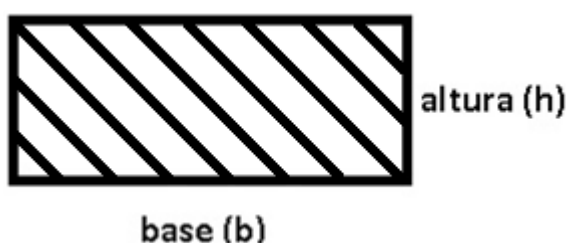
Onde:

L_e = comprimento efetivo da coluna

r = menor raio de giração da coluna

Para que seja possível definir este índice é necessário saber das propriedades geométricas da coluna, para isso foram efetuadas diversas medidas na seção transversal do corpo de prova representada pela figura 31. Utilizando o paquímetro (*Vernier Caliper With Titanium Plated Bean 0 – 150 x 0,05 mm 0 – 6 x 0,001" code 1219 – 1502*) disposto no laboratório de metrologia do campus UFERSA Caraúbas. E estão dispostos na tabela 2, os valores medidos.

Figura 32 - Representação da seção transversal do corpo de prova



Fonte: Própria autoria

Tabela 2 – Dimensões da seção do corpo de prova

Medidas da seção em (mm)											Média
Altura	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
Base	30,2	30,2	30,3	30,3	30,2	30,25	30,3	30,2	30,3	30,2	30,245

Com estes dados obtemos o menor momento de inercia.

$$I_x = \frac{1}{12} b \cdot h^3 \quad (II)$$

$$I_x = \frac{1}{12} (0,030245) \cdot (0,0012)^3$$

$$I_x = 4,355 \times 10^{-12} \text{ m}^4$$

Definindo a área da seção transversal do corpo de prova:

$$A = b \times h \quad (III)$$

$$A = 0,030245 \times 0,0012$$

$$A = 3,6294 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

Com o valor da equação (II) e uma área de seção igual a $3,6294 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ obtido da equação (III), definimos o raio de giração da coluna disposto na equação (2):

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2)$$

$$r = \sqrt{\frac{4,355 \times 10^{-12}}{3,6294 \times 10^{-5}}}$$

$$r = 3,464 \times 10^{-4}$$

Com os valores de I , r , e o comprimento do corpo de prova podemos calcular o índice de esbeltez da barra utilizada no experimento dado pela equação (1).

$$\frac{L}{r} \quad (1)$$

$$\frac{L}{r} = \frac{0,5}{3,464 \times 10^{-4}}$$

$$\frac{L}{r} = 1443,418$$

Utilizando o resultado da equação (2) na equação (3), e com uma faixa de comprimento que varia de $0,4 \text{ m}$ à $1,4 \text{ m}$, e uma constante $k = 0,5$, que é o menor comprimento efetivo da coluna, temos uma variação no índice de esbeltez mostrada na tabela 3.

Tabela 3 – Índice de esbeltez para os comprimentos de corpo de prova

L	$\frac{L_e}{r}$
0,4	577,36
1,4	2020,78

Sabendo que o índice de esbeltez mínimo para uso do método de Euler em uma coluna de aço é de $\left(\frac{L_e}{r}\right)_{aço} \geq 89$, visto que os índices são superiores ao mínimo, assim, a equação de Euler pode ser usada para cálculo da carga crítica.

Tensão de escoamento

Adotando a tensão de escoamento do aço inoxidável como sendo 241 MPa (Shigley, 2010), é importante saber se o corpo de prova suporta a força axial sem que haja falha, a tensão crítica de Euler é dada pela equação (IV).

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} \quad (IV)$$

Para uma coluna com comprimento de $0,4 \text{ m}$ temos:

$$\sigma_{cr} = \frac{203,7}{3,6294 \times 10^{-5}}$$

$$\sigma_{cr} = 5,61 \text{ MPa}$$

Para uma coluna com comprimento de $1,4 \text{ m}$ temos:

$$\sigma_{cr} = \frac{16,6}{3,6294 \times 10^{-5}}$$

$$\sigma_{cr} = 0,457 \text{ MPa}$$

Sempre adotando a configuração de apoio que suporta maior quantidade de carga, que seria a relação engastado – engastado. Constatada a tensão crítica de Euler muito a baixo da tensão de escoamento do aço inoxidável que é em torno de 241 MPa segundo (Shigley, 2010), podendo então ser feito os procedimentos de carga sem nenhuma possibilidade de falha do material.

Resultados dos testes de carga - Protótipo

Com o protótipo da bancada concluído, foram conduzidos testes de carga, figura 32, no intuito de se comprovar a carga crítica de flambagem e a deflexão do corpo de prova, primeiramente dispondo da planilha1, temos os valores teóricos das cargas críticas, estes estão dispostos na tabela 4.

Figura 33 - Teste de carga no protótipo

Fonte: Própria autoria

Tabela 4 – Valores teóricos de carga crítica para o corpo de prova de 0,5 m.

K	2	1	0,7	0,5
Peso (N)	8,1	32,6	66,5	130,4

Partindo para o teste de carga, obteve-se os valores dispostos na tabela 5, sendo eles referente as respectivas configurações de apoio.

Tabela 5 – Resultados do teste de carga no protótipo da bancada

K	2	1	0,7	0,5
Peso (N)	-	25,506	49,05	107,91

Com estes valores foi observado que já havia flambagem no corpo de prova, visto que a carga crítica de flambagem foi atribuída a pequenas deflexões podemos concluir que, de fato a formula de Euler descreve perfeitamente os comprimentos efetivos e a deflexão devido ao carregamento axial. Não foi adicionado carga superior a crítica de modo a evitar o equilíbrio instável, este que resultaria na deflexão irreversível do corpo de prova, e ainda a incapacidade de usá-lo novamente em posteriores demonstrações.

Resultados dos testes de carga – Bancada

Com os resultados satisfatórios e coerentes com os teóricos obtidos no protótipo, partimos então para o teste de carga na banca finalizada. Usando os mesmos valores teóricos da tabela 4, pois os corpos de provas são os mesmos. Os valores obtidos no teste de carga da bancada estão dispostos na tabela 6, e a imagem 33, mostra o processo de carregamento axial de um corpo de prova e sua forma defletida.

Tabela 6 – Resultados dos testes de carga na bancada experimental

K	1	0,7	0,5	2
Peso (N)	32,373	64,746	120,663	5,533

Figura 34 - Teste de carga final



Fonte: Própria autoria

Comparando os resultados da tabela 6 em relação a 5, por meio da tabela 7, foi possível ter uma conclusão a respeito do trabalho.

Tabela 7 – Erro em % entre os valores teóricos e experimentais

	K=2	K=1	K=0,7	K=0,5
Teórico (N)	8,1	32,6	66,5	130,4
Protótipo (N)	-	25,506	49,05	107,91
Erro % Protótipo	-	21,76%	26,24%	17,24%
Bancada (N)	5,533	32,373	64,746	120,663
Erro % Bancada final	31,69 %	0,69%	2,63%	7,46%

Erros do experimento

Todo experimento prático tem um erro atribuído, sendo eles advindos de diversos fatores, seja na execução, por parte do material ou meio não serem ideais, dentre outros.

Os principais erros deste experimente são devidos a, não homogeneidade do material do corpo de prova, não retidão do corpo de prova, não homogeneidade das medidas do corpo de prova, a distribuição de carga não pontual, a folga nos furos superiores e os apoios não ideais.

Com tudo, foram conduzidos os trabalhos de modo a diminuir o máximo possível estes erros, buscando alternativas para os problemas de maior peso quanto ao resultado, um dos maiores foram a folga nos furos e os suportes superiores. Sendo amenizado com o acréscimo de um guia na parte inferior da barra, mostrada na figura 34.

Figura 35 - Guia do suporte superior

Fonte: Própria autoria

Os suportes superiores foram submetidos a um processo de lixamento e depois foram lubrificados para que pudessem ter o mínimo de atrito possível com o guia.

Análise de erro

Os erros do protótipo das três condições possíveis, ficarão entre 17,24% e 26,24%, um erro relativamente alto, sendo este protótipo um meio de observar e estudar possíveis melhorias na execução da bancada de flambagem, novos meios foram usados afim de diminuir este percentual em relação aos valores teóricos

Observando a tabela 7 relativa a bancada, as condições de contorno pino-pino e engastado-pino tem um erro muito pequeno, menor que 5%, sendo assim aceitável e coerente com a teoria, a condição de contorno engastado-engastado teve um erro de 7,46%, ultrapassando um pouco a casa dos 5%, este erro um pouco maior que os demais se deu pelo fato de suportar a maior carga crítica, esta carga sendo, 3,7 superior a suportada pela condição pino-pino, e 1,86 superior a condição pino-engastada, exigindo ainda mais dos fatores contrários ao experimento.

A condição engastado-livre teve um erro muito elevado na casa dos 31,69%, esta condição foi a que mais sofreu com as disparidades das medidas do corpo de prova, sendo um corpo extremamente esbelto, com uma seção muito laminar, esta condição não será bem representada para estas medidas de corpo de prova, devido o corpo ser muito esbelto, ele tende a ter flambagem antes mesmo de ser carregado, ainda pelo fato de suportar uma carga extremamente pequena se comparado as demais condições de apoios, dificulta mais ainda considerar este elemento sem peso, entretanto se diminui as disparidades do corpo de prova certamente obteremos um resultado coerente com o teórico para sua devida carga crítica.

6 CONCLUSÃO GERAL

Teve-se êxito no objetivo principal do projeto, que era a construção de uma bancada de ensaio de flambagem de colunas. As teorias de embasamento deste trabalho foram comprovadas por meio de observações e testes. Não obtivemos resultados tais quais os teóricos pois as condições teóricas são impossíveis de se reproduzir, mas uma aproximação consideravelmente alta foi alcançada, assim satisfazendo as condições impostas.

Tendo em vista contribuir de forma positiva com a universidade, um material didático consiste em atingir tanto a metodologia do professor, quanto o aprendizado dos alunos, sendo assim de suma importância novos mecanismos para que a universidade melhore ainda mais sua capacidade de formar ótimos profissionais.

7 TRABALHOS FUTUROS

O objetivo é abrir espaço para que novos materiais didáticos sejam produzidos dentro do espaço acadêmico, servindo de base para novos experimentos práticos que venham a ser desenvolvidos, e o aprimoramento deste mesmo futuramente. Uma sugestão interessante seria mudar o material utilizado, bem como a geometria da barra utilizada para verificar a influência na prática. Uma sugestão adicional seria instrumentar a bancada com células de carga bem como com sensores de deslocamento para mensurar os deslocamentos laterais das barras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON JR, E. Russel. **Resistência dos materiais**. 3 ed. São Paulo: Pearson Makron books, 1995.

BUDYNAS, Richard G. **Elementos de máquinas de Shigley**. 8 ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos materiais**. 7 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010

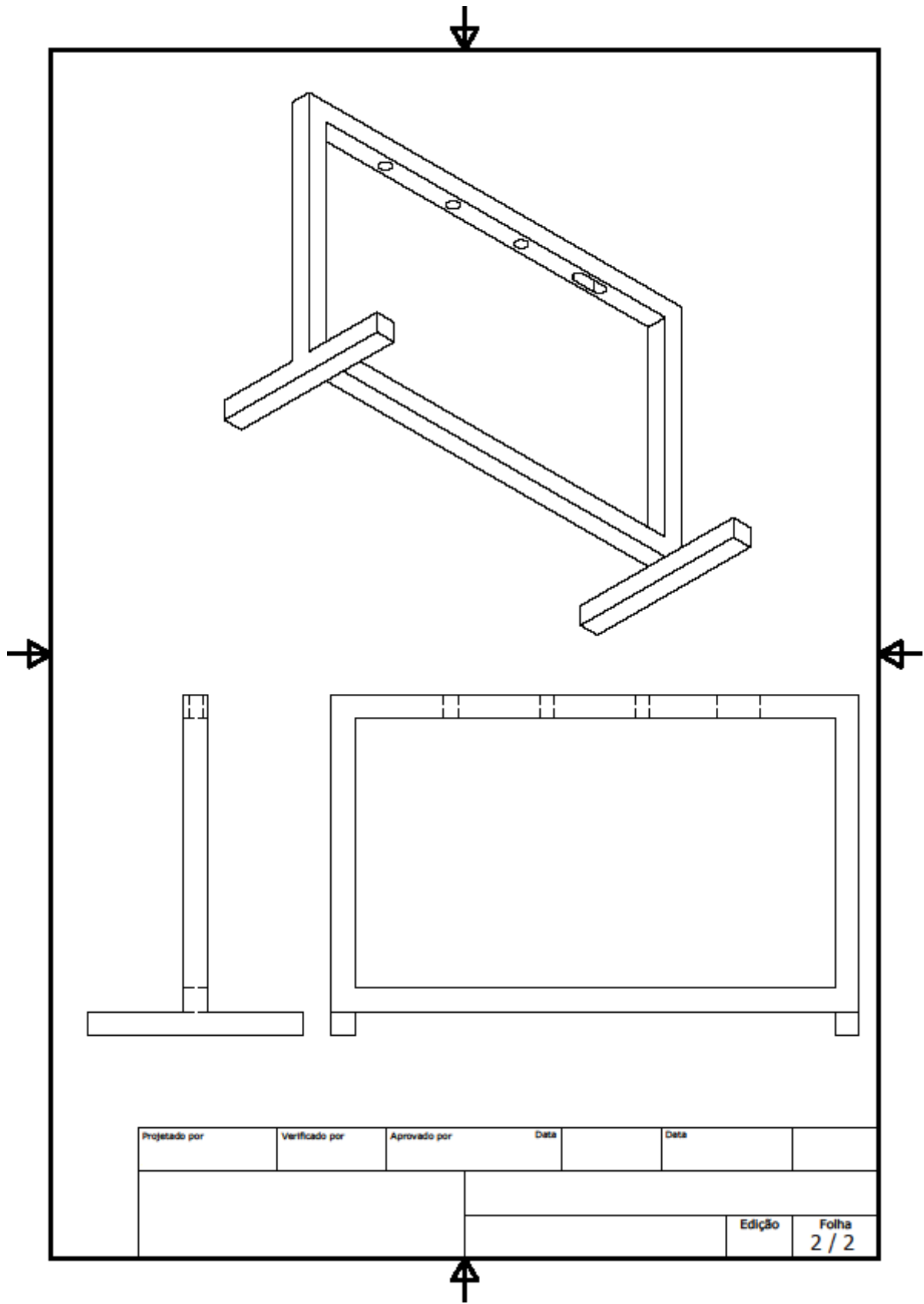
MANUAL TCC (em slides) – Sistemas de Bibliotecas - UFERSA. Disponível em: <<http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/232/arquivos/Manual%20de%20TCC%20da%20UFERSA.pdf>>

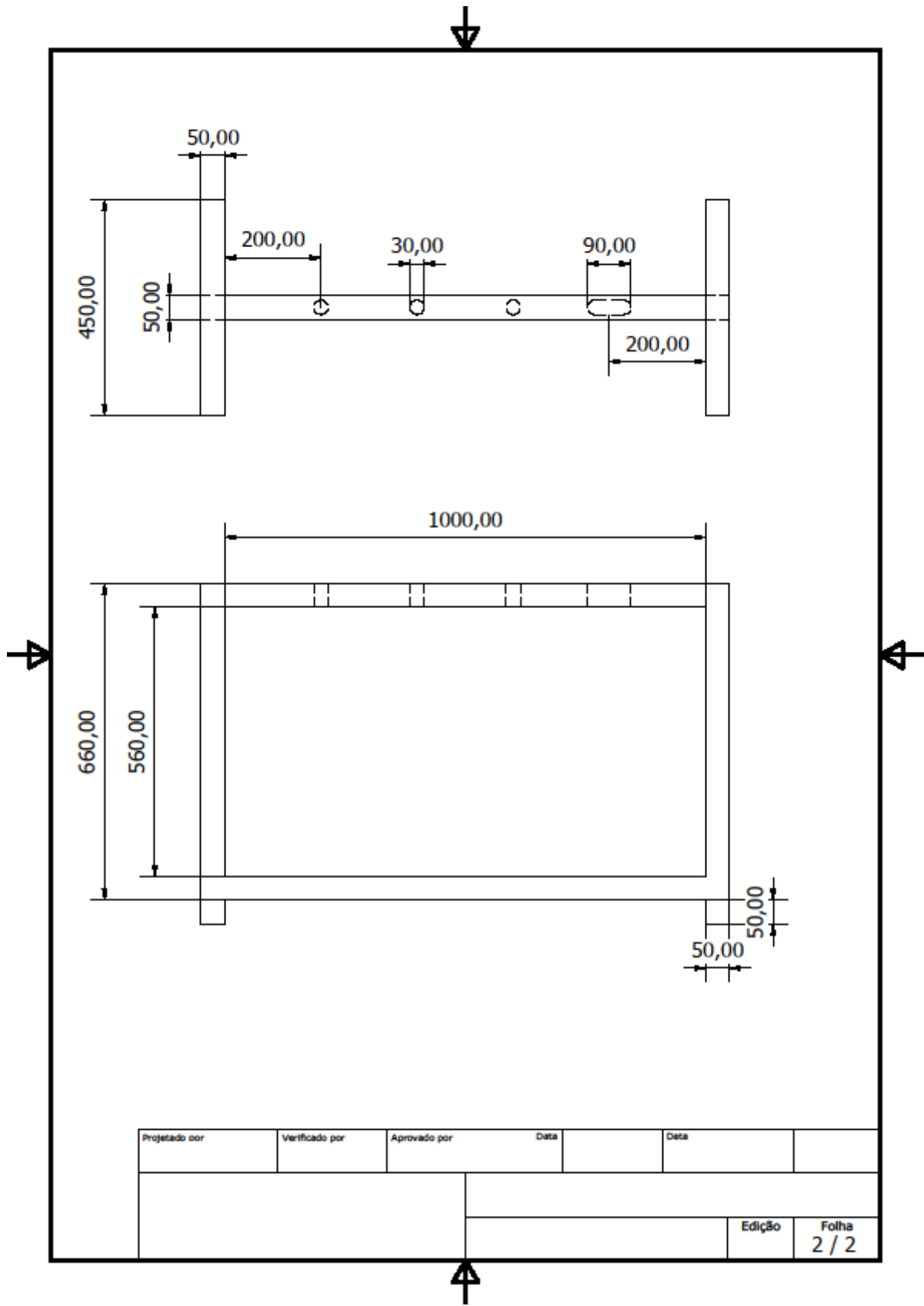
NORTON, Robert L. **Projeto de máquinas**. 4 ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

POPOV, Egor Paul. **Introdução à mecânica dos sólidos**. São Paulo: Edgard Blucher, 1978.

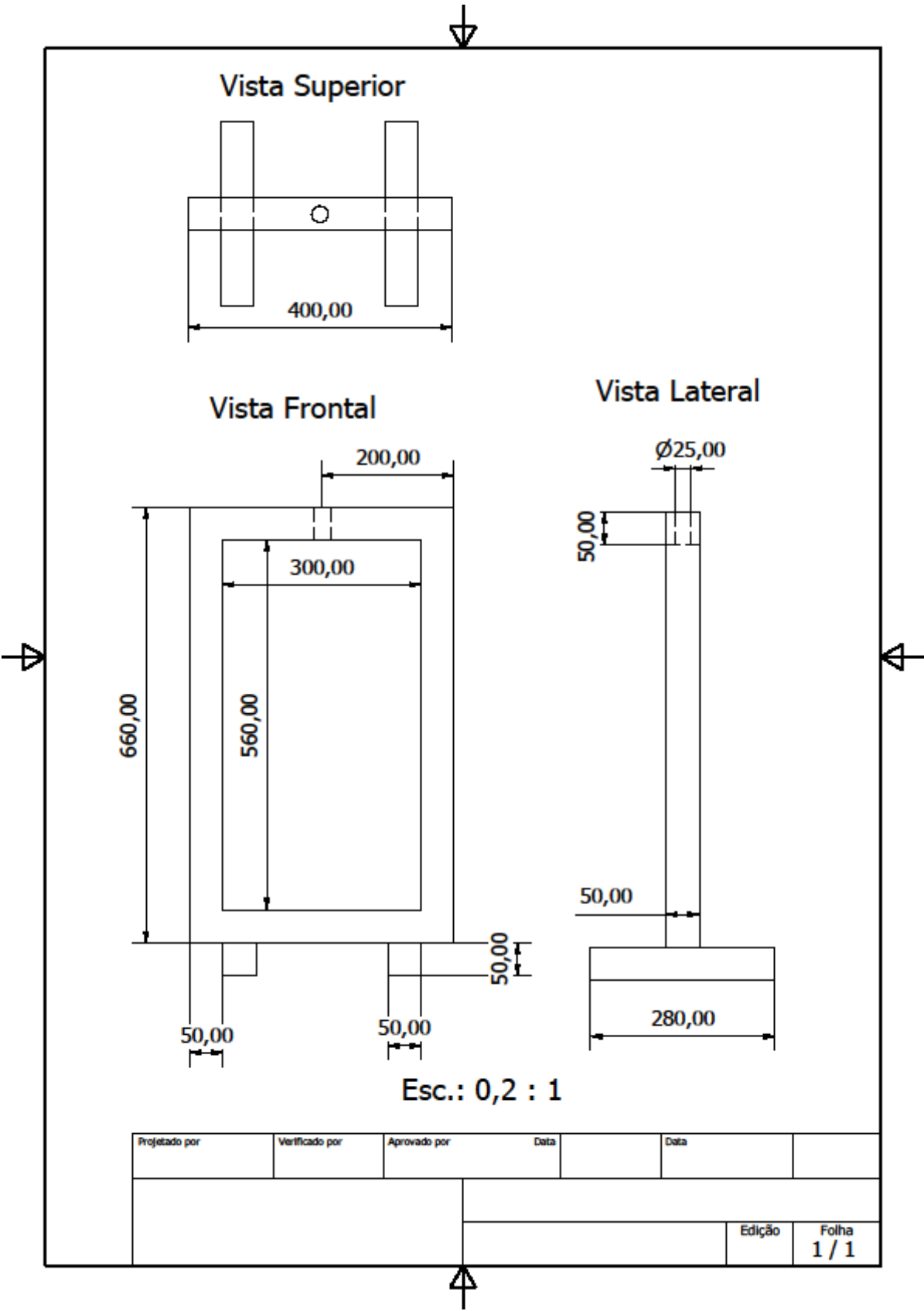
SYSTEMES DIDACTIQUES s.a.r.l. **WP 121**. Disponível em: <<https://www.systemes-didactiques.fr/produit/161063>> acessado em: 12 jul. 2017.

APÊNDICE A – DESENHOS TÉCNICOS DA BANCADA EXPERIMENTAL





APÊNDICE B – DESENHO TÉCNICO DO PROTÓTIPO DA BANCADA



ANEXO I – FICHA DE PREÇO DO MODELO WP 121



Recife, 12 de Julho de 2017.

PROPOSTA Nº. 20124/17

Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA

RN 233, KM 01, Sítio Nova Esperança II

CEP: 59700-000, Caraúbas/RN – Brasil

Tel: (84) 3317-8505/99993-6350

A/C: Sr. Ilkenne Cassio Rodrigues Vitorino – ilkenne.rdq@gmail.com

Prezado Sr.. Ilkenne Rodrigues,

Atendendo solicitação de V.Sa., informamos as condições para fornecimento do material abaixo, fabricado por nossa representada, com exclusividade no Brasil, **GUNT HAMBURG**.

ITEM	QTD	MODELO	EXPERIMENTO	DESCRIÇÃO	FOTO ILUSTRATIVA	PREÇO EM REAIS (R\$)
1.	1	WP 121	Demonstration of Euler Buckling	-Demonstration of all buckling cases of Euler buckling -Buckling length clearly visible with various methods of support - Include 4 steel test bars - Test bars made of spring steel -Set of finely graduated weights		25.060,00
2.	4	470.00052	Kit of Demonstration Bars	4 Bars to demonstration of Euler Buckling	No image	1.520,00
PREÇO TOTAL EM REAIS (R\$)						26.580,00

OBSERVAÇÕES:

1. Prazo de Entrega: 180 dias após a colocação do pedido.
2. Validade da Proposta: Válida por 30 dias porém, para flutuações no câmbio do euro maiores que 5% do dia de hoje, o valor da proposta poderá ser revisto dentro deste prazo.
3. Condições de Pagamento: Antecipado.
4. Garantia: 01 (um) ano contra defeitos de fabricação.
5. Fabricante: **GUNT HAMBURG**
6. Entrega do Equipamento: UFERSA – Campus Caraúbas
7. Material: Manual do equipamento e material de instrução.

Atenciosamente,

Milrian Mendes – Phd in Optics

Diretora Geral

Setup Kit4Labs

Telefone: +55 81 997866527 / +55 81 981750665

E-mail: milrian@setuplasers.com.br

Skype: milrian

Web Page: www.setuplasers.com.br/kit4Labs

Setup Kit4Labs
Rua Prof. Luis Freire , 700, CDU, ITEP - Bloco C , Sala 08 - Recife-PE
[http:// www.setuplasers.com.br](http://www.setuplasers.com.br), Email: contato@setuplasers.com.br
Tel: 81 98175-0665