



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

RONALDO OLIVEIRA DE ARAUJO JUNIOR

**RESSIGNIFICAÇÃO DO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: UMA
ABORDAGEM COM MAIS APLICAÇÕES**

CARAÚBAS

2024

RONALDO OLIVEIRA DE ARAUJO JUNIOR

**RESSIGNIFICAÇÃO DO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: UMA
ABORDAGEM COM MAIS APLICAÇÕES**

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Antonival Lopes do Nascimento Filho

CARAÚBAS

2024

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

A658r Araujo Junior, Ronaldo Oliveira de.
Ressignificação do ensino de equações
diferenciais: uma abordagem com mais aplicações /
Ronaldo Oliveira de Araujo Junior. - 2024.
62 f. : il.

Orientador: Antonival Lopes do Nascimento
Filho.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2024.

1. metodologia. 2. equações diferenciais. 3.
engenharias. I. Nascimento Filho, Antonival Lopes
do, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Caraúbas
Bibliotecária: Dalvanira Brito Rodrigues
CRB: 15/700

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

RONALDO OLIVEIRA DE ARAUJO JUNIOR

**RESSIGNIFICAÇÃO DO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: UMA
ABORDAGEM COM MAIS APLICAÇÕES**

Monografia apresentada à Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como requisito
para obtenção do título de Bacharel em
Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 18 / 10 / 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonival Lopes do Nascimento Filho (UFERSA)
Presidente

Prof^ª. Dra. Kelyane Barboza de Abreu (UFERSA)
Membro Examinador

Prof^ª. Dra. Dayane Santos de Lira (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha mãe, Zeneide Torres, e ao meu pai, Ronaldo Oliveira, pelo apoio incondicional e por sempre acreditarem em mim. Aos meus irmãos, Anderson Torres e Gleydson Torres, por estarem sempre ao meu lado, oferecendo incentivo e motivação para continuar.

Meus mais sinceros agradecimentos aos meus amigos Mairo Airan e Caio Max, que estiveram comigo desde o início desta jornada, e a todos os amigos que fiz ao longo dos anos, que tornaram essa caminhada mais simples e divertida.

Expresso também minha gratidão ao meu orientador, cuja orientação e paciência foram essenciais para a realização deste trabalho. Agradeço também à banca avaliadora, cujas contribuições enriqueceram ainda mais esta pesquisa.

Por fim, agradeço à Universidade Federal Rural do Semi-Árido, que proporcionou o ambiente e as ferramentas necessárias para a construção deste trabalho, assim como todos os professores que de alguma forma contribuíram para que isso fosse possível.

“Conhecimento não é aquilo que você sabe,
mas o que você faz com aquilo que você
sabe.”

Aldous Huxley

RESUMO

Esta pesquisa investiga o distanciamento entre a disciplina de Equações Diferenciais e os cursos de engenharia, destacando a importância de uma metodologia de ensino baseada em aplicações. Para isso, serão abordados os métodos tradicionais de ensino, a modelagem e as aplicações das equações diferenciais, além dos benefícios e desafios de uma abordagem orientada para aplicações. Exemplos práticos serão apresentados e será realizada uma coleta de opiniões de docentes e discentes sobre essa metodologia. A pesquisa terá um caráter descritivo e exploratório, buscando compreender a relevância das aplicações no ensino de equações diferenciais nas engenharias.

Palavras-chave: metodologia; equações diferenciais; engenharias.

ABSTRACT

This research investigates the gap between the Differential Equations course and engineering programs, highlighting the importance of an application-based teaching methodology. To this end, traditional teaching methods, modeling, and the applications of differential equations will be addressed, as well as the benefits and challenges of an application-oriented approach. Practical examples will be presented, and opinions from faculty and students about this methodology will be collected. The research will have a descriptive and exploratory character, aiming to understand the relevance of applications in teaching differential equations in engineering programs.

Keywords: methodology; differential equations; engineering.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Preferência de formação da turma matriculada em Equações Diferenciais.....	22
Gráfico 2 – Respostas acerca do ensino mecanizado das equações diferenciais.....	23
Gráfico 3 – Respostas acerca da abordagem de problemas reais.....	24
Gráfico 4 – Tipos de problema.....	25
Gráfico 5 – Metodologias utilizadas na disciplina de Equações Diferenciais.....	28
Gráfico 6 – Foco dado à disciplina de equação diferencial.....	29
Gráfico 7 – Utilidade da disciplina Equações Diferenciais.....	30
Gráfico 8 – Preferência de atividade dos alunos.....	31
Gráfico 9 – Respostas acerca da motivação dos alunos.....	33
Gráfico 10 – Respostas dos professores acerca das dificuldades dos alunos.....	34
Gráfico 11 – Respostas dos professores acerca dos problemas de equações diferenciais.....	35
Gráfico 12 – Respostas acerca da abordagem de problemas de modelagem.....	37
Gráfico 13 – Resposta acerca da eficiência das aplicações no ensino-aprendizagem.....	38
Gráfico 14 – Respostas acerca da utilização de equações diferenciais.....	39
Gráfico 15 – Área de ensino dos docentes.....	41
Gráfico 16 – Resposta dos professores acerca da importância das equações diferenciais.....	42
Gráfico 17 – Opinião acerca da importância das equações diferenciais para os discentes.....	43
Gráfico 18 – Frequência de utilização dos conceitos de equações diferenciais.....	44
Gráfico 19 – Compreensão dos conceitos de equações diferenciais nas disciplinas de engenharia.....	45
Gráfico 20 - Representação da quantidade de sal no tanque em função do tempo.....	51
Gráfico 21 - Temperatura do bolo em função do tempo.....	57

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Recursos ou atividades de interesse dos alunos de Equações Diferenciais.....	26
Quadro 2 – Sugestão dos alunos para tornar as aulas mais envolventes e relevantes.....	27
Quadro 3 – Sugestão dos alunos da engenharia.....	31
Quadro 4 – Sugestão dos professores para tornar a disciplina mais envolvente e relevante....	39
Quadro 5 – Opinião dos professores da engenharia.....	46

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	12
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	13
2.1 Ensino Tradicional.....	13
2.2 Modelagem e Aplicações.....	15
2.3 Benefícios da Metodologia Baseada em Aplicações.....	17
2.3.1 Desafios.....	19
3 METODOLOGIA.....	20
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	21
4.1 Questionário para os alunos de Equações Diferenciais.....	21
4.2 Questionário para os alunos de engenharia.....	28
4.3 Questionário para os professores de Equações Diferenciais.....	32
4.4 Questionário para os professores das engenharias.....	40
5 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES.....	48
5.1 Problema de mistura.....	48
5.2 Problema do oscilador.....	51
5.3 Problema da lei de resfriamento de Newton.....	53
5.4 Problema de crescimento e decrescimento.....	57
5.4.1 Problema do cultivo de bactérias.....	58
5.4.2 Problema da meia-vida.....	60
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	61
REFERÊNCIAS.....	64

1 INTRODUÇÃO

A matemática é um dos pilares fundamentais que sustentam diversas áreas do conhecimento humano. Sua aplicação é essencial em diversos campos, dentre eles: eletrônica, desenvolvimento de software e aprendizado de máquina, demonstrando seu papel crucial no avanço científico.

Sabe-se que a matemática é uma aliada importante para o desenvolvimento de boa parte das teorias presentes nos cursos de engenharia, sendo ela responsável pela solução de diversos problemas complexos. No entanto, quando presentes nesses cursos, as disciplinas de cálculo se apresentam, por diversas vezes, de maneira puramente teórica, mantendo um caráter abstrato, e distanciando-se da proposta prática das engenharias.

Aliar a teoria com a prática não é um desafio exclusivo das disciplinas de cálculo. Limitações como: salas de aulas cheias, extensa ementa e limitações no ambiente de estudo estão presentes nos mais variados tipos de disciplinas. No entanto, se tratando das disciplinas de cálculo, mais especificamente de Equações Diferenciais, essas dificuldades podem ser ainda maiores devido ao aspecto abstrato citado anteriormente.

Todavia, abordar problemas mais próximos da engenharia, ou seja, problemas de modelagem e aplicação, pode ser uma alternativa viável no que diz respeito ao ensino de equações diferenciais, uma vez que essa aproximação pode dar significado aos conceitos teóricos ensinados na disciplina.

Portanto, por que uma metodologia baseada em aplicações pode ser importante para melhorar o aprendizado, motivação e habilidade na resolução de problemas de equações diferenciais nos cursos de engenharia?

O objetivo geral da presente pesquisa é investigar a importância de uma metodologia baseada em aplicações de equações diferenciais nos cursos de engenharia.

Dessa maneira, foram delineados os seguintes objetivos específicos: abordar o ensino tradicional, a modelagem e aplicações, os benefícios e desafios de uma abordagem orientada para aplicações; demonstrar exemplos de aplicações e coletar as opiniões de docentes e discentes acerca da metodologia baseada em aplicações.

Parte-se da idéia de que abordar aplicações com mais frequência pode melhorar o aprendizado, motivação e habilidade na resolução de problemas de equações diferenciais, pois

os discentes passam a ser sujeitos ativos no processo de aprendizagem, são instigados a se aprofundarem nos assuntos e desenvolvem um raciocínio apurado em relação aos problemas.

No desenvolvimento da presente pesquisa, abordou-se o ensino tradicional e os efeitos que ele causa nos discentes, discutimos o conceito de modelagem, assim como as suas implicações, apresentou-se pesquisas que aplicaram uma metodologia ativa com grupos de alunos e as opiniões deles referente a metodologia aplicada, além de abordar os possíveis desafios ao implementar uma nova metodologia nas salas de aula. Além disso, apresentou-se problemas de aplicação de equações diferenciais, a metodologia utilizada na pesquisa e os resultados das opiniões dos docentes e discentes acerca da metodologia de ensino.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A seguir, serão discutidos os conceitos acerca do ensino de equações diferenciais e a utilização de uma metodologia baseada em aplicações e modelagem matemática. A partir das perspectivas de estudiosos do assunto, serão comentados o ensino tradicional, aplicações a partir da modelagem, assim como os benefícios desse método e os possíveis desafios.

2.1 Ensino Tradicional

Comumente, a disciplina Equações Diferenciais vem sendo ensinada de forma mecanizada, como consequência de um ensino tradicional. Bassanezi (2015) afirma que, nesse tipo de ensino, o objeto estudado se expõe, por vezes, de maneira bem delimitada, limitando-se apenas no cumprimento do programa da disciplina.

Em vista disso, para Ferreira (2010), o fato de a disciplina ser ministrada com base em listas de exercícios favorece uma aprendizagem técnica e mecanizada, contribuindo para o bloqueio dos alunos quando se deparam com um problema real. Assim, elementos essenciais das equações diferenciais podem passar despercebidos, à medida em que eles se concentram apenas no processo de solução algébrica. Em um levantamento bibliográfico realizado no Brasil sobre Modelagem Matemática e Equações Diferenciais, Lopes (2021) destaca que 67% das teses e dissertações analisadas por ele relatam que o tratamento dado às equações diferenciais é predominantemente algébrico. Na visão do autor, esse método, que segue um

algoritmo de resolução, contribui para que alguns aspectos não sejam percebidos pelos estudantes.

Quando Ferreira (2010) comenta sobre listas de exercícios, não significa que esse método não seja vantajoso, mas sim que ele deve ser repensado. As listas de exercícios ainda são úteis no aprendizado, pois ajudam a memorizar os métodos de solução e a gerar novas dúvidas. Todavia, o tipo de exercício proposto influencia diretamente como o aluno irá adquirir o conhecimento. Listas com exercícios tradicionais levam os alunos a memorizar técnicas de soluções, enquanto listas com problemas aplicados incentivam os alunos a refletirem sobre o problema e sobre como as equações diferenciais podem ajudá-los na solução. Vale ressaltar que abordar problemas de modelagem não anula a necessidade de os alunos aprenderem as técnicas de solução, uma vez que elas são parte fundamental da disciplina. Isso implica que os métodos algébricos não são descartáveis, porém não devem ser o ponto central do estudo.

Referente a ideia de Lopes (2021), ao falar em “algoritmo de resolução”, o autor se refere ao fato de que, na forma tradicional de ensino, a disciplina citada segue um passo a passo até que a solução seja obtida. Primeiro, identifica-se o tipo da equação diferencial a ser resolvida; em seguida, escolhe-se o método mais adequado para obter a solução; por fim, a solução algébrica é alcançada. Note que a estrutura segue um padrão semelhante ao de códigos de programação. Esse ciclo repetitivo contribui para que a disciplina se torne mecanizada, deixando de lado aspectos fundamentais, como a análise de problemas de aplicação. Assim, particularidades como a homogeneidade das constantes, a compreensão do que as derivadas representam e os significados das soluções são ocasionalmente esquecidas.

Esses parâmetros são discutidos em uma pesquisa sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de equações diferenciais. De acordo com Dullius, Veit e Araujo (2013), os alunos não atribuem significado e importância às constantes de proporcionalidade, tratando-as apenas como números sem unidades. Isso também se aplica às soluções das equações. Por costume, os alunos esperam encontrar números em vez de equações, o que, a princípio, pode causar estranhamento. Além disso, em entrevistas realizadas com professores que lecionam a disciplina, os autores concluem que, apesar de passarem por diversas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, os alunos apresentam dificuldades em interpretar os significados das derivadas.

Veja que alguns desses problemas conceituais podem resultar de disciplinas anteriores que não foram bem compreendidas. Isso significa que a metodologia de ensino que prioriza as soluções algébricas das equações pode perpetuar erros conceituais básicos. Abordar problemas de aplicações podem ajudar a mitigar essas dificuldades, facilitando que, no futuro, os alunos consigam resolver problemas reais. Além disso, os benefícios de uma metodologia que combina aplicações com modelagem não se limitam ao contexto pós-graduação. Diversas disciplinas nos cursos de engenharia dependem, direta ou indiretamente, de uma boa compreensão das equações diferenciais. Alves (2018) afirma que 33% das disciplinas do curso de Engenharia Elétrica na UFRSA podem utilizar equações diferenciais na resolução de problemas. Para a Engenharia Mecânica, o número é de 30%, seguido de 27% para Engenharia Civil. Em outras palavras, compreender corretamente as aplicações das equações diferenciais e interpretar adequadamente as soluções é fundamental para a formação dos alunos.

2.2 Modelagem e Aplicações

A modelagem matemática consiste na capacidade de sintetizar situações reais, transcrevendo-as em linguagem matemática. O uso da modelagem tem o potencial de elevar o nível de ensino de matemática, sendo uma ferramenta essencial na resolução de problemas. Dessa maneira, existe uma lacuna a ser preenchida se tratando do ensino das equações diferenciais. Por vezes, a disciplina Equações Diferenciais é ensinada de forma “algorítmica”, em que primeiro são apresentadas as definições do que é uma equação diferencial, seguidas pelos métodos de solução, e por fim, pela resolução de exercícios. Entretanto, a etapa final do método muitas vezes inclui problemas extensos focados na solução algébrica, sem ênfase na interpretação dos resultados, o que torna o processo de solução enfadonho e mecanizado. Dessa forma, tratar a disciplina de Equações Diferenciais enfatizando as aplicações com o auxílio da modelagem pode ser uma ferramenta eficaz no ensino, aumentando o interesse e a motivação dos alunos, além de promover um aprendizado mais profundo da disciplina.

Manter uma turma engajada na aprendizagem não é uma tarefa fácil. Despertar o interesse dos alunos e demonstrar a importância do objeto estudado é um caminho para isso. Bassanezi (2002) afirma que esse interesse surge a partir de estímulos externos à Matemática, sendo eles os problemas do “mundo real”. A ferramenta que possibilita a investigação dos

problemas reais é justamente a modelagem matemática, definida por ele como um processo utilizado para a obtenção e validação de um modelo matemático, com o intuito de previsão de tendência. Ele complementa dizendo que, em essência, a modelagem é a arte de transformar problemas reais em problemas matemáticos, interpretando as soluções em linguagem comum.

Para Costa (2016), o fato de a modelagem matemática possibilitar ao estudante investigar problemas de seu interesse o induz a assimilar os conhecimentos matemáticos. Nesse sentido, o aluno pode passar a se sentir mais motivado por entender que a modelagem tem funcionalidades próximas à sua realidade e que ela pode ser útil na resolução de problemas reais.

Dessa maneira, tratando-se do curso Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia (ICT), e futuramente uma das engenharias disponibilizadas pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), é de interesse que uma disciplina como Equações Diferenciais seja abordada a partir de aplicações utilizando a modelagem como estratégia de ensino-aprendizagem. É notório que as técnicas de solução são parte indispensável da disciplina, uma vez que ela fornece informações importantes sobre um problema investigado. No entanto, de acordo com Pinto e Lima,

Possibilitar ao futuro engenheiro as interpretações das soluções de EDO e a aplicação de modelos matemáticos em suas áreas específicas de conhecimento são ações tão importantes quanto muni-los de técnicas de resolução desse tipo de equações, uma vez que tais ações podem favorecer o desenvolvimento de habilidades de análise e interpretação que são inegavelmente essenciais aos engenheiros (2017, p. 22).

Nesta perspectiva, os alunos, como futuros engenheiros, têm a necessidade de desenvolver habilidades que os auxiliem na interpretação e resolução de problemas, e muni-los apenas de técnicas de resolução não é o suficiente para o desenvolvimento destas habilidades. Portanto, a disciplina Equações Diferenciais assume papel fundamental na formação do aluno que, a partir da abordagem da modelagem matemática, pode desenvolver habilidades essenciais que poderão ser usadas como ferramenta.

Assim sendo, o ideal é que haja um equilíbrio entre o ensino tradicional e a aplicação de modelos matemáticos, dando início a um método de ensino menos rígido e mais envolvente. A seguir serão abordados os benefícios acerca de uma metodologia ativa de acordo com pesquisadores e alunos.

2.3 Benefícios da Metodologia Baseada em Aplicações

Considerando a existência de uma lacuna a ser preenchida no ensino de equações diferenciais, é preciso refletir sobre como a abordagem com ênfase em modelagem e aplicação pode ser implementada nas aulas, assim como os seus benefícios. A mudança na metodologia de ensino pode ir desde ações simples, como abordar problemas práticos em sala, até medidas mais complexas que demandem maior engajamento por parte dos professores e alunos, como propor seminários que envolvam a criação de protótipos que utilizam equações diferenciais ou até mesmo realizar experimentos laboratoriais. Será abordado adiante duas teses, uma delas já citada anteriormente, referente às metodologias citadas, que analisam os resultados da implementação do ensino de equações diferenciais a partir de aplicações.

O primeiro artigo intitulado "Proposta Metodológica Para o Ensino de Equações Diferenciais no Curso de Engenharia Civil na PUC Minas-Barreiro", Bonaldo *et al.* (2018) propôs a adoção de uma metodologia de ensino ativa, visando transformar o ensino e aprendizagem de equações diferenciais. O método consistiu em exemplificar situações práticas e significativas na Engenharia Civil. Os discentes desenvolveram, com o auxílio do professor e monitor da disciplina, protótipos para esses problemas seguindo três métodos: a resolução analítica das equações diferenciais, a realização experimental dos problemas e a análise computacional. Foram desenvolvidos cinco experimentos, sendo eles: lei de aquecimento de Newton, deflexão de vigas, resistência à compressão de corpos de prova de concreto, flambagem de colunas e ponto de amolecimento de pavimentos asfálticos. Para a realização das práticas, foi disponibilizado para os alunos um Roteiro de Estudos contendo explicações teóricas sobre as práticas, sendo eles

[...] estruturados com textos explicativos e com perguntas, de forma a instigar os estudantes a pesquisarem mais sobre os assuntos, estimulando o raciocínio sobre os fenômenos físicos e as variantes intermitentes ou não envolvidas em cada experimento (Bonaldo *et al.*, 2018, p. 102).

No artigo, Bonaldo *et al.* (2018) apontam a opinião dos alunos que participaram do estudo acerca da nova metodologia. Em aspectos gerais, a nova maneira de lecionar a disciplina foi bem aceita. Os alunos comentaram que houve uma mudança de concepção a respeito da matéria e, especialmente, em relação ao curso de Engenharia Civil. A

compreensão aprofundada sobre equações diferenciais foi outro ponto levantado pelos alunos, em virtude da associação entre as aplicações e as atividades do engenheiro civil. Além disso, os discentes passaram a ser sujeitos ativos no aprendizado, resultando em um aumento de interesse, não somente pelas aulas, mas também por disciplinas futuramente cursadas que dependem de equações diferenciais.

Para a segunda dissertação, realizada por Ferreira (2010), foi utilizado um método misto entre problemas de aplicações: um que pode ser abordado em sala de aula, e outro em que há a necessidade do uso do laboratório. O estudo foi realizado em um curso de engenharia na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), contando com a participação de quinze alunos. A pesquisa foi conduzida em um contexto introdutório à disciplina de Equações Diferenciais, envolvendo participantes que ainda não haviam cursado a matéria. Com a ajuda do pesquisador, realizaram-se três atividades: a primeira referente a um sistema de suspensão automotiva (mola-amortecedor). O experimento foi montado em laboratório para que houvesse a construção do modelo e, sobretudo, a reflexão após a solução da atividade. As atividades seguintes foram: despoluição de lagoas e absorção de drogas no organismo. Estas contavam com apenas o enunciado do problema e modelo, com ênfase nos aspectos das equações diferenciais.

Como conclusão do estudo, Ferreira (2010) notou que o método utilizado por ele proporcionou os alunos uma construção de um próprio conhecimento acerca das equações diferenciais através de “[...] uma metodologia que não segue exclusivamente a relação professor aluno, e sim da interação deste aluno com o seu meio ambiente” (Ferreira, 2010, p. 101). Além disso, notou-se a compreensão de alguns conceitos básicos como: “a solução de uma equação diferencial é uma função e que esta aparece na equação sob forma de derivada” (Ferreira, 2010, p. 102). Ainda que os estudantes fossem iniciantes no estudo das equações diferenciais, eles foram capazes de, satisfatoriamente, interpretar, resolver e tirar conclusões a respeito dos problemas. O que, comumente, não ocorre, como citado anteriormente: “Os professores destacam que os alunos passam por várias disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral mas não entendem o que significa uma derivada” (Dullius, Veit e Araujo, 2013, p. 218). Isso demonstra que o uso de um método de ensino baseado em aplicações e modelagem pode ser uma alternativa eficaz para aumentar a compreensão e a motivação nas aulas.

Apesar disso, fazer uma mudança na forma de lecionar uma disciplina nem sempre é uma tarefa fácil. As dificuldades surgem tanto para os professores quanto para os alunos. O

motivo disso é devido ao hábito já estabelecido no ensino, os prazos para cumprir uma ementa ou dificuldades dos alunos em associar os problemas reais à modelagem matemática. Na seção seguinte serão abordadas algumas dessas situações na perspectiva de pesquisadores do assunto.

2.3.1 Desafios

Apesar dos benefícios acerca da metodologia com ênfase em aplicações, há alguns obstáculos a serem enfrentados. O sistema de educação é um objeto complexo de ser alterado devido a infinidade de variáveis que o compõem, desde aspectos sociais, até limitações no ambiente de estudo. Lacerda e Guerreiro (2022) salientam que, na visão dos docentes, as numerosas salas de aula são um empecilho no que diz respeito à comunicação, dificultando um diálogo mais próximo entre aluno e professor. Além disso, uma das principais dificuldades na implementação de uma nova metodologia

[...] provêm de resquícios da trajetória formativa dos estudantes, que foi marcada, em grande parte, por mais passividade e exposições lineares, ou seja, por metodologias que não proporcionaram sua autonomia intelectual reverberando no comprometimento do processo do ensino aprendizagem na educação superior (Lacerda;Guerreiro, 2022, p. 22).

Isso implica que, por inércia, os alunos tendem a perpetuar a passividade, e quando são expostos a metodologias ativas encontram certa dificuldade.

Por outro lado, Bassanezi (2002) traz dois argumentos em relação aos desafios: os obstáculos instrucionais e os obstáculos para estudantes. O primeiro se refere ao tempo limitado dos cursos regulares. Devido ao programa que deve ser cumprido, a modelagem pode tomar um tempo considerável, não dando tempo de cumpri-lo por inteiro. Já o segundo se refere a rotina dos alunos. Acostumados com o ensino tradicional, os alunos, ao serem expostos à nova metodologia, podem se perder no processo, fazendo a aula caminhar em um ritmo lento.

Além disso, a metodologia a partir de aplicação exige que os alunos tenham conhecimentos básicos referente a Cálculo devido a interdependência entre as disciplinas de Matemática. Lopes (2023) explica que, em uma atividade relacionada à aplicação, alguns alunos sentiram dificuldades em resolver o problema. Isso se deu devido aos alunos não

reconhecerem o conteúdo matemático que resolveria a equação. Como discutido por Lacerda e Guerreiro (2022), o ensino e aprendizagem acabam sendo prejudicados devido às metodologias passivas.

Ainda referente a Lopes (2023), a partir de sua pesquisa, o autor destaca que os estudantes costumam apresentar dificuldades comunicativas, o que prejudica a interação professor-aluno. Esse é um problema recorrente que afeta não apenas metodologias inovadoras, mas também modelos tradicionais de ensino, dificultando ainda mais um aprendizado profundo.

Os desafios são inúmeros e devem ser ponderados ao aplicar uma nova metodologia de ensino. Contudo, a reflexão acerca desses problemas é um passo essencial na busca por um ensino de qualidade. Melhorar o ensino de equações diferenciais, tornar aulas mais atrativas e ter uma interação professor-aluno mais próxima requer um engajamento árduo, porém satisfatório.

3 METODOLOGIA

O presente estudo se trata de uma pesquisa com finalidade básica estratégica com o intuito de facilitar a aplicação de metodologias ativas no que diz respeito ao ensino de equações diferenciais. A pesquisa tem caráter descritivo, devido ao levantamento teórico, e exploratório, devido ao levantamento de dados utilizando questionários. Os questionários foram analisados a partir de uma abordagem qualiquantitativa com perguntas mistas, utilizando o método dedutivo.

O levantamento dos dados foi realizado em etapas e totalmente online. Primeiro foi coletado, por meio de um formulário, a opinião de 11 discentes matriculados na disciplina Equações Diferenciais da UFERSA campus Caraúbas, nos quais esses, na data de aplicação, estavam na terceira unidade.

Em seguida, um segundo formulário foi aplicado para 11 discentes que já cursaram a disciplina na UFERSA Caraúbas e estão mais avançados nos cursos, seja no ICT ou nas engenharias, com o objetivo de reunir as opiniões dos discentes mais experientes.

Além disso, com a finalidade de obter a perspectiva dos docentes da Matemática, foi aplicado um terceiro formulário para quatro professores que lecionam a disciplina de Equações Diferenciais (instituição não informada).

Um quarto questionário foi aplicado a 16 docentes das engenharias, com o intuito de coletar suas opiniões sobre o ensino de equações diferenciais. O questionário foi inicialmente divulgado aos professores da UFERSA Caraúbas, porém, por indicação dos próprios docentes, também obtivemos respostas de outras instituições.

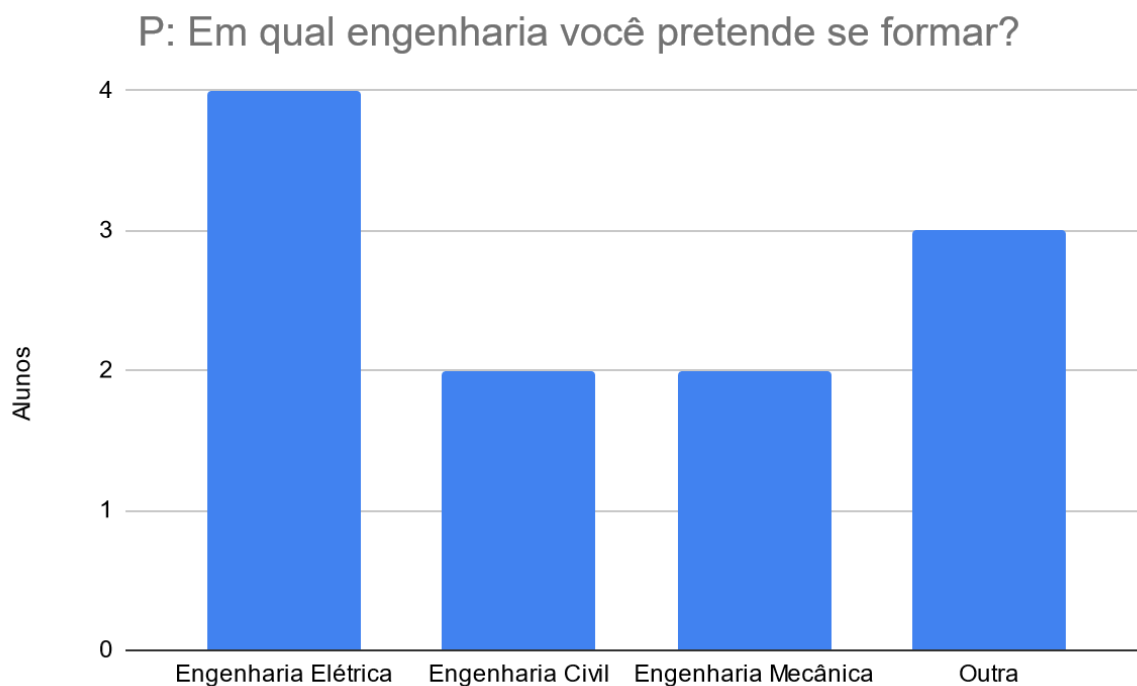
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir serão apresentados os dados levantados por meio dos questionários aplicados aos alunos e professores.

4.1 Questionário para os alunos de Equações Diferenciais

O questionário aplicado à turma de onze alunos matriculados na disciplina Equações Diferenciais parte de 13 questões variando entre perguntas objetivas e discursivas. A primeira e a segunda pergunta tem como objetivo estabelecer qual o curso atual dos discentes, e a futura formação. No geral, todos responderam que fazem parte do curso ICT, com a maioria pretendendo se formar em Engenharia Elétrica (Gráfico 1).

Gráfico 1 – Preferência de formação da turma matriculada em Equações Diferenciais



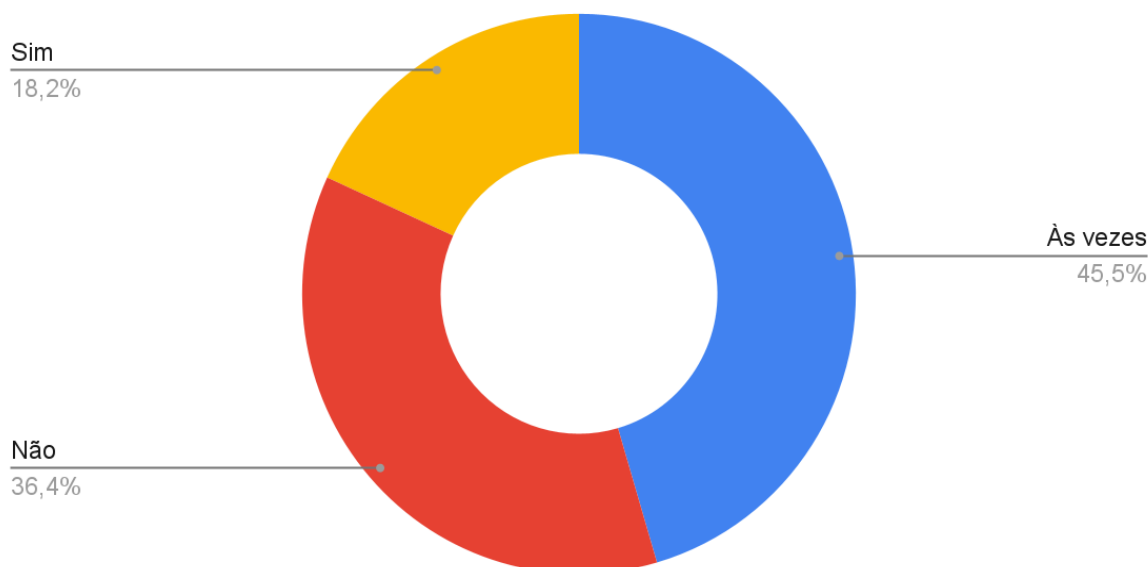
Fonte: Autor (2024).

Dos três alunos que responderam outra engenharia, dois deles pretendem se formar em Engenharia de Produção e o outro em Engenharia da Computação.

Ao serem questionados sobre as equações diferenciais seguirem um método mecanizado de solução (Gráfico 2), 45,5% responderam que isso ocorre ocasionalmente, concordando com a conclusão de Lopes (2021) sobre os “algoritmos” de resolução.

Gráfico 2 – Respostas acerca do ensino mecanizado das equações diferenciais

P: Você acha que os problemas de equações diferenciais seguem um passo a passo mecanizado?



Fonte: Autor (2024).

Com a finalidade de entender melhor a opinião dos alunos, foi perguntado a eles quais seriam os motivos que tornavam a disciplina mecanizada. Entre os que responderam “sim” e “às vezes”, quatro justificaram o motivo e três decidiram não responder. Um dos alunos comentou que os exercícios eram muito semelhantes, com métodos e soluções parecidas. Assim, ao se depararem com problemas similares, eles conseguiriam resolvê-los devido à repetição dos métodos. Ele diz que

Talvez por alguns problemas acabarem sendo bem próximos ou parecidos uns com os outros, que permite que sejam criados métodos, formas e até teoremas em cima para transformar “coisas” que a gente não saiba em “coisas” que a gente saiba responder ou já tenha respondido antes (A1¹).

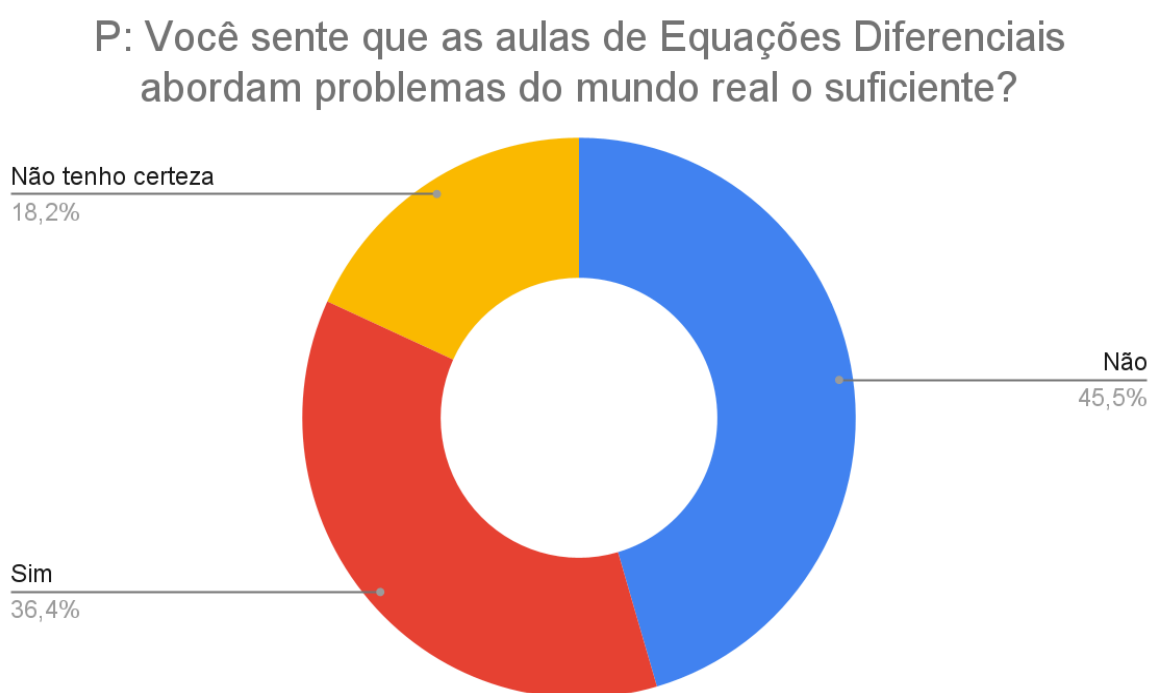
Por outro lado, um dos alunos justificou sua resposta afirmando que isso ocorre “Devido aos teoremas e fórmulas” (A4). Com “teoremas” e “fórmulas” o aluno se refere aos métodos de solução, que muitas vezes são o foco central da disciplina. Outro aluno

¹ As respostas dos alunos serão denominadas por A1 (aluno 1), A2 (aluno 2), e assim por diante.

mencionou a interdependência dos conteúdos ao afirmar que existem “[...] assuntos que dependem uns dos outros” (A5).

Quando perguntados se a disciplina Equações Diferenciais aborda problemas do mundo real o suficiente, 45,5% dos alunos responderam que não, enquanto 36,4% dos alunos disseram que sim (Gráfico 3). A pequena diferença entre essas opiniões indica que, no campus Caraúbas, há uma abordagem relativamente próxima do ideal.

Gráfico 3 – Respostas acerca da abordagem de problemas reais

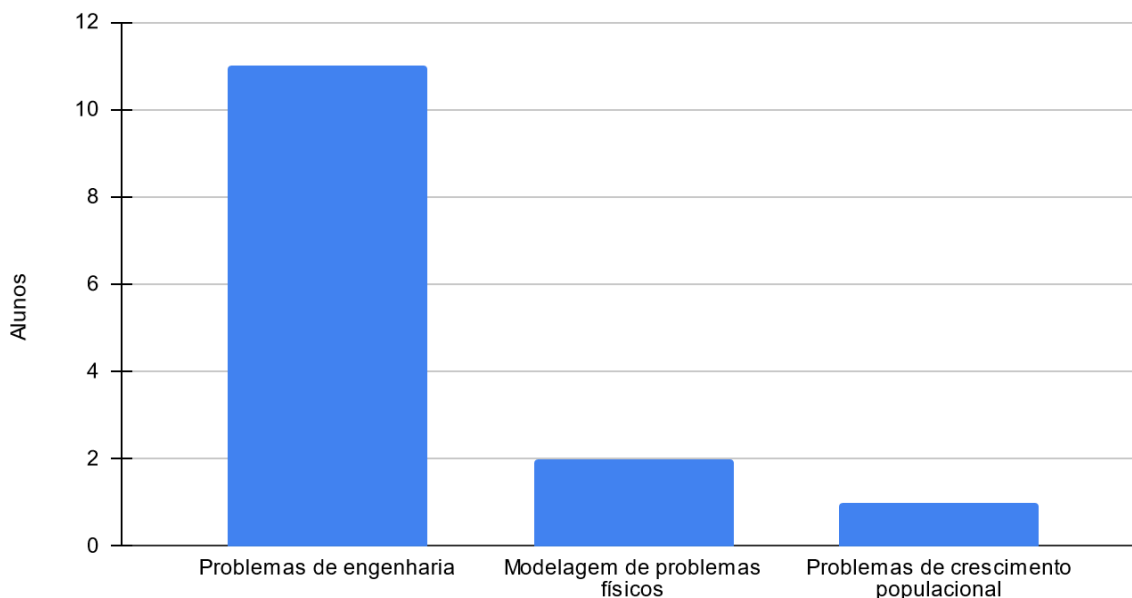


Fonte: Autor (2024).

Apesar da pequena diferença observada no gráfico anterior, todos os alunos concordaram que a abordagem de aplicações reais aumentaria a motivação e o interesse pela disciplina, e que, nesse caso, adotar essa metodologia seria uma forma eficaz de aprendizagem. Dessa maneira, em busca de uma melhor compreensão acerca dos interesses dos alunos, foi pedido para que eles informassem quais tipos de problemas eles gostariam de ver sendo abordados em aula. Os resultados podem ser observados no Gráfico 4.

Gráfico 4 – Tipos de problema

P: Que tipo de problemas do mundo real você gostaria de ver sendo abordados em suas aulas de equações diferenciais?



Fonte: Autor (2024).

Como todos os alunos que responderam o questionário tinham o objetivo de se formar em engenharia, a opção dos problemas de engenharia foi a mais escolhida da turma. Além disso, os problemas físicos e de crescimento populacional também foram escolhidos, indicando uma maior diversidade na escolha dos tipos de problemas a serem abordados.

As três últimas perguntas tinham como objetivo entender se os alunos já tiveram contato com problemas práticos relacionados aos conteúdos estudados em Equações Diferenciais, quais recursos ou atividades poderiam tornar as aulas mais atrativas e eficazes, e quais sugestões eles ofereceriam para tornar as aulas mais relevantes e envolventes.

Ao serem questionados se já tiveram contato com problemas práticos relacionados ao conteúdo de equações diferenciais, apenas um aluno relatou ter lidado com problemas de física. Ele mencionou as equações diferenciais como uma ferramenta eficaz para solucionar problemas físicos de forma mais rápida (A9). A modelagem de problemas se torna uma grande aliada, especialmente quando não se tem total controle sobre o objeto analisado.

As duas últimas perguntas serão apresentadas a partir de um quadro que reúne as respostas dos alunos. O Quadro 1 contém as contribuições dos onze alunos para a pergunta:

“Que tipos de recursos ou atividades você gostaria de ver sendo incorporados às aulas para melhorar seu aprendizado e motivação?”.

Quadro 1 – Recursos ou atividades de interesse dos alunos de Equações Diferenciais

ALUNOS	RESPOSTAS
A1	“Aplicações na engenharia, no cálculo de pesquisas, no dia a dia, dentre outros.”
A2	“Aprendizado prático, discussões em grupo, uso de tecnologia interativa, projetos criativos, feedback construtivo e conexão com a vida real por meio de exemplos relevantes.”
A3	“Acho que a inclusão de aulas práticas com esse ensino.”
A4	“Trabalhos de pesquisa envolvendo equações diferenciais.”
A5	“Práticas que pudéssemos ver realmente a aplicação ali.”
A6	“Trabalho de pesquisa.”
A7	“Mais exemplos práticos.”
A8	“Trazer questões sobre problemas da vida real.”
A9	“Seria mais interessante ver mais recursos interativos, como simulações computacionais, vídeos explicativos e exemplos práticos que demonstrem a aplicação real das equações diferenciais.”
A10	“Parte da engenharia.”
A11	“Problemas de engenharia, pois quando chegássemos na engenharia em si, e acabasse se deparando com um problema que envolve Edo, já estaríamos bem mais familiarizados.”

Fonte: Autor (2024).

Percebe-se que grande parte das respostas (A2, A3, A5, A7, A8 e A9) menciona, de forma direta, o interesse em incluir na disciplina atividades práticas na disciplina. Três alunos (A1, A10 e A11) mencionam indiretamente as atividades práticas ao comentar sobre aplicações ou problemas de engenharia. Esses relatos evidenciam claramente o interesse dos alunos em relacionar as aulas de Equações Diferenciais com as engenharias, buscando ter mais contato com as suas futuras áreas de atuação.

Três alunos (A1, A4 e A6) demonstram interesse em atividades de pesquisa. No entanto, esse tipo de atividade pode representar um desafio complexo para a implementação, devido à curta carga horária. Todavia, essa ideia pode ser aproveitada em componentes extracurriculares ou em programas de extensão.

Em relação aos recursos que podem ser implementados nas aulas, dois alunos (A2 e A9) ressaltaram o interesse em recursos interativos. A inclusão de recursos visuais pode ser

eficaz no ensino, facilitando a associação das equações diferenciais aos problemas. Além disso, investigar e interpretar as soluções graficamente é um exercício fundamental para um aprendizado profundo da disciplina.

Para a pergunta: “Que sugestões você teria para tornar as aulas de Equações Diferenciais mais envolventes e relevantes para sua formação?”, dos onze alunos, oito colaboraram com a pesquisa, enquanto três não souberam responder (Quadro 2).

Quadro 2 – Sugestão dos alunos para tornar as aulas mais envolventes e relevantes

ALUNOS	RESPOSTAS
A1	“Mostrar a utilização e fazer com que os alunos pensem em como usar e aplicar tais conceitos aprendidos em sala.”
A2	“Simulações e visualizações: Utilizar softwares ou ferramentas de simulação para visualizar soluções de equações diferenciais e demonstrar conceitos de forma interativa.”
A3	“Acho que a presença de um bom professor, que não seja apenas para explicar o assunto e pronto. Seja um professor de maneira leve, que entenda os alunos, tire suas dúvidas com uma maneira calma...”
A5	“Aulas práticas.”
A8	“Trazer questões sobre problemas da vida real.”
A9	“Uma sugestão seria utilizar exemplos do mundo real em sala de aula, mostrando como as equações diferenciais são aplicadas em diversas áreas.”
A10	“Devido estarmos se preparando para o curso de engenharia, se faz necessário aplicações na área da engenharia.”
A11	“Resolução de exercícios.”

Fonte: Autor (2024).

Em síntese, os alunos reforçam a ideia de aproximar os conteúdos estudados com as engenharias, ressaltando a importância de demonstrar a utilidade das equações diferenciais. Além disso, a sugestão de utilizar tecnologia como ferramenta de ensino aparece novamente nas respostas (A2), indicando que essa prática não está sendo amplamente utilizada.

Com a conclusão da pesquisa com os alunos matriculados na disciplina de Equações Diferenciais, observa-se que, no campus Caraúbas, houve uma abordagem intermediária dos problemas, alternando entre problemas tradicionais (mecanizados) e problemas de aplicação. Apesar disso, os alunos demonstraram interesse em aumentar a frequência da abordagem de problemas mais próximos das engenharias, uma vez que todos concordaram que a

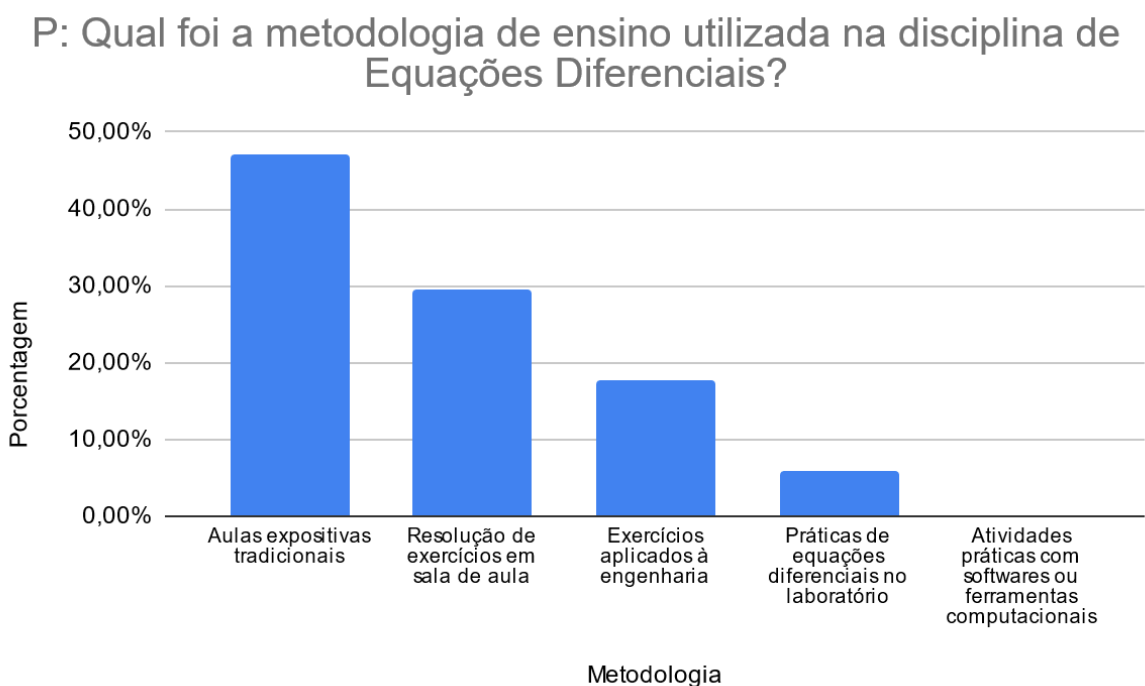
apresentação de problemas de aplicação seria eficaz no ensino e aumentaria o interesse pela disciplina.

4.2 Questionário para os alunos de engenharia

O questionário aplicado aos alunos da engenharia consistiu em 13 questões, que variaram entre perguntas discursivas e objetivas. A primeira pergunta referia-se à qual curso de engenharia o aluno pertence. Apenas alunos da Engenharia Mecânica (72,7%) e da Engenharia Civil (27,3%) responderam o questionário.

Quando questionados sobre a metodologia de ensino utilizada na disciplina de Equações Diferenciais, 47,06% das respostas indicaram uma abordagem expositiva tradicional (Gráfico 5). Outro dado relevante é que nenhum deles teve contato com atividades práticas utilizando softwares.

Gráfico 5 – Metodologias utilizadas na disciplina de Equações Diferenciais

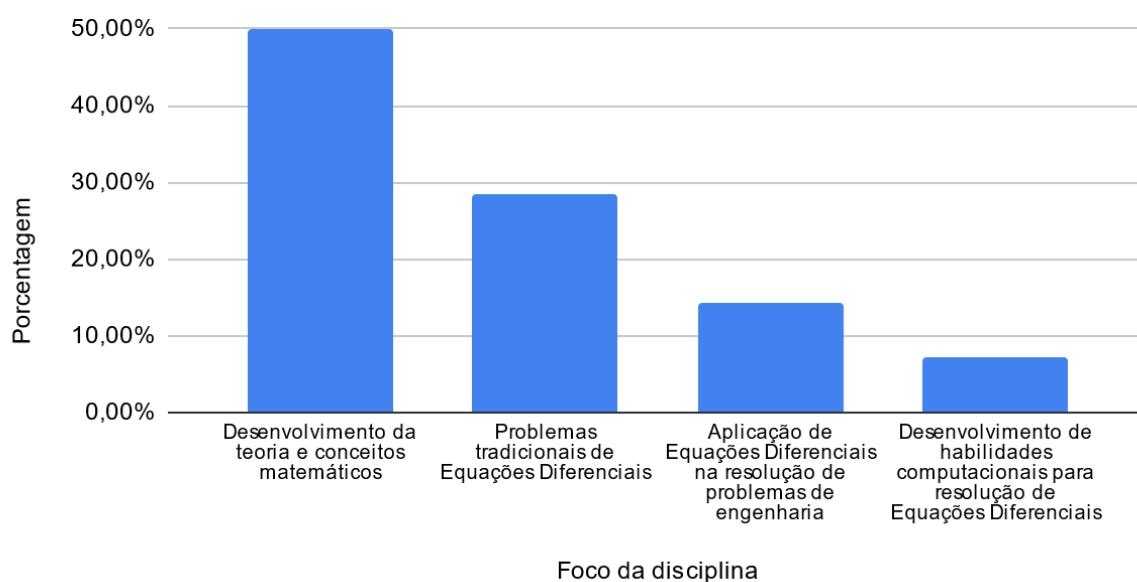


Fonte: Autor (2024).

Nesse sentido, perguntamos qual era o principal foco da disciplina. A maioria das respostas (50%) indicou que o foco era desenvolver a teoria matemática. Esse resultado era esperado, considerando as diversas técnicas de solução de equações diferenciais. No entanto, 28,57% das respostas mencionaram problemas tradicionais, enquanto 14,29% citaram problemas de engenharia. Esses dados enfatizam a preferência dos docentes por questões tradicionais em vez de problemas práticos. As informações citadas podem ser conferidas no Gráfico 6.

Gráfico 6 – Foco dado à disciplina de equação diferencial

P: Em sua opinião, qual(is) foi(ram) o(s) principal(is) foco(s) do ensino de Equações Diferenciais na disciplina?

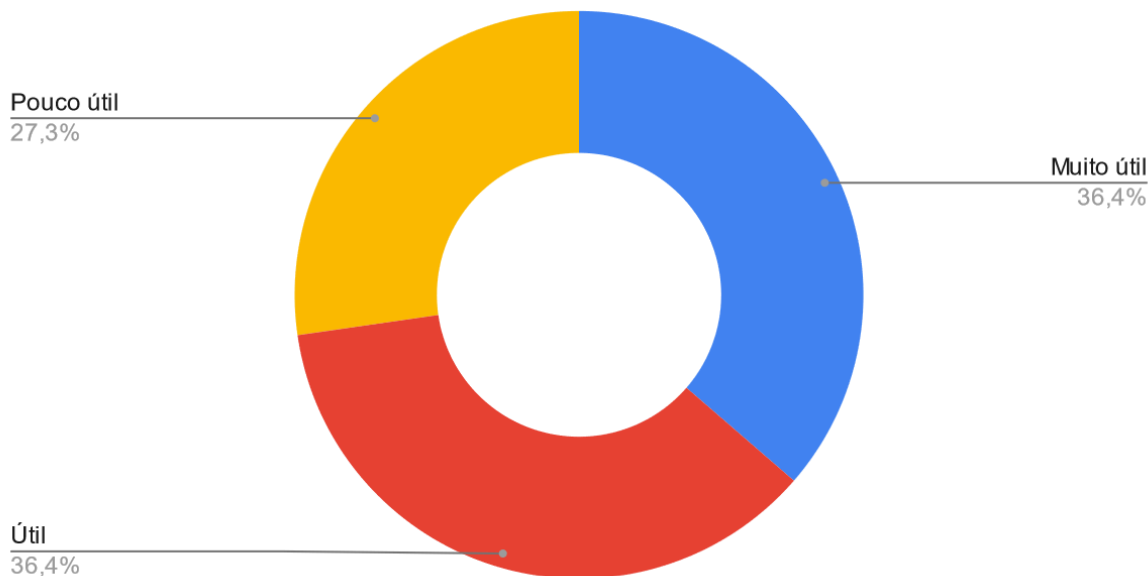


Fonte: Autor (2024).

Dando continuidade à pesquisa, perguntamos aos alunos o quanto a disciplina foi útil para sua formação como engenheiro. Em geral, a disciplina foi considerada bastante útil, com 36,4% dos alunos avaliando-a como “muito útil” e 36,4% como “útil”. Os resultados podem ser conferidos no Gráfico 7.

Gráfico 7 – Utilidade da disciplina Equações Diferenciais

P: Você considera que disciplina de Equações Diferenciais foi útil para sua formação como engenheiro?



Fonte: Autor (2024).

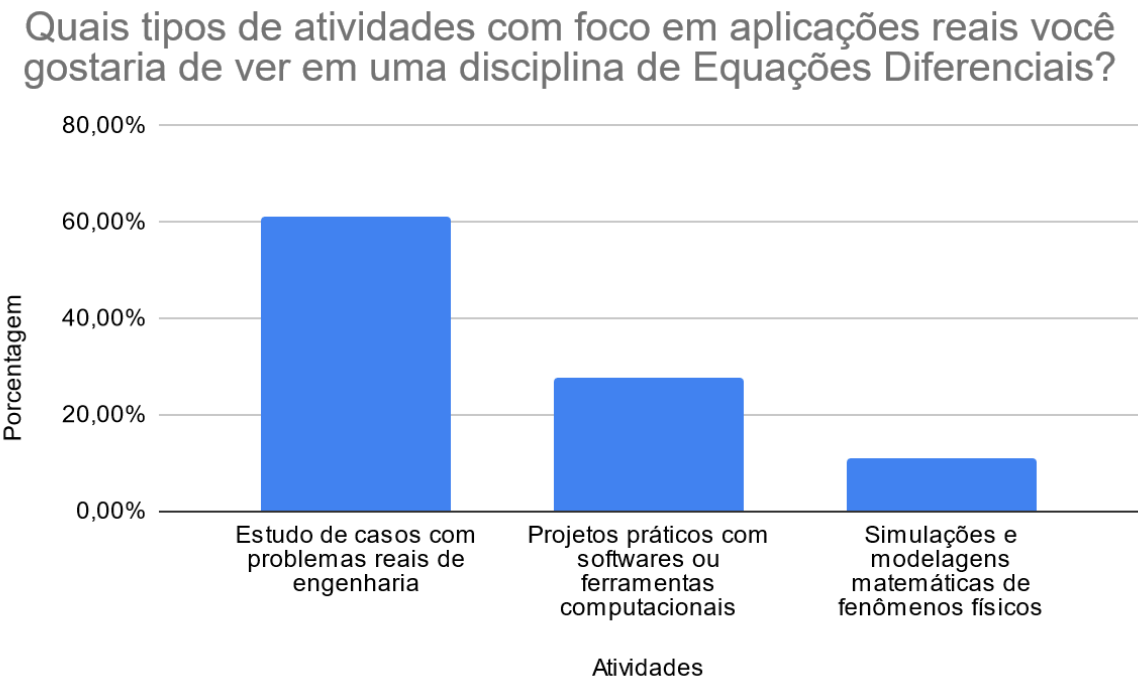
Assim sendo, foi de interesse questionar em quais disciplinas da engenharia os alunos utilizaram os conceitos de equações diferenciais. A disciplina de Mecânica dos Fluidos foi a mais citada, com cinco menções. As matérias de Vibrações Mecânicas e Elementos de Máquina também foram mencionadas, cada uma com duas citações. Além disso, Mecanismos e Resistência dos Materiais II foram citadas uma vez cada. Todas essas disciplinas citadas anteriormente fazem parte da Engenharia Mecânica. Para a Engenharia Elétrica foram citadas: Análise de Circuitos Elétricos, Análise de Sistemas de Potência, Teoria Eletromagnética, Antenas, Conversão Eletromecânica de Energia, Máquinas Elétricas e Controle Analógico.

Quando questionados sobre o que mais tinham gostado da disciplina, respostas como: “O que mais gostei foi a resolução de equações diferenciais pelo método da substituição” (A12) e exercícios de “Aplicações na engenharia” (A17) surgiram. Além disso, de acordo com A20, as equações diferenciais facilitam a análise de circuitos de primeira e segunda ordem, o que contribui para seu apreço pela disciplina.

Em seguida, os alunos foram questionados se a aplicação de problemas reais poderia tornar a disciplina mais interessante. Todos afirmaram que sim. Em vista disso, perguntamos

que tipo de atividade de aplicação eles gostariam de ver na disciplina. Das respostas, 61,1% citavam atividade de estudo de caso com problemas reais de engenharia (Gráfico 8).

Gráfico 8 – Preferência de atividade dos alunos



Fonte: Autor (2024).

Por fim, perguntamos a sugestão que eles dariam para melhorar o ensino de equações diferenciais nas engenharias. As respostas dos alunos podem ser lidas no Quadro 3.

Quadro 3 – Sugestão dos alunos da engenharia

ALUNOS	RESPOSTAS
A12	“Abordar mais exemplos aplicados à engenharia, a fim de abrir para aprendizados de situações do cotidiano de um engenheiro.”
A13	“Que sejam aplicadas a casos reais de engenharia.”
A14	“Usar em problemas relacionados ao ramo profissional da indústria.”
A15	“Mais especificações de área.”
A16	“Trazer mais para o realismo do dia dia.”
A17	“Aulas práticas.”

A20	“Dar ênfase na utilização de EDO para resolução de problemas reais e não se prender a modelagem matemática.”
-----	--

Fonte: Autor (2024).

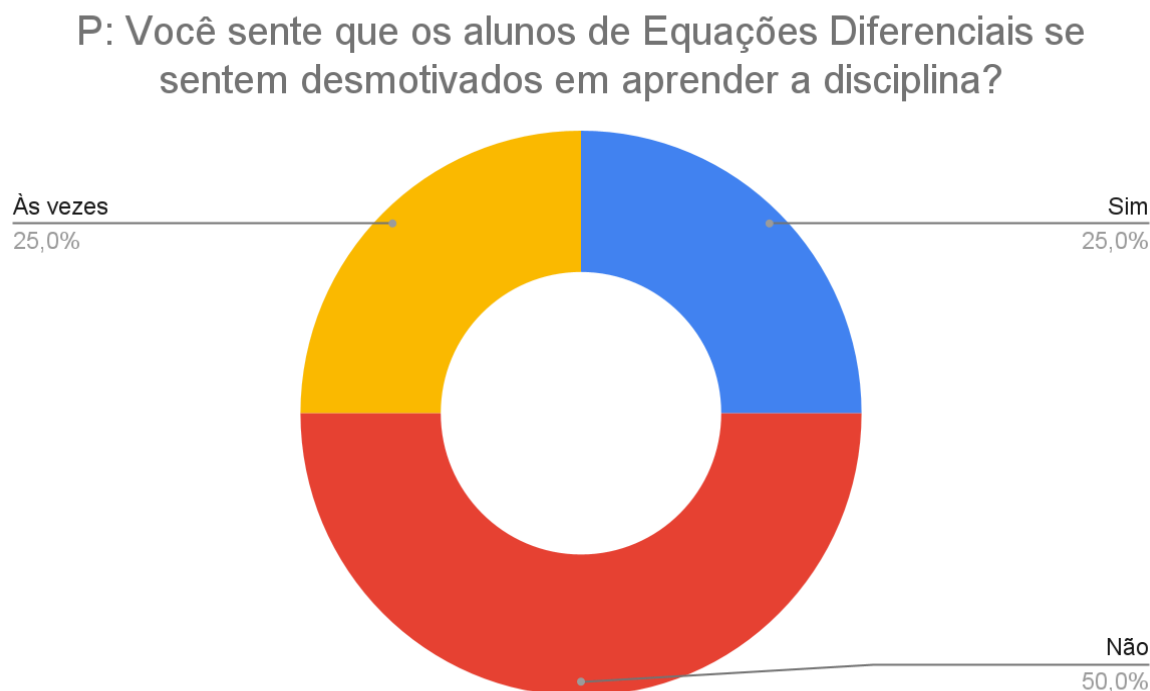
Veja que todos eles têm uma ideia em comum que é aproximar a disciplina do cotidiano do engenheiro. Vale apenas ressaltar uma pequena confusão de conceitos citado pelo A20. Com modelagem matemática, provavelmente o aluno se refere a dedução de conceitos matemáticos ao invés da modelagem de problemas que vem sendo tratada ao longo desse trabalho.

Assim, finalizada a pesquisa com os alunos da engenharias, podemos notar que a disciplina Equações Diferenciais tem grande importância nos cursos de engenharia. Além disso, nota-se um desejo pela aproximação da disciplina com as engenharias por meio de atividades mais práticas.

4.3 Questionário para os professores de Equações Diferenciais

O questionário foi aplicado para quatro professores que lecionam a disciplina de Equações Diferenciais. Foram feitas 13 perguntas, alternando entre questões objetivas e discursivas. A primeira delas se refere a motivação dos alunos. Dois dos professores (P2 e P3) responderam que não percebem desmotivação nos alunos ao cursar a disciplina (Gráfico 9).

Gráfico 9 – Respostas acerca da motivação dos alunos



Fonte: Autor (2024).

Para aqueles que responderam “Sim” ou “Às vezes” (P1 e P4, respectivamente), foi perguntado o por que eles acham que isso acontece. De acordo com um deles, os alunos têm dificuldades em relacionar a teoria ensinada em sala de aula com as aplicações práticas (P1²). Já para o outro, ele diz que

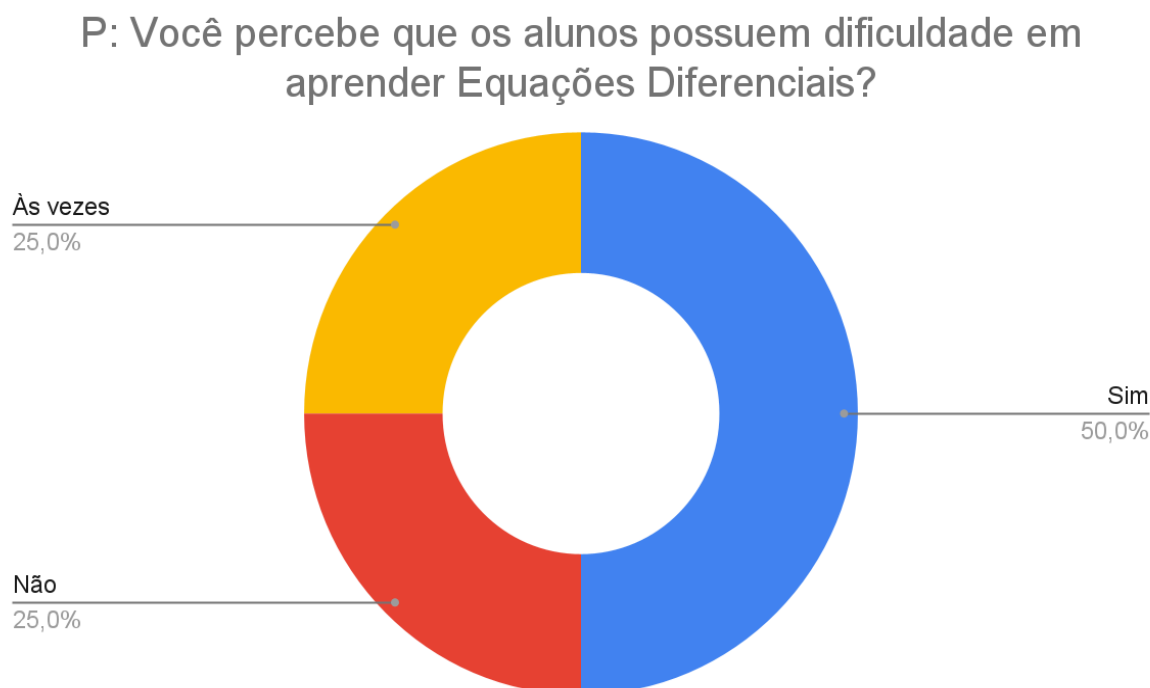
Geralmente, os alunos chegam com um déficit muito grande nas disciplinas de cálculo que precedem ED. Isso dificulta a interação e compreensão do que vai sendo ensinado, o que gera desmotivação e desânimo (P4).

Perceba que esta é uma constatação em comum à Lacerda e Guerreiro (2022), que, devido a interdependência, afirma que em virtude do déficit e da passividade de disciplinas anteriormente cursadas, os alunos encontraram dificuldades em progredir nas disciplinas seguintes. Nesse sentido, esses déficits tendem a serem acumulados, desmotivando e dificultando a compressão das disciplinas que utilizam equações diferenciais à medida que os alunos avançam nos cursos de engenharias.

² Os professores que participaram da pesquisa são identificados como Professor 1 (P1), Professor 2 (P2), e assim por diante.

Em seguida, os professores foram questionados se eles percebiam que os alunos sentiam dificuldades em aprender equações diferenciais e o motivo disso acontecer. Dois deles (P1 e P4) responderam “Sim”. O P2 respondeu que não, e o P3 respondeu “Às vezes” (Gráfico 10).

Gráfico 10 – Respostas dos professores acerca das dificuldades dos alunos



Fonte: Autor (2024).

A justificativa que os professores deram está novamente relacionada ao entendimento das disciplinas que precedem Equações Diferenciais. O P3 diz que as maiores dificuldades estão “no cálculo diferencial advindas de disciplinas anteriores”. Já o P4 formula uma justificativa mais descritiva, mas que em síntese tem o mesmo sentido. Ele diz que

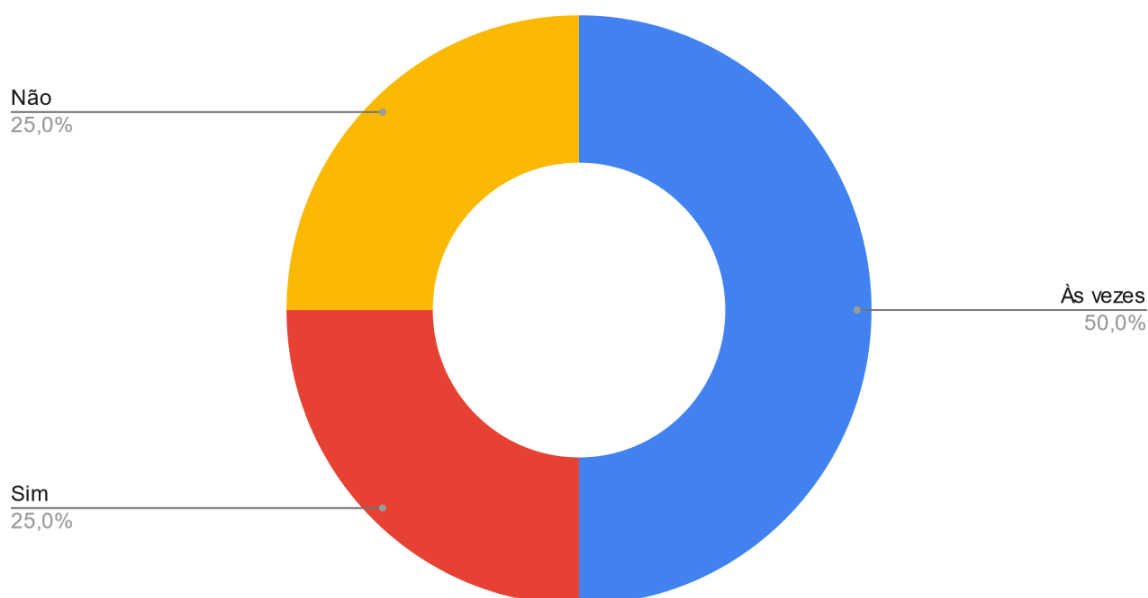
A maior dificuldade em aprender ED são os pré-requisitos utilizados. Muitos alunos não compreendem bem métodos de integração e consequentemente, não entendem os métodos utilizados nas resoluções das EDs (P4).

Já o P1 cita um problema comum nas disciplinas de Matemática que é a abstração. Por natureza a disciplina de Equações Diferenciais tem característica abstrata, porém aplicar modelos de problemas reais pode ser uma alternativa eficiente para mitigar esse problema.

Ao serem questionados sobre os problemas que seguem um passo a passo mecanizado, dois deles (P1 e P4) responderam que, em suas aulas, às vezes há problemas desse tipo. Apenas o P2 respondeu que os problemas seguem sempre um passo a passo mecanizado, e o P3 disse não seguir (Gráfico 11).

Gráfico 11 – Respostas dos professores acerca dos problemas de equações diferenciais

P: Você acha que os problemas de equações diferenciais usados em suas aulas seguem um passo a passo mecanizado?



Fonte: Autor (2024).

Para a parcela que responderam “Sim” e “Às vezes”, foi perguntado o por que de utilizarem esse tipo de abordagem. O primeiro argumento se refere ao material utilizado pelo professor e a forma de como ele aprendeu durante a sua formação. Ele diz que segue “[...] um livro que adota esse método, além disso foi assim que me ensinaram quando eu era aluno” (P1). Buscar por literaturas alternativas é um caminho a ser seguido quando se trata de mudanças de metodologias. Além dos livros tradicionais de ensino de equações diferenciais, que trazem problemas de aplicações de forma superficial, a utilização de livros focados no ensino de aplicações pode ser uma opção viável para a busca de novos problemas. Além disso, uma ação possível é utilizar livros de física ou livros específicos das engenharias como bibliografia complementar para a busca de novos problemas.

O segundo argumento se refere a ementa do curso. O P2 diz que

Boa parte da ementa do curso consiste em métodos de resolução de equações diferenciais, sendo que cada tipo de equação possui um método específico (e mecanizado) de resolução. Somente na parte de aplicações é possível fugir um pouco disso, já que os alunos estudam também a modelagem dos problemas (P2).

O fato do P2 proporcionar o estudo da modelagem dos problemas permite uma maior flexibilidade no método de ensino, o que difere do ensino tradicional que utiliza apenas problemas genéricos. No entanto, a extensa ementa é um fator limitante para a mudança de metodologia, tornando-se, portanto, um aspecto fundamental a ser analisado.

O último argumento sintetiza a mensagem desse trabalho. O professor reflete sobre a repetição dos métodos de solução sem a consciência do que de fato está sendo resolvido. Ele diz que os professores vão inevitavelmente

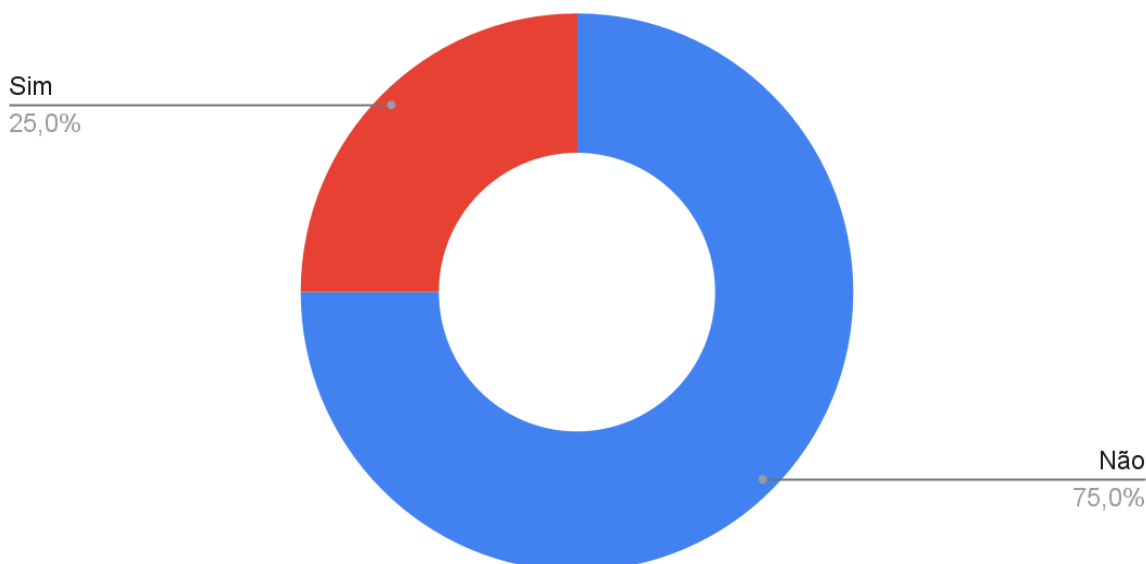
[...] utilizar de métodos de resolução que em um certo momento será "mecânico". No entanto, o termo mecânico é perigoso, porque nem tudo que é mecânico é compreendido, às vezes o que acontece é uma reprodução de regras sem consciência do que se trata. Eu usaria o mecânico mais no sentido de repetição consciente de métodos, um passo a passo, que vez ou outra aparece nos conceitos matemáticos. Mas, embora o meu desejo seja que eles utilizem os passo a passo de forma consciente, sei que isso em geral pode não ocorrer.

Perceba que os métodos de resolução não são o problema, visto que eles são uma parte fundamental da disciplina, no entanto a forma inconsciente de resolver as equações resulta em um distanciamento do seu principal propósito que é ser útil nas engenharias. Ainda que os métodos de resolução sejam úteis nas engenharias, nem sempre os alunos irão se deparar com modelos prontos. Portanto, abordar problemas de modelagem na disciplina de Equações Diferenciais pode preparar os alunos a modelar os problemas de engenharia com mais facilidade.

Nesse sentido, foi perguntado aos professores se eles acham que abordam problemas do mundo real suficiente. Apenas um deles (P2) respondeu positivamente à pergunta (Gráfico 12). Os demais responderam que não abordam problemas reais o suficiente em suas aulas.

Gráfico 12 – Respostas acerca da abordagem de problemas de modelagem

P: Você sente que suas aulas de Equações Diferenciais abordam problemas do mundo real o suficiente?



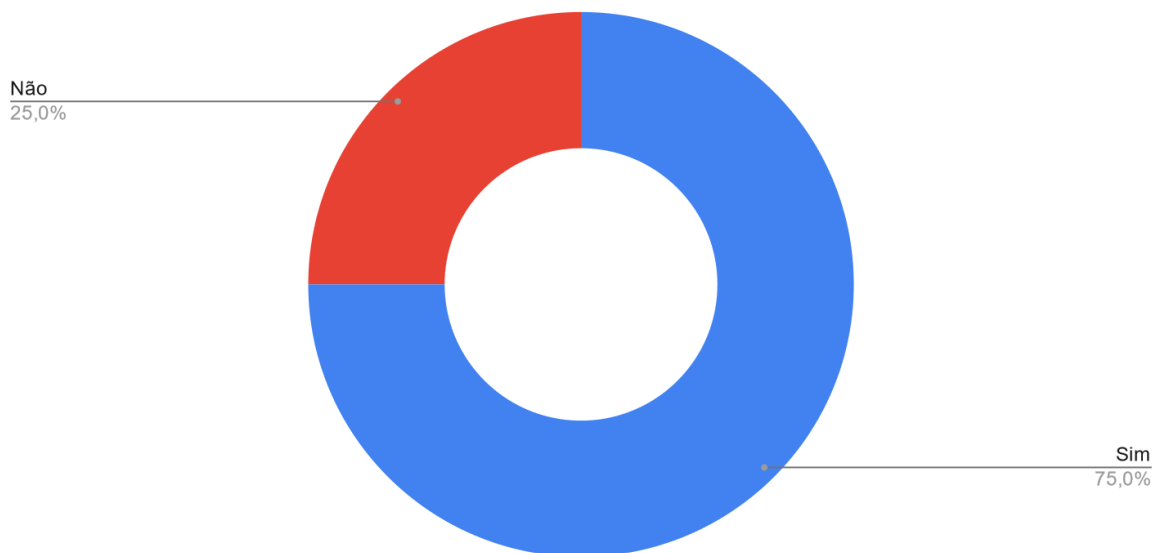
Fonte: Autor (2024).

Entretanto, ao ser questionado sobre o aumento da motivação dos alunos com a inclusão de mais problemas reais, o P2, assim como os demais, concordou que isso pode ocorrer.

A próxima pergunta questionava se a inclusão de problemas de aplicações poderia ser eficaz no processo de ensino-aprendizagem de equações diferenciais (Gráfico 13). O P3 respondeu que “Não”. Essa resposta pode ter relação com o que diz Bassanezi (2002) na seção Desafios. Bassanezi diz que, devido ao costume com o ensino tradicional, os alunos podem se perder no processo de aprendizagem ao serem expostos a uma nova metodologia, fazendo com que o ritmo da aula seja mais lento. No entanto, problemas como esses podem ser mitigados ao introduzir problemas de aplicação de forma gradual, para que todos, inclusive os professores, consigam se acostumar com o processo.

Gráfico 13 – Resposta acerca da eficiência das aplicações no ensino-aprendizagem

P: Você acha que utilizar aplicações e problemas reais é uma abordagem eficaz para o processo de ensino-aprendizagem de Equações Diferenciais?



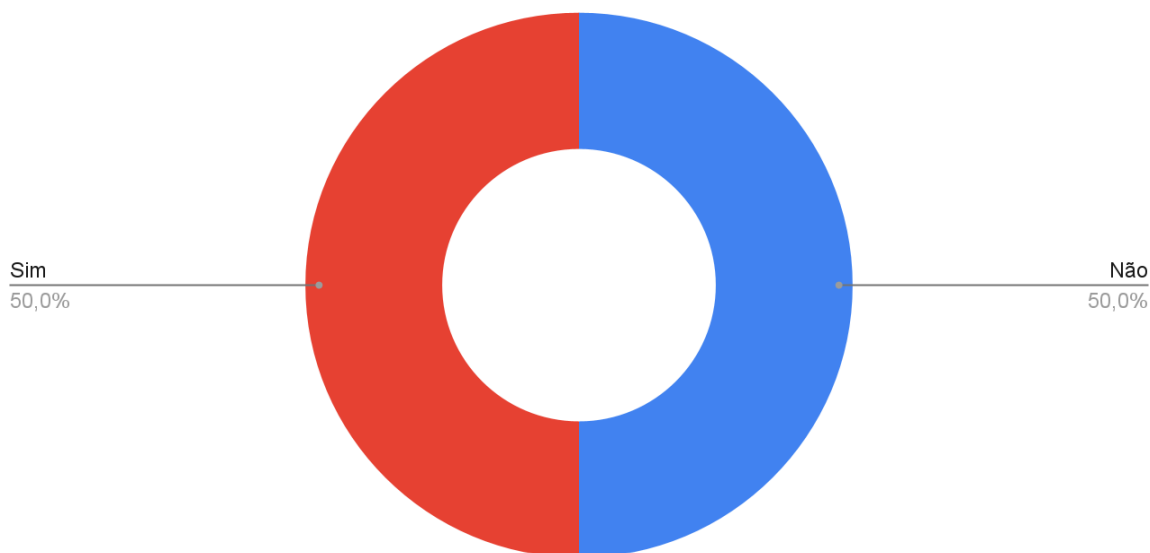
Fonte: Autor (2024).

Na questão seguinte, os professores foram indagados se eles achavam que os alunos aplicam equações diferenciais nas disciplinas de engenharia. Todos eles concordaram de maneira unânime. Esse consenso ressalta a importância da compreensão profunda da disciplina por parte dos alunos.

Para a pergunta "Você acredita que os alunos utilizarão os conteúdos ensinados por você quando estiverem exercendo a profissão de engenheiro?", as respostas ficaram divididas em 50%. P1 e P2 acham que os alunos não irão utilizar os conteúdos quando formados. Já P3 e P4 acreditam que os alunos irão utilizar (Gráfico 14).

Gráfico 14 – Respostas acerca da utilização de equações diferenciais

P: Você acredita que os alunos utilizarão os conteúdos ensinados por você quando eles estiverem exercendo a profissão de engenheiro?



Fonte: Autor (2024).

Esse resultado nos permite ter a perspectiva dos professores em relação ao uso de equações diferenciais na prática profissional dos engenheiros. Quando os professores acreditam que os engenheiros não utilizam equações diferenciais em sua atuação, é possível que a disciplina seja ministrada de maneira menos voltada para as aplicações práticas, o que pode resultar em um ensino mais passivo e desvinculado da realidade profissional. Essa abordagem limita o potencial dos alunos de compreenderem a importância das equações diferenciais como ferramenta fundamental em suas carreiras.

Por fim, a última questão reserva um espaço para os professores darem sugestões que possam tornar a disciplina mais envolvente e relevante. As respostas dos quatro professores podem ser lidas no Quadro 4.

Quadro 4 – Sugestão dos professores para tornar a disciplina mais envolvente e relevante

PROFESSORES	RESPOSTAS
P1	“Utilização de exemplos e exercícios que sejam possíveis de aparecer no cotidiano do futuro engenheiro.”
	“Dar mais atenção às aplicações, que já estão presentes em todos os livros utilizados nas

P2	disciplinas, e fazer a conexão das ED com as disciplinas que serão cursadas na engenharia. A alguns anos atrás, uma aluna escreveu um tcc sobre a utilização das ED nas engenharias, o que pode servir como ponto de partida.”
P3	“Inserir nas aulas e propor aos alunos problemas do mundo real, em especial das engenharias, que possam ser modelados por equações diferenciais. Além disso, propor atividades que explorem os diferentes métodos de solução para equações diferenciais por meio de softwares de computação algébrica.”
P4	“A disciplina tem uma ementa muito grande e isso dificulta a inclusão de momentos práticos ou mais dias de aula aplicando resoluções de problemas com EDs. Mas, infelizmente, mudar a ementa de um curso é mais complicado e burocrático. Então, acho que como sugestão, é importante que nós professores tenhamos consciência e atitude prática, para compreender que aplicar as EDs nas resoluções de problemas deve ser o principal objetivo da disciplina. Ironicamente é uma sugestão que eu ainda não consegui aplicar, mas pretendo e desejo, a cada oportunidade tentar tornar as aulas mais atrativas e envolventes.”

Fonte: Autor (2024).

Todas as respostas seguem em um único sentido: associar a disciplina de Equações Diferenciais com as engenharias. Apesar de todos os professores seguirem em uma única direção, vale ressaltar as palavras do P4. Nem sempre será fácil implementar uma nova metodologia devido a todos os fatores limitantes citados anteriormente por Bassanezi (2002). No entanto, a implementação gradual da nova metodologia a partir da utilização de softwares (P3) e a aplicação de modelos já presente nos livros tradicionais de equações diferenciais (P2), pode ser útil em tornar a disciplina mais relevante para os alunos.

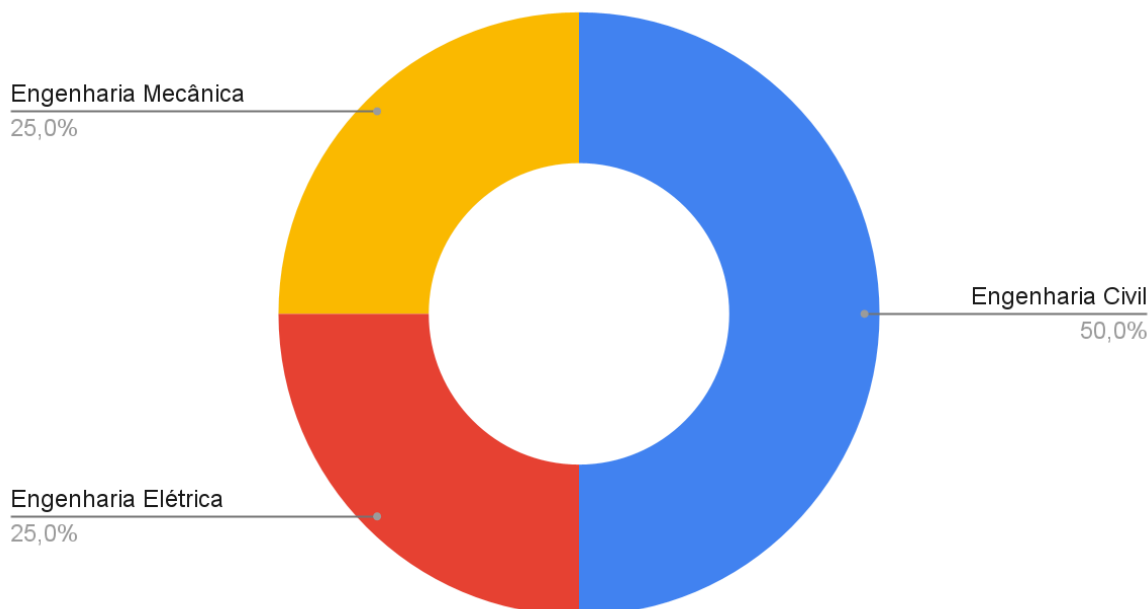
Em resumo, os professores têm consciência da importância das equações diferenciais nas engenharias, e que uma mudança na metodologia pode ser útil para os alunos. No entanto, eles ressaltam as dificuldades que é trabalhar os problemas práticos devido aos fatores limitantes como os déficits dos alunos e a extensa ementa.

4.4 Questionário para os professores das engenharias

O questionário aplicado aos professores conta com dez questões divididas em objetivas e discursivas. Dos 16 professores, 50% são da Engenharia Civil e 25% da Engenharia Elétrica e Engenharia Mecânica (Gráfico 15).

Gráfico 15 – Área de ensino dos docentes

P: Você é professor(a) de qual(is) engenharia(s)?



Fonte: Autor (2024).

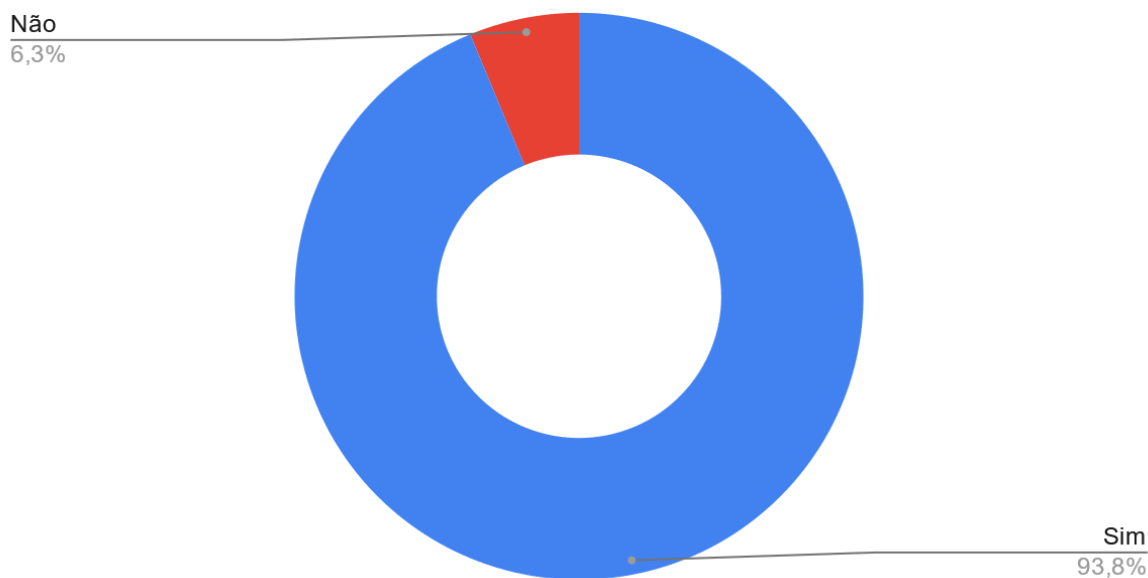
Dos 16 professores, 68,8% exercem ou exerceram a profissão de engenheiro fora das universidades. Com o intuito de avaliar a experiência deles no mercado de trabalho, foi solicitado que informassem o período durante o qual atuaram ou atuam na profissão. As respostas variaram desde períodos mais recentes, de seis meses, até períodos mais prolongados, de até 19 anos. Para a Engenharia Civil, sete deles disseram que atuaram como engenheiros. As áreas citadas foram: empresas construtoras, edificações e em escritórios de projeto de estruturas. Para a Engenharia Mecânica, apenas um respondeu que atuou como engenheiro na área de projetos. Em relação a Engenharia Elétrica, três deles responderam que atuaram como engenheiro, porém apenas dois deles informaram a área de atuação (empresa de projeto e empresa de tecnologia de segurança).

O objetivo em levantar dados referentes às áreas de atuação dos professores é entender a importância das equações diferenciais no contexto pós-graduação. Dos sete da Engenharia Civil, dois deles afirmaram que usaram equações diferenciais enquanto atuavam como engenheiro, e dos três da Engenharia Elétrica, apenas um afirmou ter usado. O único da Engenharia Mecânica que atuou como engenheiro, não utilizou equações diferenciais. No

entanto, 98,3% dos professores reconhecem a importância das equações diferenciais para os engenheiros (Gráfico 16).

Gráfico 16 – Resposta dos professores acerca da importância das equações diferenciais

P: Você acha que equações diferenciais são importantes para os engenheiros(as)?

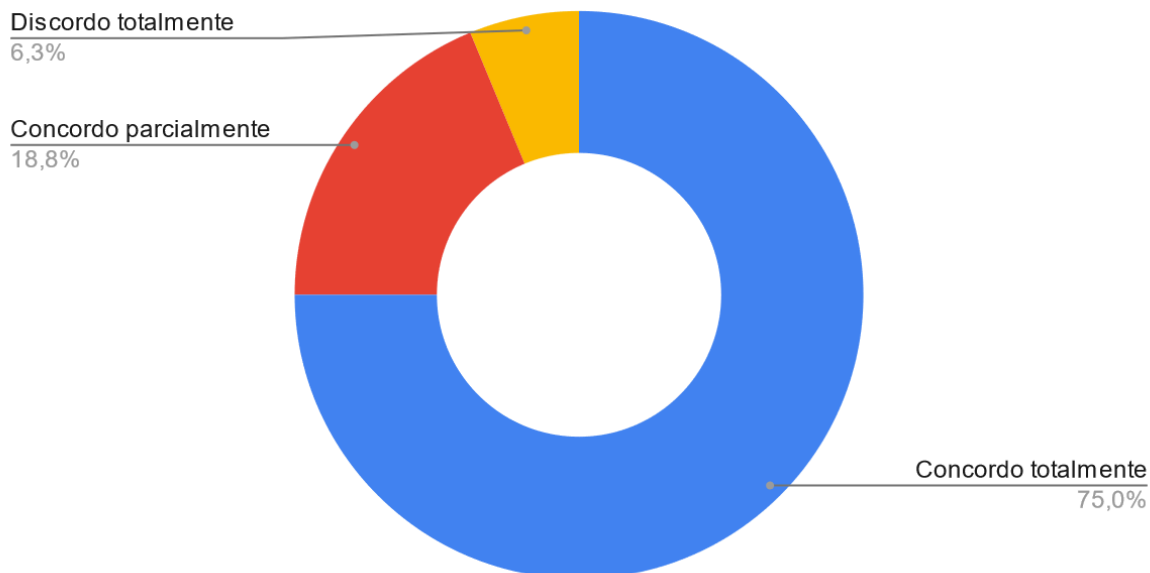


Fonte: Autor (2024).

Usando a mesma pergunta base, porém em relação aos alunos, 75% dos professores concordam totalmente que os conhecimentos de equações diferenciais são importantes para os discentes. Além disso, 18,8% concorda parcialmente, e 6,3% discorda totalmente (Gráfico 17).

Gráfico 17 – Opinião acerca da importância das equações diferenciais para os discentes

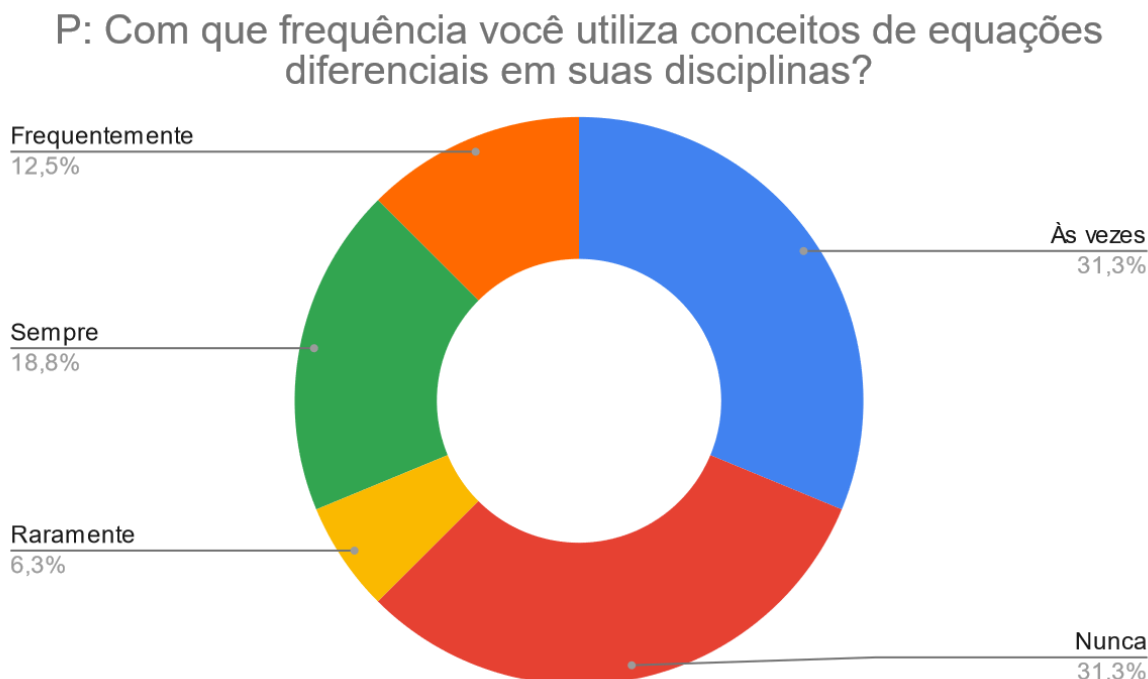
P: Você acredita que o conhecimento de equações diferenciais é importante para os discentes de engenharia?



Fonte: Autor (2024).

Por conseguinte, foi de interesse levantar a frequência no qual esses professores abordam os conceitos de equações diferenciais em suas disciplinas. Dos 16, 18,8% sempre utilizam os conceitos em suas aulas. Além disso, 12,5% afirmam usar frequentemente, 31,1% utilizam às vezes, e 6,3% raramente. Dessa forma, 31,3% afirmam nunca terem usado os conceitos de equações diferenciais em suas aulas (Gráfico 18).

Gráfico 18 – Frequência de utilização dos conceitos de equações diferenciais



Fonte: Autor (2024).

Veja que esses dados mostram que a quantidade de professores que utilizam os conceitos de equações diferenciais pelo menos uma vez em suas aulas é consideravelmente maior do que aqueles que nunca utilizaram, fato que reforça a importância e a compreensão adequada desses conceitos.

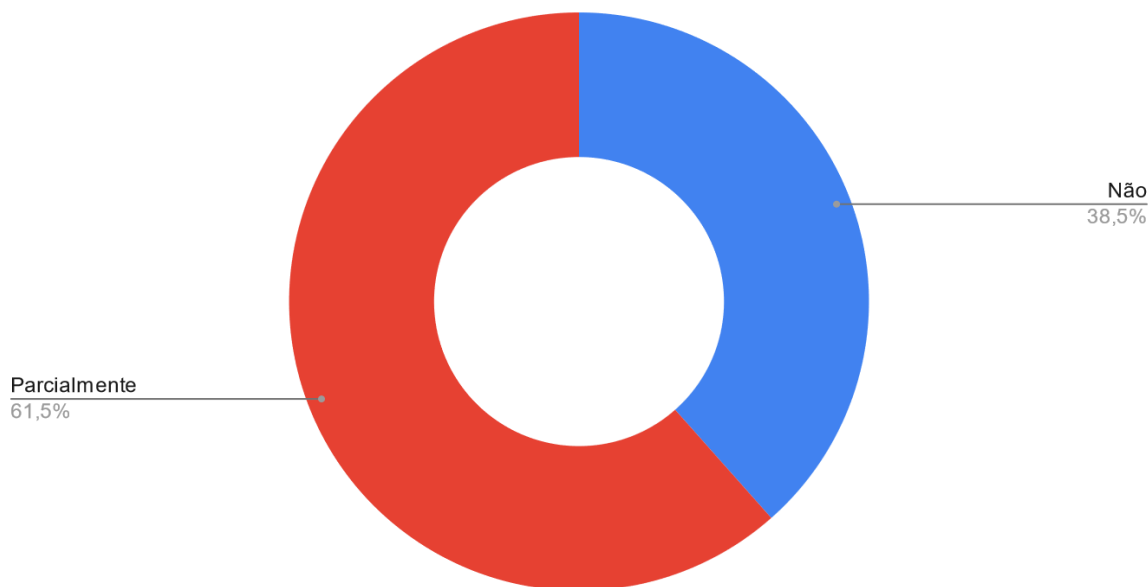
Nesse sentido, foi questionado aos professores quais disciplinas eles utilizavam os conceitos de equações diferenciais. Para a Engenharia Civil as disciplinas citadas foram: Estruturas de Concreto Armado I, Estruturas de Concreto Armado II, Mecânica das Estruturas I, Mecânica das Estruturas II, Sistemas de Abastecimento de Água e Hidráulica. Para a Engenharia Elétrica as disciplinas citadas foram: Circuitos Elétricos I, Circuitos Elétricos II, Máquinas Elétricas, Análise de Sistemas de Potência e Eletrônica de Potência. Por fim, para a Engenharia Mecânica, foram citadas: Mecânica dos Fluidos, Conformação Mecânica e Resistência dos Materiais.

Sendo assim, é de interesse questionar aos docentes sobre a compreensão dos alunos quando expostos aos conceitos de equações diferenciais nessas disciplinas. De acordo com 61,5% dos professores, os alunos têm uma compreensão parcial dos conceitos. Para 38,5%, os

alunos não têm nenhuma compreensão dos conceitos aplicados nas disciplinas de engenharia (Gráfico 19).

Gráfico 19 – Compreensão dos conceitos de equações diferenciais nas disciplinas de engenharia

P: Em sua opinião, os discentes têm uma compreensão adequada de equações diferenciais ao aplicar esses conceitos em sua disciplina?



Fonte: Autor (2024).

Perceba que nenhum dos professores acredita que os alunos tenham uma compreensão adequada dos conceitos de equações diferenciais aplicado nas disciplinas de engenharia, compreensão essa que ocorre apenas de maneira parcial. Parte desse problema é explicada na seção Ensino Tradicional, em que Dullius, Veit e Araujo (2013) destacam a não compreensão dos alunos em relação às derivadas estudadas em disciplinas anteriores a Equações Diferenciais, fato esse que reverbera em disciplinas futuras.

Por fim, foi perguntado a opinião dos professores em relação ao que podia ser feito para que os alunos compreendessem melhor como as equações diferenciais seriam aplicadas nas aulas de engenharia. A resposta pode ser conferida no Quadro 5.

Quadro 5 – Opinião dos professores da engenharia

PROFESSORES	RESPOSTAS
P5	“Utilizar exemplos práticos de engenharia.”
P6	“Problemas mais práticos.”
P7	“Pararem de cobrar demonstração e ensinarem aplicações. O curso não é matemática, é engenharia.”
P8	“As equações diferenciais são amplamente aplicadas em diversas áreas, como escoamentos de fluidos e sistemas de vibrações mecânicas, entre outras. Contudo, em sala de aula, são frequentemente apresentadas de forma simplificada, desconsiderando algumas variáveis para facilitar a compreensão dos alunos. Uma abordagem interessante seria integrar o uso de softwares de engenharia, como o Ansys e o Inventor, para demonstrar de maneira prática a aplicação dessas equações.”
P9	“Mostrar mais aplicações ligadas à engenharia.”
P10	“Na minha opinião é necessário focar os esforços para que o discente compreenda os fundamentos, quais são as aplicações e como modelar os problemas. Percebo que muitos professores focam os esforços em operacionalizar o cálculo e isso não é produtivo no meu ponto de vista, porque salvo algumas exceções os engenheiros não aplicam recorrentemente a EDO em problemas práticos e hoje nós temos facilidade de acesso a ferramentas computacionais.”
P11	“Formulações práticas.”
P12	“Aplicar as equações diferenciais em contextos mais práticos relacionados ao curso que eles fazem.”
P13	“Acredito que isso já é feito, mas de toda forma acredito que associar fenômenos físicos às equações diferenciais pode melhorar a compreensão do discente, como: sistema massa-mola; carga e descarga de capacitores e indutores; resposta de circuitos elétricos de segunda ordem. Para o curso de engenharia elétrica, a introdução à Transformada de Laplace também é fundamental para a solução de equações diferenciais.”
P14	“Nas minhas disciplinas não aplico as equações diferenciais por conta do tipo de conteúdo, no entanto, compreendo a importância para outras disciplinas do curso. Tornar mais frequente os exemplos de problemas de engenharia no ensino das Equações Diferenciais é o melhor caminho para aplicar os conceitos.”
P15	“Utilizar, sempre que possível, exemplos de aplicabilidade prática em seu campo de trabalho.”
P16	“Usar mais avaliação Gráfica das funções.”
P17	“Mostrar a aplicação prática das equações diferenciais.”
P19	“(TEORIA) É necessário que os discentes revisem o conteúdo quando for necessário. Por outro lado, os docentes devem ressaltar a necessidade do conteúdo para sua completa aprendizagem e aplicabilidade, a fim de que os discentes tenham interesse em revisá-lo. (PRÁTICA) Além disso, se o docente utiliza as EDO ou EDP em sua pesquisa ou trabalho, é importante que mostre aos discentes na sala de aula para indicar onde e como são aplicadas. Caso contrário, o docente deve buscar exemplos de aplicação.”

P20	“Procurar sempre mostrar problemas práticos nos quais as EDO sejam utilizadas.”
-----	---

Fonte: Autor (2024).

As opiniões dos professores trazem uma perspectiva sobre o que eles acreditam ser o ideal no que diz respeito à metodologia da disciplina de Equações Diferenciais. De maneira geral, os professores acreditam que a utilização de problemas práticos é eficaz na aprendizagem das equações diferenciais e que, dessa forma, os alunos iriam assimilar com mais facilidade quando eles se depararem com problemas desse tipo nas aulas de engenharia.

Na perspectiva do P19, estimular os discentes com aplicações pode despertar o interesse na disciplina de maneira que eles sintam a necessidade de revisar os conteúdos sempre que possível. Perceba que esse pensamento converge em direção ao que Bonaldo *et al.* (2018) conclui em relação a sua metodologia e em como os alunos mudaram a concepção acerca do curso e da disciplina em questão, passando de sujeitos passivos para ativos no processo de aprendizagem.

Sendo assim, é nítido como uma metodologia ativa tem influência em como os alunos reagem ao cursar uma disciplina. De acordo com o P10, a operacionalização do cálculo, ou seja, tratar as equações diferenciais apenas de maneira algébrica, não é uma forma produtiva no que se refere ao ensino das equações diferenciais com o foco nas engenharias. Tal razão se dá devido ao avanço tecnológico e a facilidade ao acesso a ferramentas computacionais que resolvem os mais diversos tipos de equações. Dessa forma, resolver uma equação diferencial passa a ser segundo plano, e, como diria Pinto e Lima (2017), interpretar os seus resultados de uma equação é tão importante quanto resolvê-las.

Nesse sentido, o P8 indica a utilização de softwares focados nas engenharias, como o Ansys e o Inventor, que são softwares de simulação. No entanto, a utilização desses programas em sala de aula pode demandar muito tempo, devido a sua complexidade. Porém, a exposição pontual por meio de vídeos pode ser uma alternativa vantajosa em relação ao tempo e a complexidade da utilização do programa. Por exemplo, o docente pode buscar por vídeos de simulação que utilizam os conceitos de equações diferenciais e propor que os discentes encontrem o resultado do problema. Feito isso, o docente pode comparar os resultados dos alunos com o resultado determinado pelo software, através da exposição pontual da resposta. Assim, os alunos tomam conhecimento da utilidade da disciplina e de como eles usariam os

conceitos ensinados em uma eventual aplicação, sem precisar necessariamente aprender a utilizar o software.

Em síntese, os professores reconhecem a importância das equações diferenciais nas engenharias e como a aproximação da disciplina com os problemas de aplicação pode ser benéfico aos discentes. Dito isso, os dados sugerem que os conceitos da disciplina são usados com frequência nas matérias de engenharia, ressaltando a importância da completa aprendizagem. Por outro lado, de acordo com os professores, os alunos chegam em suas disciplinas com um déficit quando são expostos aos conceitos de equações diferenciais, apresentando apenas uma compreensão parcial.

5 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES

A seguir será apresentado alguns exemplos de aplicações que podem ser abordadas em aula. O objetivo dessa seção é reunir exemplos que fujam do padrão tradicional de problemas. As soluções dos exemplos são obtidas a partir da investigação acerca do problema abordado, e não somente pela solução algébrica das equações diferenciais.

5.1 Problema de mistura

Na engenharia, é comum estudar sobre o comportamento dos fluidos com o intuito de prever possíveis situações. Abaixo, será resolvido um problema de mistura entre duas soluções salinas com concentrações diferentes. A finalidade do exercício é encontrar a equação que descreve a quantidade de sal em função do tempo. Uma breve análise sobre as unidades das propriedades envolvidas é essencial para modelar o problema.

Problema 1: (Zill;Cullen, 2008, p. 110) Inicialmente, 50 gramas de sal são dissolvidos em um tanque contendo 300 litros de água. Uma solução salina é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 litros por minuto, e a solução bem misturada é então drenada na mesma taxa. Se a concentração da solução que entra é 2 gramas por litro, determine a quantidade de sal no tanque em qualquer instante. Quantas gramas de sal estão presentes após 50 minutos? E depois de um longo tempo?

Solução: Podemos tirar algumas informações importantes no enunciado do problema. A quantidade de sal no instante $t = 0$ é $A(0) = 50g$, o volume do tanque $V = 300 l$ e a vazão volumétrica de $Q_v = 3 l/min$. Se $A(t)$ é a quantidade de sal, $\frac{dA}{dt}$ é a taxa de sal no tanque. A taxa de sal pode ser descrita como a vazão mássica que entra menos a vazão mássica que sai. Assim,

$$\frac{dA}{dt} = Q_{me} - Q_{ms}.$$

Para dar continuidade, é preciso falar sobre a concentração de sal. A vazão mássica depende da concentração de sal

$$C = \frac{m}{V}$$

onde m é a massa do soluto, e da vazão volumétrica do tanque Q_v . A concentração de sal de entrada foi dada no enunciado. Assim, para a vazão mássica de entrada, obtém-se

$$Q_{me} = C_e Q_v = 2 \cdot 3 = 6 g/min.$$

Para a vazão mássica de saída, não é informado sobre o valor da massa do soluto que sai. Portanto, pela fórmula da concentração, a massa do soluto assume o valor genérico “A”. Assim,

$$Q_{ms} = C_s \cdot Q_v = \frac{A}{300} \cdot 3 = \frac{A}{100}$$

e consequentemente

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}.$$

Reorganizando a equação, temos

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100} = 6.$$

O fator de integração é dado por

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt} = e^{\frac{t}{100}}.$$

Para obter a solução da equação diferencial, multiplica-se o fator de integração por toda a expressão, resultando em

$$e^{\frac{t}{100}} \cdot \frac{dA}{dt} + e^{\frac{t}{100}} \cdot \frac{A}{100} = e^{\frac{t}{100}} \cdot 6$$

$$\frac{d}{dt}[A \cdot e^{\frac{t}{100}}] = e^{\frac{t}{100}} \cdot 6.$$

Multiplicando a expressão por dt e integrando em ambos os lados, temos

$$\int \frac{d}{dt}[A \cdot e^{\frac{t}{100}}] dt = \int e^{\frac{t}{100}} \cdot 6 dt$$

$$A \cdot e^{\frac{t}{100}} = 600e^{\frac{t}{100}} + K$$

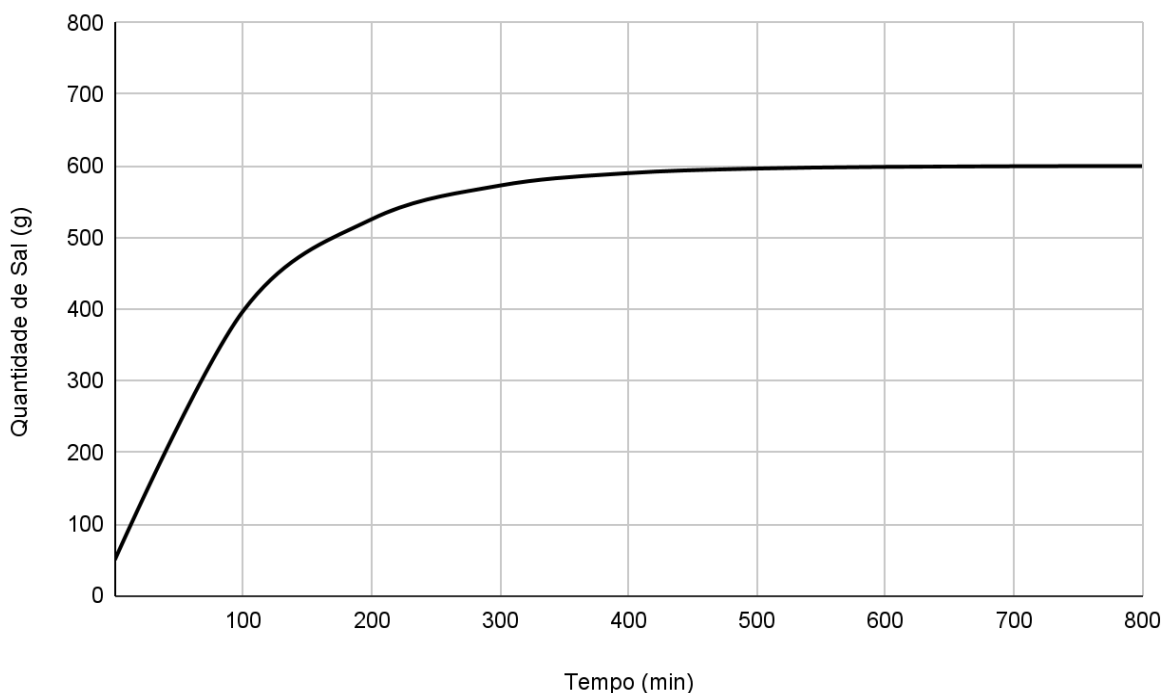
$$A(t) = 600 + Ke^{-\frac{t}{100}}.$$

Para $A(0) = 50$, $K = -550$, sendo assim

$$A(t) = 600 - 550e^{-\frac{t}{100}}.$$

Quando $t = 50$, a quantidade de sal no misturador é de $A(t) = 266,41$ gramas. A representação do comportamento da quantidade de sal no tanque pode ser vista no Gráfico 20. Note que, para longos períodos, a curva da função tende a $600g$. Essa é a quantidade máxima de sal no tanque.

Gráfico 20 - Representação da quantidade de sal no tanque em função do tempo



Fonte: Autor (2024).

5.2 Problema do oscilador

Nos problemas de engenharia, nem sempre o foco está na solução final de uma equação diferencial. Por vezes, uma análise acerca dos aspectos que compõem as equações diferenciais é suficiente. A seguir, será demonstrado um exemplo que o foco não é a solução da equação, mas sim identificar os aspectos físicos das derivadas e aplicar no problema. A importância de estudar esse tipo de problema está nas diversas simplificações de situações reais em sistema massa-mola, sobretudo nas vibrações mecânicas.

Problema 2: (Nussenzveig, 2018, p. 92) Um disco de massa M , preso por uma mola de constante elástica k e massa desprezível a uma parede vertical, desliza sem atrito sobre uma mesa de ar horizontal. Um bloquinho de massa m está colocado sobre o disco, com cuja superfície tem um coeficiente de atrito estático μ_e . Qual é a amplitude máxima de oscilação do disco para que o bloquinho não escorregue sobre ele?

Solução: Esse é um problema clássico envolvendo equações diferenciais, com uma pequena alteração adicionando um bloquinho sobre o disco. A equação diferencial que descreve o problema pode ser obtida a partir da força resultante sobre o disco e a força elástica da mola. A força resultante na forma diferencial é dada por:

$$F_R = m_T \frac{d^2 x}{dt^2}$$

sendo $m_T = M + m$ o somatório das massas do disco e do bloquinho. A força elástica da mola é dada por:

$$F_e = -kx.$$

Igualando as duas forças

$$F_R = m_T \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

e rearranjando a equação

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m_T} x.$$

Perceba que a derivada segunda da posição é a aceleração, que, por sua vez, é máxima nos extremos. Assim, a aceleração máxima a_m ocorre em $x = A$. Dessa forma, a partir do módulo da aceleração, obtém-se

$$a_m = \frac{k}{m_T} A.$$

Para que o bloquinho não escorregue sobre o disco, a força de atrito estático deve ser igual a força devido a aceleração máxima do sistema. A força de atrito estático é dada por

$$F_{at} = \mu_e m_T g$$

e a força devido a aceleração máxima é

$$F = m_T a_m.$$

Assim,

$$F = F_{at}$$

$$m_T a_m = \mu_e m_T g$$

simplificando, obtém-se

$$\frac{k}{m_T} A = \mu_e g$$

e por fim, obtendo a expressão para a amplitude máxima do sistema, tem-se

$$A = \frac{\mu_e g (m + M)}{k}.$$

5.3 Problema da lei de resfriamento de Newton

As situações que envolvem transferência de calor são amplamente discutidas em grande parte das engenharias, sendo a lei de resfriamento de Newton umas das bases que

sustentam tais problemas. Adiante será abordado um problema simples de transferência de calor, mas que é essencial para o entendimento desses tipos de situações.

Problema 3: (Zill;Cullen, 2008, p. 107) Quando um bolo é retirado do forno, sua temperatura é de 300°F. Três minutos depois, sua temperatura passa para 200°F. Quanto tempo levará (contando desde o momento que foi retirado do forno) para sua temperatura chegar a 75°F, se a temperatura do meio ambiente em que ele foi colocado for 70°F?

Solução: Uma equação diferencial importante para problemas relacionados à variação de temperatura é a lei de resfriamento de Newton, que por definição, "diz que a taxa de variação de temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante T_m do meio ambiente" (Zill;Cullen, 2008, p. 107). Assim,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m).$$

Para os valores dados no problema, a equação diferencial passa a ser

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70).$$

Resolvendo por variáveis separáveis, tem-se

$$\frac{dT}{T - 70} = kdt$$

$$\ln |T - 70| = kt + C_1$$

$$T - 70 = e^{kt+C_1}$$

$$T - 70 = e^{kt} e^{C_1}$$

$$T - 70 = Ce^{kt}$$

e por fim,

$$T(t) = Ce^{kt} + 70.$$

Para concluir a equação, é preciso aplicar a condição $T(0) = 300$ dada no problema. Assim,

$$T(0) = 300 = Ce^{k(0)} + 70$$

$$C = 230$$

e por conseguinte

$$T(t) = 230e^{kt} + 70.$$

Resta apenas determinar a constante k da equação. Se três minutos depois a temperatura cai para 200°F , dessa forma é possível determinar a constante k por,

$$T(3) = 200 = 230e^{k(3)} + 70$$

$$e^{3k} = \frac{200 - 70}{230}$$

$$e^{3k} \approx 0,565217$$

$$\ln e^{3k} = \ln 0,565217$$

$$3k = \ln 0,565217$$

$$k \approx -0,19018.$$

Feito isso, a solução particular da equação é obtida por,

$$T(t) = 230e^{-0,19018t} + 70.$$

Para determinar o tempo necessário para que a temperatura atinja 75°F,

$$T(t) = 75 = 230e^{-0,19018t} + 70$$

$$e^{-0,19018t} = \frac{75 - 70}{230}$$

$$e^{-0,19018t} \approx 0,0217$$

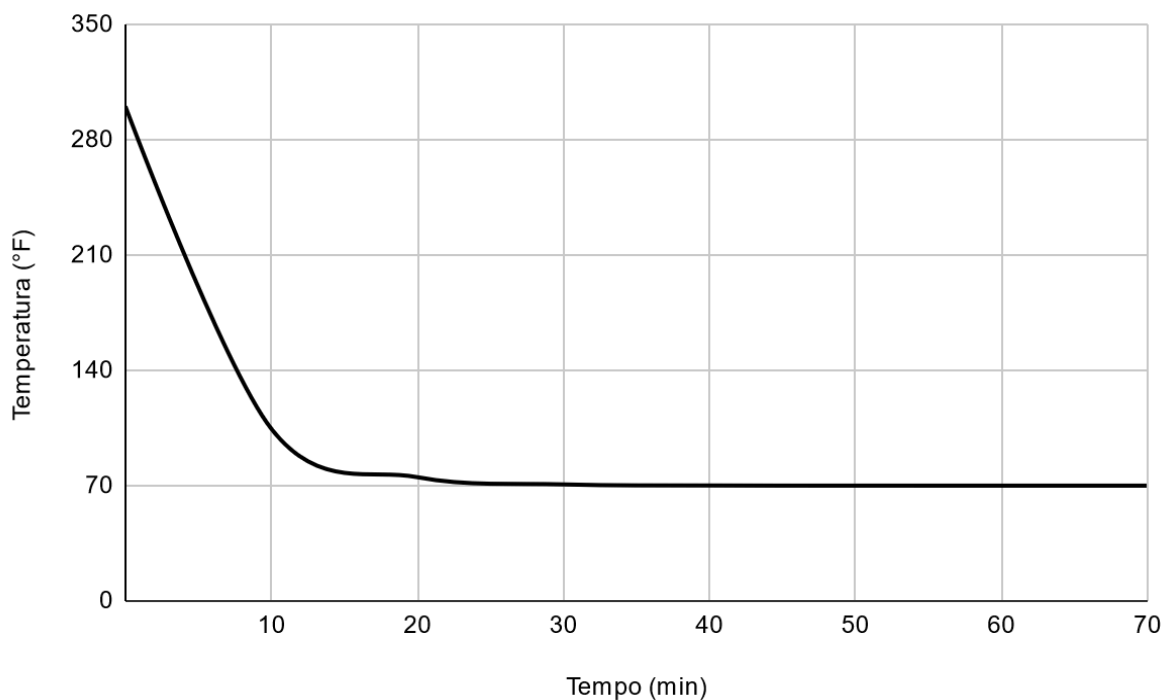
$$\ln e^{-0,19018t} = \ln 0,0217$$

$$-0,19018t = -3,8304$$

$$t \approx 20,1 \text{ minutos.}$$

O comportamento da equação pode ser observado a partir do Gráfico 21.

Gráfico 21 - Temperatura do bolo em função do tempo



Fonte: Autor (2024).

5.4 Problema de crescimento e decrescimento

Para o problema de cultivo de bactérias (problema 4) e meia-vida (problema 5), será usado um modelo de equação diferencial que descreve problemas de crescimento ou decrescimento. Esse modelo informa que a taxa de uma determinada quantidade é proporcional à função que descreve essa quantidade (Equação 1).

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \quad (1)$$

Sua solução pode ser obtida tanto pelo método linear quanto por separação de variáveis. Sendo assim, a solução da Equação 1 por variável separável é obtida ao dividir a equação por Q , multiplicar por dt e em seguida integrar em ambos os lados.

$$\frac{dQ}{Q} = kdt$$

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int kdt$$

$$\ln |Q| = kt + C.$$

Como a função Q está relacionada à quantidade de bactérias e à meia-vida, que só admitem valores positivos, o módulo da equação deixa de ser necessário. Sendo assim, aplicando a propriedade logarítmica tem-se que

$$Q = e^{kt+C_1}$$

$$Q = e^{kt} e^{C_1}$$

$$Q(t) = C e^{kt}. \quad (2)$$

Sendo a Equação 2 a solução geral, para obter a solução particular é preciso aplicar as condições de contorno $Q(t_0) = Q_0$, sendo $t_0 = 0$. Sendo assim, $C = Q_0$. A partir disso obtém-se

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}. \quad (3)$$

5.4.1 Problema do cultivo de bactérias

Problema 4: (Zill;Cullen, 2008, p. 103) Em uma cultura há inicialmente Q_0 bactérias. Em uma hora, o número de bactérias é de $\frac{3}{2}Q_0$. Se a taxa de crescimento for proporcional ao

número de bactérias $Q(t)$ presente no instante t , determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.

Solução: Aplicando $t = 1h$ e $Q(1) = \frac{3}{2}Q_0$ na Equação (3):

$$Q(1) = \frac{3}{2}Q_0 = Q_0 e^{k(1)}$$

$$\frac{3}{2} = e^k.$$

Multiplicando ambos os lados pelo logaritmo natural

$$\ln e^k = \ln \frac{3}{2}$$

$$k \approx 0,4055.$$

Substituindo k na Equação (3)

$$Q(t) = Q_0 e^{0,4055t}.$$

A partir disso, para $Q(t) = 3Q_0$, temos:

$$3Q_0 = Q_0 e^{0,4055t}$$

$$\ln 3 = \ln e^{0,4055t}$$

$$0,4055t = \ln 3$$

$$t \approx 2,71h.$$

5.4.2 Problema da meia-vida

Problema 5: (Zill;Cullen, 2008, p. 105) Um reator converte urânio 238 em isótopo de plutônio 239. Após 15 anos, foi detectado que 0,043% da quantidade inicial Q_0 de plutônio se desintegrou. Encontre a meia-vida desse isótopo, se a taxa de desintegração é proporcional à quantidade remanescente.

Solução: Perceba que pela Equação (3), $Q(15)$ é a quantidade remanescente após 15 anos, sendo $Q(15) = (1 - 0,00043)Q_0 \Rightarrow Q(15) = 0,99957Q_0$, dessa forma

$$Q(15) = 0,99957Q_0 = Q_0 e^{k(15)}$$

$$\ln 0,99957 = \ln e^{15k}$$

$$15k = \ln 0,99957$$

$$k = -0,00002867.$$

Portanto,

$$Q(t) = Q_0 e^{-0,00002867t}.$$

Para meia-vida, $Q(t) = \frac{Q_0}{2}$. Então resolvendo para o tempo, obtém-se

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-0,00002867t}$$

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-0,00002867t}$$

$$-0,00002867t = \ln \frac{1}{2}$$

$$t = 24180 \text{ anos.}$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando iniciou-se o trabalho de pesquisa, notamos que havia um interesse pela aproximação da disciplina Equações Diferenciais às engenharias, e que, por isso, era importante estudar sobre as maneiras de realizar tal proposta.

Diante disso, a pesquisa teve como objetivo geral investigar a importância de uma metodologia baseada em aplicações de equações diferenciais nos cursos de engenharia. Nesse sentido, constata-se que o objetivo geral foi atendido porque, efetivamente, o trabalho conseguiu, a partir do levantamento bibliográfico e das opiniões dos docentes e discentes, verificar que há uma lacuna a ser preenchida quando se trata do ensino de equações diferenciais. Concluímos que, dadas as ressalvas, tanto professores quanto alunos acreditam que uma metodologia baseada em aplicações pode ser útil na aproximação da disciplina com as engenharias.

Dessa forma, o objetivo específico inicial era abordar o ensino tradicional, a modelagem, os benefícios e os desafios desse novo método. Ele foi atendido a partir do levantamento de pesquisas publicadas sobre o ensino de equações diferenciais.

O segundo objetivo específico foi demonstrar exemplos de aplicações. Esse objetivo foi concluído através do levantamento de questões de livros de equações diferenciais e física.

E o terceiro objetivo específico foi coletar a opinião de docentes e discentes acerca da metodologia baseada em aplicações. A partir de questionários online, esse objetivo foi cumprido.

A pesquisa teve como ponto de partida a ideia de que a utilização mais frequente de aplicações pode aprimorar o aprendizado, aumentar a motivação e a capacidade dos alunos na resolução de problemas de equações diferenciais. Isso ocorre porque os estudantes se tornam participantes mais ativos no processo de ensino, sendo incentivados a explorar os temas com maior profundidade, o que contribui para o desenvolvimento de um raciocínio mais preciso e crítico em relação aos desafios propostos. Durante o trabalho, verificou-se que, tanto os

docentes quanto os discentes acreditam que abordar aplicações pode ser benéfico no ensino de equações diferenciais, e que essa metodologia aproxima os discentes a realidade das engenharias.

Assim sendo, respondeu-se a pergunta do problema de pesquisa acerca do porquê da metodologia baseada em aplicações ser importante. Isso se dá devido a aproximação da disciplina com as engenharias, dando significado às teorias ensinadas, desenvolvendo o raciocínio crítico dos discentes e preparando-os para as disciplinas que serão cursadas futuramente nas engenharias.

A metodologia utilizada tem característica básica estratégica com caráter descritivo e exploratório. Os questionários foram analisados a partir de uma abordagem qualiquantitativa com perguntas mistas, utilizando o método indutivo. Para o levantamento dos dados, utilizou-se questionários online nos quais houveram 42 participantes. Dentre eles, 11 eram alunos atualmente matriculados na disciplina de Equações Diferenciais no curso Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da UFERSA, campus Caraúbas; outros 11 eram discentes que já haviam cursado a disciplina na mesma instituição. Além disso, participaram quatro docentes que lecionam a disciplina (instituições não informadas) e 16 professores de cursos de engenharia da UFERSA, campus Caraúbas, e de outras instituições, não especificadas.

Diante da metodologia proposta, percebe-se que o trabalho poderia ter sido realizado com entrevistas semiestruturadas presenciais, ao invés de questionários online. Essa medida poderia proporcionar respostas mais precisas e de qualidade. O anonimato dos formulários online permitia que alguns alunos respondessem de maneira negligente, resultando em respostas de baixa qualidade e que não contribuía com a pesquisa.

Além disso, encontramos dificuldades em obter materiais de autores diferentes que estudam sobre a modelagem para que pudéssemos nos aprofundar no assunto. Em diversas ocasiões, encontramos referências a livros sobre modelagem matemática em artigos e teses consultados durante a pesquisa. No entanto, esses livros se mostraram de difícil acesso, o que dificultou seu uso como fonte de estudo.

Para trabalhos futuros, recomendamos a construção de um roteiro possível que respeite a ementa do curso, mas que possa introduzir de maneira gradual a abordagem de mais aplicações na disciplina, assim como a utilização de softwares de simulação. A partir disso, poderia ser feito o acompanhamento da turma durante toda a disciplina e no final seria

coletado dados acerca da metodologia para que pudéssemos ter uma perspectiva aprofundada sobre o tema.

REFERÊNCIAS

- ALVES, Thâmara Dayane Batista et al. **Utilização das equações diferenciais para modelagem de sistemas de engenharia da UFERSA Campus Caraúbas**. 2018.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Editora Contexto, 2002. p. 15-38.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática - teoria e prática**. São Paulo: Editora Contexto, 2015. *E-book*. ISBN 9788572448932. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788572448932/>. Acesso em: 05 out. 2024.
- BONALDO, Everaldo et al. Proposta metodológica para o ensino de equações diferenciais no curso de Engenharia Civil na PUC Minas–Barreiro. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 37, n. 2, 2018.
- COSTA, F. de A. ENSINO MATEMÁTICA POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA. **Ensino da Matemática em Debate**, [S. l.], v. 3, n. 1, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/29005>. Acesso em: 19 mar. 2024
- DULLIUS, Maria Madalena; VEIT, Eliane Angela; ARAUJO, Ives Solano. Dificuldades dos alunos na aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. Alexandria: **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 2, p. 207-228, 2013.
- FERREIRA, Vagner Donizeti Tavares. **A modelagem matemática na introdução ao estudo de equações diferenciais em um curso de engenharia**. 2010.
- LACERDA, C. R.; GUERREIRO, M. G. . Aprendizagem significativa : estudo sobre a visão dos professores no Ensino Superior. **Revista Internacional de Educação Superior**, Campinas, SP, v. 9, n. 00, p. e023036, 2022. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/riesup/article/view/8668162>. Acesso em: 6 mar. 2024.
- LOPES, Aldo Peres Campos. Modelagem Matemática e Equações Diferenciais: um mapeamento das pesquisas em Educação Matemática. REnCiMa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 4, p. 1-25, 2021.
- LOPES, Aldo Peres Campos. Aprendizagem significativa crítica em atividades de modelagem matemática: possibilidades e desafios. **Práxis Educacional**, Vitória da Conquista, v. 19, n. 50, p. e12287, 2023. Disponível em: <https://periodicos2.uesb.br/index.php/praxis/article/view/12287>. Acesso em: 6 mar. 2024.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor**. Editora Blucher, 2018.

PINTO, RIEUSE LOPES; DE LIMA, GABRIEL LOUREIRO. Ensino de equações diferenciais ordinárias em cursos de Engenharia Mecânica. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 6, n. 2, 2017.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais vol. 1**. Pearson Makron Books, 2008.