



Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Campus Pau dos Ferros
Curso de Ciência e Tecnologia

Josenildo Henrique Gurgel de Almeida

**Cálculo do coeficiente de viscosidade a partir do método de máxima verossimilhança
com base nos dados obtidos pelo *software Tracker*.**

Pau dos Ferros – RN

2015

Josenildo Henrique Gurgel de Almeida

Cálculo do coeficiente de viscosidade a partir do método de máxima verossimilhança com base nos dados obtidos pelo *software Tracker*.

Monografia apresentado a Universidade Federal Rural do Semi – Árido – UFERSA, Campus Pau dos Ferros para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Profº Dr. Glaydson Francisco
Barros de Oliveira – UFERSA.

Pau dos Ferros – RN

2015

Catálogo na Fonte

Biblioteca Universitária Campus Pau dos Ferros (BCP- UFERSA)

A447c Almeida, Josenildo Henrique Gurgel de.

Cálculo do coeficiente de viscosidade a partir do método de máxima verossimilhança com base nos dados obtidos pelo software Tracker/ Josenildo Henrique Gurgel de Almeida -- Pau dos Ferros, 2015.

58f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Glaydson Francisco Barros de Oliveira

Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) –
Universidade Federal Rural do Semi-Árido.

1. Equação diferencial. 2. Software traker. 3. Reynolds. I.
Título.

RN/UFERSA/BCPDF

CDD: 515.35

Bibliotecário: Eugênio Pacelli Ferreira da Costa

Josenildo Henrique Gurgel de Almeida

Cálculo do coeficiente de viscosidade a partir do método de máxima verossimilhança com base nos dados obtidos pelo *software Tracker*.

Monografia apresentado a Universidade Federal Rural do Semi – Árido – UFERSA, Campus Pau dos Ferros para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

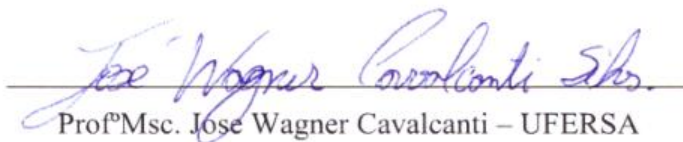
APROVADA EM 19, 11, 2015

Banca Examinadora



Profº Dr. Glaydson Francisco Barros de Oliveira – UFERSA

Presidente



ProfºMsc. Jose Wagner Cavalcanti – UFERSA

Primeiro Membro



Prof Dr. Alexsandro Pereira Lima – UFERSA

Segundo Membro

A Deus meu maior mestre, mentor e meu salvador que sempre esteve comigo mesmo quando eu não percebia.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe por ser protetora e ao Meu pai por seu esforço, e aos meus familiares por tudo que eles têm feito por mim em todos esses anos de vida.

A Jesus Cristo Por ter sido um Símbolo e um ídolo na minha vida que mostrou realmente como um homem e um líder deve ser. E que para mim foi um dos maiores mártir que já existiu.

Ao meu orientador e amigo Glaydson por toda a paciência, ensino e por ter me conduzido durante toda a graduação fazendo mais a lei do que os seus deveres, obrigado por ter sido meu mestre, mentor, por ser realmente um verdadeiro mestre jedi para um jovem padwan, obrigado por todo conhecimento atribuído, por me mostrar como questionar os fatos e obrigado acima de tudo por ser a pessoa que eu possa vir a me espelhar no futuro.

Ao meu Professor José Wagner que mesmo sem ser sua obrigação me ensinou e mostrou o verdadeiro caminho do conhecimento, obrigado por me acompanhar durante essa pesquisa dando total suporte e também por ter realizado o papel um verdadeiro mestre e de um professor que sabia transmitir todo seu conhecimento.

A minha Namorada Jucilene Oliveira por todo o amor carinho dedicado e por tornar minha vida mais bela, feliz e por tudo que tem feito por mim.

A todos os meus amigos e irmãos da ordem DeMolay por o serem companheiros em especial Alan Bento e Anderson Duarte.

Aos todos os professores que contribuíram para meu aprendizado e as leis da física por serem belas e verdadeiras.

A todos os filmes, séries, Histórias lidas, desenhos e animes por terem feito eu viver Histórias de bravura, romance, coragem e aventura que são inúmeros e não vou nomear, mas que me inspiraram na vida.

RESUMO

Na maioria dos trabalhos de física, o uso do cálculo da viscosidade tem sido bastante utilizado, porém utilizando sempre o conhecido método de Stokes. Nesse trabalho, irá se utilizar para calcular a viscosidade da glicerina a solução da equação diferencial a partir do método de máxima verossimilhança. A análise de dados será feita pelo software *Tracker* e também pelos sensores óticos, a partir da análise de dados foi construído um algoritmo no software *Maple* com base na solução da equação diferencial para obter um valor para o coeficiente de viscosidade da glicerina que é o fluido em estudo. Os valores foram comparados com a literatura de forma satisfatória, pois obtiveram valores que tendem aos mesmos resultados, os valores do χ^2 e o comportamento gráfico das esferas que foram analisadas estão compatíveis com a previsão teórica. O estudo em questão mostra também que para valores diferentes da razão entre o diâmetro da esfera e do tubo tem-se valores diferentes de viscosidade. Esse estudo mostrou também a necessidade do número de Reynolds quando se trabalha com mecânica dos fluidos e o estudo dos números adimensionais.

Palavras – chave: Viscosidade. *Tracker*. Análise de dados.

ABSTRACT

In most physical work, the use of the calculation of viscosity has been widely used, but always using the Stokes-known method. This work will be used to calculate the viscosity of the glycerin solution of the differential equation from the maximum likelihood method. The data analysis will be taken by Tracker software and also by optical sensors from the data analysis was constructed an algorithm in software Maple based on the differential equation of the solution to obtain a value for the glycerin viscosity coefficient that is the fluid in study. The values were compared with the literature satisfactorily, because they tend values obtained the same results, values and graphic performance of spheres that were analyzed were consistent with the theoretical prediction. The present study also shows that for different values of the ratio between the diameter of the ball and the tube has different values in viscosity. This study also showed the need of the Reynolds number when working with fluid mechanics and the study of dimensionless numbers. The values were compared with the literature satisfactorily, as obtained values that tend to the same results, the values of χ^2 and the graphic behavior of the spheres that have been analyzed are consistent with the theoretical prediction. The present study also shows that for different values of the ratio between the diameter of the ball and the tube has different values in viscosity. This study also showed the need of the Reynolds number when working with fluid mechanics and the study of dimensionless numbers.

Keywords: Viscosity. *Tracker*. Data analysis.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Diâmetros dos tubos e das esferas do sistema experimental.....	44
Tabela 2 – Valores experimentais da viscosidade da glicerina com diferentes razões.....	47
Tabela 3 – Viscosidade Para razões diferentes.....	48

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Comportamento dos líquidos e gases em recipientes que os contém.....	15
Figura 1.2 – Experiência de Placas Paralelas, fixa no interior, submetido à força tangencial $\vec{F}_t$ no superior.....	16
Figura 1.3 – Tensão de cisalhamento no fluido.....	17
Figura 1.4 – Proporcionalidade entre tensão e gradiente.....	18
Figura 1.5 – Proporcionalidade entre tensão e gradiente ser linear.....	18
Figura 1.6 – Forma de escoamento e arrasto de um cilindro.....	21
Figura 1.7 – Representação dos momentos de uma esfera em um líquido.....	21
Figura 2.1 – Esfera lisa mergulhada em um fluido.....	25
Figura 2.2 – Esquema de variações da força e viscosidade.....	26
Figuras 2.3 – Coordenadas indicadas.....	27
Figura 3.1 – Forças atuantes na esfera que cai em um líquido.....	32
Figura 3.2 – Gráfico da velocidade limite e suas retas de ajuste para cada razão usando o <i>tracker</i>	37
Figura 3.3 – Gráfico da velocidade limite e suas retas de ajuste para cada razão usando os sensores óticos.	37
Figura 4.1 – Sistema Experimental.....	44
Figura 4.2 – Obtenção dos dados no software.....	45
Figura 4.3 – Esquema das dimensões geométricas que intervêm na correlação por paralaxe na dimensão da esfera.....	45

Figura 4.4 – Gráfico do espaço em função do tempo para $Z = 0,10$	49
Figura 4.5 – Gráfico do espaço em função do tempo para $Z = 0,21$	50
Figura 4.6 – Gráfico do espaço em função do tempo para $Z = 0,29$	51
Figura 4.7 – Gráfico do espaço em função do tempo para $Z = 0,40$	52
Figura 4.8 - Gráfico do espaço em função do tempo para $Z = 0,62$	53
Figura 4.9 - Gráfico do espaço em função do tempo para $Z = 0,84$	54

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO 1: FLUIDOS.....	15
1.2 DEFINIÇÃO DE FLUIDO	15
1.3 VISCOSIDADE	17
1.4 MASSA ESPECÍFICA (ρ).....	19
1.5 NÚMERO DE REYNOLDS (Re).....	19
1.6 FORÇA DE ARRASTO DE FORMA OU DE PRESSÃO.....	20
CAPÍTULO 2: ANÁLISE DIMENSIONAL – TEORIA DA SEMELHANÇA.....	23
2.2 SISTEMAS COERENTES DE UNIDADES.....	23
2.3 NÚMEROS ADIMENSIONAIS.....	24
2.4 VANTAGENS DA UTILIZAÇÃO DOS NÚMEROS ADIMENSIONAIS NA PESQUISA DE UMA LEI FÍSICA.	24
2.5 TEOREMA DO PI BUCKINGHAM.....	27
CAPÍTULO 3: MOVIMENTO DE QUEDA DE UMA ESFERA NUM MEIO VISCOSO.....	32
3.1. INTRODUÇÃO	32
3.2. CÁLCULO DO COEFICIENTE DE VISCOSIDADE.....	32
3.3 O MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA	38
3.4 PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS	42
CAPÍTULO 4: DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA VISCOSIDADE DA GLICERINA	43
4.1 INTRODUÇÃO	43
4.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES	43
CONCLUSÃO	56
REFERÊNCIAS	58

INTRODUÇÃO

A análise de imagens e vídeos tem auxiliado o ensino da física desde muito tempo. Por meio delas, pode-se identificar a posição em diferentes instantes de tempos, permitindo a discussão de aspectos importantes de várias áreas da física, o modelo a ser apresentado foi feito por dados obtidos em uma filmagem.

A popularização das câmeras e o desenvolvimento de softwares tornou analisar vídeos um recurso bem comum e atrativo. O uso dessas ferramentas é aplicado em vários campos da ciência. Nesta pesquisa, será analisado a utilização de softwares, vídeos e sensores óticos na mecânica dos fluidos para a análise do coeficiente de viscosidade da glicerina, bem como a construção de um modelo matemático para estudar o comportamento da viscosidade.

A mecânica dos fluidos estuda o comportamento físico dos fluidos em repouso e em movimento. O conhecimento e a compreensão sobre princípios básicos da física nos fluidos são essenciais para qualquer sistema no qual um fluido é meio operante e requer uma aplicação de projeto (FOX; MCDONALD, 2001), tem-se que saber as características da viscosidade do fluido, laminaridade e turbulência bem como os fenômenos físicos que os envolvem.

A importância da atividade experimental dos fluidos é uma área muito completa da física. No entanto, a utilização da prática experimental vai mais além do que uma simples análise prática e teórica, ou um simples comportamento do objeto em estudo. Essa pesquisa irá mostrar que não basta conhecer o método de Stokes e ter em mão uma esfera e fluido para determinar sua viscosidade. É necessário um estudo dos teoremas e a importância dos números adimensionais para um sistema de equações e a relação entre os diâmetros do tubo e o diâmetro da esfera ser menor que 0,2 para seus valores estarem dentro dos padrões da viscosidade, valores acima de 0,2 podem estar com valores acima do esperado para a viscosidade, assim como o número de Reynolds determinar qual a relação que mostra o escoamento que a partícula em estudo está sujeita.

Os modelos são caracterizados como as principais ferramentas usadas pelos cientistas para produzir conhecimento e estão, ao mesmo tempo, entre os principais produtos da ciência (SANDOVAL; CARAM; SALINAS, 2010). A importância das atividades experimentais na formação científica já foi muito considerada para destacar o aspecto motivacional ou para a integração entre teoria, prática e aprendizagem (GOYA; LABURÚ; CAMARGO FILHO, 2014). Neste trabalho estimamos a viscosidade de um fluido por meio da construção de um

modelo no software *Maple* com base na solução da equação diferencial. Para a obtenção de dados utilizou o *Tracker* um software livre para análise de vídeo que permite o ajuste de modelos teóricos aos dados experimentais. Dentre outras potencialidades desse programa, destacam-se a rápida obtenção de tabelas e gráficos a partir dos dados obtidos no vídeo. Também foram utilizados os sensores óticos acoplados a um cronômetro digital, para obtermos dados do tempo em função d posição de cada um dos sensores.

As equações gerais do movimento do fluido são representadas conforme um sistema de equações de segunda ordem em derivadas parciais (SANDOVAL; CARAM; SALINAS, 2010). Como esse sistema só dispõe de soluções exatas para um número reduzido de casos, a melhor forma de se trabalhar é com o uso de modelos simplificados. Desse modo, se trabalha, por exemplo, com o modelo de fluido incompressível, com modelo de fluido ideal e com modelo de fluido muito viscoso (SANDOVAL; CARAM; SALINAS, 2010). O primeiro supõe densidade constante, se aplica com boa aproximação ao movimento de líquidos. O segundo supõe desprezível os efeitos dissipativos da viscosidade e condução de calor nas equações do movimento se aplica a fluidos de condutibilidade térmica pequena, o terceiro supõe desprezível as forças de inércia.

Em cada caso, as equações gerais das condições de cada modelo, conduzem a teorias de diferentes relações, quando confirmada essas relações são leis da teoria que se reuniu nas condições estabelecida em cada modelo (SANDOVAL; CARAM; SALINAS, 2010).

CAPÍTULO 1: FLUIDOS

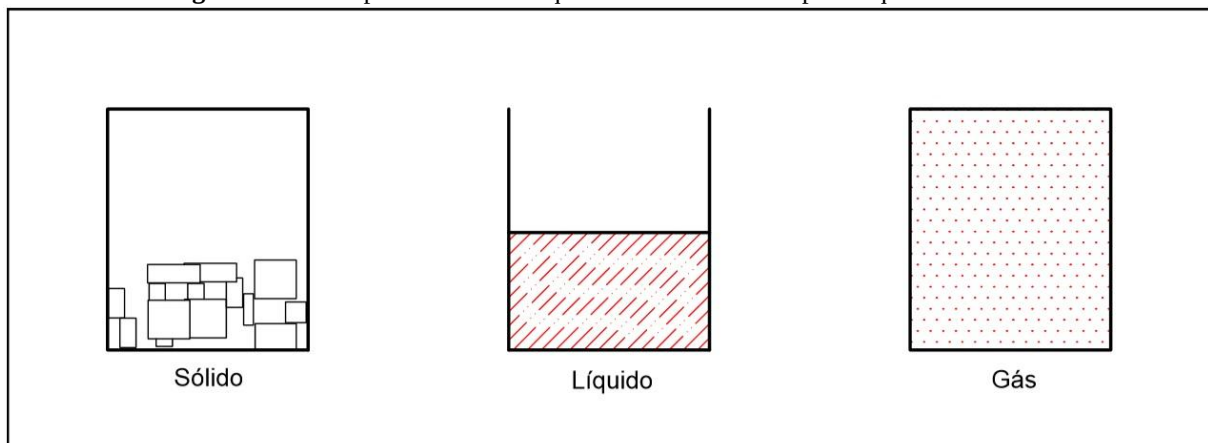
1.1 INTRODUÇÃO

Os fluidos compreendem as fases líquidas e gasosa nas quais a matéria existe. Um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial), não importa quão pequena seja (FOX; MCDONALD, 2001). As bases lançada pela Mecânica dos Fluidos são fundamentais para muitos ramos da engenharia. O escoamento de fluidos em canais, a lubrificação em canais e os esforços em barragens, lançam mão das leis da mecânica dos fluidos para obter resultados de aplicação prática (BRUNETTI, 2008).

1.2 DEFINIÇÃO DE FLUIDO

Normalmente costuma-se definir fluido, pela comparação com sólidos. Assim, é comum encontrar a definição: Fluido é uma substância que não têm uma forma própria, assume a forma do recipiente. Portanto, os líquidos e os gases são fluidos, pois ocupam todo o recipiente ou apresentam uma superfície livre, como a Figura 1.1.

Figura 1.1 – Comportamento de Líquidos e Gases em Recipiente que os Contém.



Fonte: Autoria Própria (2015)

É possível também definir, por uma observação prática denominada “Experiência das placas Paralelas”. Para isso, consideramos um sólido preso entre duas placas planas, uma fixa

e outra sujeita a uma força tangencial ($\vec{F}_t$), na direção do plano que contém a placa. (Figura 1.2 a).

Figura 1.2 Experiência de Placas Paralelas, fixa no interior, submetido à força tangencial $\vec{F}_t$ no superior.



Fonte: Autoria Própria (2015)

Ao manter a força ($\vec{F}_t$), constante, conforme a Figura 1.2, observa-se que ocorre uma deformação no sólido (Figura 1.2b) até atingir uma posição de equilíbrio estático. Nessa posição, as tensões internas equilibram a força externa aplicada e somente uma variação desta força faz com que haja uma modificação da nova configuração do sólido.

Colocando-se um fluido entre as placas, de modo que seja possível visualizar um certo volume do fluido (V). Inicialmente, observa-se que em contato com a placa (1,4), terão a mesma velocidade v , enquanto os que estão em contato superior com a placa inferior ficarão estáticos.

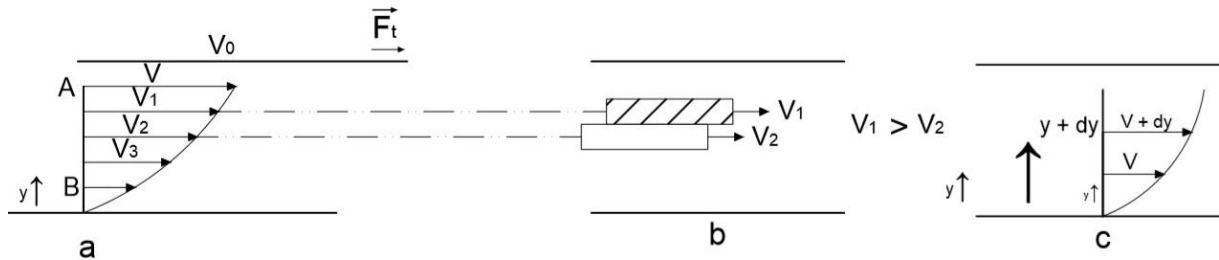
Outra constatação é que sobre a razão da mesma força ($\vec{F}_t$), o volume (V) do fluido, deforma-se continuamente, não alcança uma posição de equilíbrio estático para um caso em que as placas são de comprimento infinito. Podemos dizer que: Fluido é uma substância que se deforma continuamente, quando submetido uma força tangencial constante. Se tomarmos a Figura 1.2 e agora considerarmos a superfície superior com área A , podemos definir tensão de cisalhamento médio como sendo a razão entre o módulo de $\vec{F}_t$ pela área A pela qual está sendo aplicada.

$$\tau = \frac{\vec{F}_t}{A} \quad (1.1)$$

A unidade no S.I é N/m^2 ou $\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$. No CGS é poise.

Newton observou que em um fluido a tensão de cisalhamento é proporcional a gradiente da velocidade. A Figura 1.3b nota – se o surgimento de τ devido à velocidade relativa $V_1 - V_2$, que cria um escorregamento entre as camadas indicadas.

Figura 1.3 - Tensão de Cisalhamento no Fluido



Fonte: Autoria Própria (2015)

O fluido junto à placa superior irá se deslocar com velocidade v_0 , enquanto aquele junto à placa inferior terá velocidade nula. As camadas intermediárias deverão se adaptar às externas, adquirindo velocidade que variam desde v_0 até zero. Disso dizemos que:

$$\tau \propto \frac{dv}{dy} \quad (1.2)$$

Os fluidos que obedecem esta lei são dito newtonianos, por exemplo, água, ar, óleos, etc. Os demais são não newtonianos como por exemplo a pasta de dente e a lama de esgoto.

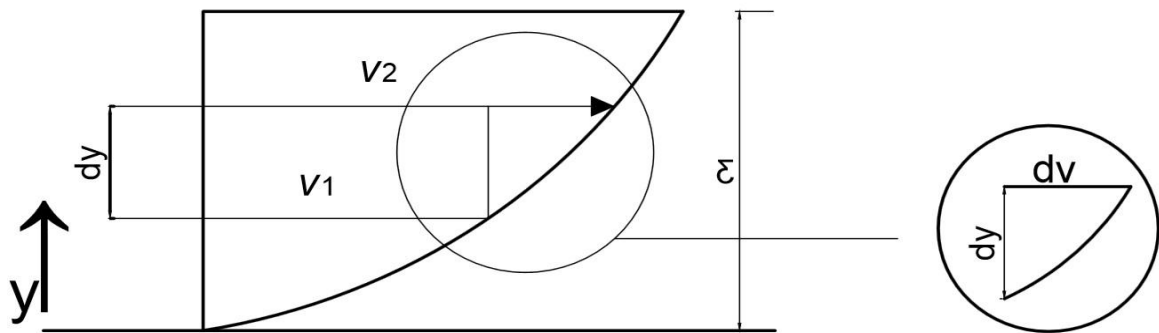
1.3 VISCOSIDADE

A viscosidade não é uma propriedade observável num fluido em repouso. É a propriedade que permite equilibrar, dinamicamente, forças tangenciais externas quando os fluidos estão em movimento. De modo prático a lei de Newton da viscosidade impõe a ideia de proporcionalidade entre a tensão e o gradiente de v . Esta constante será simbolizada por η , denominado de viscosidade dinâmica. Então

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}, \quad (1.3)$$

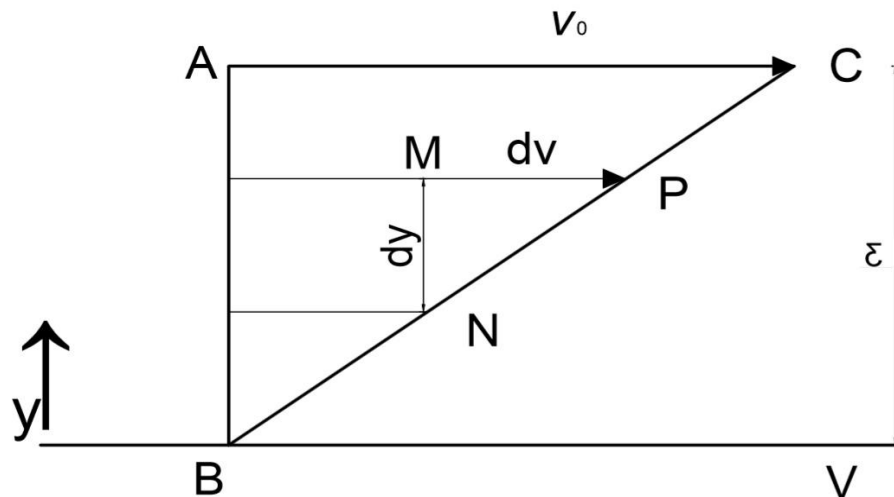
onde $\frac{dv}{dy}$ é o gradiente da velocidade. Quando a distância ε é pequena, pode-se considerar, sem muito erro, que a variação de v com y é linear portanto.

Figura 1.4 – Proporcionalidade entre tensão e gradiente



Fonte: Autoria Própria (2015)

Figura 1.5 - Proporcionalidade entre tensão e gradiente ser linear.



Fonte: Autoria Própria (2015)

$\Delta ABC \approx \Delta MNP$. Logo:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v_0}{\varepsilon} \quad (1.4)$$

Ou, de modo geral:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad (1.5)$$

Ficando a lei de Newton:

$$\tau = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} = \eta \frac{v_0}{\varepsilon} \quad (1.6)$$

Para um caso em que a viscosidade é nula, conclui-se que é um fluido que escoa sem perder energia por atrito. Chamamos esse tipo de fluido ideal.

1.4 MASSA ESPECÍFICA (ρ)

Para determinarmos a massa específica ρ de um fluido em um certo ponto do espaço isolamos um pequeno elemento de volume ΔV em torno do ponto e medimos a massa Δm do fluido contido nesse elemento de volume (HALLIDAY; RESNICK; WALKER). A massa específica é dada por

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} . \quad (1.7)$$

Teoricamente, a massa específica em um ponto qualquer de um fluido é o limite dessa razão quando o elemento de volume ΔV em torno do ponto tende a zero (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009). Na prática, supomos que o volume de um fluido usado para calcular a massa específica, embora pequeno é muito maior que um átomo e com a massa específica sendo a mesma em todos os pontos por causa da presença de átomos. Além disso, em vários casos supomos a massa específica do fluido em uma amostra é a mesma em todos os pontos (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2009). Ambas as hipóteses permite escrever a massa específica uniforme na forma

$$\rho = \frac{m}{V} , \quad (1.8)$$

onde m e V são a massa e o volume da amostra. No Sistema internacional de unidades (SI) a massa específica é dada como quilograma por metro cúbico.

1.5 NÚMERO DE REYNOLDS (Re)

Reynolds Verificou que o fato de o movimento ser laminar ou turbulento depende do valor do número adimensional dado por (REYNOLDS, 1883):

$$\text{Re} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu} . \quad (1.9)$$

Essa expressão se chama número de Reynolds e mostra que o tipo de escoamento depende do conjunto de grandezas ρ, v e L e não somente de cada uma delas.

Ele verificou que no caso de tubos, seriam desenrolados os seguintes valores.

Re < 2000 laminar

$2000 < Re < 2400$ transição

$Re > 2400$ turbulento

L é o comprimento característico do escoamento, sem ser necessariamente com diâmetro.

Com $F_i = ma$ as forças dinâmicas do escoamento e $F_\eta = \eta A$ as forças viscosas verifica-se.

$$\frac{F_i}{F_\eta} = \frac{ma}{\tau A} \propto \frac{\rho Va}{\eta \frac{v}{L} A} \quad (1.10)$$

Com $V \propto L^3$ e $A \propto L^2$, tem – se:

$$\frac{F_i}{F_\eta} \propto \frac{\rho L^3 \frac{v}{T}}{\eta \frac{v}{L} L^2} = \frac{\rho v^2 L^2}{L} = \frac{\rho v L}{\eta} \quad (1.11)$$

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta} \propto \frac{F_i}{F_\eta} \quad (1.12)$$

O número de Reynolds é proporcional ao quociente das forças de inércia e viscosa do escoamento.

Quanto maior Re , menor será o efeito da força viscosa do conjunto de forças que agem no fluido. Nestas condições o número de Reynolds caracterizará, nos fenômenos, o efeito da viscosidade comparativamente com outros efeitos. Conclui – se que valores muito elevados do número de Reynolds representam um efeito deformável da viscosidade no fenômeno em estudo.

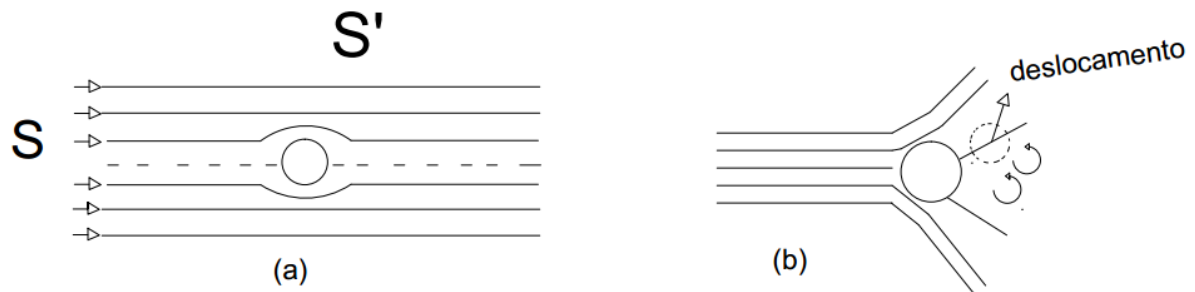
1.6 FORÇA DE ARRASTO DE FORMA OU DE PRESSÃO

Para compreendermos a forma de arrasto, consideraremos uma descrição do escoamento através de um cilindro, devido ao fato da simetria ser bem definida.

Note na Figura 1.6a que a seção “ S ” sofre uma diminuição até um mínimo em “ S’ ”, havendo uma aceleração das partículas do fluido, que serão subseqüentemente desaceleradas a partir de “ S’ ”, uma vez que a seção torna a aumentar. Vale ressaltar que durante esse deslocamento, há uma variação negativa da pressão, já que a pressão diminui com o aumento da velocidade. A figura 1.6(b) ilustra uma situação mais realística da Figura 1.6(a), quando

ampliamos a região próxima de “S’”, onde é atingido o valor máximo da velocidade. A partir daí, o fluido começa a desacelerar e a pressão a aumentar.

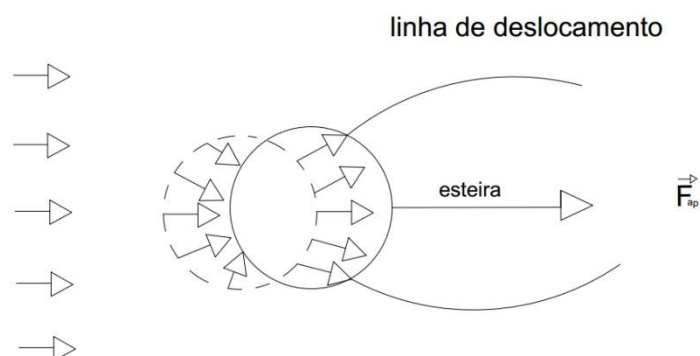
FIGURA 1.6 – Forma de escoamento e arrasto de um cilindro.



Fonte: Autoria Própria (2015)

Na esteira, o fluido praticamente não tem movimento de translação. E como os redemoinhos não podem transformar sua energia cinética em energia de pressão novamente, a pressão na esteira permanece praticamente igual à da região do deslocamento, que é próxima a uma região mínima de pressão. Logo, a parte dianteira da esfera fica sujeita às pressões maiores que na sua parte de trás, tendo como resultante uma força no sentido do deslocamento, denominada força de arrasto de forma ou de pressão. A Figura 1.7 ilustra tal efeito.

Figura 1.7 – Representação dos momentos de uma esfera em um líquido.



Fonte: Autoria Própria (2015)

A força de arrasto de forma ou de pressão F_{ap} é dada por:

$$F_{ap} = C_{ap} S \frac{\rho v_0^2}{2}, \quad (1.13)$$

onde C_{ap} é o coeficiente de arrasto de pressão ou número de Euler, S é a área da seção transversal.

Para $Re < 1$, o escoamento é dito lento e C_{ap} varia linearmente com o número de Reynolds. Neste caso, a força de arrasto é devida somente às tensões de cisalhamento. Reynolds (1883) Verificou que:

$$C_{ap} = \frac{24}{Re} \quad (1.14)$$

Substituindo a Eq.(1.14) na Eq. (1.13), considerando a área da seção da esfera igual a um círculo e que o número de Reynolds está de acordo com a Eq.(1.9), temos:

$$F_{ap} = 3\pi\eta D v_0 \quad (1.15)$$

Sabendo que $3\pi\eta D$ é uma constante e será chamada de b , em que D corresponde ao diâmetro da esfera.

Para $Re > 1$, a camada limite inicia um descolamento na parte detrás e o arrasto começa a ser considerável, sendo proporcional ao quadrado da velocidade. Com o aumento de Re , o deslocamento estende-se para a parte da frente da esfera, até que, em aproximadamente 1.000, o ponto de separação fixa-se em 80° do ponto de estagnação.

Para $10^3 < Re < 3,5 \times 10^5$, o ponto de deslocamento fica praticamente fixo e o coeficiente de arrasto fixa-se em cerca de 0,45. Para Re em torno de $3,5 \times 10^5$, o coeficiente cai bruscamente devido a passagem da camada limite de laminar para turbulento. O ponto de deslocamento se localizará em aproximadamente 115° (HASEN, 1967). Estes resultados referem-se a esfera lisa.

CAPÍTULO 2: ANÁLISE DIMENSIONAL – TEORIA DA SEMELHANÇA

2.1 – INTRODUÇÃO

Muitos problemas de mecânica dos fluidos podem ser solucionados por métodos puramente analíticos. Em geral, difícil e trabalhoso, às vezes impossíveis pelo fato de existirem inúmeras variáveis. Por isso, desenvolvem-se os métodos experimentais que permitem produzir modelos matemáticos condizente com a realidade. A análise dimensional é uma teoria matemática que, aplicado à física permite tirar maiores proveitos dos resultados experimentais, bem como diminuir o custo e o tempo.

2.2 SISTEMAS COERENTES DE UNIDADES

Dada a equação dimensional de uma grandeza, é fácil escrever a sua unidade, desde que seja escolhido o sistema de unidades.

Denomina-se sistema coerente de unidades aquele que define somente as unidades de grandezas fundamentais. Por exemplo, um sistema que define as unidades de grandezas FLT é o MKS e também o MK*S, em que:

M ≡ metro ou unidade de L

K* ≡ quilograma força a unidade de F

S ≡ segundo ou unidade de T

A Segunda lei de Newton pode ser escrita nesse sistema coerente de unidades como sendo:

$$m = \frac{kgf}{mS^{-2}}, \quad (2.1)$$

onde *kgf* corresponde a unidade de medida da força e mS^{-2} corresponde a unidade de medida da aceleração.

Qualquer outra grandeza nesse sistema será produto de potência dessas três. Por exemplo, no caso de massa específica, pode-se escrever a unidade de massa específica no sistema coerente de unidades MK*S ($Un\rho_{mk*s}$) como sendo:

$$Un\rho_{mk*s} = kgf.m^{-4}.s^{-2} = \frac{kgf.s^2}{m^4} = \frac{utm}{m^3} \quad (2.2)$$

Note que a unidade técnica de massa (*utm*) corresponde a $utm = \frac{kgf \cdot s^2}{m}$ e é uma forma de simplificar a expressão da unidade. No sistema MK*S continua ser chamada de unidade técnica de massa.

Outro sistema correto de unidade são os sistemas internacionais (S.I) e o (CGS).

No S.I, as unidades fundamentais são:

Metro ou unidade de L

Quilograma ou unidade de M

Segundo ou unidade de T

Unidade de Força é N = kg.m/s²

No (CGS), ou unidade final. São:

C $\equiv$ Centímetro ou unidade de L

G $\equiv$ grama ou unidade de M

S $\equiv$ Segundo ou unidade de T

Unidade de carga é din = g cm/s²

2.3 NÚMEROS ADIMENSIONAIS

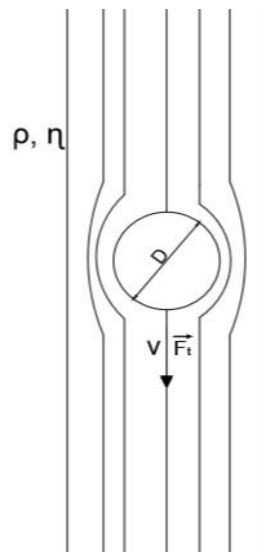
Um número é adimensional quando independente de todas as grandezas fundamentais, ou seja, sua equação dimensional apresenta expoente zero em todas as grandezas fundamentais (F^o L^o T^o)

2.4 VANTAGENS DA UTILIZAÇÃO DOS NÚMEROS ADIMENSIONAIS NA PESQUISA DE UMA LEI FÍSICA.

Suponhamos que se deseja determinar a força de resistência ao avanço de uma esfera lisa mergulhada num fluido, como ilustrado na Figura 2.1. Tal força costuma ser chamada de força de arrasto.

Pode-se em laboratório, que essa força, qualitativamente, do deslocamento (D) e da velocidade (v) da esfera de massa específica (ρ) do fluido e da viscosidade dinâmica (η).

Figura 2.1. Esfera lisa mergulhada num fluido

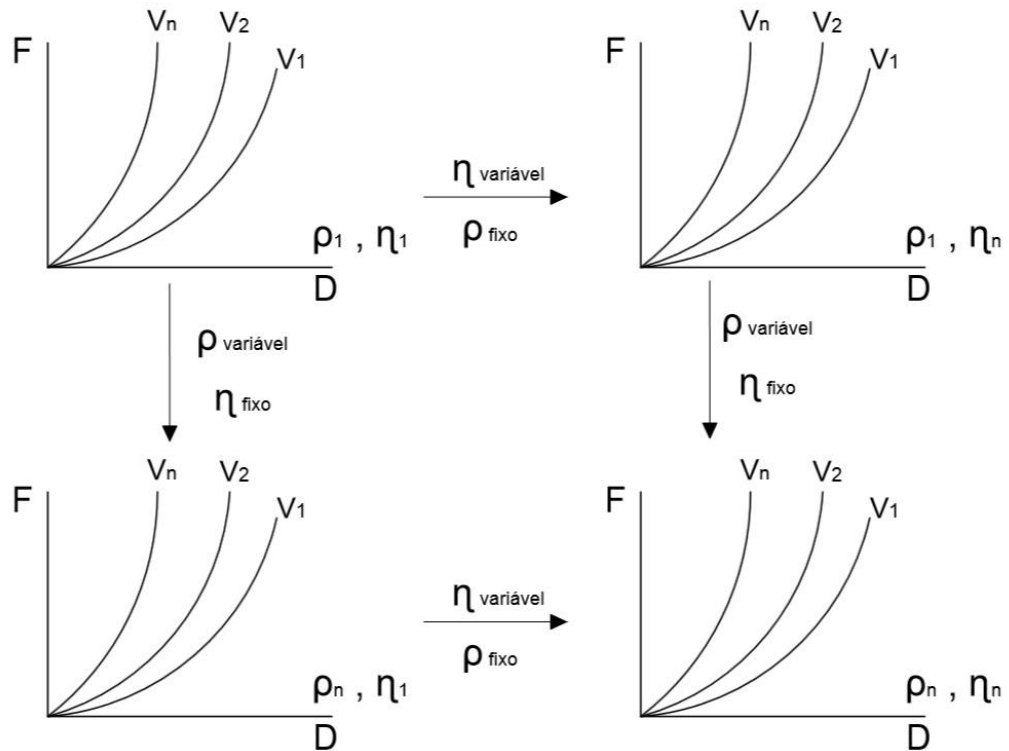


Fonte: Autoria Própria (2015)

Nota-se que tal determinação será em laboratório num túnel aerodinâmico ou um canal de provas, dependendo do fluido ser um gás ou um líquido. A medida de força será efetuada por meio de um dinamômetro, ao qual serão fixadas esferas de diferentes diâmetros. A velocidade do líquido ou do gás é variada, de forma a se obter o efeito do movimento relativo entre o fluido e a esfera. O trabalho visa a determinar.

$$F = f(D, v, \eta, \rho) \quad (2.3)$$

Inicialmente serão fixados η e ρ construindo v em função de D utilizando a velocidade como produto. Portanto, deverão ser verificadas as variações da força com a viscosidade e com a massa específica. Essa determinação implica a construção de diagramas. Em cada caso, deverá ser fixada uma massa específica e será variada a viscosidade, e vice-versa a Figura 2.2 mostra claramente os diagramas constituídos na pesquisa.

Figura 2.2 – Esquema das Variações da Força e Viscosidade

Fonte: Autoria Própria (2015)

Diante das dificuldades dessa opção, vejamos como ela poderia ser simplificada em termos de tempo e recursos. Suponha-se a existência dos seguintes números adimensionais:

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 D^2} \quad (2.4)$$

$$\pi_2 = \frac{\rho v D}{\eta} \quad (2.5)$$

Essas equações são conhecidas como número de Reynolds que por enquanto o objetivo não é saber como foram obtidas.

Os dois adimensionais, π_1 e π_2 , contêm todas as variações da função em estudo. Vejamos agora como o uso dos números adimensionais facilitaria o trabalho.

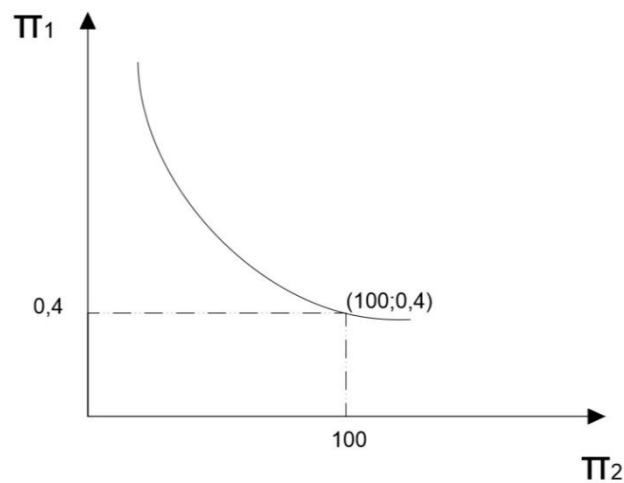
Seja uma variável esférica de diâmetro D e um único fluido de massa específica ρ e viscosidade η . Varia-se v e medem-se as variações de F no dinamômetro. Obtido uma tabela de F em função de v pode-se tabular π_1 e π_2 , sendo que os dois estão interligados pela

existência da velocidade em meio às expressões. Logo, para cada π_1 existe um π_2 e será possível construir o diagrama $\pi_1 = \phi(\pi_2)$ como na figura 2.3.

Nota-se que, sendo π_1 e π_2 adimensionais, as coordenadas de cada ponto da curva independem dos valores individuais onde D, v, η, ρ e F dependem da combinação de todos esses valores. Assim, o fato de se ter utilizado uma única esfera e um único fluido não influenciará na generalidade. Dessa forma, por exemplo, o ponto indicado na Figura 2.3 cujas coordenadas são $\pi_1 = 0,4$ e $\pi_2 = 100$ pode corresponder a qualquer conjunto de valores D, v, η e ρ desde que $\frac{\rho v D}{\eta} = 100$, e a qualquer combinação de D, v, η e F desde que $\frac{F}{\rho v^2 D^2} = 0,4$

Cada ponto da curva da figura envolve infinitas combinações de valores das variáveis do fenômeno. O problema da determinação da força de arrasto sobre a esfera fica assim resolvido. Vejamos um exemplo numérico baseado no ponto indicado da figura.

Figura 2.3 – Coordenadas Indicadas.



Fonte: Autoria Própria (2015)

2.5 TEOREMA DO PI BUCKINGHAM

Como o objetivo do nosso trabalho não é demonstração de teoremas, será indicado o enunciado do teorema um pouco modificado em relação ao tradicional, pois o que interessa é apenas as conclusões construtivas que podem ser obtidas.

Seja um fenômeno físico que depende de n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, que respeita a seguinte relação: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

Demonstra-se que existe outra função, $\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ rigorosamente equivalente à anterior para o estado do fenômeno indicado, em que:

- a) Os π são números adimensionais independentes, constituídos por combinações adequadas das n variáveis que intervêm no fenômeno.
- b) O x de número adimensional é $m = n - r$, onde n é o número de grandezas que intervêm no fenômeno e r é o número de grandezas fundamentais contidas nas grandezas do fenômeno (para o nosso caso, sabe-se que $r \leq 3$);
- c) Os adimensionais são obtidos por expressões do tipo:

$$\pi_1 = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_r^{\alpha_r} \cdot x_{r+1} \quad (2.6)$$

$$\pi_2 = x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \dots x_r^{\beta_r} \cdot x_{r+1} \quad (2.7)$$

$$\pi_m = x_1^{\delta_1} \cdot x_2^{\delta_2} \dots x_r^{\delta_r} \cdot x_{r+1} \quad (2.8)$$

Nota-se que, em todos os adimensionais de certo fenômeno, os primeiros r fatores são os mesmos, com exceção do expoente. Esse conjunto de r fatores será denominado “base” das grandezas envolvidas no fenômeno. As grandezas da base devem ser independentes.

Para sua escolha, escreve-se a equação dimensional de todas as grandezas e seleciona-se um número r delas, de forma que cada uma defira da anterior por pelo menos uma grandeza fundamental.

Por exemplo, num fenômeno em que existem as três grandezas fundamentais FLT, a base pode ser construída por:

$$[\rho] = FL^{-4}T^2 \quad (2.9)$$

$$[v] = LT^{-1} \text{ (independente de } F \text{ que comparece em } \rho \text{)} \quad (2.10)$$

$$[D] = L \text{ (independente de } T \text{ que corresponde em } v \text{)} \quad (2.11)$$

Nessa trinca, L é um comprimento característico do fenômeno podendo ser um diâmetro, um raio, uma altura ou qualquer grandeza cuja equação dimensional seja L . Quando essa trinca estiver presente entre grandezas do fenômeno, deverá ser preferida, já que a maioria dos adimensionais conhecidos tem origem nela.

O último fator de cada adimensional será constituído de cada uma das grandezas não incluídas na base.

A determinação dos adimensionais será mais bem esclarecida pelo exemplo a seguir:

Verificou-se em laboratório que a força de arrasto que age numa esfera lisa que se movimenta num fluido, é dado por uma equação do tipo $F = f(v, D, \rho, \eta)$. Para determinar a

função de números adimensionais, equivalente à função indicada devemos fazer as seguintes etapas:

a) Função das grandezas que intervêm no fenômeno:

$$F = f(v, D, \rho, \eta) \text{ ou } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2.12)$$

b) Equação dimensional da grandeza que interfere no fenômeno.

$$[F] = F \quad (2.13)$$

$$[v] = LT^{-1} \quad (2.14)$$

$$[D] = L \quad (2.15)$$

$$[\rho] = FL^{-4}T^2 \quad (2.16)$$

$$[\eta] = FL^{-2}T \quad (2.17)$$

c) Número adimensional independente.

$$m = n - r \quad (2.18)$$

$$n = 5 \quad (2.19)$$

$$r = 3 \quad (2.20)$$

$$m = 2 \quad (2.21)$$

d) Escolha da base

Pelo que foi indicado, a base deve ser formada de $r=3$ elementos e, pelo contrário descrito, o conjunto escolhido poderia ser $F, v, D; \rho, v, D; \eta, v, D$, etc.

Somente não podem ser escolhidos trincas que contenham simultaneamente ρ e η , que não deferem por pelo menos uma grandeza fundamental.

Serão escolhidas as seguintes trincas, como é tradicional. (sempre que houver ρ e η e um comprimento característico deve-se dar preferência a esse conjunto de base).

e) Construção de adimensionais

$$\pi_1 = \rho^{\alpha_1} v^{\alpha_2} D^{\alpha_3} F \quad (2.22)$$

$$\pi_2 = \rho^{\beta_1} v^{\beta_2} D^{\beta_3} \eta \quad (2.23)$$

Agora devem ser determinados os expoentes α_i e β_i

$$\pi_1 = \rho^{\alpha_1} v^{\alpha_2} D^{\alpha_3} F \quad (2.24)$$

Substitui-se a cada grandeza pela equação dimensional correspondente:

$$\pi_1 = (FL^{-4}T^2)^{\alpha_1} (LT^{-1})^{\alpha_2} (L)^{\alpha_3} (F) \quad (2.25)$$

Mas π_1 , pelo teorema, deverá ser um número adimensional logo:

$$F^0 L^0 T^0 = (F)^{\alpha_1} (L^{-4})^{\alpha_1} (T^2)^{\alpha_1} (L)^{\alpha_2} (T)^{-\alpha_2} (L)^{\alpha_3} (F) \quad (2.26)$$

Ou

$$F^0 L^0 T^0 = F^{\alpha_1+1} L^{-4\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} T^{2\alpha_1-\alpha_2} \quad (2.27)$$

Igualando os expoentes da mesma base:

$$\alpha_1 + 1 = 0 \quad (2.28)$$

$$-4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (2.29)$$

$$2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad (2.30)$$

Obtém-se dessa forma um sistema de três equações a três incógnitas que resolvido resultará em:

$$\alpha_1 = -1; \alpha_2 = -2; \alpha_3 = -2 \quad (2.31)$$

Logo

$$\pi_1 = \rho^{-1} v^{-2} D^{-2} F \quad (2.32)$$

Ou

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 D^2} \quad (2.33)$$

Determinação dos β_i

$$\pi_2 = \rho^{\beta_1} v^{\beta_2} D^{\beta_3} \eta \quad (2.34)$$

Substituindo cada grandeza pela equação correspondente.

$$\pi_2 = (FL^{-4}T^2)^{\beta_1} (LT^{-1})^{\beta_2} (L)^{\beta_3} FL^{-2}T \quad (2.35)$$

Mas π_2 deve ser adimensional, logo

$$F^0 L^0 T^0 = F^{\beta_1+1} L^{-4\beta_1+\beta_2+\beta_3-2} T^{2\beta_1-\beta_2+1} \quad (2.36)$$

Igualando os expoentes

$$\beta_1 + 1 = 0 \quad (2.37)$$

$$-4\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 2 = 0 \quad (2.38)$$

$$2\beta_1 - \beta_2 + 1 = 0 \quad (2.39)$$

Temos então:

$$\beta_1 = -1; \beta_2 = -1; \beta_3 = -1 \quad (2.40)$$

Logo $\pi_2 = \rho^{-1} v^{-1} D^{-1} \eta$ ou $\pi_2 = \frac{\eta}{\rho v D}$

A função equivalente será:

$$\phi\left(\frac{F}{\rho v^2 D^2}, \frac{\eta}{\rho v D}\right) \quad (2.41)$$

Pelo teorema, basta que a função equivalente seja construída por números dimensionais independentes formados com as grandezas envolvidas no fenômeno.

CAPÍTULO 3: MOVIMENTO DE QUEDA DE UMA ESFERA NUM MEIO VISCOSO

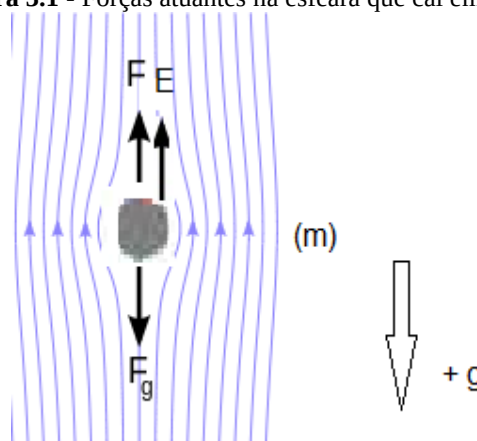
3.1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foi mostrada a equação base para calcular a viscosidade de um fluido, porém nesse trabalho será utilizado para calcular a viscosidade do fluido a solução da equação diferencial, o que torna essa pesquisa mais inovadora, pois não será utilizado o cálculo clássico da viscosidade.

3.2. CÁLCULO DO COEFICIENTE DE VISCOSIDADE

Para deixar mais claro, vamos considerar um caso em que uma esfera de raio R cai em meio a um fluido viscoso, sem turbulência, conforme a Figura 3.1.

Figura 3.1 - Forças atuantes na esfera que cai em um líquido



Fonte: Autoria Própria (2015)

Sobre a esfera, atuam na direção vertical três forças, a saber:

a) A força da gravidade, dada por:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = \rho_1 V \vec{g}, \quad (3.1)$$

onde m é a massa, ρ_1 é a massa específica da esfera V é o volume da esfera imersa no fluido e g é a aceleração da gravidade.

b) A força de empuxo, dado por:

$$E = \rho_2 V \vec{g}, \quad (3.2)$$

onde ρ_2 é a densidade do líquido e V é o volume deslocado, dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (3.3)$$

c) Força de resistência viscosa

Esta ocorre quando um objeto está em queda através do fluido, onde as camadas adjacentes ao fluido provocam uma força de cisalhamento, que é tangente à camada. Neste caso, como o não há turbulência, para uma primeira aproximação, esta força é proporcional a velocidade v da esfera. Portanto,

$$F = -bv, \quad (3.4)$$

onde b representa o coeficiente de resistência viscosa e o sinal indica que esta força sempre será contrária ao movimento da esfera (ao longo do eixo y , conforme a figura 3.1). Ele depende da natureza do fluido, da forma do objeto e da sua posição.

Para um caso em que a esfera se move num meio de viscosidade η infinita, a Eq.(3.4) pode ser escrita de forma semelhante a Eq.(1.15), porém escrevendo agora em termos do raio temos:

$$F = -6\pi\eta Rv \quad (3.5)$$

Esta equação representa a força de resistência da viscosidade do líquido.

De acordo com a segunda lei de Newton, a soma de todas as forças que atuam sobre o objeto é:

$$\sum F = m \frac{dv}{dt} = F_g - E - F \quad (3.6)$$

Substituindo as Eq's (3.1), (3.2) e (3. 5) na Eq (3.6), temos que:

$$m \frac{dv}{dt} = (\rho_1 - \rho_2)Vg - 6\pi\eta Rv \quad (3.7)$$

Resultando em

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)g}{\rho_1} - \frac{9\eta v}{2R^2 \rho_1} \quad (3.8)$$

Como podemos observar da Eq.(3.5), a força de resistência viscosa depende da velocidade e que a esfera descreverá um movimento uniforme, já trata-se de uma função linear. Portanto, a taxa de variação da velocidade no tempo deverá ser nula, assim a Eq.(3.8), resultará em

$$v = \frac{(\rho_1 - \rho_2)2R^2 g}{9\eta} \quad (3.9)$$

Em termo da viscosidade pode-se escrever

$$\eta = \frac{(\rho_1 - \rho_2)2R^2g}{9v} \quad (3.10)$$

Essa equação é usada para determinar a viscosidade de um líquido num meio sem fronteiras.

Quando a esfera cai ao longo de um tubo cilíndrico de raio R_0 é necessário considerar a influência das paredes transversais do tubo (OLIVEIRA et al, 2009). Desta forma, a equação da viscosidade deverá então ter o seguinte aspecto:

$$\eta = \frac{D^2g}{18L} \left[\frac{\rho_1 - \rho_2}{1 + 2,4 \frac{R}{R_0}} \right], \quad (3.11)$$

onde D é o diâmetro.

Vale a pena mencionar que neste trabalho será utilizada a Eq. (3.27) que será discutida logo mais para a viscosidade.

Por meio da segunda lei de Newton e das forças na esfera conforme a Figura 3.1 e da Eq. (3.6) tem-se:

$$F_g - F - E = ma \quad (3.12)$$

Essas forças já foram tratadas anteriormente, a força viscosa está de acordo com a Eq. (3.4), a força da gravidade de acordo com a Eq. (3.1) e a força de empuxo está de acordo com a Eq. (3.2) substituindo essas equações na Eq. (3.12).

$$mg - bv - \rho_{\text{líquido}}Vg = ma \quad (3.13)$$

Sendo a aceleração definida como a derivada da velocidade sobre o tempo, a massa da esfera está de acordo com a Eq. (3.1), a Eq. (3.13) é reescrita como:

$$g - \frac{bv}{m} - \frac{\rho_{\text{líquido}}}{\rho_{\text{esfera}}}g = \frac{dv}{dt} \quad (3.14)$$

Sendo a velocidade a derivada do espaço em relação ao tempo e a aceleração a derivada segunda, posso organizar a equação como:

$$\left(1 - \frac{\rho_{\text{líquido}}}{\rho_{\text{esfer}}} \right) g - \frac{bv}{m} = \frac{dv}{dt} \quad (3.15)$$

Sabendo que m corresponde a massa da esfera, posso organizar a Eq. (3.15) conforme a seguir:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \left(1 - \frac{\rho_{\text{líquido}}}{\rho_{\text{esfera}}} \right) g - \frac{b}{m_{\text{esfera}}} \frac{dy}{dt} \quad (3.16)$$

Escrevendo a equação diferencial para o cálculo da viscosidade com a constante K , conhecida como constante de Leibne, tenho a seguinte expressão:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{Kb}{m_{\text{esfera}}} \frac{d}{dt} y(t) = \left(1 - \frac{\rho_{\text{líquido}}}{\rho_{\text{esfera}}} \right) g \quad (3.17)$$

A Eq. (3.17) representa a equação diferencial não homogênea para o cálculo do coeficiente de viscosidade, sendo o valor de b , dado conforme a equação abaixo:

$$b = 3\pi\eta D_{\text{esfera}} \quad (3.18)$$

O valor da constante K que representa a correção da reta é dado como:

$$K = \left(1 + 2,4 \frac{D_{\text{esfera}}}{D_{\text{tubo}}} \right) \left(1 + 3,3 \frac{D_{\text{esfera}}}{2L} \right), \quad (3.19)$$

onde D_{esfera} é o diâmetro da esfera, D_{tubo} é o diâmetro do tubo e L é a coluna de fluido.

Para obter a solução da equação diferencial, temos as condições iniciais da equação em $t = 0$, $y(0) = 0$ e $v(0) = 0$.

A Eq. (3.17) é uma equação diferencial linear. Se o corpo em queda parte do repouso, inicialmente a parcela correspondente a força de resistência é nula, e o corpo é acelerado apenas pela gravidade. Com os incrementos de velocidade ao longo do tempo, a aceleração devida à parcela de resistência tende a se igualar, em módulo, à gravidade. Quando isso ocorre, a resultante das forças passa a ser nula e o movimento segue em velocidade constante. Essa velocidade é chamada de velocidade limite representada por v_l (DIAS, 2011). Das equações acima, o seu módulo é:

$$v_l = \frac{mg}{b} \quad (3.20)$$

Ao integrar a Eq. (3.17), obtenho a função da velocidade. Definindo $u(t)$ e utilizando a substituição de variáveis:

$$u(t) = v(t) - \frac{mg}{b} \quad (3.21)$$

Assumindo que o corpo parte do repouso, substituindo a Eq. (3.21) na Eq. (3.17), obtém:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{b}{m} u \quad (3.23)$$

Integrando a Eq. (3.23), tem-se:

$$\int_{-\frac{mg}{b}}^u (u^{-1}) du = -\frac{b}{m} \int_0^t dt \quad (3.24)$$

A Eq. (3.24) resulta em:

$$v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right) \quad (3.25)$$

A Eq. (3.25) representa o módulo da velocidade, o primeiro fator multiplicativo representa o lado direito da Eq. 3.20 representa a velocidade limite.

$$v = v_l \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (3.26)$$

Nessa equação $\tau = \frac{m}{b}$ é conhecido como constante de tempo. De acordo com as condições iniciais $t = 0$, a velocidade é nula. Conforme o tempo aumenta a velocidade tende a seu valor limite (DIAS, 2011).

Para uma função da posição integramos a Eq. (3.26), o que gera:

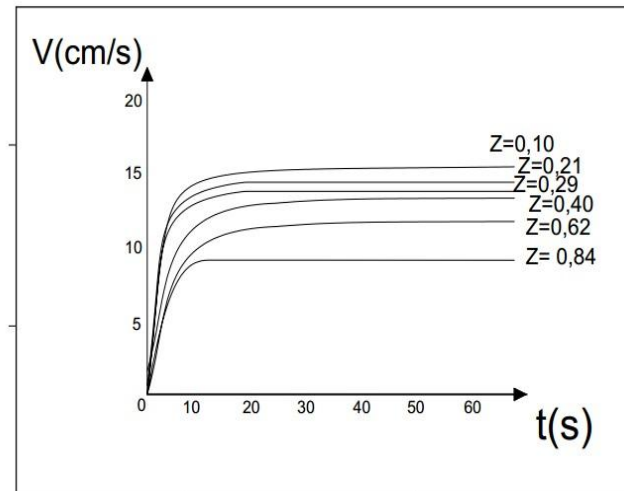
$$y = \frac{mg}{b} t - \frac{m^2 g}{b^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{b}{m}\right)t} \right) \quad (3.27)$$

Tomando o limite de t tendendo a o infinito a Eq. (3.27) comportasse como uma equação linear do primeiro grau, isso se pode verificar devido a exponencial que tende a zero conforme o tempo aumenta, restando o termo constante que multiplica o parêntese e o primeiro termo da equação.

$$y = \frac{mg}{b} t - \frac{m^2 g}{b^2} \quad (3.28)$$

Essa equação é uma equação do primeiro grau cujo coeficiente angular é a velocidade limite. Por meio da velocidade limite e da razão entre os diâmetros, temos:

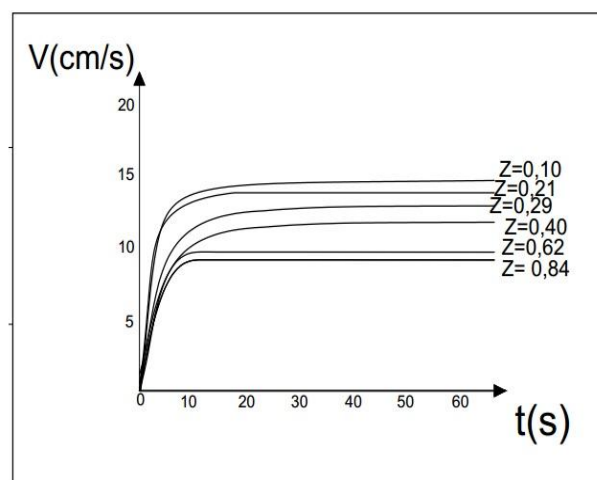
Figura 3.2 – Gráfico da velocidade limite e suas retas de ajuste para cada razão



Fonte: Autoria Própria (2015)

Por meio dessa Figura pode-se observar a velocidade constante que a esfera obedece em cada razão da Tabela 2. As curvas da Figura 3.1 referem-se aos dados de diâmetros conforme a Tabela 2 e representam a velocidade constante de queda de um corpo no meio viscoso.

Figura 3.3 - Gráfico da velocidade limite e suas retas de ajuste para cada razão.



Fonte: Autoria Própria (2015)

O gráfico da Figura 3.2 representa as retas da velocidade limite para os sensores, isso mostra mais uma vez que a esfera se move com velocidade constante.

Para determinar a viscosidade de um líquido com o método de Stokes, faz necessário conhecer o valor constante que adquire a velocidade da esfera a partir de um certo instante (SANDOVAL; CARAM; SALINAS, 2010,).

Na análise da velocidade da esfera com o tempo é comum usar uma expressão segundo a qual a velocidade aumenta para um valor limite. Essa equação já foi deduzida anteriormente.

Ao analisar os dados várias vezes e obter as figuras acima observa-se que na maioria das vezes a rapidez diminui até alcançar o valor limite (SANDOVAL; CARAM; SALINAS, 2010,).

Os gráficos foram construídos a partir dos dados da posição e do tempo proporcionado pelo *Tracker* e pelos sensores óticos. Os valores da velocidade correspondem a $v = (X_{final} - X_{inicial}) / (t_{final} - t_{inicial})$, calculados por intervalos de 0,01 s que o equipamento possibilita.

Além da construção de um modelo que possui a solução da equação diferencial, foi necessária uma análise estatística dos resultados obtidos. É importante discutir os erros, desvios nas medidas e para ter um conhecimento mais elaborado acerca dos erros e dos dados experimentais para isso é de grande relevância o estudo da distribuição.

Nesse estudo, os erros envolvidos são os erros sistemáticos ambientais como a temperatura que influi significativamente na viscosidade e a aceleração da gravidade local.

3.3 O MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Outra análise estatística essencial para a pesquisa realizada é o teste χ^2 , ou seja, o teste para a qualidade do ajuste. Essa análise da qualidade de ajuste é feita usando o método de verossimilhança da curva ajustada em relação aos pontos experimentais com suas respectivas incertezas (VUOLO, 1995).

Será necessário para a discussão desse método uma análise do método dos mínimos quadrados e ter em mente a distribuição gaussiana em que a função $\rho(x)$ é chamada de densidade de probabilidade dado por:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_i - y_i}{\sigma_i}\right)^2}, \quad (3.29)$$

onde μ_i é o valor médio e este valor corresponde ao valor da medida y_i .

Num processo de medição com duas variáveis x e y , obtém-se um conjunto de n pontos experimentais dado por:

$$\{x_1, y_1, \sigma_1\}, \{x_2, y_2, \sigma_2\}, \dots, \{x_i, y_i, \sigma_i\}, \dots, \{x_n, y_n, \sigma_n\}, \quad (3.30)$$

onde a variável x_i é considerada isenta de erros. Quando a incerteza em x é significativa, deve ser transferida para a variável y conforme as regras de propagação de incertezas (VUOLO, 1995).

A melhor função $f(x)$ deve ser determinada a partir de uma função geral $f(x; a_1, a_2, \dots, a_p)$, essa função possui parâmetros predeterminados.

$$f(x) = f(x; a_1, a_2, \dots, a_p), \quad (3.31)$$

onde os particulares dos valores $a_1, a_2, \dots, a_p$, devem ser determinado de acordo com o método dos mínimos quadrados (VUOLO, 1995).

Por meio de um conjunto conforme a expressão (3.30), a probabilidade de obter um conjunto qualquer é proporcional a função gaussiana, para isso a Eq. (3.29) pode ser reescrita da seguinte maneira.

$$\rho(x) = \frac{C}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_i - y_i}{\sigma_i}\right)^2}, \quad (3.32)$$

onde C é uma constante de proporcionalidade. As chances de ocorrer o conjunto de resultados é um produto de probabilidades P que representam cada resultado:

$$P = P_1 P_2 \dots P_n \quad (3.33)$$

Essa expressão pode ser mais bem representada deixando de forma mais clara os produtos.

$$\rho(x) = \frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu_i - y_i}{\sigma_i}\right)^2} \quad (3.34)$$

Segundo o método de máxima verossimilhança a aproximação deve ser tal que a probabilidade é máxima se $f(x)$ é verdadeira (VUOLO, 1995).

Nesse caso pode-se substituir μ_i por $f(x; a_1, a_2, \dots, a_p)$ na Eq. (3.34)

$$\rho(x) = \frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}, \quad (3.35)$$

onde o χ^2 é dado por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_p)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (3.36)$$

No caso que $f(x; a_1, a_2, \dots, a_p)$ é uma função previamente escolhida, os parâmetros $a_1, a_2, \dots, a_p$ devem minimizar a soma dos quadrados na Eq. (3.36).

$$\chi^2(a_1, a_2, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_p)}{\sigma_i} \right]^2, \quad (3.37)$$

onde o χ^2 é uma função dos parâmetros $a_1, a_2, \dots, a_p$. Para um caso em que as incertezas são iguais.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = \sigma, \quad (3.38)$$

Para obter um valor melhor representado para χ^2 obtém-se:

$$\chi^2 = \frac{S}{\sigma^2}, \quad (3.39)$$

onde S pode ser expresso por:

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_p)]^2 \quad (3.40)$$

Os Parâmetros $a_1, a_2, \dots, a_p$ devem ser tais que minimizem S. Num gráfico, S representa a soma dos quadrados das distâncias verticais dos pontos experimentais à curva que representa $f(x)$. No caso de incertezas iguais, a melhor função $f(x)$ é obtida de maneira independente das incertezas (σ) nos pontos experimentais.

Agora iremos tratar com um processo de medição com duas variáveis x e y, obtém-se um conjunto de n pontos experimentais representado por a Eq. (3.30), onde agora a variável independente x é isenta de erros enquanto a incerteza estatística em y_i está de acordo com o desvio padrão σ_i . Se a incerteza em x é significativa, esta incerteza deve ser transferida para a variável y conforme as regras de propagação de incertezas (VUOLO, 1995).

Uma função $f(x; a_1, a_2, \dots, a_p)$ da variável x e de parâmetros a_j é uma função linear com relação a esses parâmetros se obedece a seguinte forma:

$$f(x; a_1, a_2, \dots, a_p) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_p f_p(x) \quad (3.41)$$

Cada função conhecida de x é linearmente independente entre si, e será representada por $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$

A derivada em relação a a_j também é uma função conhecida e independente dos parâmetros (VUOLO,1995).

$$\frac{\partial f}{\partial a_j} = f_j \quad (3.42)$$

Por meio dos métodos dos mínimos quadrados de acordo com a Eq. (3.36), a soma deve ser mínima para os melhores valores dos parâmetros. Obtendo-se um conjunto de equações.

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_j} = 0 \quad \text{para} \quad j = 1, 2, 3, \dots, p \quad (3.43)$$

Reescrevendo a equação acima:

$$-2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - \dots - a_p f_p(x_i)] f_j(x_i) = 0 \quad (3.44)$$

Reorganizando os termos, pode-se reescrever essas equações

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{f_1 f_1}{\sigma_i^2} \right] a_1 + \left[\sum_{i=1}^n \frac{f_1 f_2}{\sigma_i^2} \right] a_2 + \dots + \left[\sum_{i=1}^n \frac{f_1 f_p}{\sigma_i^2} \right] a_p = \sum_{i=1}^n \frac{y_i f_1}{\sigma_i^2}, \quad (3.45)$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{f_2 f_1}{\sigma_i^2} \right] a_1 + \left[\sum_{i=1}^n \frac{f_2 f_2}{\sigma_i^2} \right] a_2 + \dots + \left[\sum_{i=1}^n \frac{f_2 f_p}{\sigma_i^2} \right] a_p = \sum_{i=1}^n \frac{y_i f_2}{\sigma_i^2} \quad (3.47)$$

... ,

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{f_p f_1}{\sigma_i^2} \right] a_1 + \left[\sum_{i=1}^n \frac{f_p f_2}{\sigma_i^2} \right] a_2 + \dots + \left[\sum_{i=1}^n \frac{f_p f_p}{\sigma_i^2} \right] a_p = \sum_{i=1}^n \frac{y_i f_p}{\sigma_i^2} \quad (3.48)$$

Essas equações podem ser escritas na forma de matriz. No entanto, não estamos interessados em uma discussão matemática e sim em uma discussão física.

Se as incertezas nos pontos experimentais são iguais, o teste χ^2 pode ser escrito como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (3.49)$$

Essa equação é que será utilizada como teste estatístico para o modelo utilizado nesse trabalho. Propagamos as incertezas da variável independente para a dependente. Para analisar se o ajuste foi bom aplicamos o teste χ^2 . Essa equação apresenta as incertezas nos pontos

experimentas iguais, onde $f(x_i)$ é a função ajustada. O desvio padrão σ_i pode ser entendido como o valor médio dos quadrados em relação à função verdadeira, quando o número de pontos tende ao infinito (VUOLO, 1995). No nosso caso, cada medida realizada apresenta diferentes valores para o desvio padrão.

3.4 PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

A partir dos dados do espaço e do tempo coletas para cada razão (Z), foi aplicado o método de regressão linear para estimar os coeficientes de ajuste da reta para cada Z. Com a equação da reta de ajuste, utilizamos a regra para a propagação de incertezas para podermos propagar as incertezas da variável independente para a variável dependente:

$$\sigma_{yi} = \sqrt{\sigma_{yi0}^2 + \left[\frac{d}{dx} f(x) \right]^2 \sigma_{xi}^2}, \quad (3.50)$$

em que σ_{yi0}^2 é a incerteza nas medições da variável dependente, $\left[\frac{d}{dx} f(x) \right]$ é a derivada da variável independente σ_{xi}^2 é a incerteza nas medições da variável independente. No nosso caso a variável independente e a variável dependente são, respectivamente, o tempo e o espaço. No caso da incerteza da variável independente tivemos que calculá-la através da combinação da incerteza estatística, dada pelo desvio padrão, e da incerteza instrumental que, no nosso caso, o instrumento de medição é considerado como sendo $\sigma_{instrumental} = 0,01s$. Portanto, a incerteza da variável independente é dada por:

$$\sigma_{xi} = \sqrt{\sigma_{estatístico}^2 + \sigma_{instrumental}^2} \quad (3.51)$$

Como não houve repetição da medida na variável independente, a sua incerteza é dada pela incerteza instrumental $\sigma_{yi0} = 0,05cm$. No caso do *Tracker* a $\sigma_{instrumental} = 0,03s$. Utilizamos as mesmas regras propagações de incertezas para os sensores óticos.

CAPÍTULO 4: DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA VISCOSIDADE DA GLICERINA

4.1 INTRODUÇÃO

A realização desse experimento teve como intuito mostrar um sistema experimental que minimiza os erros, tais como o erro de paralaxe. Foi utilizada também a relação entre o diâmetro do tubo e o diâmetro da esfera e a consequente influencia nos valores da viscosidade. O experimento teve como foco a viscosidade da glicerina que é obtida por meio da solução da equação diferencial, bem como é o comportamento gráfico no software *Tracker* e os sensores óticos.

4.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a construção do modelo foi necessário ter um conhecimento bastante avançado sobre os softwares em estudo e partir de um modelo com base na segunda lei de Newton e o tipo de escoamento que a esfera está sujeita.

O experimento científico caracteriza-se por um grande número de parâmetros mensuráveis. A prática utilizada para a atividade com o *Tracker*, divide-se em quatro etapas: 1) Coletas de dados dos meios que cercam o experimento como medição da massa da esfera, medição da temperatura e distância correta da câmera; 2) Filmagem do experimento; 3) obtenção dos dados dos parâmetros como tempo e espaço utilizando as ferramentas do software e 4) elaboração dos resultados do modelo utilizando o modelo da Eq. (3.27).

A prática utilizada para a atividade com os sensores óticos, divide-se em três etapas: 1) Coletas de dados dos meios que cercam o experimento como medição da massa da esfera, medição da temperatura; 2) obtenção dos parâmetros físicos como tempo e espaço obtido nos sensores e 3) elaboração dos resultados do modelo.

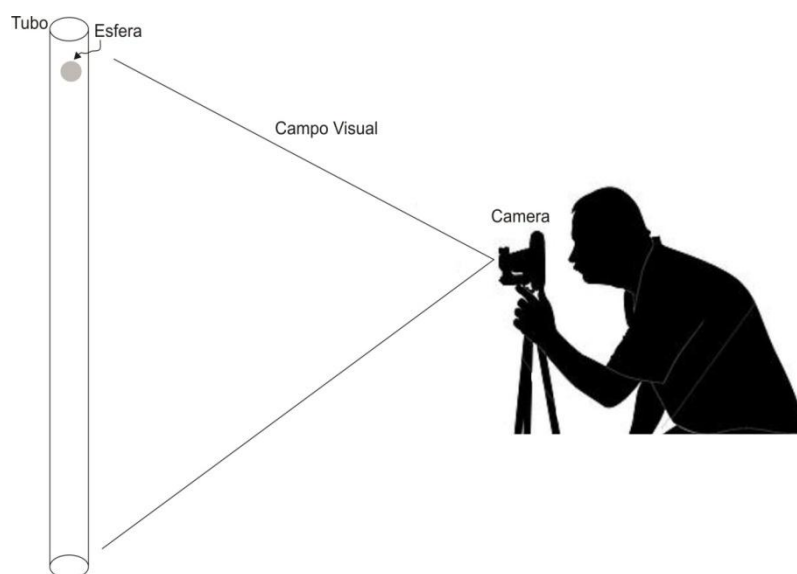
O sistema dispõe de dois tubos de diferentes diâmetros com a mesma glicerina, são colocadas no tubo três esferas de diâmetros diferentes conforme a Tabela 1, a coluna de fluido também foi medida de acordo com cada experimento. O comprimento da coluna de glicerina apresenta valores correspondentes de 72,90 cm para o tubo maior e 31,20 cm para o tubo menor.

Tabela 1 – Diâmetro dos tubos e das esferas do sistema experimental.

Tubos (mm)	Esferas (mm)
Tubo 1 = 62,95	Esfera 1 = 6,33
Tubo2 = 29,95	Esfera 2 = 18,24
-	Esfera 3 = 25,30

Fonte: Dados Experimentais, 2015

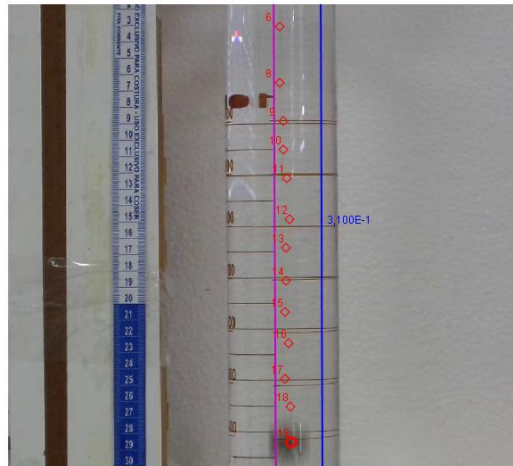
Para a coleta dos dados, utilizou-se os sensores para captar o tempo que a esfera passa em determinada distância. Foi utilizada uma câmera filmadora digital colocada a uma distância de modo que minimizem os erros, a filmadora foi colocada sobre um suporte conforme mostra a Figura 4.1

Figura 4.1–Sistema experimental

Fonte: Autoria Própria (2015)

Os vídeos foram analisados e retirados os dados do experimento com o software *Tracker*. Todas as esferas da Tabela 1 foram filmadas em todos os tubos da Tabela 1. Para se ter uma melhor precisão, foram realizados um total de 12 filmagens com as esferas em questão e retirou-se os melhores resultados.

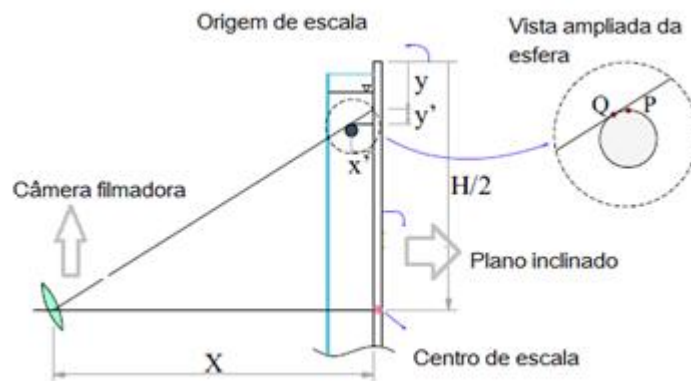
Figura 4.2 – Obtenção dos dados no Software.



Fonte: Autoria Própria (2015)

A esfera se move pelo centro do tubo. Supõe-se que x' coincido com o raio R um estudo das fotografias, mostra que se têm um comprimento lateral da trajetória da esfera a cerca do comprimento vertical (SANDOVAL; CARAM; SALINAS, 2010).

Figura 4.3 – Esquema das dimensões geométricas que intervêm na correlação por paralaxe na dimensão da esfera.



Fonte: Adaptado de Sandoval *et al* (2010, P.13)

Por semelhança de triângulo vale:

$$\frac{y'}{H/2 - y} = \frac{x'}{x} \quad (4.1)$$

A correção da posição da esfera esta dada por:

$$y' = \frac{x'}{x} (H/2 - y) , \quad (4.2)$$

onde a distância x é suficientemente grande para considerar que o ponto Q coincide com o ponto P, de acordo com a Figura 4.3.

Quando a esfera se encontra em cima do centro da escala, o parêntese da Eq. (4.2) é positivo, quando está por baixo, é negativo. Logo a posição da esfera está dada por:

$$y_c = y + y' \quad (4.3)$$

Dada a separação entre o plano do movimento a esfera e o plano da escala houve um desvio da leitura feita em paralaxe corrigido pela Eq. (4.2) e a Eq. (4.3). Observa-se na Eq (4.3) que a correlação é nula quando a esfera se encontra no centro da escala. O valor absoluto de y' se dá nos extremos do tubo quando $y=0$ (SANDOVAL; CARAM; SALINAS, 2010).

Esse sistema apresenta vantagens a cerca do simples sistema dos cronômetros acionados manualmente, pois pode-se observar o comportamento do campo dentro dos detalhes que o líquido a olho nu não podemos ver, pode-se ver com maior precisão qual é a zona de tubo que a esfera passa a ter velocidade constante (SANDOVAL; CARAM; SALINAS, 2010).

Para saber se os nossos resultados estão coerentes necessitamos de um valor de referência para podermos comparar. No trabalho de Sandoval *et al* (2010), foi obtido uma equação que descreve a forma como a viscosidade varia com a temperatura. A partir dos dados desses autores a função que melhor se ajustou aos seus dados é dada por:

$$\eta = 0,0316T^2 - 2,266T^2 + 44,65 \quad (4.3)$$

Portanto, para o nosso caso em que a temperatura é de 26°C, temos que a viscosidade de referência para o nosso trabalho é de $\eta = 7,09P$.

Vale salientar que a forma de coleta e análise de dados feita por Sandoval *et al* (2010), é diferente da nossa, pois em seu trabalho ele utilizou o método de Stokes conforme a Eq. (3.10). A forma como ele coletou os dados foi com uma câmera digital, a esfera estava em contraste com uma escala milimetrada, onde pode-se marcar o tempo que a esfera esteve em cada ponto.

É importante enfatizar que Sandoval *et al* (2010) não obteve resultado para a viscosidade a temperatura de 26°C. Estamos utilizando a equação proposta no seu trabalho e estimamos o valor da viscosidade para esta temperatura.

A partir dos dados coletados através do *Tracker* e dos sensores óticos podemos estimar a viscosidade da glicerina. Portanto, substituindo a Eq. (3.27) na Eq.(3.49). Temos:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{y_i - \left[\frac{mg}{b} - \frac{m^2 g}{b^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{b}{m}\right)t_i} \right) \right]}{\sigma_i} \right\}^2, \quad (4.4)$$

onde os valores de g , $\rho_{\text{líquido}}$, ρ_{esfera} são respectivamente $9,78 \text{ m/s}^2$, $1,25 \text{ g/cm}^3$, $7,81 \text{ g/cm}^3$ e b é dada pela Eq (3.18). Lembrando que, t_i y_i e representam os dados experimentais de tempo e espaço e σ_i as incertezas experimentais.

A partir da Eq. (4.4) com a ajuda do Software *Maple* foi escrito um algoritmo para que o programa busque o melhor valor do parâmetro livre que minimiza o χ^2 . Pode-se perceber que o único parâmetro livre é o η , portanto, o programa irá buscar o menor valor de η , que proporciona o menor χ^2 .

Na Tabela 2 que segue estão dispostos os valores de viscosidade para a glicerina com base nos dados obtidos pelo *Tracker* e pelos sensores óticos para diferentes razões (Z) entre o diâmetro interno do tubo e da esfera.

Tabela 2 – Valores experimentais das viscosidades da glicerina com diferentes .

$D \text{ (mm)}$	$D_i \text{ (mm)}$	$Z = D/D_i$	$\eta \text{ (P)}$ M1	$\eta \text{ (P)}$ M2
6,33	62,95	0,10	7,28	7,26
6,33	29,95	0,21	7,10	7,44
18,24	62,95	0,29	13,11	12,77
25,30	62,95	0,40	15,28	16,68
18,24	29,95	0,62	28,40	27,70
25,30	29,95	0,84	181,13	242,65

Fonte: dados experimentais, 2015

Na Tabela 2 temos D como sendo o diâmetro do interno do tubo, D_i o diâmetro da esfera, M1 como sendo os dados obtidos no *software Tracker*, M2 como sendo os dados obtidos nos sensores óticos. A Tabela 2 mostra que as razões entre o diâmetro da esfera e o diâmetro interno do tubo nos fornece valores diferentes para a viscosidade da glicerina. Isso nos sugere que não basta simplesmente obter uma esfera e um tubo e executar o experimento para determinar a viscosidade de um fluido. É necessário um estudo bastante criterioso sobre as dimensões do tubo e da esfera.

Na Tabela 2, observa-se uma brusca variação dos valores da viscosidade em M1 e M2. Em M1 ela varia de 7,10 Poise a 181,13 Poise, e em M2 essa variação é de 7,26 Poise a 242,65 Poise. Como foi discutido anteriormente para razões menores 0,2 consegue-se reproduzir um valor próximo a viscosidade de referência. Essas variações no valor da viscosidade também são encontradas no trabalho de Sandoval *et al* (2010) que obtiveram os seguintes valores para viscosidade. Observa-se uma pequena diferença nos valores da viscosidade em M1 e M2, isso é considerado, pois no caso do *Tracker* estamos obtendo o centro da esfera ao clicar nela quando passa em determinado tempo, já no caso dos sensores quando o início da esfera está “cortando” o feixe de luz do sensor, o mesmo captura o seu tempo, então temos pelo menos aí uma diferença do raio da esfera.

Tabela 3 - Viscosidade para razões diferentes

Z	η (P)
0,10	8,4
0,69	67

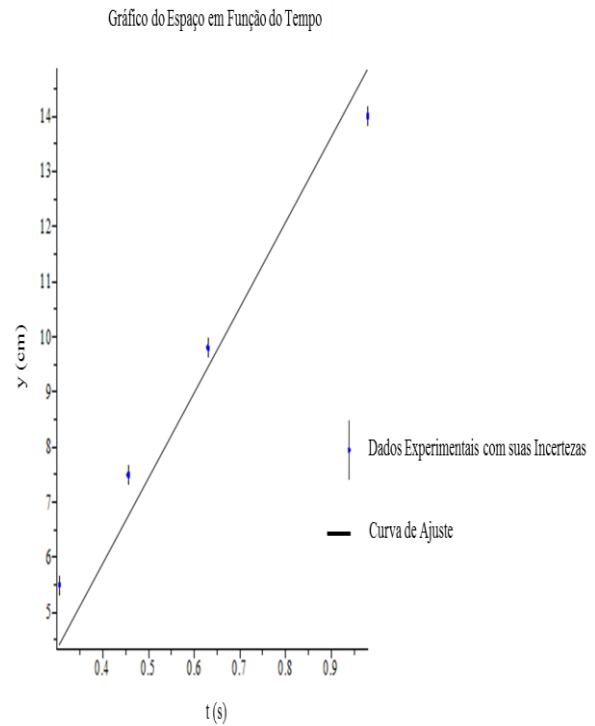
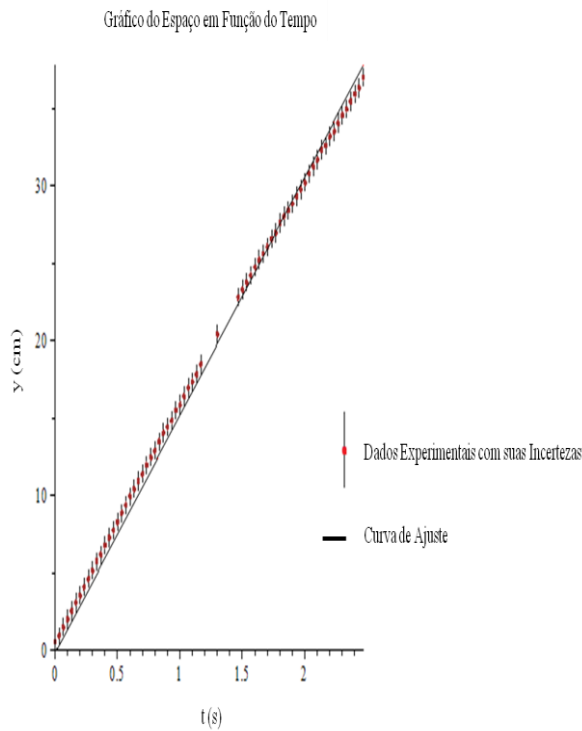
Fonte: Autoria Própria, 2015

No que segue iremos apresentar os gráficos de dispersão dos dados experimentais em conjunto com a curva da função ajustada.

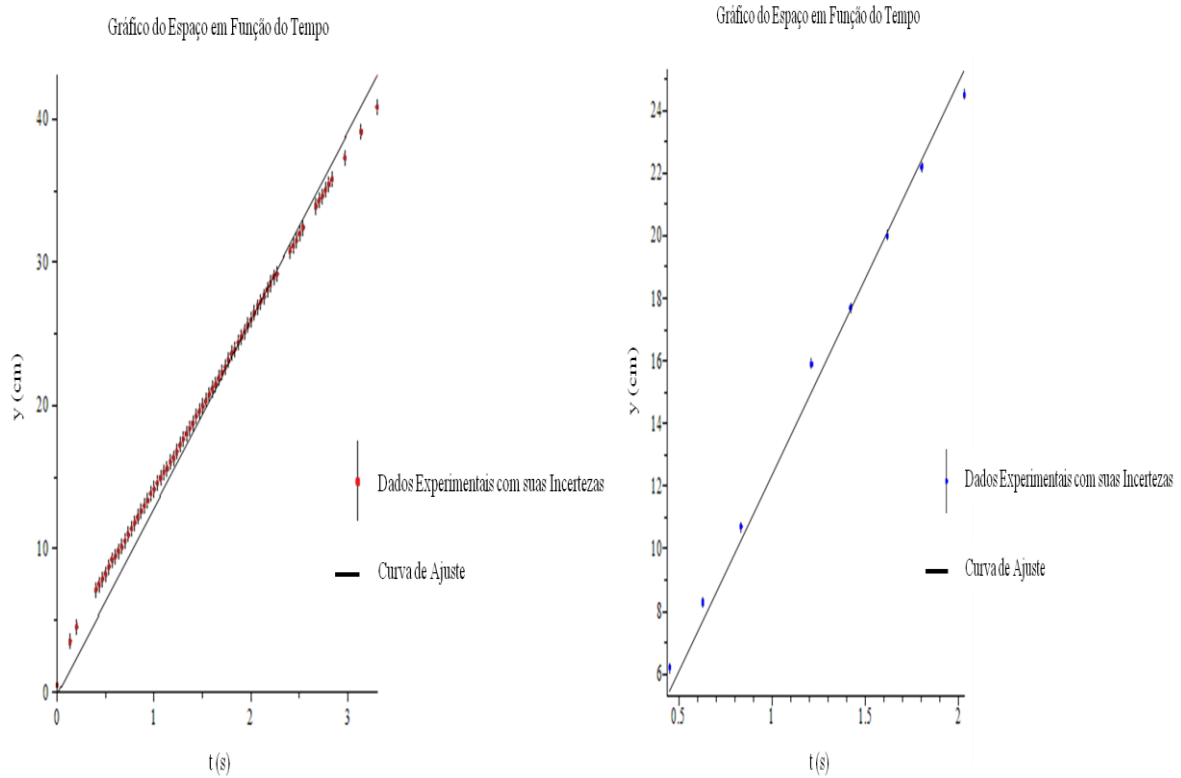
Figura 4.4 – Gráficos do espaço em função do tempo para a $Z = 0,10$.

(a) M1

(b) M2

**Fonte:** Autoria Própria (2015)

Os gráficos (a-b) da figura 4.4 refere-se a esfera de diâmetro igual 6,33mm e tubo com diâmetro interno de 62,95mm. Observa-se que o total de dados experimentais foi menor em relação ao gráfico da Figura 4.4 (a), isso deve-se, as pequenas dimensões da esfera em relação ao tubo e mostra que com a utilização do software, pode-se realizar um maior análise do número de pontos como visto no gráfico da Figura 4.4 (b).

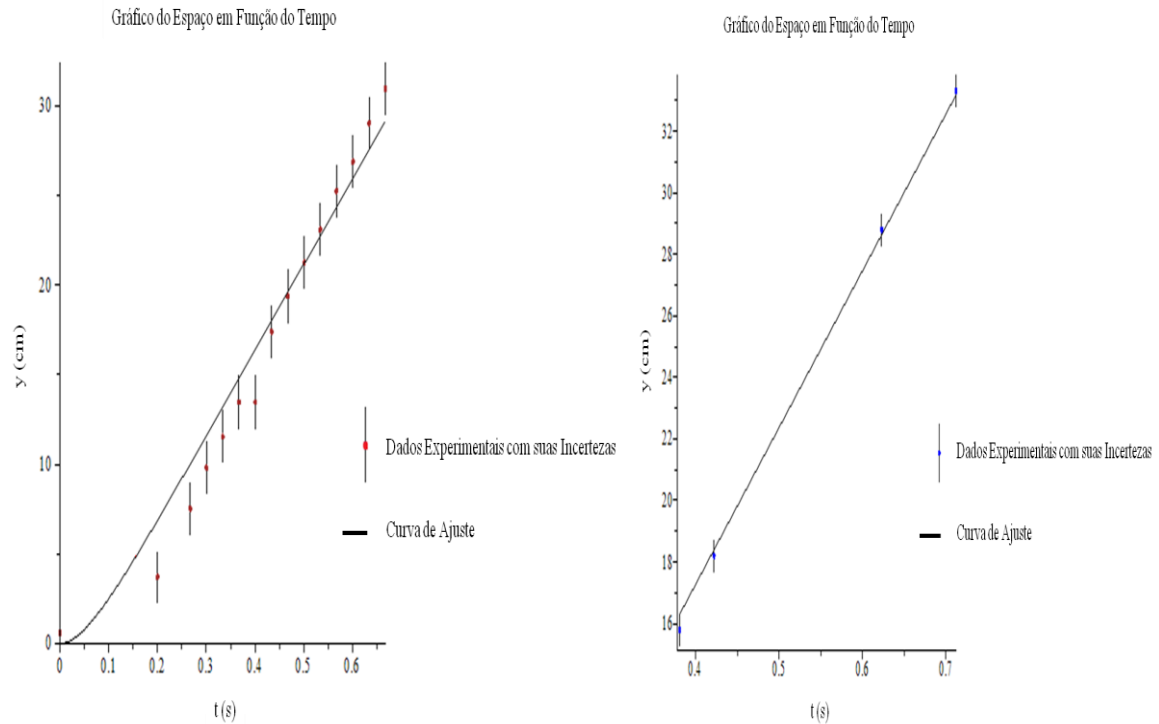
Figura 4.5 – Gráficos do espaço em função do tempo para $Z = 0,21$ **(a) M1****(b) M2****Fonte:** Autoria Própria (2015)

Os gráficos da figura 4.5 (a –b) é para a esfera com diâmetro de 6,33mm e tubo de 29,95mm.

Figura 4.6– Gráficos do espaço em função do tempo para $Z = 0,29$

(a) M1

(b) M2

**Fonte:** Autoria Própria (2015)

Os dados dos gráficos da figura 4.6 (a – b) refere-se a esfera de 18,24mm e tubo de 62,95mm. Mais uma vez pode-se observar que com o software *Tracker* ocorre uma análise maior do número de pontos do que os sensores óticos, pois as condições de claridade no ambiente do laboratório podem influenciar na coleta de dados.

Figura 4.7 - Gráficos do espaço em função do tempo para $Z = 0,40$

(a) M1

(b) M2

Gráfico do Espaço em Função do Tempo

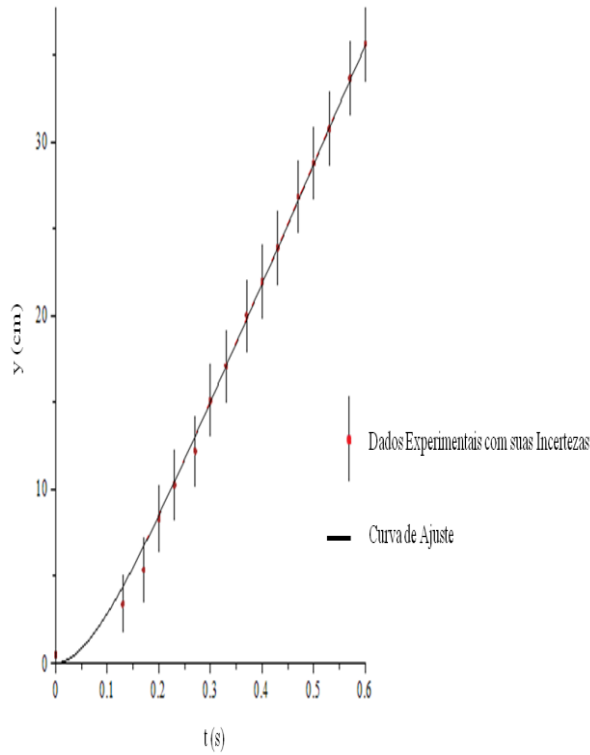
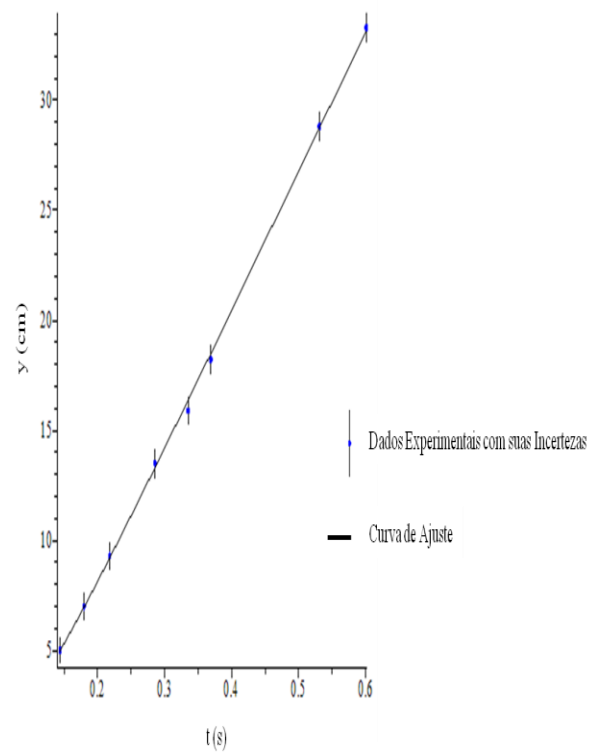


Gráfico do Espaço em Função do Tempo

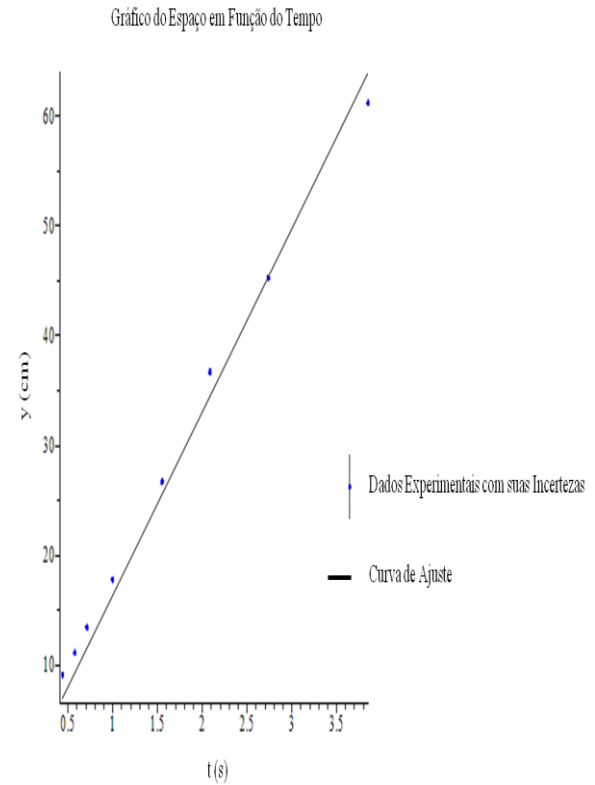
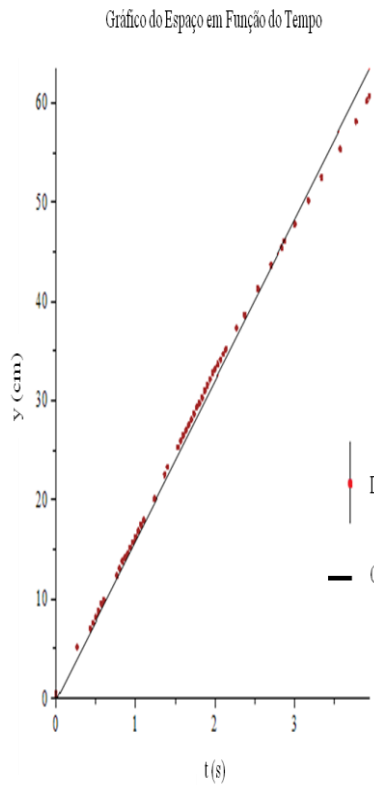
**Fonte:** Autoria Própria (2015)

Os dados experimentais dos gráficos 4.7 (a – b) refere-se a esfera com diâmetro de 25,30mm e tubo de 62,95mm de diâmetro. Nas figuras (4.6 a) e (4.7 a), observa-se uma leve sinuosidade na reta isso mostra que houve uma pequena aceleração da esfera nessa medida.

Figura 4.8 Gráficos do espaço em função do tempo para $Z = 0,62$.

(a) M1

(b) M2

**Fonte:** Autoria Própria (2015)

Os gráficos 4.8 (a – b) mostra os dados experimentais referentes a esfera de 18,24mm e tubo de 29,95mm.

Figura 4.9 – Gráfico do espaço em função do tempo para $Z = 0,84$.

(a) M1

(b) M2

Gráfico do Espaço em Função do Tempo

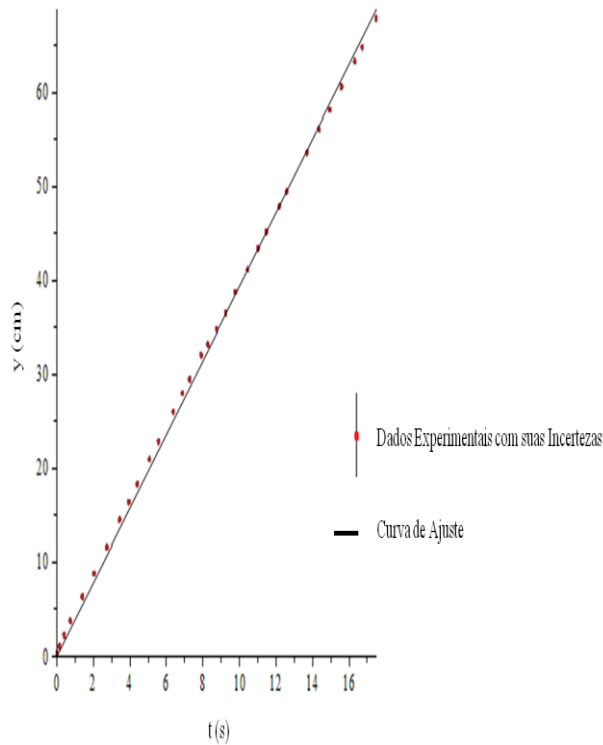
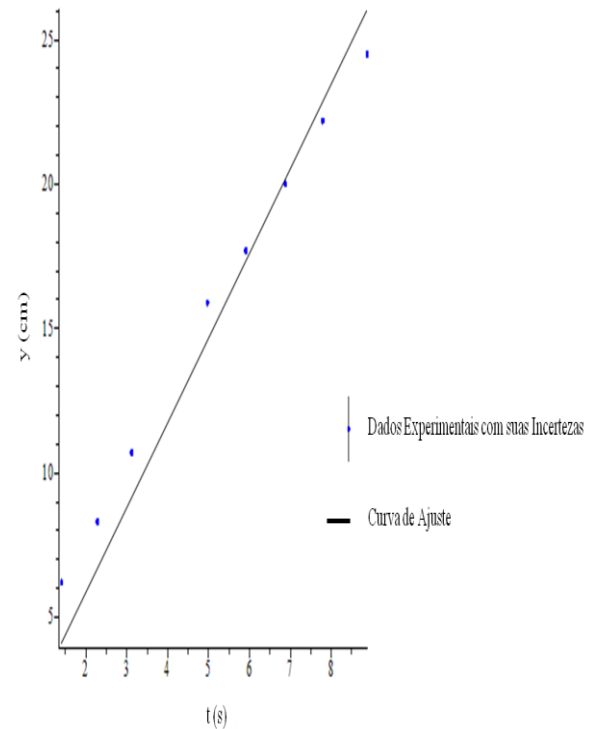


Gráfico do Espaço em Função do Tempo

**Fonte:** Autoria Própria (2015)

Os gráficos das Figura 4.9 (a – b), diz respeito aos dados experimentais da esfera de 25,30mm de diâmetro e tubo de 29,95mm de diâmetro.

Os dados experimentais dos gráficos dos sensores óticos mostram suas incertezas nas medidas e a melhor função que explica o comportamento da esfera é a que obedece ao comportamento gráfico. A reta de ajuste mostra uma relação forte entre as variáveis tempo e espaço.

Para analisar os valores obtidos utilizando o software *Tracker*, foi necessário fazer a filmagem do experimento e obter por meio das ferramentas de trabalho do software os valores do espaço e do tempo, tendo em mão esses valores foi necessário transferir os dados para o software *Maple*, no qual criou-se um modelo com a Eq. (3.17), a Eq. (3.27), Eq. (3.49) e Eq. (4.4) para obter os valores da viscosidade e os gráficos desses dados.

As retas de ajuste apresentadas nos gráficos das Figuras 4.4 a 4.9 mostram que os dados estão bem relacionados. Tanto para os dados obtidos no *Tracker* quanto para os dados obtidos nos sensores óticos, observamos um comportamento semelhante.

Observa-se que nas figuras 4.4 a 4.9, que os pontos experimentais estão há uma distância da curva de ajuste, tal distância é comum, pois toda medição tem que ter suas incertezas, caso não tivesse, tornaria a função inverossímil. Como os dados estão bem relacionados, essas são as melhores funções que descreve o comportamento gráfico da esfera, o que torna essas funções verossímeis.

CONCLUSÃO

A existência de uma relação entre o diâmetro da esfera e o diâmetro interno do tubo é bastante crucial, pois para diferentes valores da razão entre o diâmetro da esfera e o diâmetro do tubo temos diferentes valores de viscosidade que podem variar bastante e até assustar o estudante que esteja desatento a essa razão o que o leva a pensar que seu experimento possa estar errado.

Os métodos estatísticos como o método da máxima verossimilhança, a propagação de incertezas e as relações entre os diâmetros tubo e esfera obtiveram comportamento e valores desejados para a viscosidade do fluido. Quando $Z < 0,2$ espera-se obter um valor da viscosidade próximo ao valor real para o fluido para $Z > 0,2$ espera-se valores acima do valor real da viscosidade, tal fato é reforçado de acordo com a Tabela 2. A importância dos números adimensionais e o teorema do PI Buckingham para mostrar a relação do número de Reynolds que determina o escoamento da esfera. Essas teorias serviram como base para provar a veracidade do experimento.

Esse trabalho mostrou que o modelo e as técnicas utilizadas para analisar os dados estão bastante condizente com a teoria física, pois os valores da viscosidade da glicerina com o *Tracker* estão bem próximos dos valores dos sensores óticos e dos valores obtidos na literatura conforme a pesquisa de Sandoval *et al* (2010). Tal feito ainda é reforçado, pois o comportamento gráfico da esfera está semelhante para os dois métodos.

No entanto, vale lembrar que os dados do *Tracker* como mostram os gráficos das figuras (4.4) a (4.9) possuem incertezas maiores que os dados obtidos nos sensores óticos, isso mostra uma pequena sensibilidade quando se trabalha com o *Tracker*, pois este software requer bastante prática, já que ele vai capturar os pixels e cabe ao operador determinar em que unidade de medida o software irá trabalhar.

Ao começar a usar o *Tracker*, é necessário configurar o vídeo, pois possivelmente não se está interessado em todos os *frames* do vídeo. No caso em estudo, o *frame* inicial é aquele cuja esfera não está na mão do sujeito que a lança, depois de realizado isso, é necessário calibrar o software usando a fita de calibração ou o bastão de medição, outro aspecto essencial da análise do vídeo é a definição da posição do referencial. É necessário marcar os pontos a partir da criação de um ponto de massa, após isso o software confecciona as tabelas e os gráficos automaticamente.

Caso esses passos da análise do vídeo não seja seguido corretamente o software pode apresentar leituras falsas, pois por ser uma ferramenta bastante sensível com o meio interno e

externo é necessário um bom treinamento e uso do software para poder analisar o fenômeno estudado.

Em suma, esse trabalho mostrou que não basta simplesmente submeter uma esfera escorrendo em um fluido dentro de um tubo para obter o coeficiente de viscosidade. Além da viscosidade ser influenciada pela temperatura, a razão (Z) é bastante importante para calcular seu valor.

Nosso modo de obtenção de dados, bem como a forma de cálculo do coeficiente de viscosidade da glicerina permite um estudo mais abrangente dos dados experimentais, pois pode-se ver com clareza o comportamento da esfera. Além de utilizar um grande número de pontos experimentais.

Além desse estudo e forma de coleta e cálculo ser um método que não se tem na literatura a te então, podemos observar que essa forma de estudo e coleta de dados é bem mais abrangente e envolve mais artifícios matemáticos e estatísticos do que as formas coletadas na literatura e até mesmo em indústrias.

Esse estudo nos permite melhor relação entre os dados, o que torna seus valores mais condizentes com a realidade, o que nos permite uma melhor interpretação do ponto de vista físico dos fenômenos em estudo.

REFERÊNCIAS

- FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2001.
- SANDOVAL, Claudia; CARAM, Jorge; SALINAS, Julia. La engañosa simplicidade del "método de Stokes" para medir viscosidade. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Buenos Aires, v. 31, n. 4, p.2-13, 18 fev. 2010.
- GOYA, Alcides; LABURÚ, Carlos Eduardo; CAMARGO FILHO, Paulo Sérgio de. Estudo comparativo de rolamento e a determinação do início de deslizamento de uma esfera num plano inclinado. **Revista Brasileiro de Ensino de Física**, Londrina, v. 36, n. 2, p.1-6, 23 maio 2014.
- BRUNETTI, Franco. **Mecânica dos Fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- HALLIDAY, David; RESNICK; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física**. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora Ltc, 2009.
- REYNOLDS, Osborne. An Experimental Investigation of the Circumstance Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. **Philosophical Transactions: Royal Society London**, Londres, v. 935-982, n. 174, p.14-52, 1 jan. 1883.
- HANSEN, A. G. Fluid mechanics. New York: John Wiley & Sons, 1967.
- OLIVEIRA, Cláudio Rodolfo Sousa de et al. Um Ambiente para a Prática de Aulas Laboratoriais de Física (determinação da Viscosidade de Líquidos). **Revista Brasileira de Informática na Educação**, Vitória da Conquista, v. 17, n. 1, p.43-57, abr. 2009.
- DIAS, Marcos A.. **Estudo da queda dos corpos na vizinhança da Terra com fotografias estroboscópicas digitais**. 2011. 88 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- VUOLO, José Henrique. **Fundamentos da Teoria de Erros**. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.