

ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA TAXA DE AMORTECIMENTO EM MOTORES A COMBUSTÃO ATRAVÉS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Nicolas de Medeiros Souza, Ivan Mezzomo (Orientador)

Resumo: Neste trabalho estudaremos motores a combustão por meio das equações diferenciais para analisar de forma teórica, quais as consequências da alteração da taxa de amortecimento no desempenho de motores com características iguais. Inicialmente será realizado o estudo do funcionamento de motores e a modelagem do sistema biela-manivela, resultando em uma equação diferencial característica. Posteriormente, será feita a resolução das equações diferenciais por meio da transformada de Laplace e a análise de trabalhos acadêmicos sobre o assunto. Por fim, serão feitas análises do desempenho dos motores para comprovar se existe diferença no funcionamento de motores alterando a taxa de amortecimento, indicando sua influência nos motores.

Palavras-chave: Motores; Taxa de Amortecimento; Equações Diferenciais; Transformada de Laplace; Sistema Biela-Manivela.

1. INTRODUÇÃO

Os motores foram uma das grandes invenções do homem, e de acordo com [4], o motor de combustão interna (a pistão), inventado no século XIX, foi uma das invenções que mais impacto teve na sociedade e no nível de vida da população. Dessa forma, é possível concluir que a invenção e a utilização de motores de combustão interna modificaram a sociedade em todos os âmbitos, sendo eles de trabalho até o lazer na vida das pessoas. Além disso, o rendimento dos motores tem evoluído ao longo das décadas, segundo [4] o rendimento foi de menos 10% para perto de 50% e, além disso, a emissão de poluentes decaiu junto com esse aumento no rendimento dessas máquinas térmicas, comprovando que após tantos anos é possível evoluir ainda mais tais equipamentos.

A teoria de motores, de acordo com [9], surgiu com os motores de dois tempos criados por Nicolas Carnot em 1824, na França. No entanto, a primeira patente de um motor à combustão se deu em 1826, nos Estados Unidos, por Samuel Morey. Na linha do tempo dos motores, em meados dos anos de 1860, Nicolaus Otto desenvolveu o primeiro motor atmosférico, que são chamados atualmente como motores aspirados. Após o desenvolvimento desse modelo foram inventados outros modelos como o motor Boxer, atualmente utilizados em carros da Porsche e Subaru, que dispõe de cilindros opostos horizontalmente.

Segundo [9], o primeiro motor de quatro tempos foi desenvolvido por Nicolaus Otto, Gottlieb Daimler e Wilhelm Maybach, poucos anos após o desenvolvimento do motor de 2 tempos de Otto. A partir dessas invenções o número de tipos de motores aumentou drasticamente ao longo dos anos, sendo que o primeiro motor a combustão de elevada eficiência foi desenvolvido por um engenheiro alemão chamado Rudolf Diesel, no qual desenvolveu em 1900 o motor que funcionava com óleo de amendoim e que carrega seu nome até dos dias atuais: motor diesel.

A tendência de carros com motorização elétrica surgiu em meados de 1900, no qual os primeiros carros elétricos eram feitos especialmente para serem alternativos de luxo que poucos tinham condições de adquirir e serem vistos mais como medalhas para as classes altas da época. Dessa forma, a tecnologia de carros elétricos não é nova, mas não foi tão desenvolvida devido ao avanço da extração de petróleo, de outros tipos de combustíveis e, também devido a guerras que ocorreram na Europa e Estados Unidos, pioneiros dessa tecnologia. No entanto, este tema ganhou importância atualmente devido a preocupação com o meio ambiente e a busca por novas tecnologias, por isso, grandes empresários buscaram ser pioneiros dessa nova ordem mundial, dentre esses, Elon Musk, que criou a Tesla e acabou se tornando o principal incentivador dessa tecnologia que avança a cada dia, tendo hoje como principal concorrente a marca chinesa BYD.

Para estudar sistemas como motores, são precisos métodos matemáticos amplamente utilizados para entender fenômenos físicos e as Equações Diferenciais são uns dos métodos que podem ser utilizados para descrever fenômenos naturais/físicos em dados matemáticos a fim de compreensão dos mesmos. Dessa forma, o trabalho em questão usa desse método para realização da modelagem matemática do sistema biela-manivela, e com a modelagem, a resolução por meio da transformada de Laplace.

O trabalho em questão busca analisar de forma teórica a influência da taxa de amortecimento nos cursos de funcionamento do motor e para isso serão estudados o funcionamento do motor e seu ciclo de quatro tempos,

as equações diferenciais e a transformada de Laplace que serão usadas para a resolução dos problemas propostos e, através da análise de gráficos, constatar a influência da taxa de amortecimento e como uma alteração no seu valor pode afetar a resposta do sistema biela-manivela presente no motor.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção serão apresentados conceitos preliminares indispensáveis para o entendimento do trabalho, tais como, equações diferenciais, transformada de Laplace e a funcionalidade do sistema biela-manivela em pistões de motores a combustão.

2.1. Equações Diferenciais

Definição 1 [2]: Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED).

As equações diferenciais podem apresentar diversas formulações. Dito isso, as equações diferenciais são classificadas por tipo, ordem e linearidade.

Tipo: De acordo com [2], as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) são compostas por derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente da equação, enquanto as Equações Diferenciais Parciais (EDP) são equações que envolvem derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes.

Ordem: Segundo [1], a ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior grau que aparece na equação.

Linearidade: De acordo com [2], uma equação diferencial linear segue duas propriedades:

1. A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, em outras palavras, a potência de todos as variáveis que tenham y e suas derivadas tem que ser 1.
2. Cada coeficiente deve depender apenas da variável independente x .

Dessa forma, uma equação diferencial linear segue o seguinte formato:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Portanto, equações diferenciais que não seguirem o formato ou as propriedades descritas acima, são classificadas como não linear.

Neste trabalho utilizaremos apenas equação diferencial ordinária linear de segunda ordem.

2.2 Transformada de Laplace

A teoria da transformada de Laplace teve início com o matemático Pierre-Simon Laplace que utilizou formas semelhantes a atual transformada em seus trabalhos da Teoria da Probabilidade. A sua teoria foi desenvolvida entre o século XIX e início do século XX, por três outros matemáticos.

De acordo com [2], o conceito de transformada de Laplace deriva das transformadas integrais, que são caracterizadas por funções com duas variáveis $f(x, y)$, onde a integral definida de f com relação a uma das variáveis tem como resultado uma função da outra variável. Além disso, a existência da solução é nomeada como convergente e, caso não exista, como divergente.

Definição 2 [2]: Se $f(t)$ estiver definida para $t \geq 0$, então a integral impropria

$$\int_0^{\infty} K(s, t)f(t) dt$$

é definida pelo limite

$$\int_0^{\infty} K(s, t)f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s, t)f(t) dt = F(s).$$

A integral acima representa uma transformada integral, caso o limite exista a integral converge, e caso não exista, a integral diverge. Dessa forma, dependendo da função inserida em $K(s, t)$, a integral irá divergir. Com isso, a função $K(s, t) = e^{-st}$ fornece uma transformada integral especial.

Definição 3 [2]: Seja f uma função definida por $t \geq 0$, então a integral

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

é chamada de transformada de Laplace de f , desde que a integral convirja.

A escolha da transformada de Laplace nesse trabalho foi feita devido a sua diversidade de aplicações e em certos casos, resultar em uma resolução mais rápida e simples. No entanto, é necessário definir o conceito de ordem exponencial e comprovar a existência da transformada de Laplace.

Teorema 2 [2]: Dizemos que uma função é de ordem exponencial se existem números $c, M > 0$ e $T > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

As condições suficientes de existência da transformada de Laplace é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 3 [2]: Seja $f(t)$ uma função contínua por partes no intervalo e de ordem exponencial para $t > T$; então, sua transformada de Laplace existe para todo $s > c$.

2.3 Motores

Neste trabalho, a principal funcionalidade abordada será o movimento do pistão, que é feito por um sistema biela-manivela, no qual está representado na figura abaixo.

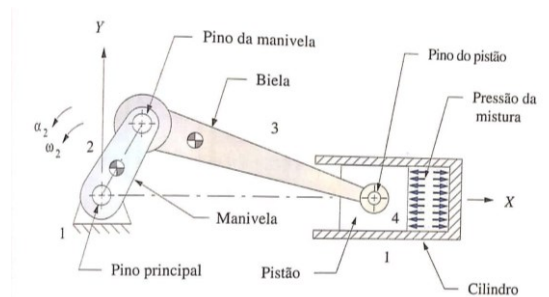


Figura 1. Mecanismo de quatro barras biela-manivela para um motor monocilíndrico. Fonte [3]

De forma explicativa, o motor de combustão interna pode apresentar vários formatos e dimensões para seus pistões, a definir a sua funcionalidade com relação a potência, consumo, entre outros fatores. Esse trabalho tem como base um pistão genérico que apresenta material homogêneo, isotrópico e que está sujeito a uma carga que não o faz entrar em falha. Sua funcionalidade é de um motor de quatro tempos de Otto e, além disso, necessita de peças específicas, que são duas válvulas por cilindro para admissão e escape, como pode ser visualizado na Figura 2.

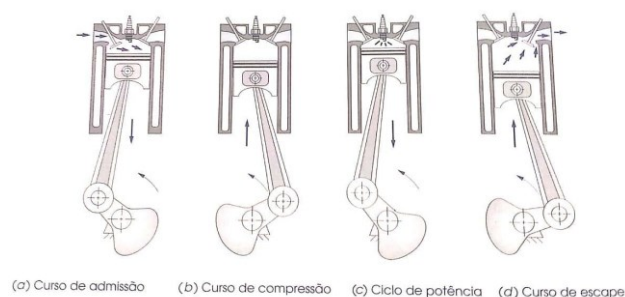


Figura 2. O ciclo de combustão Otto de quatro tempos. Fonte [3]

Esse tipo de motor é de quatro tempos, também denominados de cursos ou tempos, sendo estes o curso de admissão, curso de compressão, curso de explosão e curso de escape. No primeiro momento (a) representado na figura acima, o pistão se encontra no ponto morto superior (PMS). Nesse instante há a abertura da válvula de admissão, ocorrendo uma mistura de ar e combustível dentro do cilindro, com isso o pistão realizará metade de um giro completo chegando ao ponto morto inferior (PMI), aumentando o volume no cilindro. No segundo momento (b), ocorre a compressão dessa mistura, no qual as válvulas são fechadas e o pistão se move de PMI para

o PMS. Perto de atingir o ponto máximo superior, ocorre uma faísca que gera a combustão da mistura, acarretando o ciclo de potência (c), no qual a pressão derivada dessa combustão empurra o pistão do PMS ao PMI. Por fim, inicia-se o ultimo curso do ciclo (d), na qual a válvula de escape é aberta e o pistão se desloca do PMI ao PMS, expelindo, portanto, os gases para fora da câmara de combustão.

A sequência de fatos mencionados anteriormente é o sistema estudado nesse trabalho, que busca um aumento da eficiência no movimento do sistema da biela-manivela, que é a maior amplitude feita pela explosão da mistura do cilindro, sendo mais conhecida como curso do pistão.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA DE MOTORES

Nesta seção temos como bibliografia base [3], onde a ideia é modelar um motor de combustão interna para um sistema massa-mola, de tal forma que seja possível representar o sistema com apenas 4 incógnitas, sendo estas k , c , m e $f(x)$, como representado na figura abaixo.

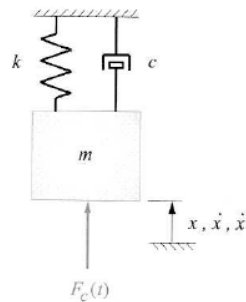


Figura 3. Modelo dinâmico do sistema massa-mola que inclui amortecimento. Fonte [3].

O sistema baseia-se em um pistão genérico que tem propriedades específicas, na qual estes fatos serão considerados em todo o trabalho.

De forma inicial, a modelagem parte da Lei de Hooke, na qual temos que determinada força sobre um corpo elástico que acarreta em uma deformação desse material, sendo elas proporcionais, caracterizado em k

$$F = -k \cdot x \quad (1)$$

Além disso, a segunda Lei de Newton, também conhecida como o Princípio Fundamental da Dinâmica, afirma que a multiplicação da massa pela aceleração de um corpo é igual a força resultante sobre esse corpo. Dessa forma, temos que:

$$F = m \cdot a \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos

$$m \cdot a + k \cdot x = 0 \quad (3)$$

A equação resultante é considerada uma equação diferencial, que pode ser utilizada para sistemas não amortecidos. No entanto, nosso objeto de estudo tem um amortecimento e, conseqüentemente, perda de energia por atrito. Portanto, é necessário acrescentar uma variável que demonstra essa perda de energia, denominada de coeficiente de amortecimento c , que introduzida na equação (3), temos:

$$m \cdot a + c \cdot v + k \cdot x = 0 \quad (4)$$

As variáveis c e v representam, respectivamente, o coeficiente de amortecimento e a velocidade. O coeficiente de amortecimento com a velocidade representa a perda de energia devido ao atrito do sistema, isto é, nos motores mesmo com fluidos para minimizar o atrito ainda assim acaba ocorrendo perdas. Para quantificar esse déficit foi implementado essas duas variáveis, onde nesse caso a velocidade é a do embolo/pistão para realizar seus ciclos dentro do cilindro, no qual sua direção se opõe a força de atrito entre o pistão e parede do cilindro. O coeficiente de amortecimento é dado pela taxa de amortecimento, que será explanado no decorrer do trabalho.

A equação acima pode ser utilizada para sistemas amortecidos como pistões e suspensões. No entanto, para este trabalho existe a necessidade de introduzir uma função que demonstre a potência gerada nesse processo,

que através da combustão no cilindro do pistão, gera a energia de funcionamento das engrenagens. Dessa forma, a forma final da equação é escrita como

$$m \cdot a + c \cdot v + k \cdot x = f(x). \quad (5)$$

A função $f(x)$ representa a força de explosão da mistura ar e combustível dentro do pistão, essa função varia de acordo com o tipo de combustível empregado em determinado motor, pois o tipo de combustível e as dimensões do motor alteram a função. Neste trabalho, a força de explosão, também intitulada como função potência, é deduzida por [6], onde a função é resultado de cálculos termodinâmicos e cálculos numéricos, no qual o tipo de combustível altera a função. A função potência é o foco de estudo para trabalhos futuros, devido à complexidade de modelagem e em [6] algumas informações foram omitidas, não sendo possível deduzir a função.

Substituindo a aceleração (a) e a velocidade (v) por suas respectivas derivadas em função do tempo (t), temos:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + c \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = f(x) \quad (6)$$

No trabalho as derivadas serão escritas com o uso de pontos. Dessa forma, a Equação (6) será escrita da seguinte forma:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(x)$$

De forma breve, um material que sofre ação de uma carga axial, dentro do regime elástico, acarreta uma deformação do objeto. Esse ideal é calculado pela seguinte equação

$$x = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} \quad (7)$$

A Equação (7) provém de [10], no qual diz que a deformação pôr a aplicação de uma carga axial é calculada relacionando a força axial aplicada (F), o comprimento da seção (L), a área da seção transversal (A) e o módulo de elasticidade do material (E).

Dito isso, o cálculo da constante elástica acaba se tornando possível, pois levando em consideração um sistema biela-manivela e pistão cilíndrico sólido com o resultado da união da equação (1) com o princípio de deformação no regime elástico resulta na constante elástica.

Isolando x em (1) e substituindo em (7), temos:

$$\frac{F}{k} = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} \quad (8)$$

Simplificando a equação, temos:

$$k = \frac{A \cdot E}{L} \quad (9)$$

O sistema biela-manivela deve ser modelado para molas, isto é, cada componente deve ser considerada como um sistema massa-mola independente e, em seguida, calcular uma resultante, como ilustrado na figura abaixo.

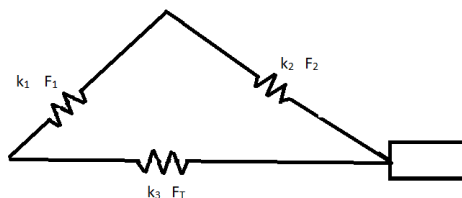


Figura 4. Sistema biela-manivela e pistão representado em molas. Fonte (Autoria própria).

Dessa forma, as molas 1 e 2, representadas na Figura 4, indicam a biela e manivela, respectivamente, e a mola 3 representa uma resultante das molas 1 e 2, permitindo uma redução de variáveis, resultando em uma melhor visualização do sistema. Esse modo de configuração de molas é considerado em série e esse tipo de associação

tem características específicas, $F_T = F_1 = F_2$ e $x_T = x_1 + x_2$. Substituindo estes dados na equação (1), temos que:

$$\frac{F_T}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}. \quad (10)$$

Como todas as forças são iguais, podemos eliminá-las na equação (10), assim

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

obtendo como resultado,

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}.$$

A massa (m) do sistema é considerada uma equivalência das massas de todos os componentes, isto é, todo o sistema é modelado de forma a ser usado uma massa equivalente para representá-las. Dessa forma, para encontrar a massa equivalente é preciso estudar o movimento de todas as componentes e suas massas. Por meio da energia cinética (Ec), é possível relacionar as massas e encontrar uma que represente todo o sistema. Assim:

$$Ec = Ec1 + Ec2 + Ec3$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = Ec1 + Ec2 + Ec3$$

sendo, $Ec1$ a energia cinética na manivela, $Ec2$ a energia cinética da biela e $Ec3$ a energia do pistão.

A manivela apresenta um movimento rotacional, assim sua massa pode ser calculada da seguinte forma:

$$Ec1 = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}$$

no qual, J_1 é o momento polar de inércia e $\dot{\theta}$ a velocidade angular da manivela.

O movimento da biela é mais complexo, pois apresenta tanto movimento rotacional, ligado a manivela, como movimento linear, pois está conectado ao pistão. Dessa forma temos que:

$$Ec2 = \frac{1}{2}J_2\dot{\alpha} + m_2\dot{x}_2$$

no qual, $\dot{\alpha}$ é a velocidade angular da biela, m_2 a massa da biela e $\dot{x}_2$ a velocidade linear da biela.

O pistão apresenta somente movimento linear. Portanto, temos que:

$$Ec3 = \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3.$$

Dessa forma, uma vez que a biela e pistão estão em contato e, conseqüentemente, realizam o mesmo trajeto, podemos concluir, portanto, que ambos possuem a mesma velocidade linear $\dot{x}_2 = \dot{x}_3$.

O coeficiente de amortecimento é usado em sistemas viscosos que acabam fazendo a função de amortecer o movimento. Nesse caso, o amortecimento do movimento do êmbolo é garantido graças à viscosidade dos fluidos (óleo e ar) que estão presentes dentro do cilindro. No ramo da engenharia voltada para vibrações, existe o estudo de Frequências Circulares Naturais, que mostra a seguinte relação:

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11)$$

na qual, w_n representa frequência natural de vibração do sistema que se relaciona com o coeficiente de amortecimento, da seguinte forma:

$$c = 2mw_n\zeta. \quad (12)$$

Outro componente de extrema importância visto em [8] é w_d , frequência de vibração amortecida, no qual sempre será menor que w_n pois sofre amortecimento, devido a taxa de amortecimento:

$$w_d = w_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (13)$$

A letra grega Zeta (ζ) representa a taxa de amortecimento e a partir dela é possível classificar o amortecimento do sistema em três formas:

- Superamortecido quando $\zeta > 1$. Nesse modelo a equação característica fornece duas raízes reais;
- Criticamente amortecido quando $\zeta = 1$. A equação fornece duas raízes reais iguais;
- Subamortecido quando $\zeta < 1$. A equação fornece duas raízes complexas conjugadas.

Dessa forma, é importante descrever como será a solução das ED pelos números complexos, a solução da Equação diferencial é dada da seguinte forma, de acordo com [7]

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})w_n t} + Be^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})w_n t} \\ x(t) &= Ae^{(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})w_n t} + Be^{(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})w_n t} \end{aligned} \quad (14)$$

Realizando o reagrupamento das variáveis e substituindo a Equação (13), temos que:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta w_n t} [Ae^{i w_d t} + Be^{-i w_d t}] \\ x(t) &= e^{-\zeta w_n t} [A(\cos(w_d t) + i \operatorname{sen}(w_d t)) + B(\cos(w_d t) - i \operatorname{sen}(w_d t))] \\ x(t) &= e^{-\zeta w_n t} [(A + B) \cos(w_d t) + i(A - B) \operatorname{sen}(w_d t)] \\ x(t) &= e^{-\zeta w_n t} [C \cos(w_d t) + D \operatorname{sen}(w_d t)] \end{aligned}$$

em que $C = (A + B)$ e $D = i(A - B)$.

A taxa de amortecimento está diretamente relacionada com o coeficiente de amortecimento, que é uma variável que está ligada ao atrito do sistema. Dessa forma, a taxa de amortecimento tem a função de representar qual a reação do sistema a uma força exercida sobre o mesmo, isto é, de acordo com o valor da taxa de amortecimento é possível saber qual é o tipo de reação, ou melhor, o tipo de amortecimento.

O sistema superamortecido é o amortecimento no qual o sistema retorna ao seu estado de equilíbrio após um determinado tempo. De acordo com [3], uma haste de toca-discos de boa qualidade pode ser movimentada e quando solta retorna ao seu estado normal vagarosamente após um tempo.

Segundo [3] o sistema que é criticamente amortecido tem uma resposta rápida e sem oscilação no movimento de saída, um exemplo seria a suspensão de um veículo que precisa ter uma resposta rápida sem oscilar.

E por último o sistema Subamortecido é aquele no qual continua oscilando após um tempo decorrido, por [3] um exemplo desse modelo são plataformas de mergulho que mesmo após o mergulhador ter saltado continua oscilando.

O trabalho em questão apresentou diversos desafios, tendo visto a grande complexidade, em se tratando de eficiência e desempenho de motores a combustão. Também podemos destacar a função explosão ou função potência $f(x)$ que, por ser um conteúdo complexo visto apenas em mestrado acadêmicos, na qual juntam conteúdos de vibrações mecânicas, cinemática, cálculo numérico, termodinâmica e motores a combustão não será deduzida neste trabalho tendo em vista a sua complexidade e, também por não estar no escopo nesse trabalho.

4. METODOLOGIA

O trabalho tem como objetivo principal analisar o funcionamento de motores, mais especificamente o sistema biela-manivela e pistão, de forma teórica e mostrar que a alteração da taxa de amortecimento pode alterar a resposta das componentes em seus ciclos de funcionamento, ou seja, mostrar que a alteração de uma variável pode alterar seu funcionamento. Na seção 3, foi feita a modelagem matemática do sistema que resultou na Equação (6), e a resolução da equação diferencial será feita por meio da transformada de Laplace, por ser um método moderno e mais indicado para resolver este tipo de equação diferencial. Além disso, devido à complexidade da função explosão $f(x)$ não foi possível ser calculada, devido a isso, o uso das transformadas de Laplace, pois outros métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias (EDO) como por anuladores, superposição e método de Cauchy-Euler, pois apenas poderiam ser utilizados se a função explosão for uma função contínua. Dessa forma, a transformada de Laplace apresenta vantagem com relação às demais devido a característica das funções.

Serão resolvidos três problemas com características parecidas, alterando somente a taxa de amortecimento, com o propósito de mostrar as diferentes soluções que podem apresentar. Em seguida, serão feitas análises gráficas do funcionamento do motor e detalhando as fases que estão sendo realizados, explicando características específicas de cada momento no ciclo para que seja estudada em quais momentos a diferença da taxa de amortecimento pode alterar a resposta do sistema.

Na resolução dos problemas, serão dadas a velocidade, massa e coeficiente de amortecimento como variáveis padrão e, assim, serão as mesmas para todos os problemas. Além disso, é necessário considerar que o pistão é genérico, logo as variáveis bases não expressam exatamente um pistão real, mas muito fiel à realidade, que serão consideradas nos três problemas a seguir.

Problema 1: Levando em consideração apenas características de velocidade, massa e coeficiente de amortecimento sem especificar o motor, utilizaremos um motor em funcionamento com velocidade inicial V_0 , que apresenta massa equivalente das componentes biela, manivela e pistão de valor m , o coeficiente de amortecimento representado por c , a constante elástica equivalente da biela e manivela denotada por k e a taxa de amortecimento de $\zeta = 1$.

Problema 2: Levando em consideração apenas características de velocidade, massa e coeficiente de amortecimento sem especificar o motor, utilizaremos um motor em funcionamento com velocidade inicial V_0 , que apresenta massa equivalente das componentes biela, manivela e pistão de valor m , o coeficiente de amortecimento representado por c , a constante elástica equivalente da biela e manivela denotada por k e a taxa de amortecimento de $\zeta < 1$.

Problema 3: Levando em consideração apenas características de velocidade, massa e coeficiente de amortecimento sem especificar o motor, utilizaremos um motor em funcionamento com velocidade inicial V_0 , que apresenta massa equivalente das componentes biela, manivela e pistão de valor m , o coeficiente de amortecimento representado por c , a constante elástica equivalente da biela e manivela denotada por k e a taxa de amortecimento de $\zeta > 1$.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção iremos demonstrar o resultado dos problemas propostos na seção anterior e analisar o comportamento dos motores nos três problemas.

Resolução do Problema 1: Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= 0 \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= V_0 \end{aligned}$$

Dividindo a equação inicial do problema por m , temos

$$\frac{m}{m}\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Substituindo (11) e (12) na equação acima, temos

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta w_n \dot{x}(t) + w_n^2 x(t) = 0$$

Aplicando Transformada de Laplace na equação acima, resultará na seguinte equação

$$\begin{aligned} L\{\ddot{x}\} + 2\zeta w_n L\{\dot{x}\} + w_n^2 L\{x\} &= 0 \\ s^2 L\{x\} - sx(0) - \dot{x}(0) + 2\zeta w_n (sL\{x\} - x(0)) + w_n^2 L\{x\} &= 0 \\ s^2 L\{x\} - sx_0 - V_0 + 2\zeta w_n sL\{x\} - 2\zeta w_n x_0 + w_n^2 L\{x\} &= 0 \end{aligned}$$

Então temos que,

$$(s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2) L\{x\} = sx_0 + 2\zeta w_n x_0 + V_0$$

Isolando o termo $L\{x\}$

$$L\{x\} = \frac{sx_0 + 2\zeta w_n x_0 + V_0}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (15)$$

Substituindo $\zeta = 1$,

$$L\{x\} = \frac{sx_0 + 2w_n x_0 + V_0}{s^2 + 2w_n s + w_n^2}$$

Reorganizando os termos,

$$L\{x\} = \frac{x_0}{s + w_n} + w_n x_0 + V_0 \left[\frac{1}{(s + w_n)^2} \right]$$

Dessa forma, temos como solução

$$x(t) = e^{-w_n t} [x_0 + (w_n x_0 + V_0)t]$$

Resolução do Problema 2: Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= 0 \\ x(0) &= x_0 \quad m \\ \dot{x}(0) &= V_0 \quad m/s \end{aligned}$$

A resolução deste problema é igual ao Problema 1, dessa forma partiremos da Equação (15)

$$L\{x\} = \frac{s x_0 + 2\zeta w_n x_0 + V_0}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

A diferença desse problema está relacionada ao tipo de amortecimento, nesse caso, será $\zeta < 1$. Dessa forma, não iremos substituir imediatamente por um valor, pois visto que o parâmetro para ser um sistema subamortecido é ter uma taxa de amortecimento menor que um, podendo ser qualquer valor no intervalo $[0,1]$.

Dessa forma, para solucionar o problema é necessário completar quadrado da seguinte forma:

$$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 + (w_n^2 w_n^2 - \zeta^2 w_n^2) = s^2 + 2\zeta w_n s + \zeta^2 w_n^2 + w_n^2 - \zeta^2 w_n^2$$

Reduzindo a equação e substituindo (13) na equação temos

$$\begin{aligned} &= (s + \zeta w_n)^2 + w_n^2 (1 - \zeta^2) \\ &= (s + \zeta w_n)^2 + w_d^2 \end{aligned}$$

Então temos,

$$L\{x\} = \frac{s x_0 + 2\zeta w_n x_0 + V_0}{(s + \zeta w_n)^2 + w_d^2}$$

O resultado da resolução são números complexos e fazemos uma reorganização de termos, mencionado anteriormente na Equação (14) para aplicar a transformada inversa de Laplace, obtemos como solução

$$\begin{aligned} L\{x\} &= x_0 \left[\frac{s + \zeta w_n}{(s + \zeta w_n)^2 + w_d^2} \right] + \frac{\zeta w_n x_0 + V_0}{w_d} \left[\frac{w_d}{(s + \zeta w_n)^2 + w_d^2} \right] \\ x(t) &= e^{-w_n t} \left[x_0 \cos(w_d t) + \frac{\zeta w_n x_0 + V_0}{w_d} \sin(w_d t) \right] \end{aligned}$$

Resolução do Problema 3: Considere o seguinte problema de valor inicial:

A resolução deste problema parte da Equação (14), então temos que

$$L\{x\} = \frac{s x_0 + 2\zeta w_n x_0 + V_0}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

Como dito anteriormente, o sistema superamortecido apresenta duas raízes reais distintas, que é dado por

$$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = 0$$

que tem como solução

$$s_1 = w_n \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \text{ e } s_2 = w_n \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

Encontradas as raízes, essas serão substituídas no denominador da Equação (15) para que possamos resolver utilizando frações parciais da seguinte forma

$$L\{x\} = \frac{s x_0 + 2\zeta w_n x_0 + V_0}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

$$L\{x\} = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2}$$

Encontrando A e B, em seguida aplicando a inversa da transformada de Laplace, obtemos a solução

$$x(t) = \left[\frac{s_1 x_0 + 2\zeta w_n x_0 + V_0}{2w_d} \right] e^{s_1 t} - \left[\frac{s_2 x_0 + 2\zeta w_n x_0 + V_0}{2w_d} \right] e^{s_2 t}$$

Após a resolução dos problemas iremos analisar o funcionamento dos motores e relacionar a taxa de amortecimento com os ciclos de trabalho do motor.

De acordo com a análise e estudo de motores, é possível descrever seu movimento com as equações diferenciais, visto que a solução do problema nos dá um gráfico que representa o movimento do pistão após uma explosão, gerando dados para analisar seu funcionamento e conseguir melhorias. No entanto, visto a dificuldade e complexidade de expressar a função explosão, não foi possível gerar esse gráfico, mas foi possível comparar como é o comportamento desse sistema alterando somente uma variável. Portanto, com a alteração sutil da taxa de amortecimento, é possível notar uma diferença de resposta do motor a combustão empregada, sendo assim, seu desempenho alterado consequentemente.

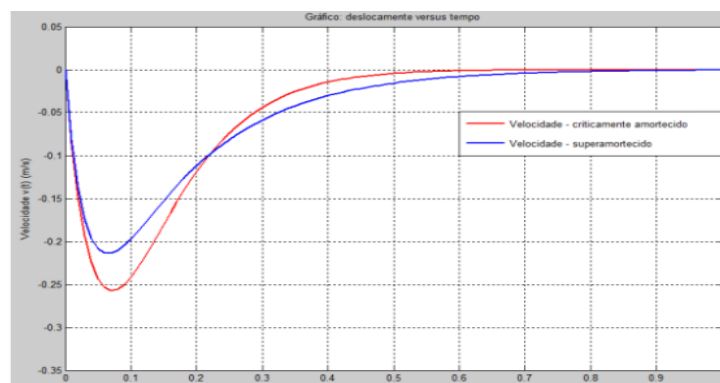


Figura 5. Gráfico do deslocamento pelo tempo. Fonte [7]

A Figura 5 representa uma comparação de sistemas com diferentes valores de taxa de amortecimento, nesse caso, criticamente amortecido e superamortecido. Ao analisar o gráfico, é possível notar que o sistema criticamente amortecido tem uma velocidade menor quando recebe um distúrbio, isto é, após alguma perturbação o sistema demora mais para ter uma reação. Entretanto, após o sistema reagir a força apresenta um tempo de resposta mais rápido acarretando uma volta mais rápida ao ponto de equilíbrio.

O sistema superamortecido tem uma velocidade maior que o criticamente amortecido, no primeiro momento, isto porque após um distúrbio o sistema demora menos para reagir ao mesmo e, além disso, sua volta ao ponto de equilíbrio é mais demorada, portanto, mesmo que o sistema apresente uma reação mais rápida que o criticamente amortecido o tempo de retorno ao seu estado inicial é menor que o criticamente amortecido.

O sistema subamortecido, de acordo com os estudos realizados, deve apresentar uma resposta com velocidade maior que o sistema superamortecido e um tempo maior de volta ao ponto de equilíbrio. Dessa forma, o sistema subamortecido deve apresentar uma reação mais rápida a um distúrbio e o maior tempo para retorno ao ponto inicial.

Dessa forma, temos que cada taxa de amortecimento apresenta características peculiares e muito se deve a reação ao sistema e tempo de retorno. Portanto, um fator que a taxa de amortecimento altera devido a suas variações é a inércia de movimento dos componentes, pois como foi explanada anteriormente, a taxa de amortecimento altera a velocidade de reação a forças e tempo de retorno a estágios iniciais, analisando o que é a inércia, a resistência a um movimento ou força aplicada, podemos constatar que com diferentes valores de taxa de amortecimento o sistema pode apresentar diferentes níveis de inércia, isto é, resistências diferentes a movimento como, por exemplo, a velocidade de reação a um distúrbio.

Após ter encontrado as soluções dos problemas propostos e analisado a influência da taxa de amortecimento na inércia dos movimentos, iremos fazer uma análise de como seria a influência dessa relação nos ciclos de funcionamento do motor. Para isso, é preciso entender como é o comportamento de um motor em relação à taxa de compressão que pode ser observado na figura abaixo.

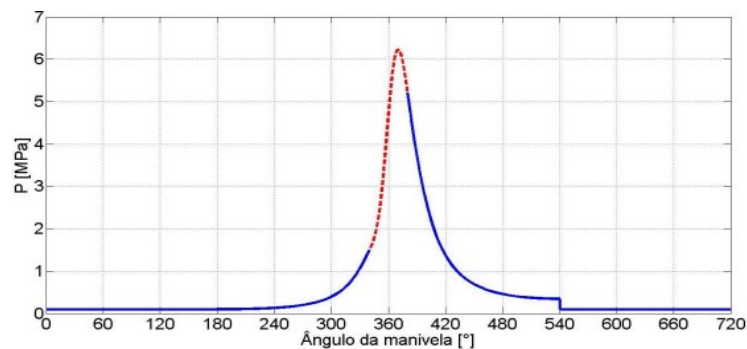


Figura 6. Ciclo de Pressão dentro do Cilindro. Fonte [6]

A Figura 6 representa um ciclo de pressão dentro do cilindro do motor de acordo com o ângulo da manivela, denotando assim uma representação da força de explosão. É possível notar a linha tracejada nos denota a parte de queima de gases. Ao alcançar o máximo da força de explosão, a uma queda da pressão e, por fim, quando a manivela está com um ângulo de 540° tem uma queda repentina que é devido à abertura da válvula de escape dos gases residuais.

O estudo da Figura 6 é importante, pois quando analisarmos cada fase iremos ver que nos momentos que antecedem a explosão e pouco tempo depois, a quantidade de movimento é baixa devido ao nível de inércia alto que vai se acumulando através das fases do sistema biela-manivela.

A figura abaixo nos mostra a relação entre o ciclo de pressão dentro do cilindro e s movimentos dentro dos cursos do motor, dessa forma, será possível ver a influência da taxa de amortecimento.

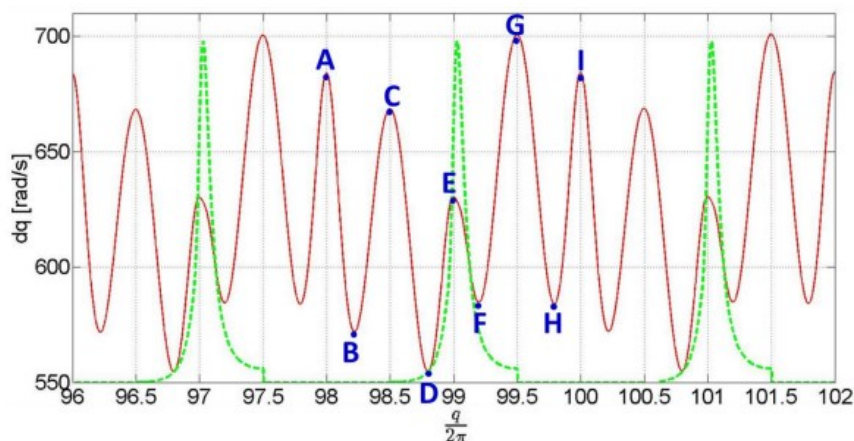


Figura 7. Gráfico relacionando a força explosão e a inércia de movimento dos ciclos do motor. Fonte [6]

A Figura 7 ilustra uma comparação adaptativa do perfil de velocidade representada pela linha vermelha e a força de explosão ilustrada pela linha tracejada em verde. O gráfico representa a velocidade do sistema pelo ciclo do sistema, isto é, o ponto A representa um ponto de velocidade na nonagésima volta do sistema biela-manivela. A análise feita por [6], conclui que fatores importantes para a velocidade do sistema são a inércia e a força de explosão. Nessa análise, também concluiu que no trecho AB apresenta uma queda de velocidade devido a inércia, pois dependente de sua posição, que nesse caso seria o primeiro quarto de volta, no qual não existe a força de explosão, havendo somente o movimento livre. O trecho BC apresenta uma inércia ainda maior, mas a aceleração do sistema ainda consegue fazer o pistão atingir o ponto morto inferior, sendo assim o segundo quarto de volta que seria a admissão da mistura a ser queimada.

Após isso, o sistema entra na segunda metade da primeira volta, no qual é representado pelo trecho CD, sendo esse trecho com uma velocidade ainda menor devido a inércia e a ação da pressão da câmara de combustão, que age como redutor da velocidade dos mecanismos, pois a compressão dos gases já se inicia nesse momento, o que explica o ponto D ter a menor velocidade de todo o ciclo. O trecho DE representa a fase da compressão dos gases o que explica o ponto E ser o ponto máximo de menor velocidade do ciclo, visto que a mistura ar-combustível diminui a ação de movimento do sistema.

Na fase da explosão dos gases, é possível notar que mesmo com a explosão o sistema ainda não apresenta uma grande velocidade, pois a inércia acaba sendo alta com o passar do tempo, dessa forma o sistema fica perdendo energia e velocidade, acarretando que mesmo na explosão tenha o seguimento EF de baixa velocidade e aceleração. Logo em seguida, há uma grande aceleração e o ponto de maior velocidade no trecho FG, vista a diminuição da

inércia devido a velocidade e resultado da força de explosão, sendo o ponto G o ponto final da expansão da mistura e início da exaustão dos gases.

Já na parte final, o sistema não detém mais forças de pressão e explosão atuando sobre o mesmo e a inércia começa a dificultar o movimento, o que gera uma queda da velocidade no trecho GH, sendo o aumento da velocidade no trecho HI devido ao movimento da manivela, que contribui para acabar com a exaustão de gases residuais da queima da explosão, chegando ao ponto morto superior.

Dessa forma, é possível notar que o sistema biela-manivela apresenta em seus movimentos grandes dependências da inércia derivados da força de explosão e por isso a taxa de amortecimento, que tem características que alteram a resposta dos componentes a distúrbios, pode ser uma variável que se sofrida alteração pode alterar a característica do motor, podendo ter tempo de resposta e velocidade diferentes, devido a sua característica. Portanto, a taxa de amortecimento tem uma influência considerável no funcionamento do motor, sendo assim, uma variável que precisa ser muito bem determinada para o tipo de desempenho desejado pelo fabricante. De acordo com [3], alguns sistemas adotam a taxa de amortecimento de 0,8 mas, visto o trabalho resultado, dependendo da função exercida e o desempenho desejado do motor, acreditasse que a taxa de amortecimento pode variar entre 0,75 a 1,5.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho realizado apresentou fundamentos teóricos que comprovam sua exatidão na análise do funcionamento do motor a combustão, por meio do sistema biela-manivela e pistão. A complexidade do assunto abordado e dificuldade de encontrar dados, muito devido a falta de referências especializadas na área, foram um grande desafio que apesar da dificuldade, é possível concluir que houve exatidão na construção e análise desse trabalho, possibilitando observar que dentro de um motor, no qual apresenta diversas variáveis uma simples troca de componente, no caso a taxa de amortecimento, nos possibilita alterar de maneira significativa suas características.

Devido à complexidade de pesquisa em como calcular a função potência, comparar funcionamento de motores a etanol, diesel e gasolina, a pesquisa focou em características que podiam ser calculadas de acordo com detalhes técnicos que teríamos acesso, por isso, a escolha da taxa de amortecimento. Sua forma de ser calculada e sua importância nas componentes do motor foram pontos fortes na sua escolha. Dessa forma, após a dedução da equação modeladas do sistema, foi feita a análise gráfica de trabalhos acadêmicos, que possibilitaram comprovar que é possível descrever o movimento do sistema biela-manivela e analisá-los com base nos seus ciclos e que esse pode sofrer variações com a alteração da taxa de amortecimento. Sendo assim motores similares, dentre os quais podem ser a combustão, híbridos e elétricos, podem apresentar resultados diferentes com somente a alteração da taxa de amortecimento, comprovando sua influência no processo.

Dessa forma, esse trabalho pode ser o início de trabalhos futuros, visto a sua ampla gama de aplicabilidade com as alterações nas estruturas mecânicas, sendo possível aplicar essa teoria para outras partes do motor, como nas válvulas de admissão e exaustão, em sistema que apresentem came seguidor, funcionamentos em motores híbridos e elétricos, além do estudo da força de explosão em motores.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 9ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2010.
- [2] ZILL, D.G.; CULLEN, M.R. Equações Diferenciais. 3ª Ed., V.1, São Paulo, Makron Books, 2007.
- [3] NORTON, R.L. Cinemática e Dinâmica dos Mecanismos. 1ª Ed., Porto Alegre, AMGH, 2010.
- [4] MARTINS, J. Motores de Combustão Interna, 3ª Ed., Porto, Publindústria, 2011.
- [5] BRUNETTI, F. Motores de Combustão Interna, V.1, São Paulo, Blucher, 2012.
- [6] SELEGATTO, L. T. Análise Dinâmica de um Mecanismo Biela-Manivela com Folgas nas Juntas Pino-Pistão e Pistão-Cilindro. Campinas, SP, 2016.
- [7] SILVA, M. A. Modelagem Matemática: Equações Diferenciais Ordinárias em Cursos de Graduação. São Paulo: IFSP, 2014.
- [8] RAO, S. Vibrações Mecânicas. 4ª Ed., São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2008.
- [9] <https://pt.wikipedia.org/wiki/Motor#:~:text=A%20teoria%20fundamental%20do%20motor,desenvolveu%20o%20primeiro%20motor%20atmosf%C3%A9rico>.
- [10] HIBBELER, R.C; Resistência dos Materiais, 7ª Ed., São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2010.