



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE ANGICOS
CURSO BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

ERIKA OLIVEIRA DOS SANTOS

**A TRANSFORMADA DE LAPLACE EM SISTEMAS DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS LINEARES**

ANGICOS-RN

2019

ERIKA OLIVEIRA DOS SANTOS

**A TRANSFORMADA DE LAPLACE EM SISTEMAS DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS LINEARES**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Tony Kleverton Nogueira

ANGICOS-RN

2019

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S231t Santos, Erika Oliveira dos.
A transformada de Laplace em sistemas de equações diferenciais lineares / Erika Oliveira dos Santos. - 2019.
95 f. : il.

Orientador: Tony Kleverson Nogueira.
Monografia (graduação) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e Tecnologia, 2019.

1. Transformada de Laplace. 2. Sistemas de equações diferenciais lineares. 3. Aplicações. I. Nogueira, Tony Kleverson, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

ERIKA OLIVEIRA DOS SANTOS

**A TRANSFORMADA DE LAPLACE EM SISTEMAS DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS LINEARES**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como requisito
para obtenção do título de Bacharel em
Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 13/08/2019.

BANCA EXAMINADORA

Tony Kleverson Nogueira

Prof. Dr. Tony Kleverson Nogueira - UFERSA/Caraúbas

Presidente

Jackney Luan Azevedo de Sousa

Prof. Me Jackney Luan Azevedo de Sousa – UFERSA/Angicos

Membro Examinador

Vanessa Danielle Santos Ferreira

Prof. Me Vanessa Danielle Santos Ferreira - UFERSA/Angicos

Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido chegar até aqui, por ter me acompanhado durante toda essa minha trajetória e por sempre estar mostrando que ele me ouve e está presente em tudo o que faço.

Agradeço aos meus pais Benedita Santos e Gilson Medeiros por todo o apoio e suporte e principalmente por terem sido pilares essenciais na minha vida, por sempre estarem torcendo por mim e por terem me tornado a pessoa que eu sou hoje. Em especial a minha mãe, pois essa conquista é nossa. Agradeço às minhas irmãs Edna Santos e Edineide Santos por toda a paciência quando eu precisei de ajuda, por sempre estarem me aconselhando, me ouvindo e por todo o apoio me dado até hoje. Obrigada, amo vocês.

Agradeço ao meu namorado Pedro Barata que no decorrer dessa caminhada me ofereceu todo suporte necessário, além de todo incentivo e paciência. Obrigada.

Agradeço a todos aos meus familiares e amigos que colaboram de alguma forma, direta ou indiretamente, para que esse momento chegasse. Agradeço a todos os meus amigos que fiz no decorrer da minha jornada acadêmica até aqui, por todas as ajudas e por todo o incentivo quando eu precisei. Sem dúvidas, um dos maiores presentes da minha vida foi ter a amizade de vocês.

Em especial quero agradecer alguns amigos que ao longo do curso, se fizeram presente nos momentos bons e ruins, agradeço de coração. Renata Araújo, Matheus Araújo, João Victor, Ana Karolina, Érica Vanessa, Júnior Torres, Mateus Davi, Kaio Henrique, Carol Vieira, Alice Mayra, Joerdson Tiago e Beatriz Oliveira. Quero agradecer também aos membros da Trifase Engenharia Júnior (Empresa Júnior), em especial a diretoria ADM-FIN.

Agradeço a Universidade Federal Rural do Semi-Árido, por todas as oportunidades me dadas e por ter contribuído para o meu crescimento acadêmico. Por fim quero agradecer ao meu orientador Prof. Tony Nogueira por ter aceitado me orientar, e pelo compromisso para que fosse possível a realização deste trabalho, por todo ensino e paciência. Obrigada.

“Algumas batalhas são vencidas com
espadas e lanças, outras com papel e caneta”.

Tywin Lannister

RESUMO

O presente trabalho tem como finalidade a resolução de sistemas de equações diferenciais lineares usando a transformada de Laplace como método de resolução. O trabalho em sequência é de caráter bibliográfico. Antes da abordagem do tema principal, foi realizada uma revisão sobre os conceitos introdutórios como pré-requisito ao tema do estudo. Além disso, foram apresentadas as definições, exemplos, aplicações pertinentes às equações diferenciais ordinárias, e teoremas no qual foram provados, com intuito de servir, também, como suporte para fundamentação teórica e motivação para leitores desta área.

Palavras-chave: Transformada de Laplace. Sistemas de Equações Diferenciais Lineares. Aplicações.

ABSTRACT

The present work aims to solve systems of linear differential equations using the Laplace transform as a resolution method. The sequence work is bibliographic. Prior to addressing the main theme, a review of introductory concepts was performed as a prerequisite to the subject of the study. In addition, the definitions, examples, applications pertinent to ordinary differential equations, and theorems in which they have been proved, were presented in order to serve as support for theoretical foundation and motivation for readers in this area.

Keywords: Laplace transform. Systems of Linear Differential Equations. Applications.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Um pêndulo oscilando.....	23
Figura 2 : Circuito RCL.	37
Figura 3: Uma função contínua por partes $y = f(t)$	46
Figura 4: Uma onda dente de serra.	62
Figura 5: Função degrau unitário.....	65
Figura 6: $u(t-\alpha)f(t)$ onde $f(t)=\cos t$	65
Figura 7: Circuito RLC.	72
Figura 8: Um circuito RLC em paralelo.....	84
Figura 9: Um sistema com duas massas e três molas.	85
Figura 10: Duas Molas	86
Figura 11: Circuito RL.	88
Figura 12: Circuito de segunda ordem.	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Algumas soluções particulares.	36
Tabela 2: Transformadas de algumas funções básicas	47
Tabela 3: Algumas Transformada Inversas.	68

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ED	Equação Diferencial
EDO's	Equações Diferenciais Ordinárias
EDP's	Equações Diferenciais Parciais
PVI	Problema de Valor Inicial
PVC	Problema de Valor de Contorno
UFERSA	Universidade Federal Rural do Semi-Árido

LISTA DE SIMBOLOS

f	Função
t	Variável tempo
$f(x)$	Função de x
$f(t)$	Função na variável t
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformada de Laplace de $f(t)$
s	Variável complexa
$F(s)$	Função em s
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Transformada inversa de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$	Transformada inversa de Laplace
$g(t)$	Função na variável t
$(f * g)(t)$	Convolução das funções f e g em t
$u(t - \alpha)$	Função degrau unitário
$n(t)$	Função nula
R	Resistor
L	Indutor
C	Capacitor
$E(t)$	Tensão elétrica em t
V	Unidade de tensão elétrica
A	Unidade de corrente elétrica
Ω	Unidade de resistência elétrica (ou ohm)

H	Unidade de indutância
F	Unidade de capacitância

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	17
2. CONCEITOS PRELIMINARES	20
2.1. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS	20
2.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	21
2.3. CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	21
2.3.1. Classificação pelo Tipo	21
2.3.2. Classificação da Ordem.....	22
2.3.3. Classificação da Linearidade	22
2.3.4. Solução para uma Equação diferencial	24
2.4. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EDO DE 1ª ORDEM.....	24
2.4.1. EDO's com variáveis separáveis	25
2.4.2. EDO's de 1ª ordem Linear	26
2.5. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EDO DE 2ª ORDEM.....	29
2.5.1. Soluções para equações diferenciais lineares de 2ª ordem	30
2.5.2. Equações Lineares homogêneas com coeficientes constantes	31
2.5.3. EDO's lineares não-homogêneas com coeficientes constantes	33
2.5.4. Aplicações para EDO's de 1ª e 2ª ordens.....	36
2.6. REGRA DE CRAMER.....	40
3. A TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	43
3.1. CONDIÇÕES PARA A EXISTÊNCIA DA $\mathcal{L}f(t)$	45
3.2. A TRANSFORMADA DE ALGUMAS FUNÇÕES BÁSICAS	47
3.3. PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	55
3.3.1. Linearidade.....	55
3.3.2. Primeira propriedade de translação ou de deslocamento	55
3.3.3. Segunda propriedade de translação ou de deslocamento.....	56

3.3.4.	Propriedade de mudança de escala.....	56
3.3.5.	Derivada de transformadas (multiplicação por tn).....	57
3.3.6.	Transformada de Derivadas	58
3.3.7.	Transformada de Laplace de uma derivada de ordem n	60
3.3.8.	Transformada de integrais.....	60
3.3.9.	Integral da Transformada de Laplace (divisão por t).....	60
3.3.10.	Funções periódicas.....	61
3.3.11.	Convolução	63
3.4.	ALGUMAS FUNÇÕES ESPECIAIS.....	64
3.4.1.	Função degrau unitário	64
3.4.2.	Função nula	66
3.5.	TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE	66
3.6.	DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE	67
3.7.	UNICIDADE DAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE ...	67
3.8.	ALGUMAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE	67
3.9.	PROPRIEDADES DAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE	68
3.10.	MÉTODOS PARA A OBTENÇÃO DAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE	70
3.11.	APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	71
3.11.1.	Aplicação em elétrica.....	71
4.	A TRANSFORMADA DE LAPLACE NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES	74
4.1.	SISTEMAS DE EQUAÇÕES	74
4.1.1.	Eliminação algébrica sistemática	75
4.1.2.	Eliminação por determinantes	77
4.1.3.	Método da Transformada de Laplace	79
4.2.	APLICAÇÕES	83

4.2.1. Em mecânica.....	84
4.2.2. Em Elétrica	87
5. MATERIAIS E MÉTODOS.....	91
6. CONCLUSÃO.....	92
7. REFERÊNCIASBIBLIOGRÁFICAS.....	94

1. INTRODUÇÃO

A demanda pelo progresso na qualidade do ensino superior, em especial na área das ciências exatas e tecnológicas, é expressa por meio de inúmeras propostas/trabalhos que objetivam permitir aos acadêmicos ingressantes em cursos deste âmbito, uma formação básica e niveladora e, assim, introduzir conceitos importantes de física ou de cálculo.

As disciplinas de Cálculo Diferencial I, II, III ou Equações Diferenciais, dentre outras, nomeadas de acordo com cada instituição de ensino, nos cursos de Ciências Exatas e, particularmente, nos de Engenharia, apresentam um alto índice nas taxas de reprovação e evasão, principalmente, nos semestres iniciais desses cursos. Algumas experiências vêm sendo realizadas, no Brasil e no exterior, na tentativa de minimizar o impacto causado pelas dificuldades apresentadas tanto por alunos quanto por professores. Um exemplo é o que Quartieri, Borragini e Dick (2012) realizam no Centro Universitário UNIVATES, por reestruturarem a disciplina de Fundamentos de Matemática que, com o apoio e colaboração de professores de matemática e de física, tentam reduzir as dificuldades apresentadas pelos alunos ingressantes nos cursos do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, já que, são nessas disciplinas onde os alunos apresentam mais dificuldades, por, talvez, serem egressos de um ensino médio pouco significativo.

Ainda, como modelo desta pesquisa, podemos ressaltar o trabalho de Maria Matos que, em entrevista realizada por Pains (2010), defende a proposta sistematizada no livro *Física do Movimento* (2010):

“A física descreve o mundo real, então, antes de começar a aprender a teoria, o aluno deve fazer experimentos, tomar medidas, entrar em contato com esse mundo real. (...) Esses conceitos deixam de ser uma simples fórmula, uma noção abstrata, e passam a ser algo que o aluno mediu com as próprias mãos, o que ajuda a desenvolver o raciocínio formal. Em sala, os professores levavam muito em conta as dúvidas dos alunos para aprimorar os roteiros de aula. (...) O livro se originou do processo de interação com os alunos em sala.”

Segundo Vasconcelos e Souto (2003), ao se ensinar é importante não privilegiar somente a memorização, mas alavancar situações que possibilitem a formação de uma bagagem cognitiva no aluno. Isso ocorre através da compreensão de fatos e conceitos fundamentais, de forma gradual.

Trazendo essa problemática para o nosso contexto, um modelo de inovação no ensino que está sendo posto em prática nos campus da UFERSA, são as disciplinas de nivelamento, tais como o pré-cálculo, a pré-física ou a pré-química. Tais disciplinas são ministradas por alunos, sob orientações de professores das respectivas áreas, visando um melhor desempenho acadêmico, tanto para os discentes, que colocam em prática o que aprenderam, quanto para os ingressantes, onde realizam uma revisão dos conceitos fundamentais, que serão abordados no decorrer do curso, já que alguns desses alunos são descendentes de um ensino precário. Além dessas disciplinas de nivelamento, como proposta de aprendizagem, a UFERSA oferta outros projetos, como, por exemplo, projetos de monitoria, projetos de extensão, e as Empresa Juniores. Todavia, é necessário levar em consideração que essa proposta de ensino está em fase inicial, ou seja, em adaptação e por isso um trabalho como o que propomos aqui se faz necessário.

Sendo mais específicos, podemos afirmar com base no que veremos nesse trabalho, que a Transformada de Laplace, um conceito desenvolvido por *Pierre-Simon Laplace*¹, é fundamental em todos os campos da engenharia, considerada como um “ritual de passagem” pelos estudantes de graduação. Este assunto está inserido na extensa ementa de Equações Diferenciais e, talvez, devido ao pouco tempo para se estudar tantos outros conceitos difíceis, a Transformada de Laplace e suas aplicações não são estudadas como deveriam. Estendendo esse pensamento aos outros tópicos que compõem a disciplina de Equações Diferenciais, é natural pensar que isso sirva de justificativa para o mau rendimento de alguns alunos nessa disciplina e, conseqüentemente, o notório aumento no número de reprovados ou desistentes nessa componente curricular.

Esses e outros motivos nos mostram a necessidade de pensarmos em estratégias que visem facilitar o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, visto que a Transformada de Laplace é usada de maneira recorrente nos cursos de engenharia, em particular, na resolução de sistemas de equações lineares. Assim, mesmo que o aluno seja aprovado na disciplina de EDO, o não domínio de tal conceito, decorrente de um ensino precário ou de outro fator, pode trazer sérias conseqüências no restante da sua formação.

¹**Pierre-Simon Laplace** Um notório matemático, astrônomo e físico francês, nascido em Beaumont-en-Auge, cidade da Normandia, no dia 23 de março de 1729. Laplace publicou várias obras sobre álgebra, análise, mecânica e geometria; entre elas: *Les lois du système planétaire* (1788), *Ex Exposition du système du monde* (1796), *Traité de mécanique céleste* (1799-1825), *Théorie analytique des probabilités* (1812) e *Essai philosophique des probabilités* (1814). Além de ser um proeminente cientista, Laplace teve uma vida política ativa, a ponto de ter sido Ministro do Interior de Napoleão Bonaparte e nomeado Marquês e Par da França. Laplace faleceu em 5 de março de 1827, em Paris (GILLISPIE, 1997).

Este trabalho tem por objetivo apresentar a Transformada de Laplace como ferramenta para resolver certos sistemas de equações diferenciais lineares. Para isso, percorreremos por conceitos básicos como limites, derivadas e integrais, até tópicos pertencentes à disciplina de Equações Diferenciais, e isso será feito da seguinte forma: no segundo capítulo iremos apresentar alguns dos conceitos preliminares e essenciais para a apresentação da Transformada de Laplace e sua utilização na resolução de sistemas de equações lineares. No terceiro capítulo estudaremos a Transformada de Laplace e sua inversa, suas definições, propriedades, exemplos e aplicações. E por fim, no quarto capítulo, apresentaremos os sistemas de equações diferenciais lineares e a utilização da transformada de Laplace para a resolução de tais sistemas.

Realizando essa revisão bibliográfica, buscamos criar um material que sirva de suporte para revisão ou complementação no estudo da Transformada de Laplace para discentes da UFERSA e demais instituições.

2. CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo, realizaremos uma revisão dos conceitos essenciais que nos auxiliarão em nosso objetivo, que é a resolução de sistemas de equações diferenciais lineares via a Transformada de Laplace. Durante o processo, explicaremos o princípio básico das equações diferenciais, além das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral utilizadas para nos auxiliar. As propriedades, conceitos e teoremas apresentados neste capítulo foram tomados como base das obras dos autores Leithold (1994); Flemming e Gonçalves (2006).

2.1. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Como a Transformada de Laplace envolve uma integral de zero a infinito, se faz necessário o conhecimento sobre integrais impróprias para entendermos as propriedades da transformada. As integrais impróprias podem ser classificadas em três tipos, conforme podemos ver abaixo.

Definição 2.1 (Intervalo superior de integração infinito): Seja f uma função contínua para todo $x \geq a$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (2.1)$$

desde que o limite exista.

Definição 2.2 (Intervalo inferior de integração infinito): Seja f uma função contínua para todo $x \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (2.2)$$

desde que o limite exista.

Definição 2.3 (Ambos os intervalos de integração são infinitos): Seja f uma função contínua para todo x real e c for um número real qualquer, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx, \quad (2.3)$$

desde que ambos os limites existam.

Observação: Geralmente para o terceiro caso em que ambos os valores dos limites de integração são infinitos $[-\infty, +\infty]$, tomamos o valor usual de c como sendo 0.

Desta forma, se esse limite existe para os três tipos de integrais impróprias citadas acima, dizemos que a integral existe ou que a integral imprópria *converge* para esse valor limite. Caso contrário, dizemos que a integral *diverge* ou não existe.

Exemplo 2.1: Seja $f(t) = e^{ct}$, $t \geq 0$, onde c é uma constante real e não nula. Então

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{ct} dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ct}}{c} \right|_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{c} (e^{cA} - 1).\end{aligned}$$

Segue que a integral imprópria converge para o valor $-1/c$ se $c < 0$ e diverge se $c > 0$. Se $c = 0$, o integrando $f(t)$ é a função constante igual a 1 e a integral diverge novamente.

Exemplo 2.2: Seja $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \geq 1$. Então

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A.$$

Como $\lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty$, a integral imprópria diverge.

2.2.EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As seções a seguir servirão como base de sustentação para os conceitos, teoremas, aplicações e modelos abordados por autores como Bassanezi e Ferreira Júnior (1988), Boyce e Diprima (2010), Bronson (1976), Bronson e Costa (2008), Flemming (2010), Guidorizzi (2008), Kreyszig (2009) e Zill e Cullen (2001).

Definição 2.4: Uma Equação Diferencial é uma equação que contém derivada ou diferencial de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

2.3.CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As Equações Diferenciais são classificadas de acordo com o *tipo*, a *ordem* e a *linearidade*. Elas serão definidas no decorrer deste capítulo.

2.3.1. Classificação pelo Tipo

Quanto ao seu tipo as ED's podem ser classificadas de duas maneiras, são elas: Equação Diferencial Ordinária (EDO) e Equação Diferencial Parcial (EDP).

- **Equação Diferencial Ordinária (EDO):** se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a

uma única variável dependente, ela é chamada de EDO. De modo geral, escrevemos uma equação diferencial ordinária de ordem n da seguinte forma

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = g(x).$$

A seguir temos EDO's de 1ª e 2ª ordens, respectivamente.

$$y' - 5y = 1$$

$$y'' + 2y' + y = 0$$

- **Equação Diferencial Parcial (EDP):** uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de EDP.

A seguir temos EDP's de 1ª e 2ª ordens, respectivamente.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

2.3.2. Classificação da Ordem

A *ordem* de uma equação diferencial é determinada pela ordem da maior derivada encontrada na equação.

Exemplo 2.3: As equações diferenciais

$$y' - 5y = 1$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$y''' - y' + y = 0$$

são, respectivamente, EDO de 1ª ordem, EDO de 2ª ordem e EDO de 3ª ordem.

2.3.3. Classificação da Linearidade

Quanto à linearidade, as Equações Diferenciais podem ser classificadas em linear e não linear. Uma equação diferencial é chamada de *linear* quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (2.4)$$

Observe que as equações diferenciais são caracterizadas por duas propriedades:

- i. A variável dependente y e todas as suas derivadas são monômios do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.
- ii. Cada função coeficiente depende apenas da variável independente x .

Assim, se algum desses requisitos não for satisfeito, a EDO é dita *não-linear*.

Note que as equações

$$x \, dy + y \, dx = 0$$

$$yy' + 2y' - 1 - x^2 = 0$$

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + y = 0$$

são equações diferenciais ordinárias de primeira, segunda e terceira ordens, respectivamente.

No entanto,

Coeficiente dependente de y

Potência $\neq 1$

$$yy'' + 2y' - 1 - x^2 = 0 \quad e \quad x \frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + y = 0$$

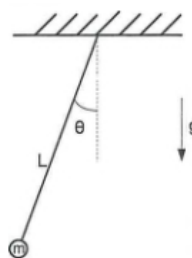
são equações diferenciais ordinárias *não-lineares* de segunda e terceira ordens, respectivamente.

Um exemplo conhecido de uma equação diferencial *não-linear*, é o problema físico do pêndulo. O ângulo θ que um pêndulo de comprimento L oscilando faz com a direção vertical veja a Figura1, satisfaz a equação

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0.$$

A presença do ângulo θ envolvendo o $\sin(\theta)$, faz com que a equação seja *não-linear*.

Figura 1: Um pêndulo oscilando.



Fonte: Tutor Brasil.

2.4. ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EDO DE 1ª ORDEM

2.4.1. Solução para uma Equação diferencial

Chamamos de *solução de uma EDO* de ordem n , num intervalo I , uma função $y = f(x)$ tal que suas derivadas de ordem n também estejam definidas em I e que satisfaçam a equação

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

Definição 2.6: Qualquer função f definida em algum intervalo I , que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de *solução* para a equação no intervalo. Dependendo do contexto da discussão, I pode representar um intervalo aberto (a, b) , um intervalo fechado $[a, b]$, um intervalo infinito $(0, \infty)$ e assim por diante.

Exemplo 2.4: Verifique que a função $y = \cos(x) + \sin(x)$ é a solução para a EDO $y'' + y = 0$.

Solução: Note que

$$\begin{aligned} y &= \cos(x) + \sin(x) \\ y' &= -\sin(x) + \cos(x) \\ y'' &= -\cos(x) - \sin(x). \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados na EDO $y'' + y = 0$, temos

$$-\cos(x) - \sin(x) + \cos(x) + \sin(x) = 0.$$

A solução de uma EDO pode ser classificada de duas maneiras: a solução particular de uma equação diferencial ou a solução geral de uma equação diferencial.

Definição 2.7: Chamamos de *solução geral* ou *integral geral de uma EDO* toda solução que envolva uma ou mais constantes arbitrárias.

Definição 2.8: Chamamos de *solução particular* ou *integral particular de uma EDO* toda solução obtida atribuindo valores às constantes arbitrárias da solução geral.

Um *Problema de Valor Inicial* (PVI) surge quando uma equação diferencial vem acompanhada de condições que satisfaçam a função incógnita e suas derivadas.

Exemplo 2.5: Encontre a solução geral e uma solução particular da seguinte ED $\frac{dy}{dx} = e^{5t}$.

Solução: A solução dessa equação diferencial pode ser encontrada através de uma integração direta, logo,

$$\frac{dy}{dt} = e^{5t}$$

$$\int dy = \int e^{5t} dt$$

$$y(t) = \int e^{5t} dt = \frac{1}{5} e^{5t} + C.$$

Essa solução que foi encontrada é conhecida como solução geral da equação diferencial dada. Mas, se considerarmos a condição inicial $y\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{e}{5}$ para a solução geral obteremos $C = 0$. Dessa maneira, a solução para o PVI é

$$y(t) = \frac{1}{5} e^{5t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.9: Chamamos de Equação Diferencial de primeira ordem, toda aquela que pode ser escrita da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.5)$$

onde f é uma função de duas variáveis.

2.4.2. EDO's com variáveis separáveis

Sabemos que uma EDO de primeira ordem é dada pela Equação (2.5), que pode, ainda, ser escrita como $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$.

Definição 2.10: Chamamos de *equação separável* toda a equação que pode ser escrita da forma $P(x) dx + Q(y) dy = 0$.

A solução de uma equação separável é dada pela integração de ambos os membros da equação. Logo,

$$\int P(x) dx + \int Q(y) dy = C$$

onde C é uma constante arbitrária.

Exemplo 2.6: Resolveremos a equação $x dx + ye^{-x^2} dy = 0$.

Solução: Antes de integrarmos ambos os lados da equação iremos simplificar. De fato,

$$\frac{x}{e^{-x^2}} dx + y \frac{e^{-x^2}}{e^{-x^2}} dy = \frac{0}{e^{-x^2}}$$

$$\frac{x}{e^{-x^2}} dx + y dy = 0.$$

Agora, realizando a integração, temos

$$\int \frac{x}{e^{-x^2}} dx + \int y dy = 0$$

$$\int x \cdot e^{x^2} dx + \int y dy = 0$$

$$\frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$$\frac{1}{2} (e^{x^2} + y^2) = C.$$

Multiplicando ambos os lados por 2, segue que

$$e^{x^2} + y^2 = 2C \text{ ou } y = \sqrt{2C - e^{x^2}}.$$

2.4.3. EDO's de 1ª ordem Linear

Definição 2.11: Uma EDO de primeira ordem é *linear* se pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Observação: Se a função $q(x) = 0$, dizemos que é uma função de primeira ordem *linear homogênea*, caso contrário, *linear não-homogênea*.

A seguir temos, respectivamente, uma EDO linear de 1ª ordem homogênea e uma EDO linear de 1ª ordem não homogênea:

$$y' + 3y = 0$$

$$y' + 3y = x.$$

Para que possamos encontrar a solução geral para *Equações lineares homogêneas*, iremos utilizar a própria equação linear homogênea e adequá-la, utilizando o método da separação das variáveis a fim de encontrarmos a sua solução geral.

De fato, multiplicando a Equação Linear Homogênea por dx e dividindo por y , obtemos

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{ydx} + p(x) \frac{y d(x)}{y} = 0$$

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0.$$

Agora aplicando o método da separação de variáveis, temos

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)dx = \ln C$$

$$\ln y - \ln C = - \int p(x)dx$$

$$\ln \frac{y}{C} = - \int p(x)dx$$

$$e^{\ln \frac{y}{C}} = e^{- \int p(x)dx}$$

$$\frac{y}{C} = e^{- \int p(x)dx}$$

$$y = C e^{- \int p(x)dx}.$$

Desse modo, a solução geral para uma Equação Linear homogênea acima é

$$y = C e^{- \int p(x)dx}.$$

Exemplo 2.7: Resolveremos a equação $y' + 3x = 0$.

Solução: Para resolvermos essa Equação linear homogênea usaremos a equação $y = C e^{- \int p(x)dx}$. Então, temos

$$y = C e^{- \int 3x dx}$$

$$y = C e^{- \frac{3x^2}{2}}.$$

Para as equações lineares não homogêneas o método de solução é um pouco mais complexo. Dada uma equação linear não-homogênea do tipo $y' + p(x)y = g(x)$. Então, sua solução será dada por

$$y = C e^{- \int p(x)dx} + e^{- \int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} g(x)dx$$

onde $e^{\int p(x)dx}$ é chamado de *fator integrante*. Para provarmos a veracidade desta solução geral descrita acima, multiplicaremos ambos os membros de $y' + p(x)y = g(x)$ pelo fator integrante $e^{\int p(x)dx}$. Tal que,

$$e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = e^{\int p(x)dx} g(x)$$

ou

$$\frac{d}{dx} [ye^{\int p(x)dx}] = e^{\int p(x)dx} g(x)$$

pois,

$$\frac{d}{dx} [ye^{\int p(x)dx}] = \frac{dy}{dx} e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx}.$$

Integrando ambos os membros da última equação acima, segue que

$$ye^{\int p(x)dx} = C + \int e^{\int p(x)dx} g(x) dx$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} g(x) dx$$

onde C é uma constante.

Exemplo 2.8: Resolvamos a equação linear não-homogênea abaixo

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 1.$$

Solução: Para encontrarmos a solução para a equação acima, usaremos a fórmula para equações lineares não-homogêneas com $p(x) = 1$ e $g(x) = x + 1$. Desse modo, segue que

$$y = Ce^{-\int dx} + e^{-\int dx} \int e^{\int dx} (x + 1) dx$$

$$y = Ce^{-x} + e^{-x} \int e^x (x + 1) dx$$

$$y = Ce^{-x} + e^{-x} \int e^x x dx + e^{-x} \int e^x dx$$

$$y = Ce^{-x} + e^{-x} e^x + e^{-x} \int x e^x dx$$

$$y = Ce^{-x} + 1 + e^{-x} \int xe^x dx.$$

Resolvendo $\int xe^x dx$ por partes com $u = x$, $dv = e^x dx$, $du = dx$ e $v = e^x$, temos

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-x} + 1 + e^{-x}(xe^x - e^x) \\ y &= Ce^{-x} + 1 + xe^{-x}e^x - e^{-x}e^x \\ y &= Ce^{-x} + 1 + x \cdot 1 - 1 \\ y &= Ce^{-x} + x. \end{aligned}$$

2.5.MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EDO DE 2ª ORDEM

Definição 2.12: Chamamos de Equação Diferencial Linear de 2ª ordem uma equação da forma

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \quad (2.7)$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são chamados de coeficientes da EDO de 2ª ordem.

Observação: Se $h(x)$ for nula, a equação será chamada de homogênea, caso contrário, a equação será chamada de não-homogênea.

As EDO's

$$y'' + \left(\frac{1}{x}\right)y' + y = 0$$

e

$$y'' + 25y = e^{-x} \cos x$$

são, respectivamente, EDO linear de 2ª ordem homogênea e EDO linear de 2ª ordem não-homogênea.

2.5.1. Soluções para equações diferenciais lineares de 2ª ordem

Definição 2.13: Uma função $y = s(x)$ é chamada de *solução da equação diferencial linear de 2ª ordem* se em um intervalo aberto I de existência, a função $s(x)$ for definida e for duas vezes derivável ao longo do intervalo e que satisfaçam a EDO.

Exemplo 2.8: Verifiquemos que $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$ são soluções para a EDO de 2ª ordem linear homogênea $y'' + y = 0$.

Solução: Nesse exemplo, dividiremos a solução em duas partes, a primeira para que $y_1 = \cos x$ e a segunda para $y_2 = \operatorname{sen} x$.

Teste I: Para verificarmos se $y_1 = \cos x$ é solução da EDO, vamos calcular as derivadas y' , y'' da função y e em seguida iremos substituí-las na equação. Note que

$$y_1' = -\operatorname{sen} x \text{ e } y_1'' = -\cos x.$$

Logo,

$$y'' + y = -\cos x + \cos x = 0.$$

Como y_1'' , y_1' e y_1 satisfazem a EDO dada, $y = \cos x$ é solução da EDO.

Teste II: Para verificarmos se $y_2 = \operatorname{sen} x$ é solução da EDO, iremos realizar o mesmo processo realizado para y_1 . Calculando as derivadas, temos

$$y_2' = \cos x \text{ e } y_2'' = -\operatorname{sen} x.$$

Logo,

$$y'' + y = -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0.$$

Da mesma forma que y_1'' , y_1' e y_1 , as funções y_2'' , y_2' e y_2 também satisfazem a EDO dada, e, portanto, $y = \operatorname{sen} x$ é solução para a EDO.

Teorema 2.1 (Princípio da Superposição – EDO Linear Homogênea de 2ª ordem): Sejam y_1 e y_2 duas soluções para a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem em um intervalo I qualquer e c_1 e c_2 constantes arbitrárias. Então, a combinação linear dessas soluções $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ também será solução para a equação em I .

O exemplo anterior servirá de motivação para o Teorema 2.1, esse teorema será chamado de *Princípio da Superposição*, a seguir iremos provar o teorema.

Prova: Como $y = c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução de $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$. Fazendo a substituição, segue que

$$\begin{aligned}
 y'' + f(x)y' + g(x)y &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + f(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + g(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
 &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + f(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + g(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\
 &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1f(x)y_1' + c_2f(x)y_2' + c_1g(x)y_1 + c_2g(x)y_2 \\
 &= c_1(y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1) + c_2(y_2'' + f(x)y_2' + g(x)y_2) \\
 &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Os corolários a seguir são de extrema importância no estudo das equações diferenciais lineares homogêneas.

Corolário 2.1: Dada uma solução $y_1(x)$ para uma equação diferencial linear homogênea, um múltiplo c_1y_1 da solução y_1 é também pelo Teorema 2.1 uma solução.

Corolário 2.2: Toda equação diferencial linear contém a solução trivial $y = 0$.

Até o momento estudamos apenas as equações lineares homogêneas. Agora, daremos atenção às equações diferenciais lineares não homogêneas.

Definição 2.14(Solução Geral – EDO Linear não-homogênea): Seja y_p uma solução particular da equação diferencial não-homogênea de 2ª ordem em um determinado intervalo I e seja

$$y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad (2.9)$$

a solução geral da equação homogênea associada a equação não-homogênea nesse intervalo.

Então, definimos a *solução geral* para a equação diferencial não-homogênea no intervalo como sendo

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p = y_c + y_p \quad (2.10)$$

no qual chamamos y_c de solução complementar.

2.5.2. Equações Lineares homogêneas com coeficientes constantes

Definição 2.15: Chamamos de equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes a toda aquela que pode ser escrita na forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.11)$$

onde a , b e c são números reais dados.

Dada uma equação do tipo $ay'' + by' + cy = 0$, $y = e^{mx}$ é uma solução para ela, onde m é um parâmetro a ser encontrado. Substituindo $y = e^{mx}$ na equação, temos

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = (am^2 + bm + c)e^{mx} = 0.$$

Sabendo que e^{mx} nunca irá se anular, concluímos que $y = e^{mx}$ será uma solução para a equação $ay'' + by' + cy = 0$ se, e somente se

$$Z(m) = am^2 + bm + c = 0.$$

Chamamos o polinômio $Z(m) = am^2 + bm + c$ de polinômio característico e a equação

$$am^2 + bm + c = 0 \quad (2.12)$$

de *equação característica* para a equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

Tendo em vista que a equação característica é do segundo grau com coeficientes, ou seja, a , b e c são números reais, ela possui duas raízes, a saber,

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como o valor para o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ pode ser positivo, nulo, ou negativo, poderemos ter três casos diferentes:

- i. Se $\Delta > 0$, teremos duas raízes reais diferentes, logo, $m_1 \neq m_2$;
- ii. Se $\Delta = 0$, teremos duas raízes reais iguais, logo, $m_1 = m_2$;
- iii. Se $\Delta < 0$, teremos duas raízes complexas.

Caso 1: Raízes reais e distintas

Sejam m_1 e m_2 ($m_1 \neq m_2$) raízes da equação característica ilustrada pela Equação 2.12, então

$$y_1 = e^{m_1x} \text{ e } y_2 = e^{m_2x}$$

serão soluções da Equação 2.11, desse modo, a Solução Geral da equação diferencial será dada por

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}. \quad (2.13)$$

Exemplo 2. 12: Encontre a solução geral para $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Solução: Escrevendo na forma do polinômio característico, temos

$$m^2 + 5m + 6 = 0.$$

Logo,

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -2 \text{ e } m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -3.$$

Portanto, a Solução Geral da equação é dada por

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Caso 2: Raízes reais e iguais

Se $m_1 = m_2$ são raízes do polinômio característico, então a solução geral é dada por

$$y = C_1 x e^{mx} + c_2 e^{mx} \quad (2.14)$$

Exemplo 2.9: Encontre a solução geral para $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Solução: Tomando a equação auxiliar $m^2 + 6m + 9 = 0$ para a EDO de 2ª ordem, temos como suas raízes $m_1 = m_2 = -3$. Então, sua solução geral será

$$y = c_1 x e^{-3x} + c_2 e^{-3x}.$$

Caso 3: Raízes complexas e conjugadas

Sejam $m_1 = \alpha + \beta i$ e $m_2 = \alpha - \beta i$ as raízes conjugadas do polinômio característico, a solução geral será dada por

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sen \beta x. \quad (2.15)$$

Exemplo 2.10: Encontre a solução geral para $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Solução: Tomando a equação auxiliar $m^2 - 4m + 13 = 0$ para a EDO linear de 2ª ordem homogênea com coeficientes constantes, que tem como discriminante $\Delta = -36$ e como raízes $m_1 = 2 + 3i$ e $m_2 = 2 - 3i$. Então, com $\alpha = 2$ e $\beta = 3$ sua solução geral será

$$y = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sen 3x.$$

2.5.3. EDO's lineares não-homogêneas com coeficientes constantes

Estudamos agora EDO's da seguinte forma

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (2.16)$$

onde a , b e c são constantes dada e $g(x)$ é uma função contínua de x .

Uma solução geral é para (2.16) é dada, pelo princípio de superposição, por

$$Y_{G(x)} = Y_{H(x)} + Y_{P(x)}$$

onde,

$Y_{H(x)}$: solução geral da equação homogênea associada a (2.16).

$Y_{P(x)}$: solução particular de (2.16).

Para encontramos $Y_{P(x)}$, usaremos o método dos coeficientes a determinar, que consiste em analisar a função $g(x)$ em (2.16) e supor que $Y_{P(x)}$ tem a mesma natureza de $g(x)$.

Tipo 1: A função $g(x)$ é um polinômio, se $g(x)$ é um polinômio de grau n , iremos supor, a menos de constantes, que $Y_{P(x)}$ é um polinômio de grau n .

Exemplo 2.11: Encontre a solução geral da EDO $y'' + 2y' - 3y = x + 1$.

Solução: Sabemos que uma solução geral dessa EDO será da forma

$$Y_{G(x)} = Y_{H(x)} + Y_{P(x)}.$$

A EDO homogênea associada é $y'' + 2y' - 3y = 0$, cuja equação característica é $m^2 + 2m - 3 = 0$. Suas raízes são $m_1 = 1$ e $m_2 = -3$, logo, a solução geral é dada por

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

Como $g(x) = x + 1$ é uma equação de 1º grau, iremos supor que $Y_{P(x)}$ é da forma

$$Y_{P(x)} = Ax + B,$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Note que,

$$Y'_{P(x)} = A$$

$$Y''_{P(x)} = 0$$

que, substituindo na EDO $y'' + 2y' - 3y = x + 1$, nos fornece

$$0 + 2A - 3(Ax + B) = x + 1$$

$$2A - 3Ax - 3B = x + 1.$$

Iremos igualar os termos em comum e encontrar os valores das constantes, ou seja,

$$-3A = 1$$

$$2A - 3B = 1$$

$$A = -\frac{1}{3} \text{ e } B = -\frac{5}{9}.$$

Assim, $Y_{p(x)} = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{9}$. Portanto, a solução geral é dada por

$$Y_{G(x)} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{3}x - \frac{5}{9}.$$

Tipo 2: Quando $g(x) = e^{mx}$, iremos supor que $Y_{p(x)} = Ae^{mx}$, onde A é uma constante a ser determinada.

Exemplo 2.11: Encontre a solução geral para $y'' + 4y = e^{2x}$.

Solução: A EDO homogênea associada é $y'' + 4y = 0$, logo, a equação característica é $m^2 + 4m = 0$, cujas raízes são $m_1 = 2i$ e $m_2 = -2i$, assim, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} Y_{H(x)} &= e^0(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \\ &= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \end{aligned}$$

Como $Y_{p(x)} = Ae^{2x}$, segue, após substituir na EDO $y'' + 4y = e^{2x}$, que

$$\frac{1}{e^{2x}}(4Ae^{2x} + 4Ae^{2x}) = (e^{2x})\frac{1}{e^{2x}}.$$

Dividindo ambos os lados por e^{2x} , obtemos $4A + 4A = 1$, ou seja, $A = \frac{1}{8}$. Logo, $Y_{p(x)} = \frac{1}{8}e^{2x}$. Portanto, a solução geral é dada por

$$Y_{G(x)} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8}e^{2x}.$$

Tipo 3: Quando $g(x)$ é combinação de $\sin \beta$ e $\cos \beta$, nesse caso, $Y_{p(x)} = A \sin \beta + B \cos \beta$, onde A e B são constantes.

Exemplo 2.12: Encontre a solução geral para $y'' - y' - 2y = \sin 2x$.

Solução: A solução geral para EDO homogênea $y'' - y' - 2y = 0$, é dada por

$$Y_{H(x)} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Supondo que $Y_{p(x)} = A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x$, segue, após substituir na EDO, que

$$Y_{p(x)} = -\frac{3}{20} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{20} \cos 2x.$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$Y_{G(x)} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} = -\frac{3}{20} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{20} \cos 2x.$$

As formas de solução particular y_p para as EDO's de 2ª ordem não-homogêneas com coeficientes constantes, como já foi citado, dependem do tipo de função que caracteriza a função de entrada $g(x)$. A Tabela 1 nos mostra algumas formas para y_p de acordo com o formato de $g(x)$.

Tabela 1: Algumas soluções particulares.

$g(x)$	Forma de y_p
1	A
$5x + 7$	$Ax + B$
$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
$\operatorname{sen} 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
$\cos 4x$	$\cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
e^{5x}	Ae^{5x}
$(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
$x^2 e^{5x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
$e^{3x} \operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
$5x^2 \operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} 4x$
$xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

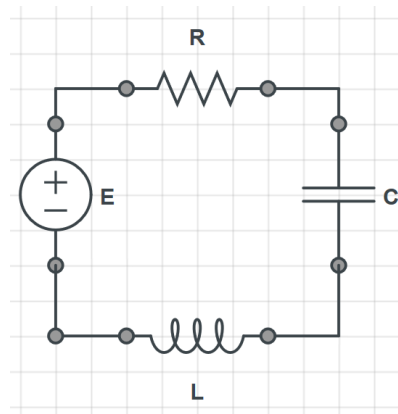
Fonte: Zill e Cullen (2001).

2.5.4. Aplicações para EDO's de 1ª e 2ª ordens

Consideremos o circuito *RCL* ilustrado pela Figura 2, no qual contém uma força eletromotriz E em volts, a qual é produzida por uma bateria ou gerador, um resistor R , um indutor L e um capacitor C , ambos conectados em série. Consideremos também que $Q(t)$ seja a carga armazenada no capacitor C , no instante de tempo t , apartir disso teremos que a

corrente $I(t)$ nesse mesmo instante é dada pela taxa de variação de $Q(t)$ em relação ao tempo t , isto é, $I = dQ/dt$ e também que as quedas de tensão ocasionada pelo resistor, pelo indutor, e pelo capacitor são, respectivamente, RI , $\frac{Q}{C}$ e $L \frac{dI}{dt}$.

Figura 2 : Circuito RCL.



Fonte: Autoria própria, 2019.

Como sabemos, a *Lei das Malhas de Kirchhoff* determina que o somatório das quedas de tensões em uma malha de um circuito elétrico qualquer, é igual à tensão fornecida pela fonte de energia do circuito, como uma bateria, por exemplo. Sendo assim, obtemos a seguinte EDO de 1ª ordem não-homogênea

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t).$$

Se o circuito for RL, a EDO será dada por

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

e, apenas RC, por

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t).$$

A EDO acima é obtida com o uso da *Lei de Kirchhoff* ao circuito, sendo uma de 1ª ordem, para que possamos obter uma EDO linear de 2ª ordem para a carga $Q(t)$, usaremos $I = \frac{dQ}{dt}$ e teremos

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t).$$

Caso sejam dadas a corrente inicial I_0 e a carga inicial contida no capacitor Q_0 , teremos o seguinte PVI

$$\begin{cases} LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t). \\ Q(0) = Q_0 \text{ e } Q'(0) = I_0 \end{cases}.$$

Para obtermos uma de 2ª ordem para a corrente do circuito basta derivarmos a EDO acima e teremos

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E(t).$$

Exemplo 2.13: Uma força eletromotriz $E(t)$ de 30 V é aplicada a um circuito em série LR no qual a indutância é de 0,5 H e a resistência de 50 ohms. Encontre a corrente $i(t)$, se $i(0) = 0$. Determine a corrente quando $t \rightarrow \infty$.

Solução: Como o circuito é RL, utilizaremos a EDO de 1ª ordem, dada por

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

$$0,5 \frac{di}{dt} + 50i = 30.$$

Para que a EDO se torne linear, dividiremos todos os membros por 0,5

$$\frac{di}{dt} + 100i = 60$$

$$\frac{di}{dt} = 60 - 100i$$

$$\frac{di}{60 - 100i} = dt$$

integrando ambos os lados, temos

$$i(t) = 0,6 - ce^{-100t} \text{ A.}$$

Essa função obtida é denominada como *Solução Geral*. Aplicando a condição $i(0)=0$, na solução geral, encontraremos o valor da constante $c = 0,6$. Logo,

$$i(t) = 0,6(1 - e^{-100t}) \text{ A}$$

é a *Solução particular* desejada.

Para sabermos o valor da corrente quando $t \rightarrow \infty$, aplicaremos o limite quando $t \rightarrow \infty$, isto é,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (0,6 - 0,6e^{-100t}) \\ &= 0,6 \text{ A}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.14: Em um determinado circuito idêntico ao representado pela Figura 2, os valores dados para o resistor R , o indutor L e o capacitor C são, respectivamente, $R = 4 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 0,2 \text{ F}$ e que a tensão (voltagem) fornecida ao circuito durante o instante t seja $E(t) = \cos 2t$. Supondo que a carga Q e a corrente I , durante instante $t = 0$, sejam ambas nulas, calcule:

a) A carga elétrica geral para o circuito no instante t ;

b) A corrente elétrica geral para o circuito no instante t ;

a) Solução: Considerando os valores dados para o resistor, indutor e o capacitor e as condições iniciais para a carga e a corrente, formaremos, então, o seguinte PVI:

$$\begin{cases} Q'' + 4Q' + 5Q = \cos 2t \\ Q(0) = 0 \text{ e } Q'(0) = 0 \end{cases}$$

Para obtermos a expressão para a carga elétrica geral para circuito descrito pelo PVI acima, deveremos primeiramente solucionar a EDO homogênea de 2ª ordem associada, que tem como equação característica $m^2 + 4m + 5 = 0$, cujas raízes complexas são, respectivamente, $m_1 = -2 + i$ e $m_2 = -2 - i$, que produzirão a solução complementar para a carga elétrica a função

$$Q_c(t) = c_1 e^{-2t} \cos t + c_2 e^{-2t} \sin t.$$

Como já solucionamos a EDO homogênea associada para a carga elétrica, calcularemos agora a solução particular para a EDO não-homogênea para ela, utilizando o método dos coeficientes a determinar. Como a função de entrada $g(x)$ da EDO é trigonométrica, temos que sua solução particular Q_p será da forma $Q_p = A \cos 2t + B \sin 2t$, com derivada primeira $Q_p' = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t$ e derivada segunda $Q_p'' = -4A \cos 2t - 4B \sin 2t$. Logo, substituindo as derivadas de primeira e segunda ordem de Q_p na EDO, e manipulando-a obteremos

$$(A + 8B) \cos 2t + (-8A + B) \sin 2t = \cos 2t.$$

Igualando os coeficientes dos termos semelhantes da equação logo acima, teremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} A + 8B = 1 \\ -8A + B = 0, \end{cases}$$

cuja solução é $A = \frac{1}{65}$ e $B = \frac{8}{65}$. Logo, sua solução particular será a função

$$Q_p(t) = \frac{1}{65} \cos 2t + \frac{8}{65} \sin 2t.$$

Como já calculamos a solução complementar e a solução particular para a carga elétrica do circuito, poderemos encontrar também a solução geral para ela, que será dada pela função

$$Q_g = Q_c + Q_p = c_1 e^{-2t} \cos t + c_2 e^{-2t} \sin t + \frac{1}{65} \cos 2t + \frac{8}{65} \sin 2t.$$

b) Solução: Para obtermos a expressão para a corrente elétrica geral $I_g(t)$, teremos que calcularmos a derivada primeira da carga elétrica geral $Q_g(t)$, isto é, $I_g(t) = \frac{dQ}{dt}$ e, portanto,

$$I_g(t) = \frac{dQ_g}{dt} = -c_1 e^{-2t} (2 \cos t + \sin t) - c_2 e^{-2t} (2 \sin t - \cos t) - \frac{2}{65} \sin 2t + \frac{16}{65} \cos 2t.$$

Para finalizarmos este capítulo apresentaremos uma ferramenta que nos será útil na parte final deste trabalho.

2.6. REGRA DE CRAMER

Como veremos mais adiante, um dos métodos para resolvermos sistema de equações diferenciais lineares é feita através do uso de determinantes. Relembremos agora a *Regra de Cramer*, uma das maneiras de resolver um sistema linear, que só poderá ser utilizada na resolução de sistemas em que o número de equações e o número de incógnitas são iguais.

Determinantes são algumas vezes uteis na resolução de sistemas algébricos de n equações lineares com n incógnitas:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n &= \mathbf{b}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{nn}\mathbf{x}_n &= \mathbf{b}_n. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Seja A a matriz dos coeficientes de (2.17) e seja

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Se

$$\det \mathbf{A}_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

em que $\mathbf{A}_k$ é a matriz $\mathbf{A}$ com sua k -ésima coluna substituída por

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$$

então (2.17), possui uma única solução

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}}, x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}, \dots, x_n = \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}} \quad (2.18)$$

desde que o $\det \mathbf{A} \neq 0$. Esse método de resolução é conhecido como *Regra de Cramer*².

Exemplo 2.15: Resolva o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ x - y + 3z = 3 \\ 5x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$$

pela *regra de Cramer*.

Solução: A solução requer o cálculo de quatro determinantes

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 13$$

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -39$$

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 78$$

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 52.$$

Logo, por (2.18), temos

² Essa regra foi assim chamada em homenagem a **Gabriel Cramer** (1704-1752), um matemático suíço quem primeiro publicou esse resultado em 1750 (Zill e Cullen, 2001).

$$x = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = -3$$

$$y = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = 6$$

$$z = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = 4.$$

3. A TRANSFORMADA DE LAPLACE

A Transformada de Laplace é muito conhecida e utilizada na área de ciências exatas e nas engenharias, podendo ser utilizada para análise de sistemas lineares invariantes no tempo, como, por exemplo, os circuitos elétricos, oscilatórios harmônicos, dispositivos ópticos e sistemas mecânicos. Nessas aplicações, costuma-se interpretá-la como transformações no domínio do tempo para o domínio de frequência. A maior vantagem desta transformação é que as integrações e derivadas tornam-se multiplicações e divisões, permitindo a resolução de equações diferenciais como se fossem equações algébricas, tornando-as assim mais fáceis de resolver (TONIDANDEL; ARAÚJO, 2012).

O método da Transformada de Laplace é uma importante ferramenta para a resolução de certos problemas com valor inicial (P.V.I). Em cálculo aprendemos que a derivação e integração de uma determinada função, transforma uma função em outra. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é transformada em uma função quadrática, em uma família de polinômios de grau 4 e em uma constante por meio das operações de derivação, integração indefinida e integração definida:

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c, \quad \int_0^2 x^3 dx = 4.$$

Essas três operações possuem a *propriedade de linearidade*, assim, para quaisquer constantes α e β , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \alpha \frac{d}{dx}f(x) + \beta \frac{d}{dx}g(x) \\ \int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx &= \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \\ \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx &= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \end{aligned} \quad (3.1)$$

sempre que existam as derivadas e integrais a direita da igualdade acima.

No caso em que $f(x,y)$ é uma função de duas variáveis, uma integral definida de f em relação a uma das variáveis, define uma função na outra variável. De fato, considere a integral abaixo

$$\int_1^2 2xy^2 dx = 3y^2.$$

Note que y foi considerada como constante durante o processo de integração.

De maneira análoga, uma integral definida como

$$\int_a^b K(s, t) f(t) dt,$$

transforma uma função $f(t)$ em uma função de variável s . Uma integral é dita imprópria se, somente se, $f(t)$ estiver definida para $t \geq 0$ em um intervalo limitado, como foi visto no capítulo anterior, então a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} K(s, t) f(t) dt \quad (3.2)$$

é definida como um limite de integrais em intervalos finitos, isto é,

$$\int_0^{\infty} K(s, t) f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A K(s, t) f(t) dt.$$

Definição 3.1: Seja f uma função definida por $t \geq 0$. Então a *Transformada de Laplace*³ de f , sendo denotada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou simplesmente $\mathcal{L}\{f\}$, é definida como sendo

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.3)$$

desde que a integral dada acima convirja.

Como a integral definida anteriormente é imprópria, a Transformada de Laplace da função f , também pode ser escrita dessa forma

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.4)$$

desde que o limite exista. Se o limite existir diremos que a integral *converge*, caso contrário, diremos que a integral *diverge*. Desse modo, o limite em questão existirá apenas para certos valores da variável s .

Observação: A função $K(s, t) = e^{-st}$ é chamada de *núcleo* da transformada.

³O Desenvolvimento da Transformada de Laplace deve-se a muitos nomes além do próprio Laplace. Embora Laplace tenha usado a transformada da integral (3.3) em seu trabalho sobre a teoria das probabilidades, é mais provável que a integral tenha sido descoberta por Euler (1707-1783), um matemático mais prolífico da história. Historicamente, o desenvolvimento dos métodos de transformação começa com a busca por soluções de certos modelos de equações diferenciais na forma de integrais reais definidas, e esta busca começa com Euler (Zill e Cullen, 2001).

Quando a integral imprópria (3.4) converge, a transformada de Laplace de f será denotada simplesmente por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou $F(s)$. Em consequência disso, serão utilizadas letras minúsculas para designar a função a ser transformada e a letra maiúscula correspondente serve para demonstrar sua transformada de Laplace. Por exemplo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s), \quad \mathcal{L}\{h(t)\} = H(s).$$

Exemplo 3.1: Calcule $\mathcal{L}\{1\}$.

Solução:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} (1) dt =$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{-e^{-sA}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Desse modo, quando $s > 0$ o expoente $-sA$ é negativo, e $e^{-st} \rightarrow 0$, quando $A \rightarrow \infty$. Para $s < 0$, a integral diverge. Ficando subentendido que o limite superior $e^{-st} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para $s > 0$.

3.1.CONDIÇÕES PARA A EXISTÊNCIA DA $\mathcal{L}\{f(t)\}$

Sabemos que nem sempre a Transformada de Laplace irá convergir, pois existem algumas funções que não admitem a transformada. Entretanto, existem algumas condições para que a transformada de uma função $f(t)$ exista. São elas:

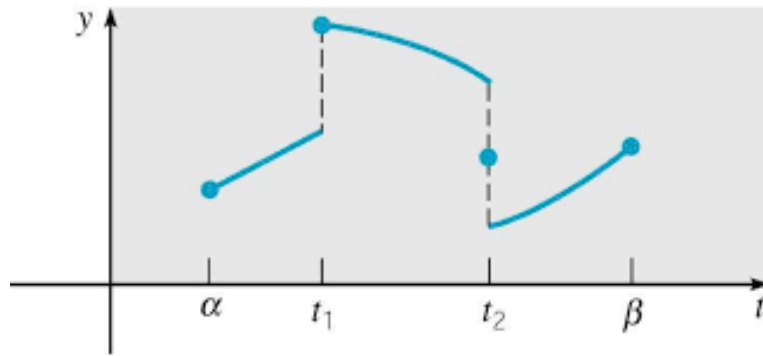
- i. f ser contínua por partes em $[0, +\infty)$;
- ii. f ser de ordem exponencial.

Definição 3.2 (Função contínua por partes): Dizemos que uma função f é *contínua por partes* em $[0, +\infty)$ quando em um intervalo qualquer $0 \leq a \leq t \leq b$ tenha um número finito de descontinuidades e que todas sejam de primeira espécie, ou seja, há existência de limite lateral.

A integral de uma função contínua por partes, em um intervalo finito é a soma das integrais das integrais nos subintervalos criados pelos pontos de partida. Um modelo é a função $f(t)$ na Figura 3, onde temos

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{t_1} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt + \int_{t_2}^{\beta} f(t) dt. \quad (3.5)$$

Figura 3: Uma função contínua por partes $y = f(t)$.



Fonte: BOYCE e DIPRIMA (2010).

Exemplo 3.2: Uma função seccionalmente contínua ou contínua por partes é a função degrau unitário:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Teorema 3.1: Seja $f(t)$ uma função contínua por partes em $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial para todo $t > T$, então, sua Transformada de Laplace irá existir para todos $s > c$.

Note que,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt = I_1 + I_2.$$

Para um melhor entendimento, chamaremos as integrais nas parcelas acima de I_1 e I_2 , respectivamente. A integral I_1 existe pois pode ser escrita na forma de uma soma de integrais em intervalos em que $e^{-st} f(t)$ é contínua. Além disso,

$$|I_2| \leq \int_T^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt \leq M \int_T^{\infty} e^{-st} e^{ct} dt.$$

Logo,

$$|I_2| \leq M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt = -M \frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \Big|_T^\infty = M \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}$$

para todo $s > c$. Isso quer dizer que I_2 irá convergir para qualquer que seja $s > c$ e a transformada irá existir.

Definição 3.3 (Ordem exponencial): Dizemos que uma função f qualquer é de *ordem exponencial* se existirem constantes $c, M > 0$ e $T > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq M e^{ct}$$

para todo $t > T$.

Exemplo 3.3: A função $f(t) = t^n$ ($n \geq 1$) é de ordem exponencial, pois $t^n < n! e^t$, para todo t positivo.

Como foi comentado anteriormente, qualquer função que satisfaça as condições descritas acima possui Transformada de Laplace. Dessa forma, chamaremos tais condições de condições de Dirichlet.

3.2.A TRANSFORMADA DE ALGUMAS FUNÇÕES BÁSICAS

Na Tabela 2, serão apresentadas as Transformadas de Laplace de algumas funções básicas que servirão como base de sustentação para nosso estudo.

Tabela 2: Transformadas de algumas funções básicas

$F(s)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
sen kt	$\frac{k}{s^2 + k^2}$

$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$

Fonte: Zill e Cullen (2001), adaptado.

Agora demonstraremos passo a passo, a resolução de cada item apresentado na tabela acima.

Item 1: Exemplo 3.1.

Item 2: Por definição

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t dt.$$

Calculando a primitiva por meio da integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int e^{-st} t dt &= -\frac{1}{s} t e^{-st} + \frac{1}{s} \int e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} t e^{-st} + \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-st} \\ &= -\frac{1}{s} t e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} + C. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} t e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} (b e^{-sb} - (0) e^{-s(0)}) - \frac{1}{s^2} (e^{-sb} - e^{-s(0)}) \right]. \end{aligned}$$

E assim, como

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b e^{-sb} = 0 \text{ e } \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} = 0,$$

segue que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t dt = \left[-\frac{1}{s} (0 - 0) - \frac{1}{s^2} (0 - 1) \right]$$

$$= \frac{1}{s^2}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

Item 3: Por definição

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^n dt.$$

Calculando a primitiva com o auxílio do método da integração por partes, temos

$$\int e^{-st} t^n dt = -\frac{1}{s} e^{-st} t^n + \frac{n}{s} \int e^{-st} t^{n-1} dt.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^n\} &= -\frac{1}{s} e^{-st} t^n \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}. \end{aligned}$$

Sabemos que $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, então, por interação, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}\{t^2\} &= \frac{2}{s} \mathcal{L}\{t\} = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2!}{s^3} \\ \mathcal{L}\{t^3\} &= \frac{3}{s} \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{3}{s} \cdot \frac{2!}{s^3} = \frac{3!}{s^4}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s} \left[\frac{(n-1)!}{s^n} \right] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Item 4: Note que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt.$$

Resolvendo a integral acima por substituição, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{s-a} (e^{-(s-a)b} - e^{-(s-a)(0)}) \\ &= -\frac{1}{s-a} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-(s-a)b} - 1). \end{aligned}$$

Como $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(s-a)b} = 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt &= -\frac{1}{s-a} (0 - 1) \\ &= \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$

Item 5:

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin kt dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin kt dt$$

Calculando a primitiva por partes, temos

$$\int e^{-st} \sin kt dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \sin kt + \frac{1}{s} k \int e^{-st} \cos kt dt.$$

Calculando por partes novamente, temos

$$\begin{aligned} \int e^{-st} \sin kt dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \sin kt + \frac{1}{s} k \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos kt - \frac{1}{s} k \int e^{-st} \sin kt dt \right] \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \sin kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \cos kt - \frac{1}{s^2} k^2 \int e^{-st} \sin kt dt. \end{aligned}$$

Decorre que,

$$\int e^{-st} \sin kt \, dt + \frac{1}{s^2} k^2 \int e^{-st} \sin kt \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \sin kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \cos kt$$

$$\left(1 + \frac{1}{s^2} k^2\right) \int e^{-st} \sin kt \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \sin kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \cos kt$$

$$\frac{s^2 + k^2}{s^2} \int e^{-st} \sin kt \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \sin kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \cos kt$$

$$\begin{aligned} \int e^{-st} \sin kt \, dt &= \frac{s^2}{s^2 + k^2} \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} \sin kt - \frac{s^2}{s^2 + k^2} \left(\frac{1}{s^2}\right) k e^{-st} \cos kt \\ &= -\frac{s}{s^2 + k^2} e^{-st} \sin kt - \frac{k}{s^2 + k^2} e^{-st} \cos kt + C. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin kt \, dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{s}{s^2 + k^2} e^{-st} \sin kt - \frac{k}{s^2 + k^2} e^{-st} \cos kt \right]_0^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{s}{s^2 + k^2} (e^{-sb} \sin kb - 0) - \frac{k}{s^2 + k^2} (e^{-sb} \cos kb - 1) \right].$$

Como $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \cos kb = 0$ e $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \sin kb = 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sin kt \, dt &= -\frac{s}{s^2 + k^2} (0 - 0) - \frac{k}{s^2 + k^2} (0 - 1) \\ &= \frac{k}{s^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}.$$

Item 6:

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos kt \, dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos kt \, dt$$

Resolvendo a primitiva acima usando o método da integração por partes, temos

$$\int e^{-st} \cos kt \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \cos kt - \frac{1}{s} k \int e^{-st} \sin kt \, dt.$$

Integrando novamente por partes, temos

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{s} e^{-st} \cos kt - \frac{1}{s} k \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin kt + \frac{1}{s} k \int e^{-st} \cos kt dt \right] \\
&= -\frac{1}{s} e^{-st} \cos kt + \frac{1}{s^2} k e^{-st} \sin kt - \frac{1}{s^2} k^2 \int e^{-st} \cos kt dt.
\end{aligned}$$

Decorre que,

$$\begin{aligned}
\int e^{-st} \cos kt dt + \frac{1}{s^2} k^2 \int e^{-st} \cos kt dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \cos kt + \frac{1}{s^2} k e^{-st} \sin kt \\
\left(1 + \frac{1}{s^2} k^2\right) \int e^{-st} \cos kt dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \cos kt + \frac{1}{s^2} k e^{-st} \sin kt \\
\frac{s^2 + k^2}{s^2} \int e^{-st} \cos kt dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \cos kt + \frac{1}{s^2} k e^{-st} \sin kt \\
\int e^{-st} \cos kt dt &= -\frac{s^2}{s^2 + k^2} \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} \cos kt + \frac{s^2}{s^2 + k^2} \left(\frac{1}{s^2}\right) k e^{-st} \sin kt + C \\
\int e^{-st} \cos kt dt &= -\frac{s}{s^2 + k^2} e^{-st} \cos kt + \frac{k}{s^2 + k^2} e^{-st} \sin kt + C.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos kt dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{s}{s^2 + k^2} e^{-st} \cos kt + \frac{k}{s^2 + k^2} e^{-st} \sin kt \right]_0^b \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{s}{s^2 + k^2} (e^{-sb} \cos kb - 1) + \frac{k}{s^2 + k^2} (e^{-sb} \sin kb - 0) \right].
\end{aligned}$$

Como $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \cos kb = 0$ e $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \sin kb = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cos kt dt &= -\frac{s}{s^2 + k^2} (0 - 1) + \frac{k}{s^2 + k^2} (0 - 0) \\
&= \frac{s}{s^2 + k^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2}.$$

Item 7:

$$\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \int_0^\infty e^{-st} \sinh kt dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sinh kt dt$$

Calculando a primitiva pelo método da integração por partes, temos

$$\int e^{-st} \sinh kt \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \sinh kt + \frac{1}{s} k \int e^{-st} \cosh kt \, dt.$$

Integrando novamente por partes, temos

$$\begin{aligned} \int e^{-st} \sinh kt \, dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \sinh kt + \frac{1}{s} k \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cosh kt + \frac{1}{s} k \int e^{-st} \sinh kt \, dt \right] \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \sinh kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \cosh kt + \frac{1}{s^2} k^2 \int e^{-st} \sinh kt \, dt. \end{aligned}$$

Decorre que,

$$\begin{aligned} \int e^{-st} \sinh kt \, dt - \frac{1}{s^2} k^2 \int e^{-st} \sinh kt \, dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \sinh kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \cosh kt \\ \left(1 - \frac{1}{s^2} k^2\right) \int e^{-st} \sinh kt \, dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \sinh kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \cosh kt \\ \frac{s^2 - k^2}{s^2} \int e^{-st} \sinh kt \, dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \sinh kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \cosh kt \\ \int e^{-st} \sinh kt \, dt &= -\frac{s^2}{s^2 - k^2} \frac{1}{s} e^{-st} \sinh kt - \frac{s^2}{s^2 - k^2} \frac{1}{s^2} k e^{-st} \cosh kt \\ &= -\frac{s}{s^2 - k^2} e^{-st} \sinh kt - \frac{k}{s^2 - k^2} e^{-st} \cosh kt + C. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \sinh kt \, dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{s}{s^2 - k^2} e^{-st} \sinh kt - \frac{k}{s^2 - k^2} e^{-st} \cosh kt \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{s}{s^2 - k^2} (e^{-sb} \sinh kb - 0) - \frac{k}{s^2 - k^2} (e^{-sb} \cosh kb - 1) \right]. \end{aligned}$$

Como $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \sinh kb = 0$ e $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \cosh kb = 0$, temos

$$\begin{aligned} &= -\frac{s}{s^2 - k^2} (0 - 0) - \frac{k}{s^2 - k^2} (0 - 1) \\ &= \frac{k}{s^2 - k^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2}.$$

Item 8:

$$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \int_0^\infty e^{-st} \cosh kt \, dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cosh kt \, dt$$

Calculando a primitiva com o auxílio do método da integração por partes, temos

$$\int e^{-st} \cosh kt \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \cosh kt + \frac{1}{s} k \int e^{-st} \sinh kt \, dt.$$

Integrando novamente por partes, temos

$$\begin{aligned} \int e^{-st} \cosh kt \, dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \cosh kt + \frac{1}{s} k \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sinh kt + \frac{1}{s} k \int e^{-st} \cosh kt \, dt \right] \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \cosh kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \sinh kt + \frac{1}{s^2} k^2 \int e^{-st} \cosh kt \, dt. \end{aligned}$$

Decorre que,

$$\begin{aligned} \int e^{-st} \cosh kt \, dt - \frac{1}{s^2} k^2 \int e^{-st} \cosh kt \, dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \cosh kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \sinh kt \\ \left(1 - \frac{1}{s^2} k^2\right) \int e^{-st} \cosh kt \, dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \cosh kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \sinh kt \\ \frac{s^2 - k^2}{s^2} \int e^{-st} \cosh kt \, dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \cosh kt - \frac{1}{s^2} k e^{-st} \sinh kt \\ \int e^{-st} \cosh kt \, dt &= -\frac{s^2}{s^2 - k^2} \frac{1}{s} e^{-st} \cosh kt - \frac{s^2}{s^2 - k^2} \frac{1}{s^2} k e^{-st} \sinh kt \\ &= -\frac{s}{s^2 - k^2} e^{-st} \cosh kt - \frac{k}{s^2 - k^2} e^{-st} \sinh kt + C. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \cosh kt \, dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{s}{s^2 - k^2} e^{-st} \cosh kt - \frac{k}{s^2 - k^2} e^{-st} \sinh kt \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{s}{s^2 - k^2} (e^{-sb} \cosh kb - 1) - \frac{k}{s^2 - k^2} (e^{-sb} \sinh kb - 0) \right]. \end{aligned}$$

Como $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \cosh kb = 0$ e $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} \sinh kb = 0$, temos

$$\begin{aligned}
&= -\frac{s}{s^2 - k^2}(0 - 1) - \frac{k}{s^2 - k^2}(0 - 0) \\
&= \frac{s}{s^2 - k^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2 - k^2}.$$

3.3. PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para que haja uma sustentação no embasamento teórico, iremos estudar algumas propriedades básicas das Transformada de Laplace.

3.3.1. Linearidade

Teorema 3.2: Sejam c_1 e c_2 constantes quaisquer e $F_1(s)$ e $F_2(s)$ as transformadas de Laplace de $f_1(t)$ e $f_2(t)$, respectivamente, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \\
&= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4: Calcule $\mathcal{L}\{3t - 5 \operatorname{sen}(2t)\}$.

Solução: Para calcularmos a Transformada de Laplace acima, utilizaremos o Teorema 3.2 e os itens 2 e 5 da tabela 2. Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{3t - 5 \operatorname{sen}(2t)\} &= 3\mathcal{L}\{t\} - 5\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\} \\
&= 3 \frac{1}{s^2} - 5 \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{-7s^2 + 12}{s^2(s^2 + 4)}, \quad s > 0.
\end{aligned}$$

3.3.2. Primeira propriedade de translação ou de deslocamento

Teorema 3.3: Se a é um número real e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a).$$

Prova: A prova desse teorema é imediata, pois usando a definição temos

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s - a).$$

Para expressar esse teorema, é mais frequente utilizar o símbolo

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s \rightarrow s-a}$$

no qual $s \rightarrow s - a$ significa que substituiremos s por $s - a$ em $F(s)$.

Exemplo 3.5: Calcule $\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\}$.

Solução: Para calcularmos a Transformada de Laplace acima utilizaremos o Teorema 3.3 e o item 3 da tabela 2. Assim,

$$\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathcal{L}\{t^3\}_{s \rightarrow s-5} = \frac{3!}{s^4} \Big|_{s \rightarrow s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}.$$

3.3.3. Segunda propriedade de translação ou de deslocamento

Teorema 3.4: Se a for uma constante positiva, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases},$$

então $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$.

Prova: Usando a definição de transformada de Laplace, temos

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt.$$

Fazendo-se $u = t - a$, temos

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du = e^{-as} \int_0^\infty e^{-su}f(u)du.$$

Exemplo 3.6: Calcule $g(t) = \begin{cases} (t-2)^3, & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$.

Solução: Para calcularmos a transformada de Laplace acima utilizaremos o Teorema 3.4 e o item 3 da tabela 2. Com efeito,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{t^3\} = e^{-2s}\frac{3!}{s^4} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}.$$

3.3.4. Propriedade de mudança de escala

Teorema 3.5: Se a é um número real e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Prova: Utilizando-se do método da substituição de variáveis com $u = at$ e $du = adt$, temos

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u} f(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u} f(u) du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Exemplo 3.7: Calcule $\mathcal{L}\{\sin 2t\}$.

Pela Definição 3.1, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin 2t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sin 2t \, dt \\ &= \left. \frac{-e^{-st} \sin 2t}{s} \right|_0^{\infty} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt \\ &= \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt, \quad s > 0 \\ &= \frac{2}{s} \left[\left. \frac{-e^{-st} \cos 2t}{s} \right|_0^{\infty} - \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin 2t \, dt \right] \\ &= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2} \mathcal{L}\{\sin 2t\}, \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-st} \cos 2t = 0, \quad s > 0,$$

segue que

$$\left[1 + \frac{4}{s^2} \right] \mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad s > 0.$$

3.3.5. Derivada de transformadas (multiplicação por t^n)

Teorema 3.6: Seja n um número inteiro positivo não nulo e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Exemplo 3.8: Calcule $\mathcal{L}\{te^{3t}\}$.

Solução: Para resolvermos o problema acima usaremos o Teorema 3.6, onde $n = 1$ e $f(t) = e^{3t}$, e o item 4 da tabela 2. Com efeito,

$$\mathcal{L}\{te^{3t}\} = (-1)^1 \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-3} \right) = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

3.3.6. Transformada de Derivadas

O próximo teorema nos dará condições de resolver certos PVI's por meio da Transformada de Laplace.

Teorema 3.7: Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Supondo que $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ e $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ existem, então

- I. $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0);$
- II. $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$

Prova do item I: Por definição

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt.$$

Usando integração por partes para calcular a primitiva, temos

$$\begin{aligned} \int e^{-st} f'(t) dt &= e^{-st} f(t) - \int -se^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-st} f(t) + s \int e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Decorre que,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) \Big|_0^b + s \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-sb} f(b) - e^{-s(0)} f(0)] + s \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Como $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} f(b) = 0$ e sabendo que $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt = F(s)$, temos

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt = -f(0) + sF(s).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

Prova do item II: Note que

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f''(t) dt.$$

Usando o método da integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int e^{-st} f''(t) dt &= e^{-st} f'(t) - \int -s e^{-st} f'(t) dt \\ &= e^{-st} f'(t) + s \int e^{-st} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f''(t) dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-st} f'(t) \Big|_0^b + s \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-sb} f'(b) - e^{-s(0)} f'(0)] + s \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Como $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} f'(b) = 0$ e $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt = \mathcal{L}\{f'(t)\}$, temos

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f''(t) dt = -f'(0) + s \mathcal{L}\{f'(t)\}.$$

Como $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f''(t) dt &= -f'(0) + s(sF(s) - f(0)) \\ &= -f'(0) + s^2 F(s) - sf(0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Exemplo 3.9: Dada a função real $f(t) = \cos 3t$ e a condição $f(0) = 1$. Calcule $\mathcal{L}\{f'(t)\}$.

Solução: Para solucionarmos o problema acima utilizaremos o item I do Teorema 3.7, o item 6 da Tabela 2 e aplicaremos a condição descrita. Com efeito,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{-3 \sin 3t\} = s \left(\frac{s}{s^2 + 9} \right) - f(0) = \frac{s^2}{s^2 + 9} - 1 = \frac{s^2 - (s^2 + 9)}{s^2 + 9} = \frac{-9}{s^2 + 9}.$$

3.3.7. Transformada de Laplace de uma derivada de ordem n

Teorema 3.8: Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Suponha que $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, $\dots$, $f^{n-1}(t)$ são todas contínuas em $[0, +\infty]$ e de ordem exponencial e que $f^n(t)$ seja contínua por partes em $[0, +\infty]$, então

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{n-1}(0).$$

3.3.8. Transformada de integrais

Teorema 3.9: Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

Prova: Chamando $g(t) = \int_0^t f(u)du$, obteremos que $g'(t) = f(t)$ e $g(0) = 0$, logo

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Usando o item I das transformadas de derivadas, temos

$$s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = F(s)$$

$$s\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}F(s).$$

e, portanto

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

Exemplo 3.10: Calcule $\mathcal{L}\left\{\int_0^x \sin 2u du\right\}$.

Solução: Para calcularmos a transformada de Laplace acima utilizaremos o Teorema 3.9 e o item 5 da tabela 2. Com efeito,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x \sin 2u du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin 2u\} = \frac{1}{s} \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{2}{s(s^2 + 4)}.$$

3.3.9. Integral da Transformada de Laplace (divisão por t)

Teorema 3.10: Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du$$

caso $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ exista.

Prova: Temos que a demonstração desse teorema decorre da definição e da possibilidade de inversão das ordens de integração, assim

$$\begin{aligned}
 \int_s^\infty F(u) du &= \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right] du = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-ut} f(t) du \right] dt \\
 &= \int_0^\infty f(t) \left[\int_s^\infty e^{-ut} du \right] dt \\
 &= \int_0^\infty f(t) \left[\frac{e^{-st}}{t} \right] dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\frac{f(t)}{t} \right] dt \\
 &= \mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.11: Calcule $\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin t}{t} \right\}$.

Solução: Para calcularmos a transformada de Laplace acima utilizaremos o Teorema 3.4 e o item 5 da tabela 2. Com efeito,

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin t}{t} \right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2 + 1} = \text{tg}^{-1} u \Big|_s^\infty = \text{tg}^{-1} \left(\frac{1}{s} \right).$$

3.3.10. Funções periódicas

Definição 3.4: Dizemos que uma função real f é periódica se vier a existir um número real T maior que 0 de forma que $f(t + T) = f(t)$ para todo ou qualquer que seja x pertencente ao domínio de f .

- i. Chamamos T de período da função $f(t)$;
- ii. Os gráficos das funções periódicas se repetem a cada intervalo de comprimento $|T|$.

Teorema 3.11: Seja $f(t)$ uma função periódica de período T maior que 0 tal que $f(t + T) = f(t)$, contínua por partes e de ordem exponencial, então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Prova: A demonstração desse teorema vem da definição, então

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Fazendo uma mudança de variável $u = t - T$, na segunda integral e usando também a periodicidade de f , temos

$$\int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(u+T)} f(u+T) du = e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-sT} F(s)$$

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} F(s)$$

$$F(s) - e^{-sT} F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

$$(1 - e^{-sT}) F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Logo,

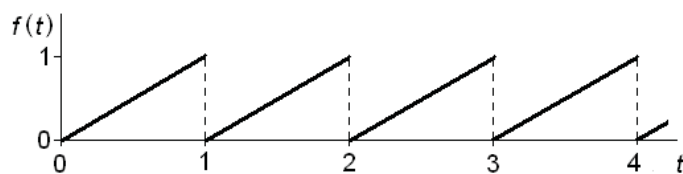
$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Exemplo 3.12: Calcule a transformada de Laplace da função periódica cuja o gráfico descrito pela Figura 4. A onda dente de serra pode ser expressa na forma

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

com $f(t)$ de período igual a 2.

Figura 4: Uma onda dente de serra.



Fonte: BOYCE e DIPRIMA (2010).

Solução: Para solucionarmos o problema descrito logo acima utilizaremos o Teorema 3.10 e $T = 2$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} \cdot 0 \cdot dt \right] \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{1 - e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} + 0 \right] = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(1 - e^{-2s})} - \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})}.
\end{aligned}$$

3.3.11. Convolução

Antes de enunciarmos o teorema da transformada de Laplace de um Convolução de funções iremos definir e citar suas propriedades.

Definição 3.5: Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções contínuas por partes. Então, a *Convolução* das funções $f(t)$ e $g(t)$ é denotada e definida para todo t maior ou igual 0 como sendo

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Propriedades da convolução:

- I. $(f * g)(t) = (g * f)(t)$ (Propriedade Comutativa)
- II. $(f * (g_1 + g_2))(t) = (f * g_1)(t) + (f * g_2)(t)$ (Propriedade Distributiva)
- III. $((f * g) * v)(t) = (f * (g * v))(t)$ (Propriedade Associativa)
- IV. $(f * 0)(t) = (0 * f)(t)$ (Propriedade do Elemento Neutro)

Para provarmos essas propriedades, iremos utilizar a própria definição de convolução. No entanto, demonstraremos apenas a primeira propriedade, que é denominada como propriedade comutativa.

Prova do item I: Para fazermos a demonstração, faremos a mudança de variável $x = t - \tau$. Então, desse pressuposto, temos

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_t^0 f(t - x) g(x) (-dx) = \int_0^t f(t - x) g(x) dx = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \\
&= (g * f)(t).
\end{aligned}$$

A partir do que foi dito sobre a definição e as propriedades da Convolução, enunciaremos o seguinte teorema.

Teorema 3.12: Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções contínuas por partes e de ordem exponencial em $[0, \infty]$, então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

Prova: Decorre da definição de transformada de Laplace e do produto de Convolução que

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt = \int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau)dt d\tau.$$

Realizando a mudança de variável com $u = t - \tau$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(f * g)(t)\} &= \int_0^\infty f(\tau) \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} g(u)du d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-su} g(u)du \\ &= \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= F(s)G(s). \end{aligned}$$

Exemplo 3.13: Calcule $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^\tau \sin(t-\tau)d\tau\right\}$.

Solução: Para calcularmos a transformada acima utilizaremos o teorema 3.12, com $f(t) = e^t$ e $g(t) = \sin t$. Com efeito,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^\tau \sin(t-\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\{e^t\} \times \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s-1} \times \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}.$$

3.4. ALGUMAS FUNÇÕES ESPECIAIS

No decorrer desta seção será apresentada algumas funções que serão importantes para a fundamentação do nosso trabalho, elas serão chamadas de funções especiais. O suporte bibliográfico abordado nesta seção que segue, tem como base os autores Kreyszig (2009) e Pacheco (2011).

3.4.1. Função degrau unitário

Na engenharia é comum encontramos problemas físicos envolvendo funções que podem apresentar uma dualidade como “estar ativado” ou “estar desativado”. Por exemplo, uma voltagem impressa em um circuito ou uma força externa agindo sobre um sistema mecânico.

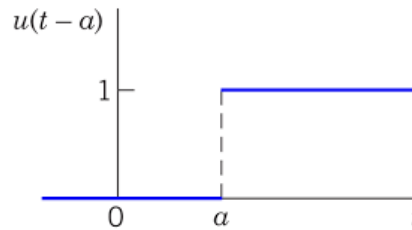
Definição 3.6: Definimos a função degrau unitário ou função de Heaviside a função $u(t - \alpha)$ que associa 0 a todo t menor que α e 1 a todo t maior ou igual a α , ou seja,

$$u(t - \alpha) = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ 1 & t \geq \alpha \end{cases}, \alpha \geq 0.$$

Observação: Também é comum usar as anotações $u_\alpha(t)$ e $H_\alpha(t)$.

O gráfico dessa função é facilmente ilustrado pela Figura 5.

Figura 5: Função degrau unitário.



Fonte: Pacheco (2011).

Temos que a transformada de Laplace de $u(t - \alpha)$ decorre diretamente da definição, então

$$\mathcal{L}\{u(t - \alpha)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(t - \alpha) dt = \int_0^\alpha e^{-st} (0) dt + \int_\alpha^\infty e^{-st} (1) dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_\alpha^\infty.$$

Logo,

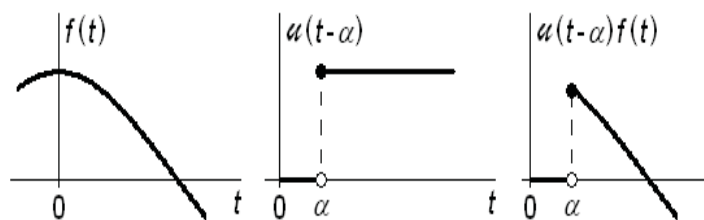
$$\mathcal{L}\{u(t - \alpha)\} = \frac{e^{-\alpha s}}{s}.$$

Podemos gerar novas funções por meio da multiplicação de uma função $f(t)$ qualquer por $u(t - \alpha)$. Isso quer dizer que, se $f(t)$ é uma função definida para todo $t \geq 0$, então

$$u(t - \alpha)f(t) = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ f(t) & t \geq \alpha \end{cases}$$

conforme é ilustrado na Figura 6.

Figura 6: $u(t - \alpha)f(t)$ onde $f(t) = \cos t$.



Fonte: Pacheco (2011).

Além disso, podemos obter o deslocamento (translação ou desvio) de qualquer função $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$, para a direita em α unidades, com o artifício de multiplicarmos $f(t - \alpha)$ por $u(t - \alpha)$, ou seja,

$$g(t) = u(t - \alpha)f(t - \alpha) = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ f(t - \alpha) & t \geq \alpha \end{cases}$$

onde $g(t)$ é a função $f(t)$ deslocada.

Considerando todos os conceitos apresentados até o momento em 3.4.1, mostraremos o próximo teorema que será chamado de segunda versão do teorema da segunda propriedade de translação ou de deslocamento descrita em 3.3.3.

Teorema 3.13: Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$ e α um número real positivo, então

$$\mathcal{L}(u(t - \alpha)f(t - \alpha)) = e^{-\alpha s}F(s).$$

3.4.2. Função nula

Definição 3.7: Seja $n(t)$ uma função de variável t , que para todo $t > 0$

$$\int_0^\infty n(u)du = 0,$$

onde, $n(t)$ será chamada de função nula.

Observação: Basta que a função seja nula a menos de um conjunto finito de pontos. Em outras palavras, uma tal função não precisa ser nula, para todo $t \in [0, +\infty)$, apenas que seja nula a partir de um conjunto enumerável de pontos.

Exemplo 3.14: $n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, +\infty) \setminus \mathbb{N} \\ 1, & t \in \mathbb{N} \end{cases}$.

3.5. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Nesta seção iremos estudar as Transformadas inversas de Laplace, onde veremos sua definição, propriedades e exemplos. Toda a contextualização a seguir tem como base de sustentação os autores Bassanezi e Ferreira Júnior (1988), Bronson (1976), Pacheco (2011), Spiegel (1965) e Zill e Cullen (2001).

3.6.DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Definição 3.8: Seja $F(s)$ a Transformada de Laplace da função $f(t)$, isto é, se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ então definimos a função $f(t)$ como a transformada inversa de Laplace de $F(s)$, denotada por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Observação: Chamamos $\mathcal{L}^{-1}$ de operador da transformada inversa de Laplace.

Exemplo 3.15: Calculemos $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$.

Solução: Como $\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \left\{\frac{1}{s+3}\right\}$. Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}.$$

3.7.UNICIDADE DAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

Sabemos que a transformada de Laplace de uma função nula $n(t)$ é zero e que a Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{f(t) + n(t)\} = F(s).$$

Dessa suposição, pode ocorrer de duas funções diferentes possuírem a mesma Transformada de Laplace, isto é, caso sejam consideradas funções nulas, teremos que a transformada inversa de Laplace não será única.

Para evitarmos esse tipo de situação enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.14 (Teorema de Lerch): Seja $f(t)$ seccionalmente contínua em um intervalo finito $0 \leq t \leq n$ e de ordem exponencial para todo $t < n$, então diremos que a transformada inversa de Laplace $F(s)$, isto é, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ é única.

Na resolução de problemas de transformadas inversas de Laplace será sempre válido o teorema acima, a menos que seja dito o contrário.

3.8.ALGUMAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

A seguir será apresentada na tabela 2 as transformadas inversas de Laplace de algumas funções básicas. Como os resultados nela contidos decorrem diretamente da definição de transformada de Laplace e, portanto, serão desnecessárias as suas demonstrações.

Tabela 3: Algumas Transformada Inversas.

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{k}{s^2 + k^2}$	$\text{sen } kt$
$\frac{s}{s^2 + k^2}$	$\text{cos } kt$
$\frac{k}{s^2 - k^2}$	$\text{senh } kt$
$\frac{s}{s^2 - k^2}$	$\text{cosh } kt$

Fonte: ZILL e CULLEN (2001), adaptado.

3.9.PROPRIEDADES DAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

Enunciaremos em seguida algumas propriedades das transformadas inversas de Laplace. Não será necessária a demonstração delas, pois já houve demonstração nas seções anteriores.

Teorema 3.15 (Propriedade da Linearidade): Sejam c_1 e c_2 constantes arbitrárias, $F_1(s)$ e $F_2(s)$ as transformadas de Laplace de $f_1(t)$ e $f_2(t)$, respectivamente, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} &= c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} \\ &= c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t).\end{aligned}$$

Essa propriedade pode ser estendida para mais de duas funções, logo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + \cdots + c_n F_n(s)\} &= c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \cdots + c_n \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\} \\ &= c_1 f_1(t) + \cdots + c_n f_n(t).\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\mathcal{L}^{-1}$ é um operador linear.

Teorema 3.16 (Primeira propriedade de translação ou deslocamento): Seja a um número real e $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}f(t).$$

Teorema 3.17 (Segunda propriedade de translação ou deslocamento): Seja a um número real e $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \begin{cases} f(t - a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Teorema 3.18 (Propriedade de mudança de escala): Seja a um número real e $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right).$$

Teorema 3.19 (Propriedade da transformada inversa de Laplace de derivadas): Seja n um número real não nulo e $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^n(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t).$$

Teorema 3.20 (Propriedade da transformada inversa de Laplace de integrais): Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t}.$$

Teorema 3.21 (Multiplicação por s^n): Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $f(0) = 0$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t).$$

Teorema 3.22 (Divisão por s): Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $f(0) = 0$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du.$$

Teorema 3.23 (Convolução): Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t - u)du = f(t) * g(t).$$

3.10. MÉTODOS PARA A OBTENÇÃO DAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

Existem diversos meios para obtenção da transformada inversa de Laplace como o Método das frações parciais e o uso de tabelas.

Segundo Spiegel (1965), podemos encontrar a transformada de inversa de Laplace por meio da Fórmula complexa de inversão, no qual proporciona um método direto e muito poderoso para encontrar tais soluções. Porém, essa fórmula usará o método da integração complexa e, portanto, não será apresentada neste trabalho.

Exemplo 3.16: Calcule a transformada inversa de Laplace abaixo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}.$$

Solução: Para resolvermos a transformada inversa acima usaremos o método das frações parciais. Então, existem constantes reais únicas A , B e C , tais que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} &= \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+4)} \\ &= \frac{A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+4)}.\end{aligned}$$

Como as duas frações acima possuem os mesmos denominadores, os seus numeradores são idênticos, daí, temos

$$1 = A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2).$$

Dando valores para a variável s , nos quais esses são as raízes do denominador e são eles $s = 1$, $s = -2$ e $s = -4$, temos que, a solução do sistema de equações formado acima é

$$\begin{cases} A = 1/15 \\ B = -1/6. \\ C = 1/10 \end{cases}$$

Então, escrevemos

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{1/15}{(s-1)} - \frac{1/6}{(s+2)} + \frac{1/10}{(s+4)}.$$

e, portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} &= \frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \\ &= \frac{1}{15}e^t - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t}.\end{aligned}$$

3.11. APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nesta seção iremos abordar algumas aplicações da Transformada de Laplace para resoluções de EDO's de 1ª e 2ª ordens.

3.11.1. Aplicação em elétrica

Para comprovar o quanto a transformada de Laplace torna a resolução de EDO's mais simplificada, iremos responder o Exemplo 2.18, mas agora resolveremos utilizando a transformada e concluímos que de fato é mais fácil utilizando o método de Laplace.

Exemplo 3.17: Uma força eletromotriz $E(t)$ de 30 V é aplicada a um circuito em série LR no qual a indutância é de 0,5 H e a resistência de 50 ohms. Encontre a corrente $i(t)$, se $i(0) = 0$. Determine a corrente quando $t \rightarrow \infty$.

Solução: Como já havíamos mostrado como encontrava a EDO de 1ª ordem dada por

$$\frac{di}{dt} + 100i = 60,$$

aplicando a transformada, temos que

$$\begin{aligned}sI(s) - i(0) + 100I(s) &= \mathcal{L}\{60\} \\ I(s)(s + 100) &= \frac{60}{s} \\ I(s) &= \frac{\frac{60}{s}}{s+100} = \frac{60}{s(s+100)}.\end{aligned}$$

Por frações parciais

$$\begin{aligned}\frac{60}{s(s+100)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+100} \\ 60 &= A(s+100) + Bs.\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, concluímos que

$$A = 0,6 \quad \text{e} \quad B = -0,6.$$

Logo,

$$I(s) = \frac{0,6}{s} - \frac{0,6}{s+100}.$$

E, por tanto

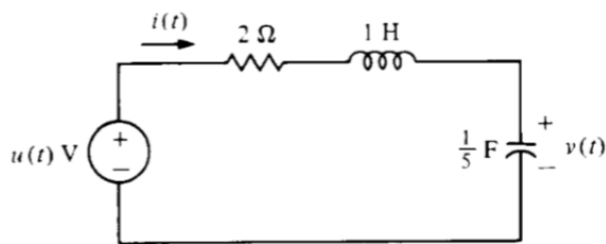
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} &= i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0,6}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0,6}{s+100}\right\} \\ i(t) &= 0,6 - 0,6e^{-100t} \text{ A.}\end{aligned}$$

Assim, como no exemplo anterior essa solução encontrada é conhecida como a *Solução Particular*. Por fim, para sabermos o valor da corrente quando $t \rightarrow \infty$, aplicaremos o limite quando $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (0,6 - 0,6e^{-100t}) \\ &= 0,6 \text{ A.}\end{aligned}$$

Exemplo 3.18: Ilustre uma equação com integrais e derivadas com o circuito da Figura 7. Calcule a corrente $i(t)$, para $i(0) = 0$.

Figura 7: Circuito RLC.



Fonte: JOHNSON, HILBURN e JOHNSON, 1994.

Observação: O circuito está no domínio do tempo, utilizaremos a Transformada de Laplace para converter para o domínio da frequência.

Solução: Analisando o circuito como uma malha no sentido da corrente $i(t)$, aplicando a *Lei de Kirchhoff* (somatório das tensões igual zero), temos que:

Importante: A tensão v no capacitor é dada por $v = \frac{1}{c} \int_0^T i \, dt + v(0)$. Logo,

$$-u(t) + i * 2 + 1 * \frac{di}{dt} + 5 \int_0^t i \, dt = 0$$

se não há energia armazenada, as equações são

$$\frac{di}{dt} + 2i + 5 \int_0^t i \, dt = u(t), \quad i(0) = 0.$$

Transformando obtemos,

$$sI(s) + 2I(s) + \frac{5}{s}I(s) = \frac{1}{s}$$

ou

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{(s+1)^2 + 4} \right]. \end{aligned}$$

Por tanto, a resposta é $i(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\text{sen}2t$ A.

4. A TRANSFORMADA DE LAPLACE NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Neste capítulo, serão apresentados à teoria e resolução de sistemas de equações diferenciais lineares. Em seguida utilizaremos a Transformada de Laplace para resoluções dos sistemas lineares. As seções a seguir servirão como suporte para os conceitos, teoremas, aplicações e modelos abordados por autores como Boyce e DiPrima (2010) e Zill e Cullen (2001).

4.1.SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Um sistema de equações é formado por um conjunto de equações que apresentam mais de uma incógnita. O sistema a seguir

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\&\vdots \\x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n,\end{aligned}$$

é chamado de sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem, ele será o foco desse capítulo. Suas incógnitas são as funções deriváveis $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, onde

$$x'_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad x'_2 = \frac{dx_2}{dt}, \dots, x'_n = \frac{dx_n}{dt}.$$

Esse sistema pode ser escrito na forma matricial,

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Definindo $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, e $A = (a_{ij})$, podemos escrever esse sistema de maneira mais sucinta como,

$$x' = Ax.$$

Uma solução dessa equação é qualquer função vetorial $x = x(t)$ que a torne verdadeira. É importante notarmos que $x(t) = 0$ é uma solução, chamada solução trivial. Em geral essa equação possui uma infinidade de soluções, mas o PVI

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possui uma única solução. De acordo com o teorema de existência e unidade.

Para resolver um sistema é necessário encontrar os valores que satisfaçam simultaneamente todas as equações e, para isso, dispomos de alguns métodos de resolução, os quais serão demonstrados no decorrer deste capítulo. Alguns desses métodos são: a eliminação algébrica sistemática, a eliminação por determinante, e finalmente, a aplicação da Transformada de Laplace.

A seguir, apresentamos os métodos citados acima. E mais adiante faremos uma comparação entre tais métodos.

4.1.1. Eliminação algébrica sistemática

A *eliminação algébrica sistemática* baseia-se de maneira análoga a multiplicação de uma equação algébrica por uma constante, equivale em operar sobre uma equação diferencial com uma combinação de derivada. Sabemos que uma equação diferencial linear

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t),$$

onde $a_i, i = 0, 1, \dots, n$, são constantes, pode ser escrita em termos de operadores diferenciais, como segue

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = g(t).$$

Considere o sistema de equações lineares de primeira ordem

$$y' - 2x = 0$$

$$x' - 3y = 0.$$

Reescrevendo em notação de operadores, temos

$$\begin{aligned} Dy &= 2x \\ Dx &= 3y \end{aligned} \tag{4.1}$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} 2x - Dy &= 0 \\ 3y - Dx &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Aplicando o operador derivada D na primeira equação e multiplicando a segunda por -2 , obteremos, ao somarmos as equações resultantes, a seguinte equação

$$-D^2y + 6y = 0.$$

Da equação característica associada à EDO acima, encontramos as raízes $m_1 = \sqrt{6}$ e $m_2 = -\sqrt{6}$, que nos fornece a solução

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}. \quad (4.3)$$

Agora, multiplicando a primeira equação em (4.2) por -3 e aplicamos o operador derivada D à segunda equação, depois de somarmos encontramos a seguinte equação diferencial em x,

$$D^2x - 6x = 0,$$

cujas soluções gerais são

$$x(t) = c_3 e^{\sqrt{6}t} + c_4 e^{-\sqrt{6}t}. \quad (4.4)$$

Mas (4.3) e (4.4) não verificam o sistema (4.1) para qualquer escolha de c_1, c_2, c_3 e c_4 . Levando $x(t)$ e $y(t)$ na primeira equação do sistema original (4.1), após a simplificação obtemos,

$$e^{\sqrt{6}t}(\sqrt{6}c_1 - 2c_3) + e^{-\sqrt{6}t}(-\sqrt{6}c_2 - 2c_4) = 0.$$

Como a última expressão deve anular-se para qualquer valor de t , uma vez que $e^{\sqrt{6}t}$ e $e^{-\sqrt{6}t}$ são LI, temos

$$\sqrt{6}c_1 - 2c_3 = 0 \quad e \quad -\sqrt{6}c_2 - 2c_4 = 0,$$

ou ainda

$$c_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1 \quad e \quad c_4 = -\frac{\sqrt{6}}{2}c_2.$$

Dessa forma, concluímos que

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1 e^{\sqrt{6}t} - \frac{\sqrt{6}}{2}c_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

solucionam o sistema proposto.

4.1.2. Eliminação por determinantes

A utilização de determinantes é simbolicamente denotada por L_1 , L_2 , L_3 e L_4 operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes. Um sistema de equações diferenciais lineares em duas variáveis pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} L_1 x + L_2 y &= g_1(t) \\ L_3 x + L_4 y &= g_2(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Utilizando o método de eliminação de variáveis, como no caso anterior de equações algébricas, obtemos

$$(L_1 L_4 - L_2 L_3)x = f_1(t) \quad \text{e} \quad (L_1 L_4 - L_2 L_3)y = f_2(t) \quad (4.6)$$

de forma equivalente, temos

$$f_1(t) = L_4 g_1(t) - L_2 g_2(t) \quad \text{e} \quad f_2(t) = L_1 g_2(t) - L_3 g_1(t)$$

Escrevendo em forma de determinantes, utilizando a *Regra de Cramer*:

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} g_1 & L_2 \\ g_2 & L_4 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} L_1 & g_1 \\ L_3 & g_2 \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

Observações: Se $\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} \neq 0$, (4.7) é um operador diferencial de ordem n , logo:

- i. O sistema (4.5) pode ser decomposto em duas equações diferenciais de ordem n em x e y .
- ii. A equação característica e a função complementar de cada uma dessas equações diferenciais são as mesmas.
- iii. Como x e y contêm ambas n constantes, aparecem um total de $2n$ constantes.
- iv. O número total de constantes *independentes* na solução do sistema é n .

Se $\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = 0$ em (4.5) o sistema pode ter uma solução contendo um número arbitrário de constantes independentes ou não ter nenhuma solução. De maneira similar, as observações valem para sistemas maiores do que o indicado em (4.5).

Se considerarmos o sistema de equações a seguir

$$x' = 3x - y - 1$$

$$y' = x + y + 4e^t.$$

Podemos reescrever o sistema em termos de operadores diferenciais

$$\begin{aligned} Dx - 3x + y &= -1 \\ x(D - 3) + y &= -1 \\ Dy - x - y &= 4e^t \\ -x + y(D - 1) &= 4e^t \end{aligned}$$

aplicando o determinante, temos

$$\begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -1 & D-3 \\ 4e^t & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D-3 & -1 \\ -1 & 4e^t \end{vmatrix}.$$

Após desenvolver os cálculos, simplificando temos que

$$\begin{aligned} (D-2)^2 &= 1 - 4e^t \\ (D-2)^2 &= -1 - 8e^t. \end{aligned}$$

Utilizando os métodos usuais, obtemos

$$\begin{aligned} x &= x_c + x_p = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{4} - 4e^t \\ y &= y_c + y_p = c_3 e^{2t} + c_4 t e^{2t} - \frac{1}{4} - 8e^{2t} \end{aligned}$$

se levamos essas duas equações no sistema $y' = x + y + 4e^t$ decorre que

$$(c_3 - c_1 + c_2)e^{2t} + (c_4 - c_2)te^{2t} = 0$$

o que implica,

$$c_4 = c_2 \quad \text{e} \quad c_3 = c_1 - c_4 = c_1 - c_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{4} - 4e^t \\ y(t) &= (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2 t e^{2t} - \frac{1}{4} - 8e^t. \end{aligned}$$

Observação: O símbolo D à esquerda deve ser tratado como uma grandeza algébrica, o que não é o caso com o membro a direita.

4.1.3. Método da Transformada de Laplace

O método é baseado na Transformada de Laplace, cuja definição matemática é dada no capítulo 3. Desde que as condições iniciais sejam especificadas, a Transformada de Laplace reduz o sistema de equações lineares com coeficientes constantes a um conjunto de equações algébricas simultâneas nas funções transformadas.

Exemplo 4.1: Resolva

$$2x' + y' - y = t$$

$$x' + y' = t^2$$

sujeito às condições $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$.

Solução: Se $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ e $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, então após transformar cada equação, usando as tabelas de transformadas, obtemos

$$2[sX(s) - x(0)] + [sY(s) - y(0)] - Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$[sX(s) - x(0)] + [sY(s) - y(0)] = \frac{2}{s^3}$$

ou, de forma simplificada

$$2sX(s) + Y(s)(s - 1) = 2 + \frac{1}{s^2}$$

$$sX(s) + sY(s) = 1 + \frac{2}{s^3}.$$

Multiplicando a segunda equação por -2 e subtraindo, temos que

$$(s - 1)Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$$

$$Y(s) = \frac{4-s}{s^3(s+1)}.$$

Por frações parciais,

$$\frac{4-s}{s^3(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1}$$

de modo que

$$4 - s = As^2(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s+1) + Ds^3$$

Fazendo $s = 0$ e $s = -1$ na última equação, obtemos $C = 4$ e $D = -5$, respectivamente, e igualando os coeficientes de s_3 e s_2 em ambos os membros da igualdade, decorre que $A + D = 0$ e $A + B = 0$. Desse modo, temos que os valores de $A = 5$ e $B = -5$. Portanto,

$$Y(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1},$$

e assim, aplicando $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$, segue que

$$\begin{aligned} y(t) &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}. \end{aligned}$$

Agora, pela segunda equação, temos

$$X(s) = -Y(s) + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^4}$$

donde

$$\begin{aligned} x(t) &= -\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{2}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} \\ &= -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5e^{-t}. \end{aligned}$$

Por fim, concluímos que a solução do sistema é

$$\begin{aligned} x(t) &= -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5e^{-t} \\ y(t) &= 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.2: Aplique a transformada de Laplace para resolver o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x \end{cases}, \quad x(0) = 0 \text{ e } y(0) = 1.$$

Solução: Após aplicar a transformada de Laplace e suas respectivas condições, obtemos

$$\begin{aligned} X(s)(s+1) - Y(s) &= 0 \\ -2X(s) + sY(s) &= 1. \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira transformada por s e somando as equações, isolamos $X(s)$ e eliminamos $Y(s)$, logo

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2},$$

Mas, por frações parciais

$$\frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 2}$$

onde, $A = \frac{1}{3}$ e $B = -\frac{1}{3}$, logo,

$$X(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s - 1} + \frac{-\frac{1}{3}}{s + 2}.$$

Assim,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}.$$

Agora multiplicando a segunda equação por $\frac{2}{s+1}$ e somando os sistemas, eliminaremos $X(s)$ e isolando $Y(s)$, temos

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2}.$$

Por frações parciais,

$$\frac{s+1}{s^2+s-2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2}$$

onde, $A = \frac{2}{3}$ e $B = -\frac{1}{3}$, logo

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{s+2}$$

e assim

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t}.$$

Finalmente, a solução do sistema dado é

$$x(t) = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}$$

$$y(t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t}.$$

Exemplo 4.3: Resolva o sistema de equações diferenciais por eliminação sistemática ou por determinante e por fim, utilize a transformada de Laplace para resolver o mesmo sistema.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y \end{cases}$$

Solução:

Método 1: Eliminação Sistemática

Reescrevendo em forma de operadores , temos que

$$Dx - x + 2y = 0$$

$$Dy - 5x + y = 0$$

ou de forma equivalente,

$$(D - 1)x + 2y = 0$$

$$-5x + (D + 1)y = 0 .$$

Aplicando $\frac{5}{D-1}$ à primeira equação equivalente e simplificando, obtemos

$$D^2y + 9y = 0,$$

ou ainda

$$y'' + 9y = 0 .$$

Como as raízes da equação auxiliar são $m_1 = 3i$ e $m_2 = -3i$, obtemos

$$y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Multiplicando a segunda equação equivalente por $\frac{-2}{D+1}$ e subtraindo, eliminamos y do sistema, obtemos a equação diferencial em x , $(D^2 + 9)x = 0$. Decorre imediatamente que

$$x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Método 2: Transformada de Laplace

Solução: Para utilizar o método de Laplace, vamos considerar as condições iniciais $x(0) = -1$ e $y(0) = 2$.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y \end{cases}$$

Se $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, então, após transformar cada equação, obtemos

$$sX(s) - x(0) = X(s) - 2Y(s)$$

$$sY(s) - y(0) = 5X(s) - Y(s)$$

ou, de forma equivalente

$$X(s)(s - 1) + 2Y(s) = -1$$

$$-5X(s) + Y(s)(s + 1) = 2.$$

Multiplicando a segunda equação equivalente por $-\frac{2}{s+1}$, eliminando $Y(s)$, vem

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{-s - 5}{s^2 + 9} \\ &= -\frac{s}{s^2 + 9} + \frac{-5}{s^2 + 9} \end{aligned}$$

e assim, $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = -\cos 3t - \frac{5}{3}\sin 3t$.

Se multiplicarmos à primeira equação por $\frac{5}{s-1}$, eliminaremos o $X(s)$ do sistema, e obtemos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-7 + 2s}{s^2 + 9} \\ &= \frac{-7}{s^2 + 9} + \frac{2s}{s^2 + 9}. \end{aligned}$$

Desse modo, ao aplicarmos a Transformada inversa de Laplace, temos

$$y(t) = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\sin 3t.$$

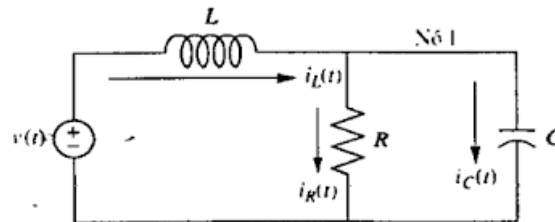
4.2.APLICAÇÕES

Nas aplicações anteriores, vimos que para descrever um problema, em sistema físico, uma única equação diferencial seria suficiente para sua resolução. No entanto, se formamos um circuito RLC em paralelo, conforme ilustrado na Figura 8, ou se tivermos duas massas molas ilustrado pela Figura 9 será necessário duas ou mais equações simultâneas para representar o movimento das massas ou as respostas da rede.

Como vimos na seção anterior, existem alguns métodos para resolver sistema de equações, como a eliminação algébrica sistemática de variáveis e a utilização de

determinantes. Nessa última seção, faremos uso da transformada de Laplace para resolver sistema de equações e veremos a sua aplicação em algumas modelagens.

Figura 8: Um circuito RLC em paralelo.



Fonte: Carneiro.

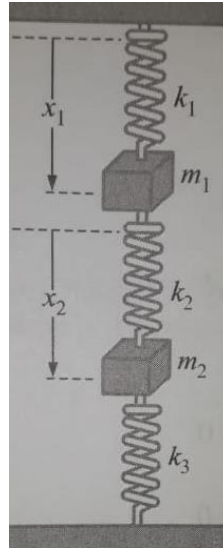
4.2.1. Em mecânica

Tendo como exemplo um sistema de massa mola na Figura 9, onde as massas se movem em uma superfície sem atrito sob a influência de forças externas $F_1(t)$ e $F_2(t)$, elas são restringidas em seus movimentos pelas três molas com constantes K_1 , K_2 e K_3 , respectivamente.

Os sistemas de equações diferenciais ordinárias simultâneas apresentam-se espontaneamente em problemas envolvendo diversas variáveis dependentes, cada uma sendo uma função da mesma variável independente. Podemos denotar a variável independente por t e as variáveis dependentes, que são funções de t , por $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. É importante destacar que a diferenciação em relação a t será denotada por um apóstrofo⁴.

⁴ Por exemplo, x_1' , que se lê “ x_1 linha”.

Figura 9: Um sistema com duas massas e três molas.



Fonte: Zill e Cullen, 2001.

Como o nosso foco não é a modelagem dos sistemas de massa mola, omitiremos a parte de dedução, cuja equação do movimento da massa é dada por

$$mu''(t) + yu'(t) + ku(t) = F(t). \quad (4.8)$$

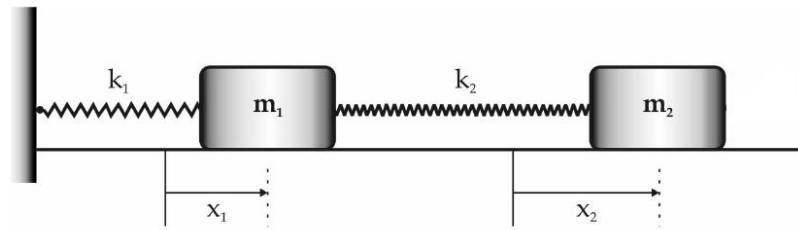
Usando argumentos semelhantes, encontramos as seguintes coordenadas x_1 e x_2 para as duas massas:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + F_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\ &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para um sistema de duas molas acopladas, no qual iremos trabalhar, o raciocínio será o mesmo, no entanto a equação será modificada de acordo com o que for especificado no problema físico. O movimento do sistema acoplado de duas molas, ilustrado pela Figura 10 é representado pelo sistema de equações diferenciais de segunda ordem simultâneas

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Exemplo 4.4: Resolva o sistema (4.10) ilustrado pela Figura 10 quando $k_1 = 6, k_2 = 4, m_1 = 1$ e $m_2 = 1$, sujeito às condições $x_1(0) = 0, x_1'(0) = 1, x_2(0) = 0, x_2'(0) = -1$.

Figura 10: Duas Molas**Fonte:** Lima, 2019.**Solução:** Substituindo os valores dos coeficientes constantes no sistema, segue que

$$x_1'' + 10x_1 - 4x_2 = 0$$

$$-4x_1 + x_2'' + 4x_2 = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace nas equações, temos que

$$[s^2 X_1(s) - s x_1(0) - x_1'(0)] + 10X_1(s) - 4X_2(s) = 0$$

$$X_1(s)(s^2 + 10) - 4X_2(s) = 1$$

$$-4X_1(s) + [s^2 X_2(s) - s x_2(0) - x_2'(0)] + 4X_2(s) = 0$$

$$-4X_1(s) + X_2(s)(s^2 + 4) = -1$$

onde $X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}$ e $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}$.Procedendo como nos exemplos anteriores, após eliminarmos X_2 , decorre que

$$X_1(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)}.$$

Utilizando as frações parciais podemos escrever

$$\frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} = \frac{As + B}{s^2 + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 12}$$

$$s^2 = (As + B)(s^2 + 12) + (Cs + D)(s^2 + 2)$$

$$s^2 = s^3(A + C) + s^2(B + D) + s(12A + 2C) + (12B + 2D)$$

Comparando os membros que tem s em cada membro da última igualdade, obtemos

$$A + C = 0$$

$$B + D = 1$$

$$12A + 2C = 0$$

$$12B + 2D = 0$$

de forma que, $A = 0$, $B = -1/5$, $C = 0$, $D = 6/5$.

Logo,

$$X_1(s) = -\frac{\frac{1}{5}}{s^2 + 2} + \frac{\frac{6}{5}}{s^2 + 12}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{5\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} \right\} + \frac{6}{5\sqrt{12}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10} \text{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5} \text{sen}2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Para encontrar $X_2(s)$, iremos eliminar $X_1(s)$ do sistema, então

$$X_2(s) = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)}$$

com o auxílio das frações parciais, obtemos

$$X_2(s) = -\frac{\frac{2}{5}}{s^2 + 2} - \frac{\frac{3}{5}}{s^2 + 12}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{2}{5\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} \right\} - \frac{3}{5\sqrt{12}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12} \right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{5} \text{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{5} \text{sen}2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a solução do sistema dado é

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{5} \text{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{5} \text{sen}2\sqrt{3}t \\ y(t) &= \frac{\sqrt{2}}{10} \text{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5} \text{sen}2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

4.2.2. Em Elétrica

De maneira análoga a seção anterior, um circuito elétrico com mais de uma malha também dá origem a equações diferenciais simultâneas, vamos considerar um circuito RL em

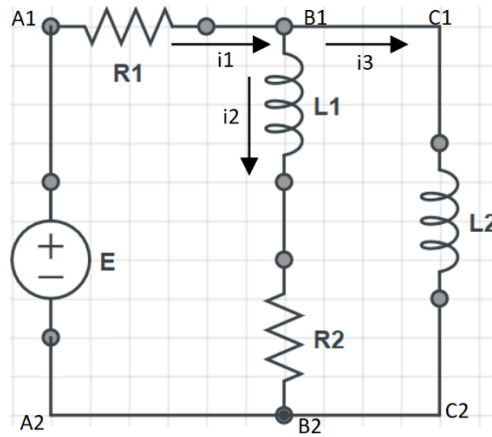
paralelo conforme ilustrado pela Figura 11. Aplicando a primeira *Lei de Kirchhoff*, nos pontos de ramificação podemos obter a corrente $i_1(t)$, dada por

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t). \quad (4.11)$$

Agora, se aplicarmos a segunda *Lei de Kirchhoff* em cada malha do circuito somando as diferenças de tensão, obtemos a queda de tensão $E(t)$ para a malha $A_1B_1B_2A_1$ é dada por

$$E(t) = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2. \quad (4.12)$$

Figura 11: Circuito RL.



Fonte: Autoria Própria, 2019.

De maneira análoga para a malha $A_1B_1C_1C_2B_2A_1$, é dada por

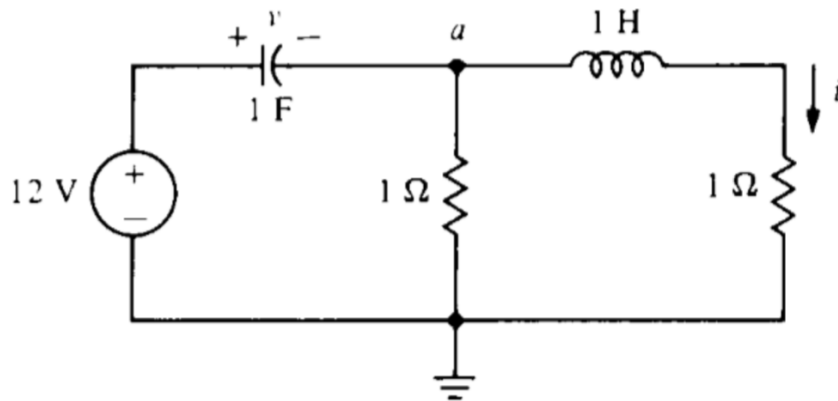
$$E(t) = i_1 R_1 + L_2 \frac{di_3}{dt}. \quad (4.13)$$

Manuseando a Equação (4.22) para eliminar a corrente i_1 em (4.23) e (4.24), obtém-se duas equações de primeira ordem para as correntes corrente $i_2(t)$ e $i_3(t)$:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_3 &= E(t) \\ L_2 \frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + R_1 i_3 &= E(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

No entanto, se as condições iniciais naturais forem dadas como, por exemplo, $i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$, podemos resolver o sistema utilizando a transformada de Laplace.

Exemplo 4.5: Calcule i para $t > 0$ no circuito da Figura 12, se $v(0) = 4 \text{ V}$ e $i(0) = 2 \text{ A}$.

Figura 12: Circuito de segunda ordem.

Fonte: JOHNSON, HILBURN e JOHNSON, 1994.

Solução: A equação do nó a é dada por: $a = \frac{12-v}{1}$.

Observações: Analisaremos o sistema pelas correntes do circuito, ou seja

$$i_c = i_R + i$$

onde,

$$i = i_L = i_R.$$

1º Passo: Analisa o circuito e aplica as equações de nó no nó a .

$$i_c = \frac{12 - v}{1} + i$$

$$C \frac{dv}{dt} = 12 - v + i, \text{ para } C = 1 \text{ F}$$

$$\frac{dv}{dt} + v + i = 12 \quad (i)$$

2º Passo: Aplica a equação da malha.

$$\frac{12 - v}{1} = \frac{v_L}{1} + i$$

$$12 - v = L \frac{di}{dt} + i, \text{ para } L = 1 \text{ H}$$

$$\frac{di}{dt} + i + v = 12 \quad (ii)$$

É importante destacar, que poderíamos eliminar v entre as equações (i) e (ii), e resolver a equação de segunda ordem em i . Contudo, com o método da Transformada de

Laplace, transformamos primeiramente cada equação e então resolvemos as equações algébricas resultantes para a transformada de v . Transformando as equações, temos

$$sV(s) - 4 + V(s) - I(s) = \frac{12}{s}$$

$$sI(s) - 2 + I(s) + V(s) = \frac{12}{s}$$

onde $V(s)$ e $I(s)$ são, respectivamente, as transformadas de v e i . Eliminando $V(s)$ e simplificando, temos

$$I(s) = \frac{2(s+5)}{s^2+2s+2} = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{8}{(s+1)^2+1}.$$

Por conseguinte, a corrente é

$$i(t) = e^{-t}(2\cos t + 8\sin t) \text{ A.}$$

5. MATERIAIS E MÉTODOS

O presente trabalho busca, através de uma revisão bibliográfica, junto com todo embasamento teórico, teoremas matemáticos e a apresentação de exemplos na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), demonstrar a importância da aplicação da transformação de Laplace em sistemas de equações diferenciais lineares no âmbito educacional da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). Para isso utilizamos a plataforma online de pesquisa onde buscamos artigos e monografias publicados nessa área, a fim de obtermos um aprofundamento no assunto tratado pelo trabalho.

A metodologia desse trabalho é de caráter dissertativo onde buscamos apresentar as principais definições, propriedades e resultados dos conceitos que são pré-requisitos para o nosso objeto de estudo, a Transformada de Laplace e sua aplicação na resolução de sistemas de equações diferenciais lineares. Com base nessa revisão, encontrar formas de compreender as dúvidas dos alunos da graduação, principalmente os discentes de exatas e engenharias.

6. CONCLUSÃO

Apesar do seu alto grau de complexidade, a Transformada de Laplace está presente de maneira recorrente na literatura da área das ciências exatas e tecnológicas, e mais especificamente nas de engenharia. Pelo que pudemos observar, tal conceito é apresentado sempre da mesma forma, não havendo uma inovação em termos de apresentação e aplicação dos seus resultados.

Tendo em vista a extensa ementa apresentada em Equações Diferenciais, utilizamos o método de Laplace para resolver problemas de sistemas físicos em equações diferenciais. O estudo aqui é limitado ao conjunto de números reais, mas tal estudo pode ser estendido para abranger o conjunto de números complexos. Além da aplicabilidade para resolução dos sistemas em problemas matemáticos, podemos vê-la em diversas aplicações como, por exemplo, problemas práticos da engenharia que envolvam sistemas mecânicos ou elétricos sob ação de forças descontínuas ou de impulsos. Para estes tipos de problemas, os métodos vistos em Equações Diferenciais, são difíceis de serem aplicados.

Nesse trabalho, voltamos nossa atenção à teoria e resolução de sistemas de equações diferenciais lineares simultâneos ou, simplesmente, sistemas lineares, em que todos os coeficientes são constantes. A aplicação da Transformada de Laplace, “transforma” um conjunto de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes em um conjunto de equações algébricas lineares, que são mais fáceis de serem manipulados. Além disso, ela incorpora os valores iniciais das correntes e tensões automaticamente nas equações algébricas. Desse modo, as condições iniciais são uma parte inerente do processo de cálculo da Transformada.

Durante o desenvolvimento da pesquisa de cunho acadêmico, procuramos apresentar as definições e teoremas para demonstração da Transformada de Laplace de maneira clara, com exemplos práticos. Além disso, este trabalho apresentou uma revisão de conceitos preliminares que pode servir de suporte teórico para os leitores que consultarem o mesmo. Todavia, a pesquisa corroborou para execução deste trabalho, permitiu confirmar a efetividade da transformada de Laplace para resolver os sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes ou problemas com valor inicial.

Este trabalho foi pautado no estudo teórico sobre as aplicações da Transformada de Laplace, em especial a aplicação na resolução de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem, presentes nas formas variadas de ensino realizadas pelos professores

dentro e fora das salas de aula, visando melhoria significativa no ensino e aprendizagem. Em meio a tantas dificuldades enfrentadas pelos alunos ao estudar a disciplina acima mencionada, esse trabalho se propôs a fazer um estudo detalhado desse conceito, construindo assim um material de apoio para alunos de graduação.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 600 p. Tradução Claus Ivo Doering.

BASSANEZI, Rodney Carlos; FERREIRA JUNIOR, Wilson Castro. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1988.

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. Tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório.

BRASIL, Tutor. **Pêndulo**. Disponível em: <https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=72560>>. Acesso em: 12 jul. 2019.

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel B. **Equações Diferenciais**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. 400 p. (Coleção Schaum). Tradução Fernando Henrique Silveira.

BRONSON, Richard. **Moderna Introdução as Equações Diferenciais**. São Paulo: Mcgraw-hill do Brasil, 1976. (Schaum). Tradução: Alfredo Alves de Farias; revisão técnica: Roberto Romano.

CARNEIRO, Marcos Lajovic. **Sistema de Controle 1: Modelagem no domínio do tempo**. (notas de aula). Departamento Pontifícia Universidade Católica Escola de Engenharia.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. Florianópolis: Pearson Prentice Hall, 2006. 464 p.

GILLISPIE, C. C. **Pierre-Simon Laplace, 1749-1827: a life in exact science**. Editora Princeton University Press. 9a edição. New Jersey. 1997.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo, volume 2**, 5a. edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

JOHNSON, David E.; HILBURN, John L.; JOHNSON, Johnny R. **FUNDAMENTOS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS**. 4 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 556. 1994.

KREYSZIG, Erwin. **Matemática Superior para engenharia**. 9. ed. Rio de Janeiro: Editora Ltc, 2009. (Volume 1).

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1994. Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra.

LIMA, Paulo Cupertino de. **Equações Diferenciais A**. (notas de aula). 2019. Departamento de Matemática - UFMG.

MATOS, Marivaldo P. **Séries e Equações Diferenciais Ordinárias**. 3. Ed. João Pessoa. UFPBVIRTUAL.

PACHECO, Antonio Luiz Schalata. **Transformada de Laplace: Algumas Aplicações**. 2011. 84 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Florianópolis, 2011.

PAINS, Clarissa. **Livro consolida novo método para ensino da física**. Entrevista divulgada em 03/05/2010. Disponível em: <<http://puc-riodigital.com.puc-rio.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=6626&sid=56#.XRORLfZFxPa>>. Acesso em: 26 jun. 2019.

QUARTIERI, Marli Teresinha; BORRAGINI, Eliana Fernandes; DICK, Ana Paula. **Superação de Dificuldades no Início dos Cursos de Engenharia: Introdução ao Estudo de Física e Matemática**. 2012. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/7/artigos/103697.pdf>>. Acesso em: 25 jun. 2019.

SPIEGEL, Murray R. **Transformada de Laplace**. Porto Alegre: Mcgraw-hill, 1965. Tradução de: Roberto Ribeiro Baldino.

TONIDANDEL, Danny Augusto Vieira; ARAÚJO, Antônio Emílio Angueth de. **Transformada de Laplace: uma obra de engenharia**. 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/262651536_Transformada_de_Laplace_uma_obra_de_engenharia>. Acesso em: 14 maio 2019.

VASCONCELOS, S.D.; SOUTO, E. O livro didático de ciências no ensino fundamental – proposta de critérios para análise do conteúdo zoológico. *Ciência & Educação*, v. 9, p. 93104. 2003.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2001. 1 v.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2001. 2 v.