

COMPARAÇÃO DE TEMPOS DE CÁLCULO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE FUNÇÕES ESSENCIAIS

Vitória Ellen da Silva Sousa

Resumo

Integral numérica é uma forma de se calcular integrais sem a necessidade de se buscar primitivas de funções. No entanto, a quantidade de cálculos necessários para se obter resultados precisos pode ser alta. O objetivo deste trabalho é comparar diversos métodos numéricos de integração e determinar qual é o melhor, no sentido de menor tempo de cálculo. Para isso, tomamos como exemplos tipos de funções descritas por [Stewart \(2017\)](#) como “essenciais”, escolhendo três funções de cada tipo para calcular a integral. Em seguida, implementamos os algoritmos no *software Scilab* e buscamos calcular as integrais com sete dígitos de precisão. Para determinar a quantidade necessária de iterações para alcançar tal precisão, utilizamos abordagem de bissecção. Para contabilizar o tempo de cálculo, utilizamos os comandos `tic()` e `toc()`. Foram coletadas cinco medidas de tempo para cada método e tomamos as medianas destas. Chegamos à conclusão que o método de Romberg obteve os melhores tempos.

Palavras-chaves: integração numérica; método dos trapézios, métodos de simpson, método de romberg.

Abstract

Numerical integrals are a way of calculating integrals without the need to look for primitives of functions. However, the number of calculations required to obtain accurate results can be high. The aim of this work is to compare several numerical integration methods and determine which is the best, in the sense of the shortest calculation time. To do this, we took as examples types of functions described by [Stewart \(2017\)](#) as “essential”, choosing three functions of each type to calculate the integral. We then implemented the algorithms in *software Scilab* and tried to calculate the integrals with seven-digit precision. To determine the number of iterations needed to achieve this precision, we used a bisection approach. To measure the calculation time, we used the `tic()` and `toc()` commands. We collected five time measurements for each method and took their medians. We concluded that Romberg’s method obtained the best times.

Keywords: numerical integration, trapezoidal method, simpson’s method, romberg’s method.

1 INTRODUÇÃO

A concepção de integral mais utilizada no ensino superior em nosso país é a descrita por Bernhard Riemann no seu artigo publicado no ano de 1695, que mostra que a integral pode ser definida como infinitas somas de pequenas áreas abaixo de uma curva.

Podemos citar também como origem do conceito de integral os estudos de Henri Léon Lebesgue com o artigo “*Sur une généralisation de l’intégrale définie*” publicado em 1901.

A integral definida pode ser calculada por uma série infinita de Riemann (STEWART, 2017, p. 380) ou por meio do teorema fundamental do cálculo (STEWART, 2017, p. 395). No entanto, em alguns casos, é difícil (ou mesmo impossível) calcular a integral por estes métodos (RUGGIERO, 2002, p. 295).

Para estas situações indica-se utilizar integração numérica. Este tipo de integração envolve cálculos fundamentais, como somas e multiplicações, que surgem de uma combinação linear dos valores da função que está sendo integrada (FRANCO, 2006, p. 327).

Na literatura, existem diversas formas de integração numérica (RUGGIERO, 2002, pg. XII). O intuito deste trabalho é reunir algumas destas formas e compará-las quanto a precisão e custo computacional. Levantamos portanto a seguinte pergunta: “existe um melhor método?”. Para respondermos vamos apresentar aplicações desses métodos em integrais e observar como o resultado foi obtido, em relação a tempo de cálculos e a precisão de casas decimais.

2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

O método da integração numérica, segundo Chapra e Canale (2016), baseia-se em achar o valor da integral de uma função f de forma aproximada. O objetivo desse método é facilitar os cálculos, principalmente quando f é difícil de integrar pelos métodos matemáticos convencionais estudados na disciplina de Cálculo. As definições de métodos numéricos de integração foram retiradas de Chapra e Canale (2016) e Ruggiero (2002).

2.1 Regra do Trapézio

Segundo Chapra e Canale (2016), a regra do trapézio corresponde ao caso no qual representamos a função f como um polinômio de primeiro grau f_1 ,

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_1(x) dx. \quad (1)$$

Uma reta pode ser representada como

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \quad (2)$$

Portanto a área sob essa reta é uma estimativa da integral de $f(x)$ entre os extremos a e b :

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx. \quad (3)$$

O resultado desta integração, pelo teorema fundamental do cálculo, é

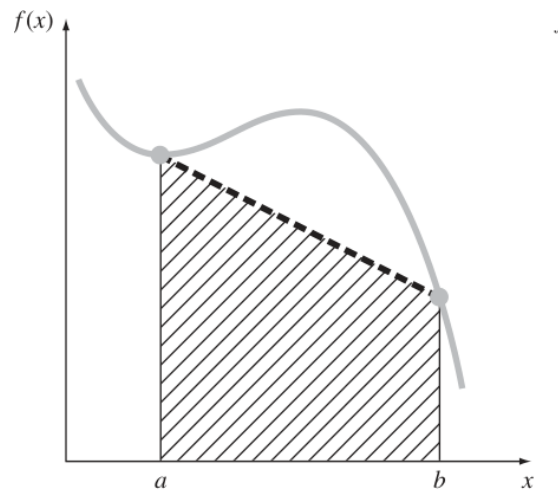
$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}, \quad (4)$$

que é chamada *regra do trapézio*.

Observe, pela figura 1, que I é a área do trapézio de bases $f(a)$ e $f(b)$ com altura $(b - a)$.

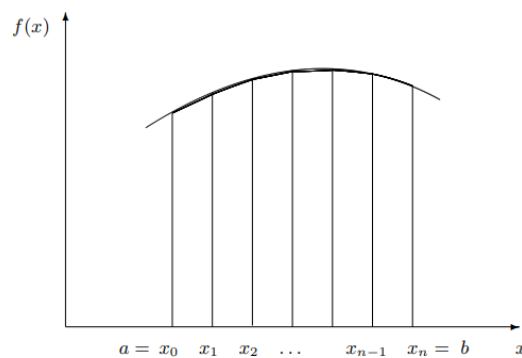
Para melhorar a precisão dos cálculos, repartimos o intervalo $[a, b]$ em n segmentos iguais, de comprimento h , representado na figura 2, e aplicamos a regra do trapézio sobre

Figura 1 – Regra do trapézio.



Fonte: [Chapra e Canale \(2016\)](#).

Figura 2 – Regra do trapézio generalizada.



Fonte: [Franco \(2006\)](#).

cada segmento. A soma destas partes se aproxima do resultado da integração de uma função f .

Desse modo, temos que o resultado da integral

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (5)$$

considerando a partição de $[a, b]$ pelos pontos igualmente espaçados $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, pode ser calculada numericamente como

$$I = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)). \quad (6)$$

2.2 Regra 1/3 de Simpson

De maneira análoga, podemos aproximar f por um polinômio de grau 2, denotado por f_2 , para aproximar a integral

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_2(x) dx. \quad (7)$$

Designe a e b por x_0 e x_2 , e x_1 como o ponto médio de a e b . Integrando o polinômio de grau 2, obtemos

$$I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \quad (8)$$

A generalização da regra 1/3 de Simpson para integração ao longo de um intervalo $[a, b]$ é feita dividindo-se $[a, b]$ em um número $2N$ de subintervalos de amplitude $h = (b - a)/2N$ de tal forma que $x_0 = a$, $x_{2N} = b$. Note que o número de subdivisões deve ser par, pois precisamos de dois subintervalos (e portanto de 3 pontos) para aplicar uma vez a regra.

Temos então, segundo [Chapra e Canale \(2016\)](#)

$$I \approx (b - a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n} \quad (9)$$

2.3 Regra 3/8 de Simpson:

Novamente de maneira análoga, aproximamos f por um polinômio de grau 3,

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_3(x) dx \quad (10)$$

para fornecer

$$I \approx \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)], \quad (12)$$

em que $h = (b-a)/3$. Esta equação é a regra de 3/8 de Simpson. Para a regra 3/8 de Simpson repetida devemos dividir o intervalo $[a, b]$ em um número de subintervalos de amplitude $h = (b - a)/3N$ de tal forma que $x_0 = a$, $x_{3N} = b$. O número de subdivisões deve ser múltiplo de 3, pois precisamos de 3 subintervalos (e portanto de quatro pontos) para aplicar. Temos então, segundo [Franco \(2012\)](#),

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{3N}} f(x) dx \approx & \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) \\ & + 3(f(x_4) + 3f(x_5)) + 2f(x_6) + \\ & \dots \\ & + 2f(x_{3N-3}) + 3(f(x_{3N-2}) + 3f(x_{3N-1})) + f(x_{3N})]. \end{aligned} \quad (13)$$

2.4 Integração de Romberg

De acordo com [Justo et al. \(2018, p. 252\)](#), o método de Romberg é um algoritmo projetado para construir quadraturas de alta ordem de forma iterativa a partir do método dos trapézios. Considere o método de trapézios composto aplicado à integral

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (14)$$

Ainda segundo [Justo et al. \(2018\)](#), existe um teorema que diz que se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo (a, b) , então a integral dessa função citada na equação (6) da

regra do trapézio repetido, admite uma representação na forma:

$$I(h_0) = I_0 + I_2 h^2 + I_6 h^6 + \dots, \quad (15)$$

onde I_n é a integral dos trapézios com n repetições.

A ideia do método de Romberg consiste em usar a extrapolação de Richardson para construir métodos de maior ordem a partir dos métodos dos trapézios para o intervalo (a, b) . Usamos agora uma eliminação gaussiana para obter o termo I_0 :

$$\frac{4I(\frac{h}{2}) - I(h)}{3} = I_0 - \frac{1}{4} I_4 h^4 - \frac{5}{16} I_6 h^6 + \dots \quad (16)$$

Aplicando a fórmula para $h = b - a$,

$$I(h) = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] \quad (17)$$

$$I(h/2) = \frac{h}{4} [f(a) + 2f(c) + f(b)], \quad c = \frac{a+b}{2}. \quad (18)$$

$$\frac{4I(h/2) - I(h)}{3} = \frac{h}{6} [f(a) + 2f(c) + f(b)] - \frac{h}{6} [f(a) + f(b)] \quad (19)$$

$$= \frac{h}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)]. \quad (20)$$

Para deduzir o caso geral, utilizaremos a seguinte notação:

$$R_{1,1} = I(h), \quad (21)$$

$$R_{2,1} = I(h/2), \quad (22)$$

$$R_{3,1} = I(h/4), \quad (23)$$

$$: \quad (24)$$

$$R_{n,1} = I(h/2^{n-1}). \quad (25)$$

Observamos que os pontos envolvidos na quadratura $R_{k,1}$ são os mesmos pontos envolvidos na quadratura $R_{k-1,1}$ acrescidos dos pontos centrais, assim, temos a seguinte fórmula de recorrência:

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} R_{k-1,1} + \frac{h}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{k-2} f\left(a + (2i-1)\frac{h}{2^{k-1}}\right) \quad (26)$$

$$R_{k,2} = \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} \quad (27)$$

Os valores $R_{k,2}$ representam então os valores obtidos pelo método de Simpson composto aplicado a uma malha composta de $2^{k-1} + 1$ pontos.

Similarmente os valores de $R_{k,j}$ são os valores obtidos pela quadratura de ordem $2j$ obtida via extrapolação de Richardson. Pode-se mostrar que

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \quad (28)$$

3 TESTES DE VELOCIDADE

Nesta seção iremos comparar os tempos de cálculos necessários para obter a integral de diversas funções.

3.1 Metodologia

Baseando-se na lista de “funções essenciais” proposta por [Stewart \(2017\)](#), tomaremos três exemplos de cada função, a saber: afim, polinomial, racionais, trigonométricas, inversas trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Em seguida buscaremos a quantidade de repetições dos métodos numéricos necessárias para obter a solução com 7 dígitos corretos. Utilizaremos a abordagem da bisseção para obter esta quantidade de repetições, da seguinte forma: observamos a integral exata obtida pelo teorema fundamental do cálculo. Depois tomamos um n_l e um n_u que representariam “poucas repetições” e “repetições demais”, respectivamente. Tomaremos então a média entre n_l e n_u e observaremos se esta média representa “poucas repetições” ou “demais” e redefiniremos x_l e x_u de acordo. Repetiremos este processo até obter n inteiro de maneira que $n - 1$ forneça um valor diferente de integral.

Para medir o tempo de cálculo, utilizamos os comandos `tic()` e `toc()` do *Scilab* para contar o tempo de cálculo da integral numérica. Faremos esta medição cinco vezes e consideraremos a mediana entre os tempos.

3.2 Dados coletados

Para representar as funções afim, tomaremos $f_1(x) = x/2 + 9$, $f_2(x) = 2x + 9$ e $f_3(x) = x$. Calcularemos a integral de $f_1(x)$ entre o intervalo $[0, 9]$, entre $[0, 12]$ em $f_2(x)$ e no intervalo de $[1, 15]$ na função $f_3(x)$, ou seja,

$$\int_0^9 \frac{1}{2}x + 9 \, dx, \quad (29)$$

$$\int_0^{12} 2x + 5 \, dx, \quad (30)$$

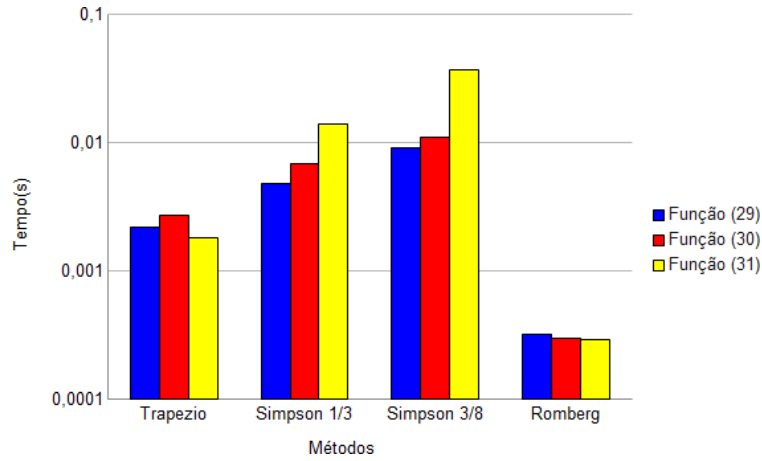
$$\int_1^{15} x \, dx. \quad (31)$$

Os resultados obtidos estão apresentados no gráfico da figura 3 e os dados (deste e dos demais) podem ser consultados nas tabelas disponibilizadas no anexo.

Para representar as integrais de funções racionais, nos deparamos com os casos nos quais a função possui descontinuidade. De acordo com [Stewart \(2017\)](#), existem descontinuidades do tipo assintótica e do tipo de salto. Enquanto o primeiro tipo impede o cálculo de integral, o segundo não.

Tomaremos exemplos que representam estes dois tipos de descontinuidade.

Figura 3 – Comparação dos tempos de cálculo das integrais de funções afim.



Fonte: Autoria própria (2024).

$$f_4(x) = \frac{(x-1)e^{x^2}}{x-1}, \quad (32)$$

$$f_5(x) = \frac{5x-3}{(x+1)^2}, \quad (33)$$

$$f_6(x) = \frac{x^9 + 2x}{(x^2 + 1)}. \quad (34)$$

As duas primeiras funções possuem descontinuidade do tipo furo e assintótica, respectivamente; e a terceira, nenhuma. Integraremos nos intervalos $[0, 5]$, $[0, 15]$ e $[0, 1]$. Tomamos estes intervalos com o cuidado de evitar os pontos de descontinuidade do tipo assintótica.

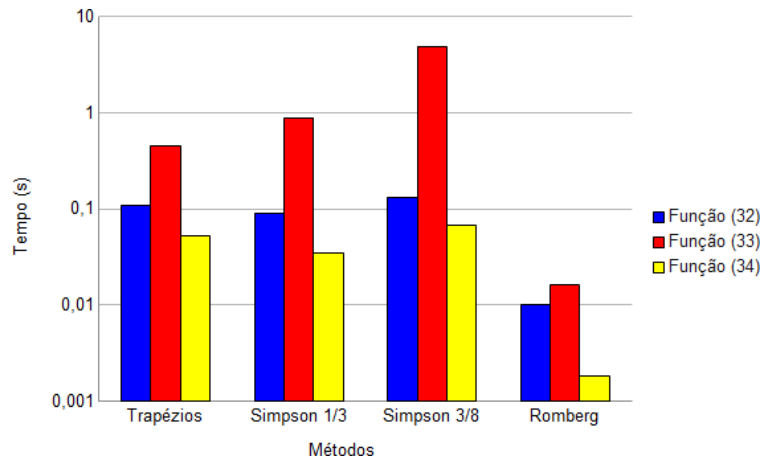
Um comentário acerca da descontinuidade do tipo furo da função (32): ainda que seja possível integrar uma função com esse tipo de descontinuidade, segundo [Stewart \(2017, p. 148\)](#), a integração numérica apresentou problemas. Ao discretizar o domínio, o algoritmo calculou a imagem da função onde estava a descontinuidade e isso impossibilitou o cálculo da integral. Para contornar esse problema pensamos em duas estratégias, uma seria mudar os pontos obtidos na discretização e a outra opção seria definir outra função que calcula

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (35)$$

no ponto a de descontinuidade, que foi a abordagem utilizada. Os resultados obtidos estão apresentados no gráfico da figura 4.

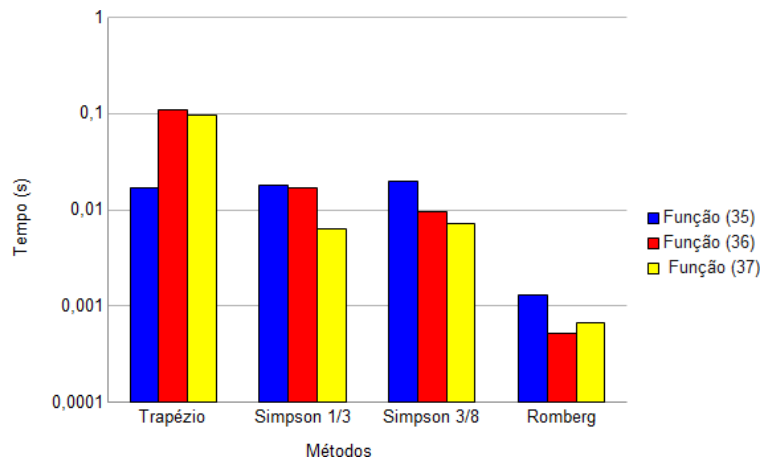
As funções polinomiais e exponenciais têm como características em comum serem contínuas em todo seu domínio.

Figura 4 – Comparação dos tempos de cálculo das integrais de funções racionais.



Fonte: Autoria própria (2024).

Figura 5 – Comparação dos tempos de cálculo das integrais de funções polinomiais.



Fonte: Autoria própria (2024).

Para os testes de funções polinomiais escolhemos as integrais

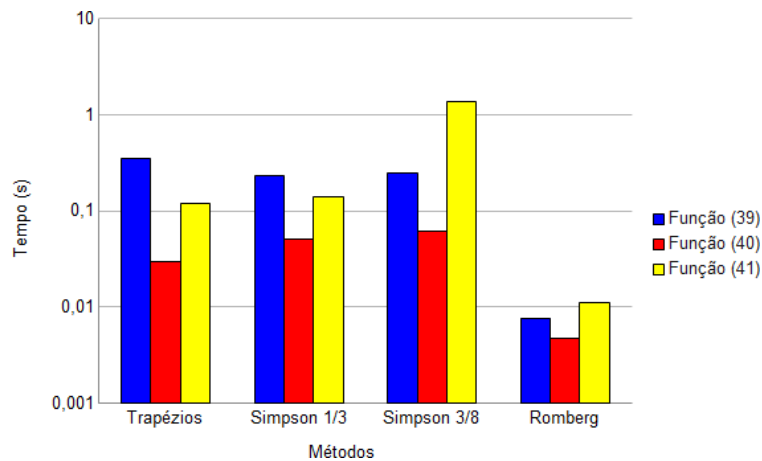
$$\int_{-20}^{20} (x^6 + 2x^3) dx, \quad (36)$$

$$\int_{-25}^{25} (x^3 + 2x^2 + x) dx, \quad (37)$$

$$\int_{-30}^{30} (2x^2 - 3x + 1) dx \quad (38)$$

e apresentamos os resultados no gráfico da figura 5.

Figura 6 – Comparação dos tempos de cálculo das integrais de funções exponenciais.



Fonte: Autoria própria (2024).

Para os testes de funções exponenciais escolhemos as integrais

$$\int_0^{35} \frac{1}{2} x dx, \quad (39)$$

$$\int_0^{40} e^x dx, \quad (40)$$

$$\int_0^{45} e^{x^2} dx \quad (41)$$

e exibimos os resultados no gráfico 6.

Para representar as integrais de funções trigonométricas, nos deparamos com os casos nos quais a função possui descontinuidades do tipo assintótica, semelhante aos casos de funções racionais.

Para os testes de funções trigonométricas escolhemos as integrais

$$\int_0^{40} \sin^2(x) \cos^3(x) dx \quad (42)$$

$$\int_0^{45} \sin^4(x) dx \quad (43)$$

$$\int_0^1 \tan(x) dx \quad (44)$$

e listamos os resultados no gráfico 7.

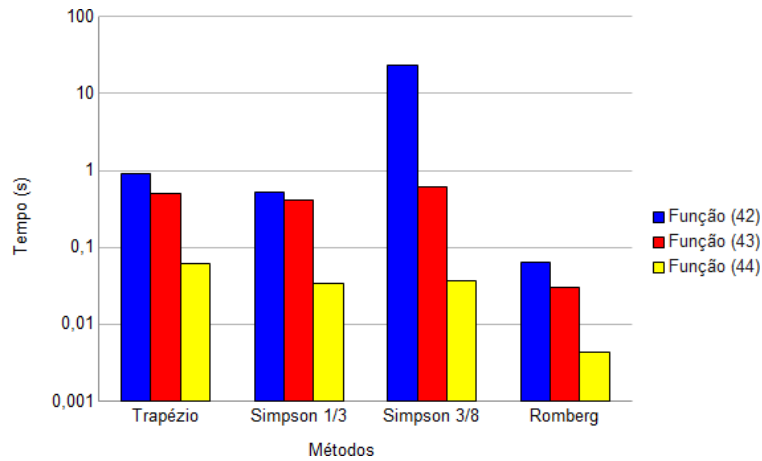
Calcularemos agora as integrais de funções inversas trigonométricas, que possuem também casos de descontinuidades do tipo assintótica. Escolhemos as integrais

$$\int_0^4 \arcsin \frac{1}{4} x dx \quad (45)$$

$$\int_0^2 \arccos \frac{1}{4} x dx \quad (46)$$

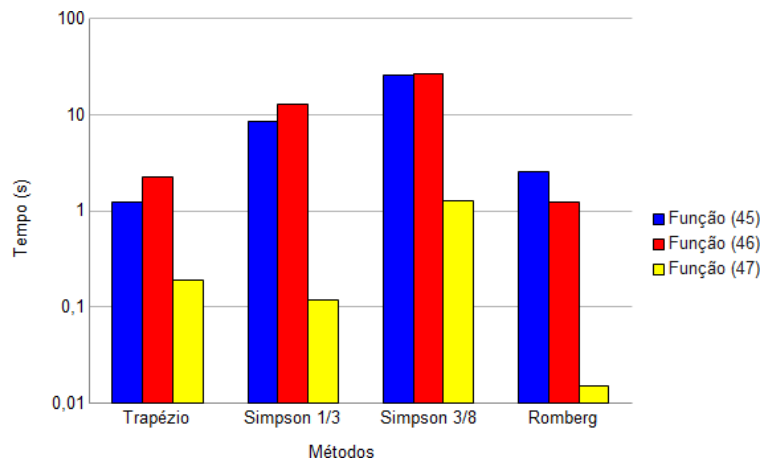
$$\int_0^{20} \arctan \frac{x}{2} dx \quad (47)$$

Figura 7 – Comparação dos tempos de cálculo das integrais de funções trigonométricas.



Fonte: Autoria própria (2024).

Figura 8 – Comparação dos tempos de cálculo das integrais de funções inversas trigonométricas.



Fonte: Autoria própria (2024).

cujos tempos de cálculo estão disponibilizados no gráfico 8.

A função logarítmica é a inversa da função exponencial. O domínio é o conjunto dos números reais positivos e o contradomínio é o conjunto dos números reais. Vale salientar também que a base do logaritmo tem que ser necessariamente maior que 0 e diferente de 1.

Para os testes das funções logarítmicas escolhemos as integrais

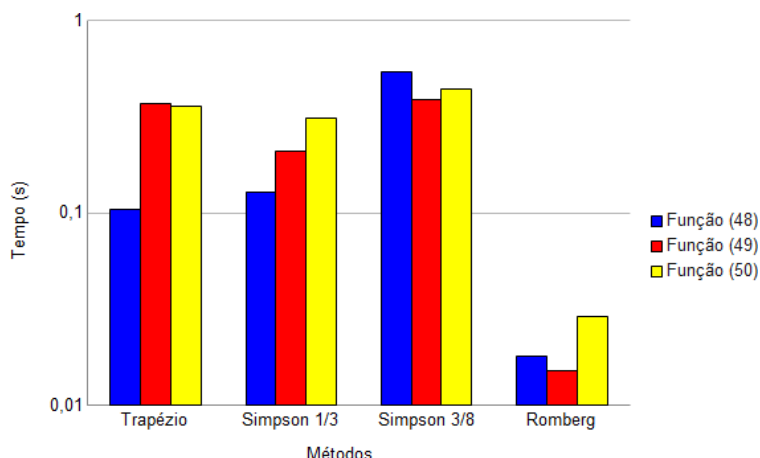
$$\int_1^{40} \ln x dx \quad (48)$$

$$\int_0^{45} (\ln(x+1) - 2) dx \quad (49)$$

$$\int_1^{50} \log_{10} x dx \quad (50)$$

e apresentamos os tempos de cálculo no gráfico 9.

Figura 9 – Comparação dos tempos de cálculo das integrais de funções logarítmicas.



Fonte: Autoria própria (2024).

4 CONCLUSÃO

Analizando os tempos de cálculo, percebemos que, em geral, o método de Romberg leva menos tempo calculando.

Durante a coleta de dados percebemos também que certos tipos de funções necessitam de grande quantidade de cálculos para obter a precisão de sete dígitos, o que implica em tempos maiores de cálculo.

As funções afim tiveram bons tempos com o método dos trapézios pois o gráfico da função é formado de retas.

Observações a serem feitas nos testes de funções racionais é que o método do trapézio não forneceu uma precisão nas últimas duas casas decimais. A aproximação foi muito próxima mas não o valor exato no gabarito. O mesmo aconteceu com o método 1/3 de Simpson no primeiro exemplo de função racional, na equação (32).

No segundo exemplo de função racional, equação (33), o trapézio e 1/3 de Simpson não chegaram ao resultado exato. Já no método 3/8 de Simpson a máquina chegou ao resultado indicado pelo gabarito mas o tempo gasto nos cálculos foi muito grande: quase cinco segundos, de acordo com a tabela 5.

Com os dados registrados na tabela 7 notamos que o número de intervalos n necessário para achar o resultado mais aproximado do gabarito da integral é o mesmo tanto na regra de Simpson 1/3 como no Simpson 3/8. O que diferencia qual seria mais adequada neste caso seria o tempo gasto para realizar as operações e, com isso, Simpson 1/3 se torna a escolha ideal.

Na tabela 8, que se refere aos cálculos de integral de função polinomial, novamente o trapézio não alcançou o resultado do gabarito, mesmo precisando de um número maior de intervalos n , o que aumentou a quantidade de tempo gasto para calcular o resultado. Em contrapartida, o método 3/8 de Simpson teve um bom resultado, uma vez que a função integrada era um polinômio de grau 3, justamente o polinômio descrito no método. Utilizou apenas 15 intervalos chegou ao valor exato do gabarito dessa integral e com o menor tempo médio.

Na integral da tabela 10, que trata da função exponencial, o método de Simpson 3/8 necessitou o segundo maior número de intervalos n . Isso ocorreu pois polinômios de grau 3 possuem inflexões (zeros da segunda derivada), diferente da função exponencial. Porém entregou o resultado com exatidão, diferente dos métodos do trapézio e 1/3.

Na tabela da função 13, trigonométrica, o método 3/8 de Simpson teve tempo de cálculo maior se comparado a outras funções devido a periodicidade dessa função e isso tornar o cálculo mais extenso. Isso foi ampliado pois o intervalo de integração tinha comprimento 40. Neste intervalo couberam pelo menos 27 pontos de máximo ou mínimo.

Sobre Romberg a mediana dos tempos das funções foram os menores entre todos os métodos, com exceção do tempo da função 47 que registrou a marca acima de um segundo, todos os outros tempos registraram uma quantidade abaixo de um segundo.

Com base no comportamento deste grupo de funções essenciais escolhidas para análise e nos tempos obtidos pelo *Scilab*, o melhor método seria o algoritmo de Romberg.

Referências

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*. 7. ed. Porto Alegre: McGraw Hill Brasil, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 2, 3 e 4.

FRANCO, N. B. *Cálculo numérico*. São Paulo: Pearson, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

JUSTO, D. et al. *Cálculo Numérico: um livro colaborativo—Versão Scilab*. 2018. Disponível em: <<https://www.ufrgs.br/reatmat/CalculoNumerico/livro-sci/main.html>>. Acesso em 29.02.2024. Citado na página 4.

RUGGIERO, M. *Cálculo numérico, aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2002. Citado na página 2.

STEWART, J. *Cálculo*. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 6 e 7.

APÊNDICE A – Tempos de cálculo obtidos com os comandos tic() e toc(), em segundos.

Em todas estas tabelas, considere a seguinte legenda:

n Número de iterações utilizado.
 t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 Tempos obtidos, em segundos, nas experiências 1, 2, 3, 4 e 5 respectivamente.
 t_m Mediana entre t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 .

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	1	0,0030	0,0020	0,0021	0,0020	0,023	0,0022
Simpson $\frac{1}{2}$	4	0,0048	0,0049	0,0061	0,0046	0,0039	0,0048
Simpson $\frac{3}{8}$	12	0,0089	0,010	0,0091	0,025	0,0092	0,0092
Romberg	1	0,00045	0,00036	0,00030	0,00032	0,00032	0,00032

Tabela 1 – Cálculo da integral da função afim 1, eq. (29)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	1	0,014	0,0027	0,0027	0,0021	0,0027	0,0027
Simpson $\frac{1}{2}$	10	0,0096	0,0069	0,0079	0,011	0,0075	0,0069
Simpson $\frac{3}{8}$	15	0,0086	0,011	0,011	0,0109	0,011	0,011
Romberg	1	0,00036	0,00030	0,00033	0,00029	0,00029	0,00030

Tabela 2 – Cálculo da integral da função afim 2, eq. (30)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	1	0,0018	0,0019	0,0018	0,0016	0,0017	0,0018
Simpson $\frac{1}{2}$	20	0,011	0,012	0,011	0,016	0,014	0,014
Simpson $\frac{3}{8}$	57	0,036	0,040	0,037	0,034	0,044	0,037
Romberg	1	0,00033	0,00041	0,00029	0,00029	0,00028	0,00029

Tabela 3 – Cálculo da integral da função afim 3, eq. (31)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	2100	0,099	0,11	0,11	0,108	0,11	0,108
Simpson $\frac{1}{8}$	180	0,099	0,089	0,11	0,089	0,091	0,091
Simpson $\frac{3}{8}$	300	0,13	0,14	0,13	0,14	0,13	0,13
Romberg	8	0,010	0,012	0,011	0,010	0,009	0,010

Tabela 4 – Integral da função racional 1, eq. (32).

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	10000	0,51	0,46	0,44	0,44	0,54	0,46
Simpson $\frac{1}{8}$	990	0,96	0,74	0,61	0,89	0,98	0,89
Simpson $\frac{3}{8}$	12000	4,95	4,97	4,95	4,95	5,06	4,95
Romberg	9	0,016	0,016	0,014	0,015	0,016	0,016

Tabela 5 – Integral da função racional 2, eq. 33.

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	1200	0,075	0,053	0,065	0,052	0,052	0,053
Simpson $\frac{1}{8}$	70	0,032	0,038	0,042	0,035	0,031	0,035
Simpson $\frac{3}{8}$	150	0,077	0,071	0,065	0,085	0,068	0,068
Romberg	5	0,0017	0,0017	0,0018	0,0019	0,0019	0,0018

Tabela 6 – Integral da função racional 3, eq. 34.

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	330	0,015	0,015	0,019	0,017	0,024	0,017
Simpson $\frac{1}{8}$	30	0,018	0,015	0,022	0,016	0,019	0,018
Simpson $\frac{3}{8}$	30	0,020	0,019	0,022	0,017	0,020	0,020
Romberg	4	0,0016	0,0013	0,0013	0,0015	0,0011	0,0013

Tabela 7 – Integral da função polinomial 1, eq. 36

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	2700	0,11	0,10	0,098	0,097	0,11	0,11
Simpson $\frac{1}{8}$	30	0,018	0,018	0,017	0,016	0,015	0,017
Simpson $\frac{3}{8}$	15	0,014	0,0081	0,0082	0,0106	0,0096	0,0096
Romberg	2	0,0024	0,00054	0,00047	0,00051	0,00052	0,00052

Tabela 8 – Integral da função polinomial 2, eq. 37

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	2500	0,12	0,093	0,097	0,10	0,089	0,097
Simpson $\frac{1}{8}$	10	0,0078	0,0059	0,0063	0,0077	0,0063	0,0063
Simpson $\frac{3}{8}$	9	0,0074	0,0051	0,0069	0,0071	0,00904	0,0071
Romberg	2	0,0010	0,00053	0,00091	0,00062	0,00067	0,00067

Tabela 9 – Integral da função polinomial 3, eq. (38)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	9000	0,36	0,35	0,35	0,36	0,35	0,35
Simpson $\frac{1}{8}$	400	0,23	0,22	0,25	0,21	0,24	0,23
Simpson $\frac{3}{8}$	500	0,25	0,27	0,31	0,24	0,23	0,25
Romberg	8	0,0084	0,0085	0,0076	0,0077	0,0074	0,0077

Tabela 10 – Cálculo da integral da função exponencial 1, eq. (39)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	700	0,030	0,027	0,029	0,032	0,032	0,030
Simpson $\frac{1}{8}$	100	0,051	0,047	0,051	0,055	0,055	0,051
Simpson $\frac{3}{8}$	120	0,063	0,061	0,066	0,058	0,059	0,061
Romberg	7	0,0068	0,0047	0,0043	0,0049	0,0044	0,0047

Tabela 11 – Cálculo da integral da função exponencial 2, eq. (40)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	3000	0,13	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12
Simpson $\frac{1}{8}$	300	0,13	0,14	0,15	0,14	0,15	0,14
Simpson $\frac{3}{8}$	3000	1,37	1,37	1,39	1,35	1,54	1,37
Romberg	11	0,011	0,0094	0,0096	0,011	0,018	0,011

Tabela 12 – Cálculo da integral da função exponencial 3, eq. (41)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	19000	0,91	0,92	0,91	0,91	0,95	0,91
Simpson $\frac{1}{8}$	1200	0,52	0,54	0,52	0,55	0,52	0,52
Simpson $\frac{3}{8}$	50000	23,02	22,73	23,47	24,22	24,68	23,47
Romberg	11	0,065	0,061	0,063	0,064	0,071	0,063

Tabela 13 – Cálculo da integral da função trigonométrica 1, eq. (42)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	13000	0,50	0,52	0,57	0,51	0,51	0,51
Simpson $\frac{1}{8}$	1000	0,42	0,41	0,42	0,42	0,41	0,42
Simpson $\frac{3}{8}$	1500	0,62	0,62	0,61	0,62	0,75	0,62
Romberg	10	0,0301	0,028	0,030	0,031	0,026	0,030

Tabela 14 – Cálculo da integral da função trigonométrica 2, eq. (43)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	1600	0,061	0,061	0,057	0,060	0,060	0,061
Simpson $\frac{1}{8}$	50	0,037	0,034	0,029	0,028	0,036	0,034
Simpson $\frac{3}{8}$	60	0,034	0,038	0,035	0,036	0,051	0,036
Romberg	6	0,0055	0,0037	0,0044	0,0057	0,0038	0,0044

Tabela 15 – Cálculo da integral da função trigonométrica 3, eq. (44)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	30000	1,25	1,28	1,22	1,26	1,17	1,25
Simpson $\frac{1}{8}$	16000	9,37	8,58	8,36	8,58	7,34	8,58
Simpson $\frac{3}{8}$	60000	24,62	25,85	30,04	26,12	25,92	25,85
Romberg	17	2,56	2,45	2,53	2,61	2,82	2,56

Tabela 16 – Cálculo da integral da função inversa trigonométrica 1, eq. (45)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	59900	2,26	2,24	2,25	2,26	2,33	2,26
Simpson $\frac{1}{8}$	30000	12,64	13,74	12,83	12,94	15,22	12,94
Simpson $\frac{3}{8}$	60000	26,81	26,99	25,89	28,39	27,05	26,99
Romberg	16	1,21	1,22	1,27	1,24	1,29	1,24

Tabela 17 – Cálculo da integral da função inversa trigonométrica 2, eq. (46)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	5000	0,22	0,19	0,19	0,17	0,18	0,19
Simpson $\frac{1}{8}$	250	0,12	0,12	0,13	0,11	0,14	0,12
Simpson $\frac{3}{8}$	3000	1,28	1,23	1,27	1,33	1,79	1,28
Romberg	9	0,013	0,015	0,016	0,015	0,082	0,015

Tabela 18 – Cálculo da integral da função inversa trigonométrica 3, eq. (47)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	2400	0,1132	0,1084	0,1042	0,1006	0,1046	0,1042
Simpson $\frac{1}{8}$	300	0,129	0,126	0,133	0,124	0,142	0,129
Simpson $\frac{3}{8}$	1200	0,56	0,54	0,54	0,53	0,61	0,54
Romberg	9	0,018	0,014	0,019	0,016	0,023	0,018

Tabela 19 – Cálculo da integral da função logarítmica 1, eq. (48)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	10000	0,41	0,37	0,39	0,37	0,36	0,37
Simpson $\frac{1}{8}$	500	0,21	0,21	0,23	0,20	0,27	0,21
Simpson $\frac{3}{8}$	900	0,39	0,38	0,38	0,45	0,42	0,39
Romberg	9	0,015	0,017	0,015	0,016	0,014	0,015

Tabela 20 – Cálculo da integral da função logarítmica 2, eq. (49)

método	n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_m
Trapézio	10000	0,35	0,36	0,39	0,36	0,36	0,36
Simpson $\frac{1}{8}$	750	0,30	0,31	0,30	0,36	0,33	0,31
Simpson $\frac{3}{8}$	900	0,39	0,37	0,38	0,39	0,37	0,44
Romberg	10	0,024	0,029	0,029	0,022	0,030	0,029

Tabela 21 – Cálculo da integral da função logarítmica 3, eq. (50)