

CÁLCULO DO COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO NORMAL DE COLISÕES VISCOELÁSTICAS ATRAVÉS DE SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

André Monteiro Rocha¹
Carlos Handrey Araújo Ferraz²

RESUMO

Este artigo objetiva calcular computacionalmente o coeficiente de restituição normal (e) em colisões viscoelásticas de esferas, que quantifica a capacidade de dois corpos colidirem e se separarem, conservando parte da energia cinética inicial. Utilizando o programa `sphere.f90` em Fortran 90 e a dinâmica molecular, o estudo emprega o método de Verlet para a integração numérica das equações de movimento, considerando parâmetros como módulo de Young, coeficiente de amortecimento e densidade da partícula. Os resultados das simulações são apresentados graficamente, destacando a relação entre o coeficiente de restituição normal e diferentes velocidades de impacto. Os resultados evidenciam que materiais mais rígidos tendem a ter coeficientes de restituição menores, indicando uma menor capacidade de recuperação da forma original após a colisão. O estudo conclui que a compreensão teórica e computacional das colisões viscoelásticas é crucial para a análise de fenômenos físicos e o avanço tecnológico. O método de dinâmica molecular, combinado com as equações de Hertz, revelou-se uma abordagem valiosa para simular e compreender o comportamento de colisões frontais. A variação do módulo de Young e do coeficiente de amortecimento tem um impacto significativo no coeficiente de restituição, influenciando a capacidade de absorção e recuperação de energia durante as colisões. Este estudo fornece uma base sólida para análises mais aprofundadas nesse campo.

Palavras-chave: Módulo de Young. Energia Cinética. Dinâmica Molecular. Método de Verlet.

1 INTRODUÇÃO

O estudo das colisões é importante porque as colisões são fenômenos físicos que ocorrem com frequência no dia a dia e em diversas escalas, desde colisões macroscópicas,

¹ Aluno regularmente matriculado no curso de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFRSA

² Professor, Doutor - Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFRSA

como acidentes de trânsito, até colisões microscópicas, como as que ocorrem em reatores nucleares. Além disso, as colisões podem produzir efeitos de diversas ordens na natureza, alterando suas formas, sua funcionalidade e gerando consequências ao meio interagente em sentido amplo. O estudo das colisões permite entender como os corpos interagem entre si, trocando energia e momento, e como essas interações podem ser descritas e analisadas matematicamente. Isso é fundamental para a compreensão de diversos fenômenos físicos e para o desenvolvimento de tecnologias que utilizam esses princípios, como a indústria automobilística e a aeronáutica. De acordo com (Nussenzveig, 2013, p.210), “uma colisão entre duas partículas é um processo em que uma é lançada contra a outra, podendo trocar energia e momento em consequência de sua interação”.

Neste trabalho é apresentado um estudo de simulações computacionais sobre colisão viscoelástica. Esse fenômeno, refere-se a um tipo de colisão entre objetos onde a energia cinética é dissipada devido às características viscosas e elásticas dos materiais envolvidos. Nesse tipo de colisão, parte da energia é convertida em calor devido a deformação elástica e ao atrito interno dos materiais. Isso resulta em uma redução na velocidade final dos objetos após a colisão, em comparação com uma colisão perfeitamente elástica. O fator determinante que motiva o presente estudo, é a necessidade do entendimento das colisões por meio de uma modelagem não só teórica, mas também simulada de forma computacional.

Este trabalho, portanto, objetiva calcular computacionalmente o coeficiente de restituição normal (e) em colisões viscoelásticas. Com isto em mente tentaremos entender como modelos teóricos podem contribuir para o entendimento destes sistemas, buscando sempre valores teóricos do coeficiente de restituição (e) que se aproximem ao máximo dos valores reais.

Para a simulação experimental de sistemas de colisão de esferas utilizou-se o programa `sphere.f90`, escrito em Fortran 90, como ferramenta de simulação, e o método de dinâmica molecular, para simular os movimentos das esferas. O programa desenvolvido por nós, foi utilizado como ferramenta de cálculos computacionais para calcular o coeficiente de restituição. Um outro ponto que será abordado por este trabalho é a aproximação das forças viscoelástica, derivada pela primeira vez por Heinrich Hertz (Hertziana) (Ferraz, 2021, p.2), e relacionado ao aspecto computacional do trabalho. Nosso intuito será a compreensão de aspectos fundamentais dos processos de colisão frontal. Com isso em mente, nos deteremos a responder a seguinte pergunta: como calcular coeficiente de restituição normal (e) por meio da dinâmica molecular de uma colisão frontal viscoelástica?

De acordo com o entendimento desse problema, as simulações trazem para o trabalho, uma fundamentação mais respaldada dos cálculos demonstrados teoricamente. Por fim, todos os resultados obtidos estarão dispostos graficamente, possibilitando um entendimento mais amplo da característica do coeficiente de restituição normal em um sistema de colisão de esferas.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Estudo das colisões

O estudo de colisões na física é uma área que investiga o que acontece quando dois ou mais corpos interagem entre si trocando energia, e seguindo as leis da conservação da energia existem dois tipos principais de colisões: perfeitamente elásticas e perfeitamente inelásticas.

Uma colisão perfeitamente elástica é aquela em que a energia cinética total e o momento linear são conservados antes e depois da colisão. Isso significa que após a colisão, os objetos continuam se movendo sem perder energia cinética e sem deformações permanentes. Um exemplo aproximado de uma colisão perfeitamente elástica é o encontro entre bolas de bilhar. Já quando se trata das colisões perfeitamente inelásticas, temos um exemplo aproximado; onde uma bala de arma de fogo (projétil) atinge um pêndulo balístico (alvo) e permanecem juntos e em movimento. Porém o objeto de estudo desse trabalho não são esses tipos de colisões, conforme citado anteriormente, a abordagem é sobre a ótica das colisões viscoelástica. Enunciaremos a seguir, as equações de contato de Hertz para partículas.

2.1.1 Equações das forças de Hertz

A teoria de Hertz é utilizada na modelagem da colisão entre esferas viscoelásticas para incluir as propriedades elásticas das esferas. Isso permite investigar características da colisão, como tempo de impacto, força impulsiva, área de contato e coeficiente de restituição. Os resultados experimentais são comparados com valores teóricos provenientes do tratamento convencional e da teoria de Hertz (Arnold, *et al*, 2017).

Para solução do problema de interação (contato) entre dois sólidos viscoelásticos de revolução, o uso devido das equações de Hertz se constitui uma ferramenta fundamental, essa teoria foi desenvolvida em 1882. Para derivar tal solução, Hertz partiu de algumas hipóteses base que importa recordar:

- i. Deve ser levado em consideração que: o material dos sólidos em contato tem um comportamento homogêneo, isotrópico e linear elástico, de acordo com a lei de Hooke;
- ii. Considera-se também que: os sólidos são de revolução, as suas superfícies são contínuas e contraformais, sendo conhecidos os seus raios principais de curvatura na vizinhança do ponto inicial de contacto;
- iii. E ainda que a sollicitação aplicada é puramente normal, e as superfícies não transmite trações tangenciais (superfícies sem atrito) (Seabra, 2003, p.61).

Obviamente as equações de Hertz podem se referir a diversos conceitos, para este estudo abordaremos apenas às equações de colisão de Hertz. Elas estão relacionadas à teoria das colisões em física. Essas equações foram introduzidas por Heinrich Hertz para descrever a interação entre objetos duros que entram em contato um com o outro (Ferraz, 2021, p.2).

2.1.2 Uma descrição da equação da força de contato normal de Hertz

As equações de colisões de Hertz para objetos esféricos são:

$$m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_j \vec{F}_{ij}^n, \quad (1)$$

e

$$\vec{F}_{ij}^n = \left[\frac{2}{3} E \sqrt{R} \delta_n^{3/2} - \gamma E \sqrt{R} \delta_n^{1/2} (\vec{v}_{ij} \cdot \hat{n}_{ij}) \right] \hat{n}_{ij}, \quad (2)$$

sendo a força de contato viscoelástica normal.

A equação 2, descreve a função matemática da força normal de contato viscoelástica de Hertz, onde $\vec{F}_{ij}^n$ é a força de contato normal, ou seja, a força que atua perpendicularmente à superfície de contato entre os dois corpos, i e j são os índices que identificam as partículas. Temos ainda que $\hat{n}_{ij}$ representa o vetor unitário e pode ser descrito como: $\hat{n}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}$, onde $\vec{r}_{ij}$ indica a posição relativa entre as partícula no espaço.

E é o módulo de elasticidade dos materiais envolvidos, isso indica a rigidez do material e quão facilmente ele deforma sob pressão, ou seja, é uma propriedade do material. O modulo de elasticidade E pode ser calculado utilizando;

$$E = Y / (1 - \xi^2). \quad (3)$$

Onde, o módulo de Young Y é uma medida da rigidez de um material quando submetido a uma tensão uniaxial. Ele descreve a relação entre a tensão aplicada e a deformação resultante, especificamente na direção da tensão aplicada. O módulo de elasticidade E é diretamente proporcional ao coeficiente de Young. Assim, o coeficiente de Young é fundamental para determinar o módulo de elasticidade de um material. Quanto maior o coeficiente de Young, maior será o módulo de elasticidade, o que indica uma maior rigidez do material. Portanto, o coeficiente de Young desempenha um papel crucial na caracterização das propriedades elásticas de um material e na compreensão de como ele se comporta sob tensão. Na equação 3, temos ainda, o coeficiente Poisson ξ que é uma medida da capacidade de um material de se deformar lateralmente quando submetido a uma tensão uniaxial. Ele é importante para o módulo de elasticidade porque está relacionado com a capacidade do material de redistribuir o estresse aplicado. Materiais com coeficientes de Poisson diferentes terão diferentes comportamentos de deformação sob tensão, afetando assim o módulo de elasticidade. Em geral, materiais com coeficientes de Poisson mais altos tendem a ser mais deformáveis lateralmente e podem ter módulos de elasticidade menores. Já (γ) indica o coeficiente de amortecimento que serve para determinar a rapidez com que a energia cinética é dissipada durante a colisão, enquanto o coeficiente de restituição descreve a capacidade do objeto de recuperar sua forma original após a colisão.

Retomando a equação 2, tem-se ainda que o $\bar{R}$ define o raio efetivo das esferas de raio R_i e R_j em contato. Este termo refere-se ao raio das superfícies em contato, que são geralmente aproximadas por superfícies esféricas e pode ser definido pela expressão a seguir:

$$\bar{R} = R_i R_j / (R_i + R_j). \quad (4)$$

Ainda pela equação 2, temos que δ representa a deformação elástica, ou seja, a quantidade pela qual os corpos são comprimidos um contra o outro. Essa deformação é elástica, o que significa que os corpos voltarão à sua forma original quando a força for removida, conforme a figura 1, esse parâmetro pode ser ilustrado como uma superposição (*Overlap*) e pode ser calculado pela equação a seguir:

$$\delta_n = (R_i + R_j) - (|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|). \quad (5)$$

De acordo com (Ferraz, 2021, p. 2) as equações anteriores, descrevem a força de contato e a deformação resultante de uma colisão entre duas esferas sólidas. Vale ressaltar que as equações de Hertz são simplificações e assumem certas condições ideais. Em casos mais complexos, outras considerações e equações adicionais podem ser necessárias. A perda relativa de energia durante a colisão de duas esferas viscoelásticas pode ser medida avaliando o coeficiente de restituição normal definido por

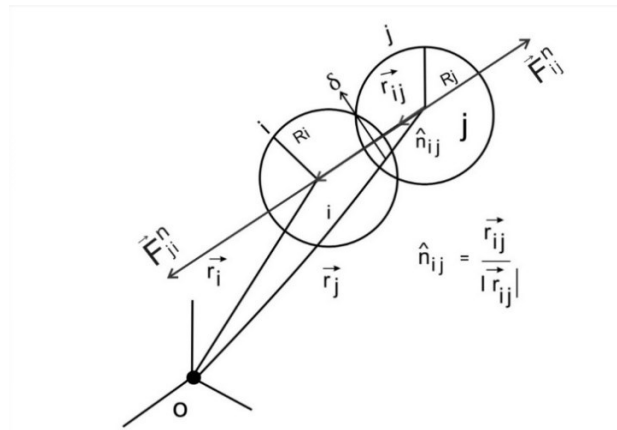
$$e = -\frac{\dot{\delta}_n(t_c)}{\dot{\delta}_n(0)}. \quad (6)$$

Na equação acima, o termo (t_c) , indica o tempo de colisão, e a velocidade de impacto $v \equiv \dot{\delta}_n(0)$ é dada por

$$v = \frac{[\vec{v}_i(0) - \vec{v}_j(0)] \cdot [\vec{r}_i(0) - \vec{r}_j(0)]}{R_i + R_j}. \quad (7)$$

A figura 1, a seguir, ilustra o diagrama das forças de contato normal de Hertz envolvidas em uma colisão frontal viscoelástica, de acordo com a equação 2:

Figura 1- Diagrama dos parâmetros da equação da força de contato normal de Hertz.



Fonte: Autoria própria, (2023).

2.1.2 Definição do coeficiente de restituição (e).

O coeficiente de restituição normal (e), também conhecido como coeficiente de restituição elástica, é uma medida que descreve a capacidade de dois corpos colidirem e se separarem, mantendo parte da energia cinética inicial. Ele varia de 0 a 1, onde 0 representa uma colisão perfeitamente inelástica (nenhuma separação após a colisão) e 1 representa uma colisão perfeitamente elástica (os corpos se separam sem perda de energia cinética). De acordo com (Meira Filho; Kamassury; Meira, 2017, P.2).

“Seja em escala atômica, seja em escala macroscópica, a quantidade de eventos de colisão em nosso cotidiano é considerável e, portanto, os esforços em estudos que aumentam nossa compreensão destas colisões são essenciais tanto para o ensino como para o desenvolvimento de futuras tecnologias. Em processos de colisão, o coeficiente de restituição está associado ao grau de elasticidade da colisão entre os corpos em questão e nos permite classificar as colisões como elásticas, inelásticas e super-elásticas. No entanto, não é habitual observar na literatura uma abordagem matemática ampla e detalhada para explicar, de forma didática, esta classificação, o que acarreta o surgimento de dúvidas sobre o coeficiente de restituição.” (Meira Filho; Kamassury; Meira, 2017, P.2).

Em uma colisão perfeitamente elástica, a energia cinética total antes e depois da colisão é a mesma, enquanto em uma colisão perfeitamente inelástica, parte da energia cinética inicial é convertida em outras formas de energia, como energia térmica ou deformação. Este coeficiente é amplamente utilizado na física e na engenharia para analisar colisões e interações entre objetos.

O coeficiente de restituição normal consiste na medida de elasticidade de uma colisão. Podemos reescrever de forma simples tal coeficiente para uma colisão entre duas partículas como:

$$e = \frac{|v'_2 - v'_1|}{|v_2 - v_1|} \quad (8)$$

$|v'_2 - v'_1|$, representa o módulo da velocidade relativa de afastamento (recessão) das partículas após a colisão, enquanto que $|v_2 - v_1| \neq 0$ representa o módulo da velocidade relativa de aproximação das partículas antes da colisão.

O coeficiente de restituição normal (e) também é chamado de *regra de Newton*, uma vez que o referido cientista descobriu experimentalmente que a proporção entre as velocidades relativas finais e as velocidades relativas iniciais no processo das colisões era aproximadamente constante para quaisquer dois corpos (Meira Filho; Kamassury; Meira, 2017).

3 METODOLOGIA DA SIMULAÇÃO

A modelagem matemática de colisões viscoelásticas frequentemente requer abordagens numéricas avançadas e a consideração de diversos parâmetros relacionados à viscosidade e elasticidade dos materiais. Nesse trabalho, além de mostrar cálculos matemáticos, utilizaremos também softwares computacionais para realizar as simulações (através de parâmetros pré-estabelecidos), do comportamento das esferas antes, durante e após a colisão entre esferas e através desse comportamento calcular o coeficiente de restituição normal do sistema.

O método de Verlet é bastante utilizado para a integração da equação de movimento de partículas interagentes, no qual são conhecidas todas as forças de interação internas (Scherer, 2005, p. 75).

A necessidade se lançar mão do método de Verlet se dá pelo fato de que geralmente, descrição matemática de uma colisão viscoelástica geralmente envolve equações diferenciais que modelam as deformações e as forças envolvidas nos materiais durante a colisão. Isso pode ser bastante complexo, dependendo da natureza dos materiais

e das condições específicas da colisão. Geralmente, são usadas equações que incorporam as leis de conservação de momento e energia, bem como modelos viscoelásticos para descrever o comportamento dos materiais durante a deformação e a recuperação da forma dos corpos.

3.1 Método Verlet

O método de Verlet é um algoritmo usado para integrar numericamente as equações de movimento de partículas em simulações de física ou dinâmica molecular. Ele é uma alternativa ao método de Euler e é mais preciso para simulações de sistemas que envolvem interações complexas (Cortes Henao, 2001, p.39).

O método de Verlet é baseado em uma expansão da série de Taylor para estimar a posição e a velocidade de uma partícula em intervalos de tempo discretos. Ele calcula a nova posição com base na posição atual, na posição anterior e nas forças atuando sobre a partícula. Isso permite uma melhor preservação da energia total do sistema ao longo do tempo, tornando-o especialmente útil para simulações de sistemas conservativos.

De acordo com (Scherer, 2005, p. 76) o método de Verlet tem duas fórmulas principais: uma para calcular a nova posição e outra para calcular a nova velocidade. As fórmulas podem variar dependendo do contexto específico da simulação e das equações de movimento envolvidas.

Aqui estão as formulas básicas do método de Verlet para a integração numérica das equações de movimento:

1. Atualização da posição:

$$x(t + \Delta t) = 2x(t) - x(t - \Delta t) + a(t) \cdot (\Delta t)^2 \quad (9)$$

Na equação 9, $x(t + \Delta t)$ é a nova posição no tempo $t + \Delta t$, o $x(t)$ é a posição atual no tempo, $x(t - \Delta t)$ é a posição anterior no tempo $t - \Delta t$, $a(t)$ é a aceleração no tempo t , e o passo de tempo é dado por (Δt) .

2. Atualização de velocidade:

$$v(t + \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t}. \quad (10)$$

Na equação 10, temos que $v(t + \Delta t)$ é a nova velocidade no tempo $t + \Delta t$, $x(t + \Delta t)$ é a nova posição no tempo $t + \Delta t$, temos ainda $x(t - \Delta t)$ como sendo a posição anterior no tempo $t - \Delta t$ e o Δt é o passo de tempo.

Essas fórmulas permitem atualizar a posição e a velocidade de uma partícula em intervalos discretos de tempo usando informações anteriores e atuais. O método de Verlet é iterativo e é aplicado repetidamente para simular o movimento da partícula ao longo do tempo. Vale lembrar de que as fórmulas exatas podem variar dependendo do contexto específico da simulação e das equações de movimento envolvidas. O método de Verlet é amplamente utilizado para simulações de dinâmica molecular e física de partículas.

Em resumo, o método de Verlet é uma técnica numérica eficaz para simulações físicas que requerem uma representação precisa do movimento de partículas em sistemas complexos. Ele ajuda a obter resultados mais estáveis e realistas em comparação com métodos mais simples, como o método de Euler. Em simulações mais complexas, como na dinâmica molecular, as partículas interagem entre si e com campos de força, tornando o método de Verlet uma ferramenta valiosa para modelar sistemas físicos realistas.

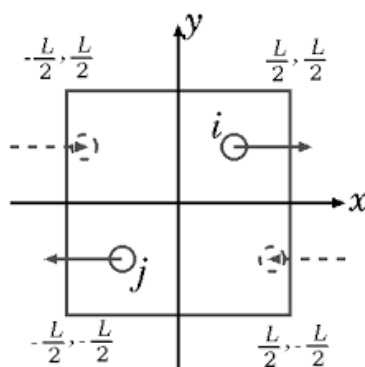
3.2 Dinâmica Molecular

A dinâmica molecular é uma técnica de simulação computacional que modela o movimento de átomos e moléculas em um sistema, de acordo com as leis da física, como as leis de Newton. Através da dinâmica molecular, é possível prever o comportamento das partículas em diferentes condições, como temperatura, pressão e interações entre as moléculas. Essa abordagem permite estudar fenômenos microscópicos em escalas de tempo e comprimento que não são acessíveis experimentalmente, fornecendo insights valiosos sobre a estrutura e dinâmica de sistemas moleculares complexos. A dinâmica molecular também oferece insights sobre as forças envolvidas, os efeitos das colisões nas estruturas moleculares e as consequências energéticas das interações.

De acordo com (Costa; Ribeiro, 2010) “A simulação MD clássica é baseada na evolução temporal de coordenadas e momento das N partículas do sistema”. A condição periódica de contorno é um conceito fundamental na dinâmica molecular e em simulações computacionais de sistemas periódicos, como colisões de esferas. Essa condição estabelece que as bordas do sistema simulado se conectam umas às outras, criando um ambiente "infinito" e contínuo. Em outras palavras, as partículas que saem de um lado do sistema entram no lado oposto, simulando assim um sistema sem fronteiras.

Essa abordagem é essencial para evitar efeitos de fronteira devido às bordas do sistema e para representar com precisão as propriedades de materiais extensos. A condição periódica de contorno permite que as simulações de dinâmica molecular forneçam informações realistas sobre a estrutura e o comportamento dos materiais em escala atômica e molecular. A figura 2, mostra a condição periódica de contorno no partículas.

Figura 2- Representação da condição periódica de contorno utilizada em simulações de Dinâmica molecular



Fonte: Diehl Alexandre (2017)

4 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

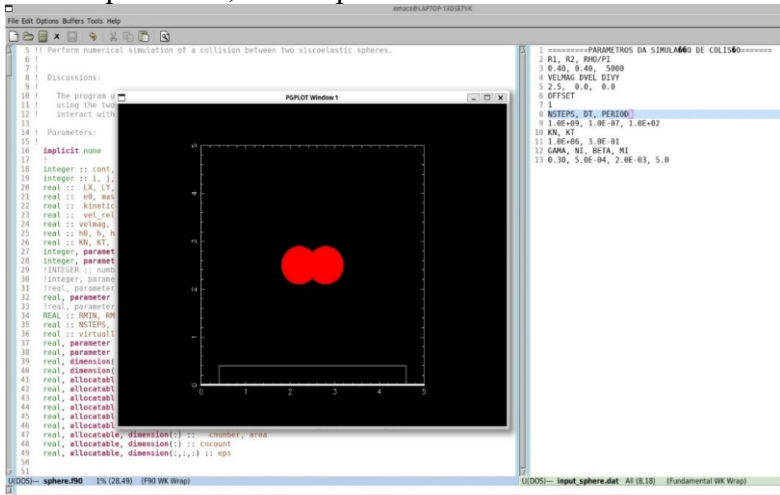
As simulações deste trabalho foram realizadas observando os parâmetros da tabela 1. Supondo-se que as partículas e as paredes tenham os mesmos parâmetros físicos, os valores dispostos na tabela são os valores de entrada (*input*), do software sphere.f90, usado nas simulações. O módulo de Young (*Y*) e o coeficiente de amortecimento (γ) são os únicos valores que foram alterados nas simulações, e por isso estão dispostos em intervalos.

Tabela 1-Típicos Parâmetros usados nas simulações.

Parâmetros	Valor	Fonte:
Número de partículas (<i>N</i>)	2	Autoria própria, (2023).
Escala de tamanho da partícula (<i>r</i>)	$r = 0,40m$	
Densidade da partícula (ρ)	$5000 / \pi \text{ Kg} / m^3$	Todos os
Módulo de Young (<i>Y</i>)	$10^6 < Y < 10^8 \text{ N} / m^2$	
Coeficiente de amortecimento (γ)	$5,0 \times 10^{-4} s < Y < 5,0 \times 10^{-3} s$	
Índice de Poisson (ζ)	0,30	

resultados encontrados estão fundamentados nos princípios matemáticos das equações de contato de hertz e nas características físicas das partículas (esferas) envolvidas nas colisões, por meio da dinâmica molecular para execução do cálculo do coeficiente de restituição (*e*) para o contato de duas esferas.

Figura 3 - Software sphere.f90, tela de parametros e tela PGPLOT



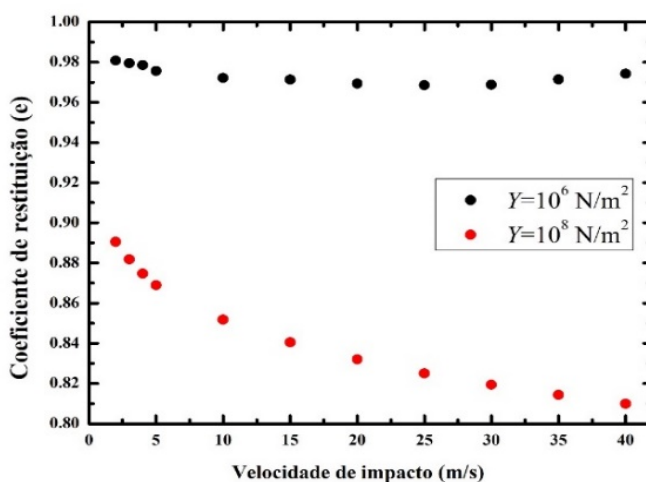
Fonte: Autoria própria, (2023).

Na tela do *PGPLOT*, mostrada na figura 3, é possível visualizar a interação entres duas esferas de raios R_i e R_j em contato frontal, ou seja, contato unidimensional. Lembrando que o objetivo do presente estudo são as colisões em uma única direção e não

há abordagem referente a colisões bidimensionais. Quando há um contato direto entre as esferas é possível perceber a deformação das esferas, as mesmas se deformam superpondo uma à outra, demonstrando o fator de superposição ilustrado na figura 1. A superposição pode ser definida na equação de Hertz pelo δ que representa a deformação elástica, ou seja, a quantidade pela qual os corpos são comprimidos um contra o outro.

Durante a simulação, o software executa o processo de dinâmica molecular através de uma condição periódica de contorno para gerar múltiplas colisões entre as esferas, todo o processo de dinâmica molecular executado na tela do PGPLOT é executado obedecendo os parâmetros mostrados na tela (input) a direita do PGPLOT. Os valores de entrada podem ser alterados de acordo os objetivos do estudo. Com isso, é possível prever as velocidades das esferas em diversos instantes durante a simulação, tanto as velocidades de aproximação como também as velocidades de afastamento. Através dessas velocidades podemos determinar o momento da colisão entre as duas esferas.

Figura 4 - Gráfico para o coeficiente normal de restituição (e) em função da velocidade de impacto para dois Módulos de Young (Y) diferentes.



Fonte: Autoria própria, 2023.

Na figura 4 é possível visualizar os valores obtidos na nossa primeira simulação. Os pontos pretos e vermelhos são os resultados numéricos provenientes das simulações de colisões entre duas esferas de raios iguais a 0,4 m, considerando dois módulos de Young (Y) diferentes e também diferentes velocidades de impacto.

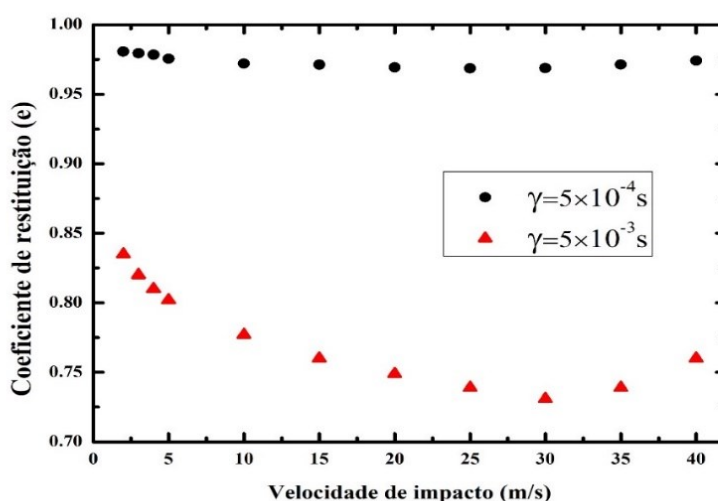
O módulo de Young, também conhecido como módulo de elasticidade, é uma medida da rigidez de um material. Ele descreve a capacidade de um material de resistir à deformação elástica quando uma força é aplicada a ele. Ao alterar o módulo de Young (Y) em uma colisão viscoelástica, consequentemente a rigidez dos materiais envolvidos é afetada. Se o módulo de Young for aumentado, os materiais se tornarão mais rígidos, o que pode resultar em uma maior força normal de contato para uma dada deformação elástica (δ). Caso contrário, se o módulo de Young for reduzido, os materiais se tornarão mais flexíveis, o que pode levar a uma força de contato menor para a mesma deformação. Assim, a implicação de alterar o módulo de Young em uma colisão viscoelástica é que isso afetará a resposta elástica dos materiais envolvidos e, portanto, a força de contato resultante durante a colisão. Isso pode ter impacto nas propriedades de absorção de energia, dissipação de calor e comportamento durante a colisão em si.

Pelo gráfico podemos concluir que, à medida que as velocidades de impacto aumentam materiais mais rígidos tendem a ter coeficientes de restituição mais baixos, o que significa que eles absorvem menos energia durante uma colisão e têm uma capacidade menor de recuperar sua forma original após a colisão. Por outro lado, materiais mais flexíveis ou elásticos têm coeficientes de restituição mais altos à medida que as velocidades de impacto aumentam, o que indica uma capacidade maior de recuperar sua forma original após uma colisão, pois eles absorvem e liberam energia de forma mais eficiente. É possível perceber que a alteração de apenas duas ordens de grandeza do Módulo de Young gera uma mudança muito significativa no coeficiente de restituição em função da velocidade de impacto, isso se dá devido ao aspecto não linear do modelo da equação de contato normal de Hertz.

Portanto, a simulação mostra que equação 2, da força de contato normal de Hertz, fundamenta as colisões viscoelásticas e que conforme a equação 7, o coeficiente de restituição normal (e) pode ser descrito em função das velocidades de impactos obtidas pelas simulações.

Na figura 5 a seguir, é apresentado um gráfico com os valores obtidos na nossa segunda simulação. Nessa simulação, para as mesmas esferas de raio 0,4m, tomando o módulo de Young igual a 10^6 N/m^2 e mantendo os demais valores de entrada fixos, é calculando o coeficiente de restituição para dois valores diferentes do coeficiente de amortecimento (γ). Para essa simulação foi realizado a alteração de uma ordem de grandeza para o coeficiente de amortecimento. Essa alteração se mostrou muito significativa para os valores encontrados na simulação. Não é objetivo do trabalho estudar até que ponto a variação do Módulo de Young (Y) e do coeficiente de amortecimento (γ) podem ser alterados, mas sim explicar a significância dessas alterações para o cálculo do coeficiente de restituição (e) em função das velocidades de impacto. As velocidades relativas de impacto são limitadas, pois a teoria de contato de Hertz não tem validade para velocidades muito altas, uma vez que sistemas que apresentam velocidades de impacto muito altas, entram em regimes balísticos, devido a apresentarem deformações muito grandes. Tais modelos não podem ser representado pelas teorias de contato de Hertz.

Figura 5 - Gráfico para o coeficiente normal de restituição (e) em função da velocidade de impacto para dois Coeficientes de Amortecimento (γ) diferentes.



Fonte: Autoria própria, 2023.

O coeficiente de amortecimento (γ) desempenha um papel fundamental na definição do coeficiente de restituição em uma colisão viscoelástica. Em uma colisão viscoelástica, o coeficiente de amortecimento determina a rapidez com que a energia cinética é dissipada durante a colisão, enquanto o coeficiente de restituição descreve a capacidade do objeto de recuperar sua forma original após a colisão.

Quanto maior o coeficiente de amortecimento, mais rápida é a dissipação de energia durante a colisão, o que significa que menos energia é devolvida ao objeto após a colisão. Isso resulta em um coeficiente de restituição mais baixo, indicando que a colisão é menos elástica e que o objeto tem uma capacidade limitada de recuperar sua forma original. Por outro lado, um coeficiente de amortecimento mais baixo permite uma dissipação de energia mais lenta durante a colisão, o que resulta em um coeficiente de restituição mais alto. Isso significa que o objeto tem uma capacidade maior de recuperar sua forma original após a colisão e que a colisão é mais elástica.

Em resumo, o coeficiente de amortecimento influencia diretamente o coeficiente de restituição em uma colisão viscoelástica, determinando a quantidade de energia que é dissipada durante a colisão e, portanto, a capacidade do objeto de recuperar sua forma original.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, este estudo buscou aprofundar o entendimento das colisões viscoelásticas por meio de simulações computacionais, com foco na determinação do coeficiente de restituição normal (e). As colisões, fenômenos frequentes em diversas escalas, influenciam desde eventos macroscópicos, como acidentes de trânsito, até processos microscópicos, como reações nucleares.

A combinação do método de dinâmica molecular e das equações de contato de Hertz, proporcionou uma abordagem robusta para simular o movimento de esferas em colisões viscoelásticas. Os resultados numéricos, apresentados graficamente, destacaram a influência do módulo de Young (Y) e do coeficiente de amortecimento (γ) na resposta elástica dos materiais, impactando diretamente no coeficiente de restituição. Notou-se que os materiais mais rígidos e que tem a capacidade de dissipar energia cinética de forma mais rápida, tendem a apresentar coeficientes de restituição mais baixos, indicando menor capacidade de recuperar a forma original após a colisão.

A análise teórica fundamentada nas equações de Hertz proporcionou uma compreensão mais profunda das forças envolvidas e das deformações elásticas durante as colisões. Além disso, a aplicação prática do método de Verlet para a integração numérica das equações de movimento permitiu simular com precisão o comportamento das esferas em diferentes condições.

Os resultados obtidos, expressos graficamente, fornecem *insights* valiosos sobre a relação entre o coeficiente de restituição normal e as velocidades de impacto, destacando a importância do entendimento teórico e computacional das colisões viscoelásticas. A variação do módulo de Young e do coeficiente de amortecimento, foi identificada como um fator significativo, influenciando diretamente a capacidade de absorção e recuperação de energia durante as colisões.

Em suma, este estudo contribui não apenas para a compreensão teórica das colisões viscoelásticas, mas também oferece uma base sólida para análises mais aprofundadas nesse campo. O presente trabalho também viabiliza, que outras abordagens

sejam realizadas, observando e calculando o coeficiente de restituição sob a perspectiva de outros parâmetros de entrada, o que pode ser realizado em futuros trabalhos que abordem temas relacionados ao estudo das colisões. A conjugação de modelos teóricos e simulações computacionais revelou-se uma abordagem eficaz, possibilitando avanços no entendimento do fenômeno físico estudado, o que, se aplicado, poderá contribuir para o desenvolvimento de tecnologias em diversos setores.

REFERÊNCIAS

ARNOLD, F. J. et al. Proposta experimental do estudo de colisões entre bolas de borracha e superfície plana. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 2, p.1-2, 2017.

CORTES HENAO, L. F.. Simulación molecular: Fundamentos difusión y adsorción en zeolitas. **Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**, 2001.

COSTA, Luciano T.; RIBEIRO, Mauro CC. Propriedades dinâmicas de fluidos por simulação computacional: métodos híbridos atomístico-contínuo. **Química Nova** , v. 33, pág. 938-944, 2010.

DIEL, A. **As bases da Dinâmica Molecular – 6**. Departamento de Física – Universidade Federal de Pelotas, 2017. Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/diehl/files/2017/06/lec6_idmsf.pdf>. Acesso em: 16 abril 2024

FERRAZ, C. H. A.. Effects of the long-range cohesive forces in binary particle packing dynamics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**. v. 563, p.2-3, (2021) 125456.

NUSSENZVEIG, H. M.. **Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)**. Editora Blucher, 2013.

MEIRA FILHO, D. P.; KAMASSURY, J. K. S.; MEIRA, R. C. de S.. Uma discussão sobre o coeficiente de restituição. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, n. 4, p. e4302, 2017.

SCHERER CLAUDIO. **Métodos Computacionais Da Física**. São Paulo: Editora Livraria da Física. p. 76, 2005

SEABRA, J. HO. Mecânica do contacto hertziano. **Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial Secção de Mecânica Aplicada da Universidade do Porto**, p. 0-138, 2003.