UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS – DECEN
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

JOSÉ ÉLDER ANTUNES MANIÇOBA

ALÉM DO SPIN E DA CARGA: SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA E A BUSCA POR UNIFICAÇÃO

PAU DOS FERROS/RN
2025

JOSÉ ÉLDER ANTUNES MANIÇOBA

ALÉM DO SPIN E DA CARGA: SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA E A BUSCA POR UNIFICAÇÃO

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Francisco Ernandes Matos Costa, Prof. Dr.

Co-orientador: Lino Martins de Holanda Júnior, Prof. Dr.

PAU DOS FERROS/RN

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

M278a Maniçoba, José Élder Antunes.
Além do Spin e da Carga: sobre a Mecânica Quântica Relativística e busca por unificação / José Élder Antunes Maniçoba. - 2025.
105 f. : il.

Orientador: Francisco Ernandes Matos Costa.
Coorientador: Lino Martins de Holanda Júnior.
Monografia (graduação) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e Tecnologia, 2025.

1. Física. 2. Ontologia . 3. Natureza. 4. Teoria. 5. Unificação. I. Costa, Francisco Ernandes Matos, orient. II. Holanda Júnior, Lino Martins de, co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Pau dos Ferros
Bibliotecária: Erlanda Maria Lopes da Silva
CRB: 15/966

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

JOSÉ ÉLDER ANTUNES MANIÇOBA

ALÉM DO SPIN E DA CARGA: SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA E A BUSCA POR UNIFICAÇÃO

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 18/12/2025.

BANCA EXAMINADORA

_____
Francisco Ernandes Matos Costa Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

_____
Lino Martins de Holanda Júnior Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

_____
Sharon Dantas Cunha Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Ao Pai Celestial, por me conceder a oportunidade de servir à sua humanidade através daquilo que há de bom e de melhor no mundo: o conhecimento.

À minha família, na unidade dos meus pais, Antônia Edilania A. Maniçoba e Francisco Edinaldo Maniçoba; e do meu irmão, Eduardo Antunes Maniçoba, por todo apoio e garantia de poder ter chegado até aqui.

À cada professor e servidor em geral que compõem a instituição UFERSA e que fizeram parte desta trajetória.

Aos meus colegas e amigos em geral.

ÉPIGRAFE

"Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio e eu moverei o mundo".

Arquimedes de Siracusa

RESUMO

Neste trabalho explora-se de modo objetivo, temporalmente linear e didático os principais empreendimentos teóricos do século passado na busca por uma teoria definitiva. Será visto a gênese da teoria da relatividade, como esta emerge das assimetrias do eletromagnetismo quando analisado da perspectiva newtoniana e como juntas se fundem em uma abordagem geométrica para a eletrodinâmica de Maxwell. Será analisada a origem, desenvolvimento e os cenários na qual se deu a primeira e a segunda quantização; e como juntamente à teoria da relatividade especial constituem uma mecânica quântica relativística para partículas fundamentais. Por último, será visto a construção do modelo padrão em decorrência da descoberta e modelagem das forças fundamentais.

Palavras-chave: física; ontologia; natureza; teoria; unificação.

ABSTRACT

This work objectively, chronologically, and didactically explores the main theoretical endeavors of the last century in the search for a definitive theory. The genesis of the theory of relativity will be examined, detailing how it emerges from the asymmetries of electromagnetism when analyzed from a Newtonian perspective, and how they jointly merge into a geometric approach for Maxwell's electrodynamics. The origin, development, and scenarios surrounding the first and second quantizations will be analyzed; and how, together with the special theory of relativity, they constitute a relativistic quantum mechanics for fundamental particles. Finally, the construction of the Standard Model will be presented, following the discovery and modeling of the fundamental forces.

Keywords: physics; ontology; nature; theory; unification.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração do equipamento usado por Michelson e Morley.....19
Figura 2 – Trajetos realizados pela luz no interior do interferômetro.....19
Figura 3 – Trajetórias da luz no interferômetro em movimento.....20
Figura 4 – Padrão de interferência de Michelson-Morley.....23
Figura 5 – Relatividade de um evento entre observadores.....25
Figura 6 – Experimento do relógio de luz.....28
Figura 7 – Representação 2-D da curvatura do espaço-tempo.....43
Figura 8 – Ilustração das variedades de Calabi-Yau 47
Figura 9 – Idealização de um corpo negro.....48
Figura 10 – Deslocamentos de picos segundo as leis de Wien.....50
Figura 11 – Curva de radiação da lei de Rayleigh-Jeans.....52
Figura 12 – Colapso de um átomo de hidrogênio.....56
Figura 13 – Linhas espectrais do gás hidrogênio.....56
Figura 14 – Modelo atômico idealizado por Bohr.....57
Figura 15 – Transições eletrônicas possíveis no modelo de Bohr.....60
Figura 16 – Experimento da dupla fenda de Yung.....61
Figura 17 – Modelo atômico ondulatório de de Broglie.....61
Figura 18 – Figura de difração de elétrons e raios X.....60
Figura 19 – Desdobramento do espectro de emissão atômico (efeito Zeeman).....76
Figura 20 – Experimento de Stern-Gerlach.....76
Figura 21 – Possíveis estados de helicidade na teoria de Dirac.....78
Figura 22 – Idealização do mar eletrônico de Dirac.....78
Figura 23 – Diagrama de Feynman do processo de interação elétron-pósitron..... 91
Figura 24 – Potencial do chapéu mexicano de Higgs.....95
Figura 25 – Modelo Padrão da Física de Partículas.....99

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11
2 A TEORIA DA RELATIVIDADE E A UNIFICAÇÃO DE KALUZA–KLEIN 14
2.1 A teoria eletromagnética de Maxwell 14
2.1.1 Consequências da Teoria de Maxwell 16
2.2 Os experimentos de Michelson e Morley 18
2.2.1 Execução experimental e resultados 20
2.3 A conjectura de FitzGerald e as transformações Lorentz 24
2.4 Einstein e o princípio da relatividade 26
2.4.1 Dilatação do tempo e contração do comprimento 28
2.5 A geometria do espaço-tempo e a mecânica relativística 30
2.5.1 Mecânica relativística 32
2.6 Eletrodinâmica relativística 34
2.6.1 Transformações de calibre 35
2.6.2 Formalismo covariante 36
2.7 Relatividade geral 39
2.7.1 As equações de campo 39
2.8 A unificação de Kaluza–Klein 44
3 FUNDAMENTOS GERAIS DA TEORIA QUÂNTICA 48
3.1 Equipartição da energia e o problema da radiação do corpo negro 48
3.1.1 Lei do deslocamento de Wien 49
3.1.2 Lei de Rayleigh-Jeans 50
3.2 Planck, Einstein e o princípio da quantização 52
3.2.1 Efeito fotoelétrico 54
3.3 O problema da estabilidade atômica e o átomo de Bohr 55
3.3.1 A quantização de Bohr 57
3.4 Ondas de matéria e a dualidade onda-partícula 59
3.5 Heisenberg, Schrödinger e a mecânica quântica 62
3.5.1 A equação de Schrödinger 63
3.6 Realismo e formalismo da teoria quântica 65
4. MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA 67
4.1 Sobre a não invariância da equação de Schrödinger 67
4.2 Equação de Klein-Gordon 68
4.2.1 Análise da teoria de Klein-Gordon 69
4.3 Equação de Dirac 71

4.3.1 Sobre os coeficientes α e β 72
4.3.2 Forma covariante e os Espinores 73
4.3.3 Análise e discussão da teoria de Dirac 74
4.4 Equação de Proca 79
4.4.1 Análise da equação de Proca 80
4.5 De partículas à campos 81
5 EM BUSCA DA UNIFICAÇÃO 84
5.1 A eletrodinâmica quântica – QED 84
5.1.1 Quantização do campo de Dirac 85
5.1.2 Quantização do campo eletromagnético 87
5.1.3 Renormalização e grupo de simetria 88
5.2 As interações fundamentais 91
5.3 Teorias de Yang-Mills 92
5.3.1 Teoria eletrofraca 93
5.3.2 Cromodinâmica quântica - QCD 96
5.4 O modelo padrão 98
5.5 Lacunas 99
6 CONCLUSÃO 101
REFERÊNCIAS 102

1 INTRODUÇÃO

A história e, sobretudo o estudo da ciência física é, em essência, uma jornada épica em busca de unificação. Hoje, com base nas inúmeras descobertas que nos aproximaram dos fundamentos do cosmos, a ciência física encontra-se definida como o estudo da natureza. A busca pelo entendimento das leis naturais remonta à antiguidade, especialmente aos antigos gregos que buscavam conciliar a dinâmica celeste aos fenômenos cotidianos na Terra. Aristóteles de Estagira (384–322 a.C.), guiado majoritariamente por métodos dedutivos e com pouca experimentação prática, foi o primeiro a formular explicações sobre a gravidade, os movimentos dos corpos e a de desenvolver uma teoria sobre elementos fundamentais (água, ar, terra, fogo e éter). Intitulada ***Phýsis*** (Física), a obra de Aristóteles foi fundamental para a consolidação do pensamento cientifico e do entendimento natural da época, prevalecendo por quase dois mil anos.

A crescente instabilidade política do Império Romano somada aos constantes avanços (reconquista) dos povos ditos "bárbaros" sobre seus antigos territórios culminou na queda definitiva do Império em 476 d.C. Desse fato em diante, por quase mil anos, no período que historicamente foi denominado de idade das trevas (Idade Média), o pensamento cientifico permaneceu estagnado no Ocidente e o pouco que era possível produzir foi rigorosamente inspecionado pela teologia cristã vigente. Enquanto isso, na mesma época, os povos do Oriente (especialmente os árabes) preservaram a busca pelo entendimento natural, implicando em significativos avanços na química, medicina, matemática e astronomia. O protagonismo cientifico retornou ao Ocidente somente no século XVI (**Século das Luzes**), na chamada **revolução científica,** movida pela iniciativa de resgate do pensamento greco-romano. O **Iluminismo** é, portanto, o marco definitivo da busca pela unificação.

A primeira das grandes unificações da história da ciência física foi concebida por Sir Isaac Newton[1] (1643–1727), quando considerou de modo sistêmico as observações experimentais de Galileu Galilei (1564–1642) acerca do movimento dos corpos e as apuradas observações astronômicas de Johannes Kepler (1571–1630). Newton, a partir dos seus próprios princípios da mecânica (conhecidos hoje como **leis de Newton**) e de uma nova matemática (o cálculo diferencial e integral, também de sua autoria), conseguiu unificar os céus e a terra em

[1] A obra de Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), de 1687, é o alicerce definitivo para a construção da mecânica clássica e do entendimento da natureza até a revolução das teorias contemporâneas do início do século XX.

uma única **lei da gravitação universal**, contrariando as concepções clássicas de Aristóteles, mostrando que as leis dos movimentos celestes são as mesmas dos movimentos terrestres.

Mais próximas da atualidade, as próximas grandes unificações remontam os trabalhos de James C. Maxwell (1831–1879), na segunda metade do século XIX. Maxwell, retomando as ideias de Michael Faraday (1791–1867) acerca das linhas de força, consegue unificar em uma única teoria os fenômenos elétricos, magnéticos e óticos, sendo estes a manifestação individual de uma única interação fundamental chamada **força eletromagnética**. Posteriormente, a teoria de Maxwell e a sua incompatibilidade natural com a mecânica de Newton conduziu Albert Einstein (1879–1955) e outros ao desenvolvimento da **teoria da relatividade especial** (unificação do espaço e do tempo) em 1905. Dez anos mais tarde, em 1915, Einstein estende os resultados de 1905 (compreendidos como restritos), na denominada **teoria da relatividade geral** (unificação do espaço-tempo com a gravitação), sendo esta uma nova teoria da gravitação e da dinâmica do cosmos.

Também no início do século XX, em 1901, Max Planck (1858–1947) revolucionou o entendimento clássico da energia e da radiação introduzindo o conceito de **quantização**. Nesse contexto, o ato de quantização, refere-se aos modos discretos de absorção e emissão da energia (pensados classicamente como contínuos) pela matéria, regulados por uma nova constante universal h, chamada constante de Planck. Planck não somente soluciona os problemas vigentes da equipartição da energia (ou da densidade espectral de energia) para o corpo negro e a catástrofe do ultravioleta, mas inaugurou um novo ramo para entendimento da natureza a partir da perspectiva das pequenas escalas: a **física quântica**. Desse modo, até o final dos anos de 1920, quando finalmente se estabeleceu os fundamentos matemáticos e axiomáticos da nova **mecânica quântica**, notou-se que a descrição da natureza que caminhava harmonicamente em termos de sucessivas unificações convergiu para um obscuro conflito.

Seja em termos da teoria da relatividade geral (de domínio macrocósmico) ou da teoria quântica (de domínio microscópio), o nosso atual entendimento acerca dos fundamentos da natureza segue em estado de bifurcação, uma vez que a descrição da natureza por essas duas teorias de modo simultâneo tem se mostrado incompatível. Postula-se, portanto, que a explicação definitiva das leis da natureza depende intrinsecamente da unificação entre o micro e o macro. Da singularidade dos buracos negros às origens do próprio Universo, espera-se que esta explicação seja uma teoria definitiva, uma **teoria de tudo**. Entretanto, indaga-se: poderia realmente existir tal teoria? Como deve ser sua estrutura matemática e conceitual em caso afirmativo? Que caminhos devem ser traçados para encontrá-la? Até onde chegamos nessa busca e até que ponto conseguiremos ir?

Desse modo, visando contextualizar e aprofundar o entendimento acerca destas questões que regem o cerne da física teórica contemporânea, o objetivo do presente trabalho é, portanto, reconstruir e apresentar de modo objetivo, temporalmente linear e didático as principais tentativas teóricas empreendidas no último século na busca por uma teoria definitiva. Para alcançar o objetivo proposto, as principais estruturas teóricas do século passado (relatividade e mecânica quântica) serão objetivamente reconstruídas e contextualizadas, expondo as suas respectivas origens e consequências. No contexto de unificação, abordar-se-á a teoria de Kaluza-Klein, o primeiro modelo de unificação clássica em termos de campos. Da perspectiva quântica moderna, abordar-se-á a mecânica quântica relativística, a quantização dos campos relativísticos e a construção do modelo padrão como o principal esforço teórico de unificação das interações fundamentais em uma única teoria de campo unificado.

A relevância deste trabalho reside na necessidade de sintetizar e apresentar de forma objetiva e clara o real significado do trabalho da ciência física na busca por uma ontologia da natureza. Compreender os avanços, os desafios e abordagens (matemáticas e conceituais) acerca dessas teorias contribuem não somente para a literatura especializada, oferecendo uma visão linear e didática sobre o tema, mas também para fomentar o interesse e fornecer um embasamento sólido a estudantes e entusiastas da física, incentivando futuras pesquisas nessa área crucial para o avanço da ciência fundamental e entendimento da realidade.

A metodologia empregada na construção do presente texto foi de caráter exploratório e bibliográfico. Nesse sentido, o levantamento bibliográfico para este trabalho seguiu os critérios de: relevância da obra para área, complexidade da obra, importância histórica da obra e exposição didática do conteúdo.

Por fim, para concretizar este estudo, o presente trabalho segue organizado em **quatro capítulos**. Após esta introdução, o primeiro capítulo é dedicado à teoria da relatividade e a teoria de unificação clássica de Kaluza-Klein; o segundo capítulo abordará os fundamentos da teoria quântica; o terceiro capítulo é destinado à mecânica quântica relativística e, por último, o quarto e último capítulo está atribuído à quantização dos campos relativísticos, à descrição das interações fundamentais e a construção do modelo padrão da física de partículas.

2 A TEORIA DA RELATIVIDADE E A UNIFICAÇÃO DE KALUZA–KLEIN

Em um período que ficou conhecido como *annus mirabilis* (do alemão, ano do milagre), mais precisamente o ano 1905, Albert Einstein, então funcionário de um escritório de patentes em Berna, Suíça, realizou uma sequência de publicações no periódico científico alemão *Annalen de Physik* (Anais de Física) que mudou os rumos da ciência física para sempre (Greene, 2001; Rovelli, 2017). O texto que se segue no presente capítulo tem por objetivo abordar a gênese da teoria da relatividade, seu desenvolvimento e a sua generalização para a forma final e mais geral, bem como suas consequências. Como poderá ser visto, sendo este o próprio ponto de partida, a teoria da relatividade é a resposta natural para as assimetrias que emergem da teoria eletromagnética de Maxwell quando tratada equivocadamente sob a perspectiva newtoniana. Ao final, considerando a visão unificadora daquilo que se parecia ser o mais fundamental da natureza, será discutida a teoria de Kaluza-Klein que, para algumas condições de contorno especiais, consegue unificar o eletromagnetismo e a relatividade em uma única teoria de campo clássica unificado.

2.1 A teoria eletromagnética de Maxwell

Antes dos anos de 1820, a eletricidade e o magnetismo que eram conhecidos desde a antiguidade pelos povos antigos como manifestações distintas, são unificados sem rigor matemático excessivo em uma única interação de linhas campo chamada **eletromagnetismo**. Este fato decorre dos trabalhos experimentais pioneiros realizados por Faraday e André-Marie Ampère (1775–1835) (Salam, 1993).

Posteriormente, publicada em dois volumes por James C. Maxwell no ano 1873, o *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Um Tratado Sobre Eletricidade e Magnetismo) encerrou a segunda metade do século XIX com a unificação do eletromagnetismo de Faraday e Ampère com a óptica, mostrando que, individualmente, estes são os aspectos de uma única interação fundamental denominada de **força eletromagnética** (Salam, 1993). Apesar de ter sido um exímio matemático, sendo responsável por ampliar grande parte dos resultados que viriam a se tornar o cálculo multivariável moderno, Maxwell formulou rigorosamente as equações para eletromagnetismo inicialmente em notação de quatérnios[2], o que resultava em mais de 20

[2] Os quatérnios tratam-se de um conjunto numérico $\mathbb{H}$ que correspondem à uma extensão do conjunto numérico complexo $\mathbb{C}$, de modo que $\mathbb{H}$ é uma álgebra associativa.

equações. A notação moderna em termos de integrais ou de derivadas parciais é devido ao trabalho de Oliver Heaviside (1850–1925) e Willard Gibbs (1839–1903) que, tal como podem ser observadas a seguir, conservam e constituem desde os trabalhos originais de Maxwell toda a informação necessária de como estão interligados os campos elétrico e magnético à suas respectivas fontes (Hunt, 2015). Nessa notação moderna, as equações de Maxwell são escritas na forma integral e diferencial, respectivamente, como:

forma integral	**forma diferencial**[3]	
$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV$	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	**(2.1)**
$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	**(2.2)**
$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{a}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	**(2.3)**
$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_s \vec{J} \cdot d\vec{a} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_s \vec{E} \cdot d\vec{a}$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	**(2.4)**

Nessas equações, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são, respectivamente, os campos elétrico e magnético; ε_0 e μ_0 tratam-se das constantes de permissividade elétrica do meio e permeabilidade magnética do vácuo. Em laboratório, os valores e suas respectivas unidades no S.I (Sistema Internacional de Unidades) para essas constantes são: $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}\, N/A^2$ e $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \times 10^{-12}\, C^2/N \cdot m$. Objetivamente, as equações (2.1) e (2.2) são denominadas, respectivamente, de **leis de Gauss** para os campos elétrico e magnético. Elas "medem" o fluxo destes campos conforme a presença de densidades volumétricas de cargas (ρ) ou dos dipolos magnéticos no espaço. A equação (2.3) recebe o nome de **lei de Faraday**, onde é possível observar a formação de correntes elétricas quando há variação de campos magnéticos nas proximidades de um condutor. Este fato é fundamental para a compreensão e funcionamento de equipamentos elétricos modernos, como motores e transformadores. A equação (2.4), denominada de **lei de Ampère-Maxwell,** relaciona o fluxo da densidade de corrente elétrica $\vec{J}$ e a variação de campos elétricos à circulação de campos magnéticos no entorno de um condutor. O segundo termo do lado direito dessa equação foi adicionado de modo matemático por Maxwell para explicar a aparição "misteriosa" dos campos magnéticos nos arredores de capacitores durante o carregamento. Ocorre que durante

[3] A passagem do formalismo integral para o diferencial das equações de Maxwell pode ser feito tomando o teorema da divergência (ou d Gauss) nas equações (2.1) e (2.2), enquanto que em (2.3) e (2.4), aplica-se o teorema de Stokes.

o processo de carregamento, entre as placas de um capacitor, formam-se correntes de deslocamento, oriundas da variação do campo elétrico no acúmulo de cargas elétricas nas placas. Ademais, a explicação via correntes de deslocamento por Maxwell, ainda que puramente matemática[4], também justifica a presença do sinal negativo na equação (2.3). Pela equação (2.4), verifica-se que o fluxo de corrente elétrica estabelecida no condutor devido a variação de um campo magnético externo, surgirá no entorno do condutor um outro campo magnético circundante em oposição ao externo (Griffiths, 2011).

2.1.1 Consequências da Teoria de Maxwell

I. Conservação da carga

O primeiro grande resultado emergente das equações de Maxwell é a **continuidade da carga elétrica**. Para tal resultado, tomando-se o divergente em ambos os termos da equação (2.4), isto é,

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla \cdot \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right).$$

Mas, o divergente de um rotacional é nulo e, desse modo,

$$\mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \left(\nabla \cdot \vec{E}\right)}{\partial t}\right) = 0.$$

Finalmente, conforme a equação (2.1), substituindo o divergente do campo elétrico por ρ/ϵ_0, tem-se que

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{2.5}$$

A equação acima expressa que, localmente, a carga elétrica é contínua e deve ser conservada, sem ser criada ou destruída (Griffiths, 2011).

II. Ondas eletromagnéticas

Ainda em seu trabalho, Maxwell observou que suas equações, em verdade, se tratavam de equações diferenciais parciais de primeira ordem acopladas. A tentativa de desacoplamento dessas equações e a separação dos campos elétrico e magnético resulta em equações diferenciais parciais de segunda ordem, isto é, duas equações ondas individuais para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Para

[4] Maxwell concebeu o segundo termo para a lei de Ampère por analogias puramente matemáticas, sem a realização de experimentos práticos. Posteriormente, suas hipóteses foram todas confirmadas.

mostrar isso, considera-se as quatro equações de Maxwell em sua forma mais simples e simétricas no vácuo, onde não há densidades volumétricas de cargas ρ ou correntes $\vec{J}$:

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla\cdot\vec{E}=0 \quad (i) & \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (iii) \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \quad (ii) & \nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (iv) \end{array}\right\}.$$

Tomando-se o rotacional sobre a equação (iii);

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right),$$

e recordando que $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}$, ocorre que:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\frac{\partial\left(\nabla\times\vec{B}\right)}{\partial t}.$$

Pela equação (i), o divergente de $\vec{E}$ é nulo, logo,

$$\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Analogamente ao que foi feito para o campo elétrico, tomando-se o rotacional sobre a equação (iv) e lembrando que o divergente de $\vec{B}$ é sempre nulo, pode-se mostrar que

$$\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0. \qquad \textbf{(2.7)}$$

As equações para os campos $\vec{B}$ e $\vec{E}$ podem ser resolvidas pelos métodos analíticos convencionais de resolução de equações diferenciais. Trivialmente, tal como impõe esses métodos analíticos, as soluções mais simples para as equações (2.6) e (2.7) são aquelas na forma de uma onda plana e de caráter monocromático, descritas por uma exponencial complexa (ou senoidal), tal como segue:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}. \qquad \textbf{(2.8)}$$

Nas expressões acima, $\vec{E}_0$ e $\vec{B}_0$ são as amplitudes dos campos elétrico e magnético. No argumento das exponenciais, $\vec{k}$ e ω, são, respectivamente, o vetor de onda e a velocidade angular. De fato, é fácil verificar que as duas expressões em (2.8) satisfazem à (2.6) e a (2.7). Para tal, basta tomar convenientemente as derivadas com relação a posição $\vec{r}$ e ao tempo t (Griffiths, 2011).

III. A velocidade da luz

Dentre todas as consequências da teoria eletromagnética de Maxwell, destaca-se o cálculo para a velocidade da luz. Ao desacoplar suas equações e compará-las com a expressão

clássica de uma onda, Maxwell percebeu matematicamente que a **luz é radiação eletromagnética**. De acordo com a equação unidimensional clássica de uma onda;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - v^{-2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

comparando-a com as equações (2.6) e (2.7) em uma dimensão, infere-se que

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0\varepsilon_0 \Longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}};$$

$$v \equiv c \sim 3 \times 10^8 \ m/s.$$

Note que, de acordo com os valores das constantes de permissividade elétrica e permeabilidade magnética, o valor calculado para v corresponde assintoticamente ao que se sabia ser o valor experimental para a velocidade da luz c. Posteriormente, em 1887, Heinrich R. Hertz (1857–1894) realizou experimentos precisos envolvendo a produção e detecção de ondas eletromagnéticas, confirmando experimentalmente a existência das mesmas, tal como previu Maxwell (Gazzinelli, 2009; Nussenzveig, 2014).

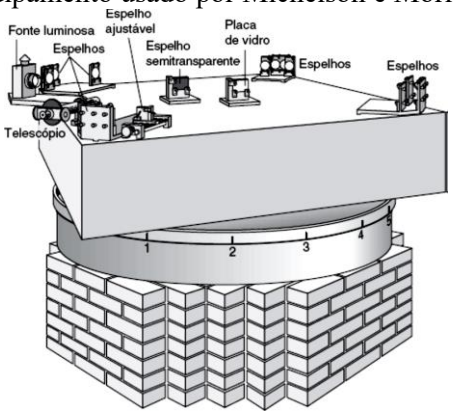
Parte do que pode ser compreendido como a gênese da teoria da relatividade está no que veio a se seguir. Em correspondência com a física newtoniana, tal como o som (onda mecânica) se propaga pelo ar em variações locais de pressão entre a fonte e o receptor, qual deveria ser o meio de propagação para luz de velocidade c enquanto variações dos campos elétrico e magnético? Maxwell, em analogia a mecânica de Newton, respondeu à questão resgatando a ideia de uma antiga e hipotética substancia invisível dotada de propriedades especiais que preencheria todo espaço chamada de **éter luminífero**. Como se sabe hoje, mas que era desconhecido na época, distintamente da mecânica newtoniana, a eletrodinâmica de Maxwell é plenamente compatível com a relatividade especial. Portanto, as equações de Maxwell e a lei de força de Lorentz, dada pela expressão, $\vec{F} = q\left(\vec{E} + v \times \vec{B}\right)$ (que nada mais é que a força eletromagnética total quando se considera a contribuição da força coulombiana e a força magnética experimentada por uma carga em movimento) podem ser igualmente aplicadas para quaisquer referenciais inerciais.

2.2 Os experimentos de Michelson e Morley

O período compreendido entre o final do século XIX e início do século XX foi marcado pelo extremo interesse da comunidade científica nas propriedades ondulatórias da luz e a sua propagação através do éter como havia postulado Maxwell. Com intuito de provar experimentalmente a existência do éter, Albert A. Michelson (1852–1931), enquanto oficial da

marinha americana, percebeu que, embora o efeito do movimento da Terra sobre qualquer medida da velocidade da luz baseada em um percurso de "ida e volta" fosse pequeno demais para ser medido diretamente, uma medida da razão v^2/c^2 poderia ser obtida indiretamente, usando a técnica de interferometria de ondas luminosas, similar à um "relógio" de altíssima precisão. Assim, projetado inicialmente por Michelson em 1881 e aprimorado posteriormente por Edward W. Morley (1838–1923), o aparelho desenvolvido para executar esse tipo de medida recebeu o nome de **interferômetro de Michelson-Morley** que, ainda nos dias de hoje, possui numerosas aplicações[5] em outras áreas da ciência (Llewellyn e Tipler, 2017).

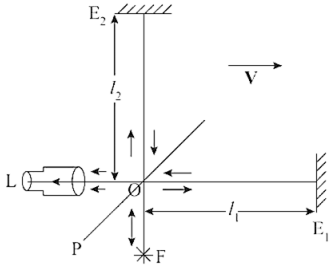
Figura 1 – Ilustração do equipamento usado por Michelson e Morley no experimento de 1887.



Fonte: Adaptado de Llewellyn e Tipler, (2017, p. 29).

Em Llewellyn e Tipler (2017, p. 26), "o objetivo do experimento era medir a velocidade da luz em relação ao interferômetro (ou seja, em relação à Terra), o que equivaleria a demonstrar que a Terra estava em movimento em relação ao éter, representando, portanto, uma prova da existência do último". Para a execução das medições, uma lâmpada de vapor de sódio foi utilizada como fonte principal de luz, cujos trajetos realizados pela mesma no interior do aparelho encontram-se representados na figura 2 abaixo.

Figura 2 – Trajetos percorridos pela luz no interior do interferômetro.



Fonte: Adaptado de Nussenzveig, (2014, p. 149).

[5] A título de exemplo, conforme Young e Freedman (2016), a técnica é utilizada para mapear tridimensionalmente células e construir imagens mais precisas no diagnóstico e tratamento do câncer.

Conforme os diferentes tempos de deslocamento da luz no interior do aparelho, supõe-se que deve haver diferenças nas medidas obtidas no final do processo, de modo que essas diferenças no percurso da luz sejam as responsáveis por ocasionar deslocamentos de ΔN franjas luminosas para o comprimento de onda λ da luz, ocasionando a formação de figuras de interferência, de acordo com a expressão:

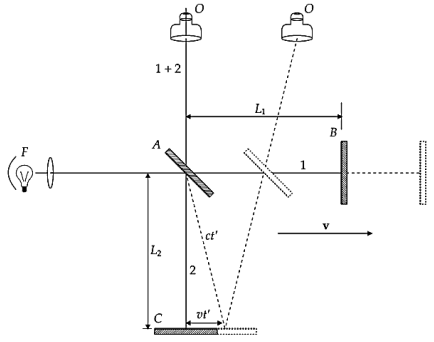
$$\Delta N = \frac{c(\Delta t' - \Delta t)}{\lambda}. \qquad \textbf{(2.9)}$$

2.2.1 Execução experimental e resultados

Partindo do ponto ***F*** (fonte de luz), o feixe de luz é dividido em dois no ponto ***O*** por um espelho semitransparente ***P***. O feixe que segue paralelo à fonte, após percorrer uma distância l_2, é refletido novamente para o ponto ***O*** através de um espelho E_2. De modo similar, o feixe perpendicular à fonte segue um trajeto l_1, e é refletido novamente para o ponto ***O*** através de um espelho E_1. Por fim, ao se recombinarem novamente no ponto ***O***, os dois feixes seguem juntos em direção à um detector ótico ***L***, onde são observados. Portanto, conforme a expressão (2.9), o padrão de interferência observado em ***L*** (construtivo ou destrutivo) está relacionado aos respectivos tempos de trajeto dos feixes de luz ao fazer os percursos de ida e volta, que, por sua vez, expressam se a luz realizou ou não percursos óticos diferentes (Gazzinelli, 2009).

Para simplificar os cálculos matemáticos e torná-los mais intuitivos, conforme a figura 3, considera-se, inicialmente, uma rotação de 90° no equipamento retratado na figura 2, de modo que a fonte de luz esteja paralela ao movimento orbital terrestre, cuja velocidade é v.

Figura 3 – Trajetos percorridos pela luz no interior do interferômetro considerando a velocidade do movimento orbital terrestre.



Fonte: Adaptado de Gazzinelli, (2009, p. 13).

O tempo t_1' de percurso gasto pelo feixe 1 ao realizar o trajeto **ABA** (ou $L_1 = l_2$) é:

$$V = \frac{L_1}{t_1'} \Longrightarrow t_1' = \frac{L_1}{V},$$

onde V é a soma (e diferença) entre as velocidades orbital v e da luz c. Assim,

$$t_1' = \left(\frac{L_1}{c-v}\right)_{ida} + \left(\frac{L_1}{c+v}\right)_{volta};$$

$$t_1' = L_1\frac{(c-v)+(c+v)}{c^2-v^2} = \frac{2L_1c}{c^2-v^2} = \frac{2L_1}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

O último termo na igualdade acima já exprime o tempo t_1' desejado. No entanto, de modo a escrever a expressão acima mais compacta, a razão v^2/c^2 será denotada por β^2 e, desse modo, a expressão para t_1' é

$$t_1' = \frac{2L_1}{c(1-\beta^2)}. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Para o trajeto **ACA** (ou $L_2 = l_1$), a velocidade do movimento de translação (perpendicular ao trajeto do feixe) deve ser levada em consideração. Em C, sabe-se que existe o espelho E_1 que, por causa do movimento terrestre, avança uma distância vt^*, ao passo que, para chegar até E_1, o feixe percorre uma medida ct^* de distância. Assim, dados os trajetos de ida (AC) e volta (CA) do feixe, a medida de t_2' deve ser de tal modo que $t_2' = 2t^*$, onde t^* satisfaz a relação pitagórica:

$$c^2t^{*2} - v^2t^{*2} = (c^2-v^2)t^{*2} = L_2^2;$$

$$t^{*2} = \frac{L_2^2}{(c^2-v^2)} \Longrightarrow t^* = \frac{L_2}{\sqrt{(c^2-v^2)}}.$$

Uma vez que t^* foi determinado, tem-se que t_2' é

$$t_2' = 2\frac{L_2}{\sqrt{(c^2-v^2)}},$$

ou ainda, tomando novamente a relação $\beta^2 \equiv \frac{v^2}{c^2}$ e evidenciando c,

$$t_2' = \frac{2L_2}{c\sqrt{(1-\beta^2)}}. \qquad \textbf{(2.11)}$$

Para finalizar o experimento, o equipamento volta a sua posição original, tal como na figura 2. Desfazendo a rotação em 90°, o que se tem é a troca de trajetos dos feixes. O trajeto 2, que estava perpendicular ao movimento de translação na figura 3, agora, volta a ser paralelo. O mesmo ocorre para o trajeto 1 (paralelo na figura 3), que se torna perpendicular na figura 2.

De modo a distinguir as novas medidas temporais daquelas realizadas anteriormente, as novas medidas serão representadas simplesmente por t_1 e t_2, sendo elas:

$$t_1 = t_2' = \frac{2L_2}{c\sqrt{(1-\beta^2)}}; \qquad \textbf{(2.12)}$$

$$t_2 = t_1' = \frac{2L_1}{c(1-\beta^2)}. \tag{2.13}$$

O resultado desejado é obtido a partir das diferenças dos caminhos óticos relacionados aos respectivos tempos de trajeto da luz, quando o equipamento sofre e não sofre rotação.

- **Com rotação:**

$$c\Delta t' = c(t_1' - t_2') = c\left(\frac{2L_1}{c(1-\beta^2)} - \frac{2L_2}{c\sqrt{(1-\beta^2)}}\right)$$

$$c\Delta t' = \frac{2}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\left(\frac{L_1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} - L_2\right) \tag{2.14}$$

- **Sem rotação:**

$$c\Delta t = c(t_1 - t_2) = c\left(\frac{2L_2}{c\sqrt{(1-\beta^2)}} - \frac{2L_1}{c(1-\beta^2)}\right)$$

$$c\Delta t = \frac{2}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\left(L_1 - \frac{L_2}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\right) \tag{2.15}$$

Retornando à expressão (2.9), resta calcular $c(\Delta t - \Delta t')$.

$$c(\Delta t' - \Delta t) = \left[\frac{2}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\left(\frac{L_1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} - L_2\right)\right] - \frac{2}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\left(L_1 - \frac{L_2}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\right)$$

$$c(\Delta t' - \Delta t) = \frac{2}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\left[\frac{L_1 + L_2}{\sqrt{(1-\beta^2)}} - (L_1 + L_2)\right].$$

Considerando $v \ll c$ na expressão anterior, a quantidade $(1-\beta^2)^{-1/2}$ pode ser aproximada por seus primeiros termos da série de Taylor, de modo que $(1-\beta^2)^{-1/2} \cong 1 + \beta^2/2$:

$$c(\Delta t' - \Delta t) = \frac{2}{1+\frac{\beta^2}{2}}\left[\frac{L_1 + L_2}{1+\frac{\beta^2}{2}} - (L_1 + L_2)\right];$$

$$c(\Delta t' - \Delta t) \equiv (L_1 + L_2)\beta^2.$$

A quantidade acima expressa a diferença de caminhos óticos percorridos pela luz e essa diferença é responsável por causar o padrão de interferência desejado.

Individualmente, Michelson, em 1881, realizou medidas usando um equipamento cujos braços do interferômetro mediam $L \cong 1\ m$. Esperava-se que um padrão de interferência da ordem de 0,04 franjas fosse observado, todavia, para o desconforto de Michelson, isto não ocorreu e o padrão obtido não ultrapassou 0,02 franjas, tornando os resultados do experimento inconclusivos. Com a colaboração de Morley, Michelson retoma o experimento em 1887, na cidade de Cleveland, Ohio. Morley aperfeiçoou o equipamento e implementa um método de

múltiplas reflexões, equivalendo a braços ainda maiores ($L \cong 11m$). A sensibilidade do aparelho tornou-se precisa o suficiente para realizar medidas em até seis ordens de grandeza. Para um $\lambda = 5{,}5 \times 10^{-7}m$ e $v = 30\,km/s$, aplicando na equação (2.9), ocorre que:

$$\Delta N = \frac{c(\Delta t' - \Delta t)}{\lambda} = \frac{(L_1 + L_2)\beta^2}{\lambda} = \frac{(L_1 + L_2)}{\lambda}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta N = (11m + 11m) \cdot \frac{\frac{(30\,km/s)^2}{(3 \times 10^5\,km/s)^2}}{\lambda = 5{,}5 \times 10^{-7}m}$$

$$\Delta N = 0{,}4.$$

A quantidade $\Delta N = 0{,}4$ era a medida teórica esperada por Michelson e Morley. No entanto, a precisão ótica do aparelho revelou um padrão ainda menor do que aquele medido por Michelson em 1881, algo da ordem de 0,01 franjas (Gazzinelli, 2009; Peruzzo, 2012).

Figura 4 – Imagem original de um dos padrões de interferência obtido por Michelson e Morley.

Fonte: Adaptado de Peruzzo, (2012, p. 16).

Além de inconclusivos, os resultados experimentais obtidos nas medições feitas por Michelson e Morley foram tidos como nulos. Diversas hipóteses foram formuladas de modo a explicarem essas nulidades, sendo uma mais radical em termos de realidade física do que a outra. Dentre as medidas realizadas por Michelson e Morley, nenhuma delas conseguiu explicar o fato de não haver mudanças na medida da velocidade da luz[6] quando o equipamento era rotacionado. Concluiu-se, portanto, que além de aparentemente não ser possível constatar experimentalmente a existência do éter, aparentava que a Terra era estacionária, pois sua velocidade em relação ao éter não se revelava ser superior à 5 km/s.

> O experimento foi repetido por outros cientistas mais de uma dúzia de vezes, em diferentes condições e com maior precisão, mas nenhum deslocamento jamais foi observado. No mais preciso desses experimentos, o limite superior da velocidade relativa foi reduzido para 1,5 km/s por Georg Joos em 1930, usando um interferômetro no qual o percurso dos raios luminosos era muito maior do que no interferômetro de Michelson. Recentemente, versões

[6] Segundo a mecânica de Newton, as relações de adição e subtração para a velocidade da luz dentro do interferômetro devem ser: $(c + v)_{ida}$ e $(c - v)_{volta}$, onde v é a velocidade orbital.

> modernas do experimento, usando lasers, reduziram esse limite para 15 m/s. (Llewellyn e Tipler, 2017, p. 28).

2.3 A conjectura de FitzGerald e as transformações Lorentz

Apesar de não ter obtido os resultados desejados, os experimentos de Michelson foram estritamente importantes para o desenvolvimento tecnológico no campo das instrumentações ópticas em termos de acurácia e nos estudos gerais acerca da luz. Por suas contribuições, Michelson foi laureado com o prêmio Nobel de física em 1907. Apesar do reconhecimento e prestígio, Michelson nunca aceitou os próprios resultados, considerando-os como o mais absoluto fracasso até seus últimos dias de vida. Dentre todas as tentativas para a explicação da nulidade dos experimentos de Michelson-Morley, destaca-se aquela que foi proposta inicialmente pelo físico irlandês George F. FitzGerald (1851–1901) e ampliada pelo físico alemão Hendrik A. Lorentz (1853–1928) (Blum; Lototsky, 2006).

Conforme a concepção natural clássica, a propagação da luz enquanto oscilação mediante um meio material (mesmo que dotando de propriedades especiais[7]) era inevitável. Em 1889, FitzGerald propõe que a falha nas medições de Michelson e Morley se dava em razão de uma **contração** material nas dimensões do equipamento, oriunda da interação direta do mesmo com o éter. Mais tarde, em 1892, Lorentz complementou o argumento *ad-hoc* da contração de FitzGerald, introduzindo a **teoria do elétron**. Lorentz argumentou que a matéria era composta por minúsculas partículas carregadas, onde a contração de FitzGerald era o resultado da deformação do campo elétrico destas partículas em razão do movimento destas através do éter. Em seguida, de modo puramente matemático, Lorentz, obteve e introduziu novas leis de transformação que descrevem satisfatoriamente a cinemática dos fenômenos (ou eventos) relacionados a luz para diferentes referenciais inerciais[8] em movimento, sobretudo aqueles em que $v \approx c$ (Griffiths, 2011; Peruzzo, 2011; StacheL, 2001).

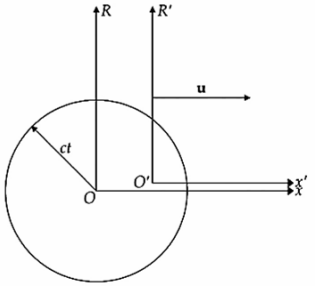
Uma forma de deduzir essas leis de transformação é considerar a seguinte situação ilustrada pela figura 5 a seguir.

---

[7] Para preencher as lacunas deixadas pelos resultados experimentais e ser compatível com a concepção clássica, o éter enquanto referencial privilegiado assumiu a forma de um meio perfeitamente invisível, fluido e sede dos campos elétrico e magnético.

[8] Entende-se por referencial inercial todo aquele no qual as leis da mecânica de Newton podem ser igualmente aplicadas.

Figura 5 – Representação da ocorrência de um evento ***E*** (explosão de uma bombinha na origem de R) para dois observadores em referenciais inerciais distintos.



Fonte: Adaptado de Gazzinelli, (2009, p. 41)

Dados os referenciais R e R' (cujas origens coincidiam em $t = t_0 = t'$), onde R' se desloca uniformemente (sem acelerar) com relação a R com velocidade u para a direita, considera-se como um evento ***E*** a explosão de uma bombinha na origem de R (O), que emite um feixe de luz e se espalha no espaço sob a forma de uma esfera de raio ct. Por estar avançando com velocidade u em relação a R, um observador em R' também percebe o facho de luz após um tempo t' sob a forma de uma esfera de raio ct'. De modo geral, as equações para essas duas frentes de luz segundo os diferentes observadores em R e R' são, respectivamente:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2; \quad \textbf{(2.16)}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2. \quad \textbf{(2.17)}$$

Considerando as equações acima, para o observador em movimento, o evento ***E*** pode ser igualmente descrito relacionando as equações (2,16) e (2.17), de modo que;

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Substituindo as expressões acima na equação (2.17) e expandindo o termo quadrático:

$$(x - ut)^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2;$$

$$x^2 - 2xut + u^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2.$$

Em comparação direta com a equação (2.16), vê-se que a expressão acima apresenta uma significativa diferença, uma vez que a substituição $t' = t$ não é suficiente. Para corrigir a assimetria, assume-se a substituição: $t' = t + \alpha x$, onde α é uma constante qualquer a ser determinada. Assumindo essa nova imposição para t' na expressão em (2.17), ocorre que:

$$(x - ut)^2 + y^2 + z^2 = c^2(t + \alpha x)^2;$$

$$x^2 - 2xut + u^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2t\alpha xc^2 + c^2\alpha^2x^2.$$

A expressão acima pode ser simplificada, reorganizando os termos semelhantes e impondo a condição $\alpha = -u/c^2$, que, conforme a imposição original, $t' = t - ux/c^2$, ocorre que:

$$x^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right).$$

Por fim, para recuperar $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$, o fator $(1 - u^2/c^2)$ pode ser eliminado e considerar as seguintes substituições:

$$x' = \frac{x - ut}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

O fator $1/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ é definido como **fator gama (γ) de Lorentz** que, para baixas velocidades $u \ll c$, permite recuperar as transformações clássicas de Galileu:

$$x' = \gamma(x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right); \tag{2.18}$$

$$x' = (x - ut), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{2.19}$$

Desde os tempos de Galileu, sabe-se que as leis naturais que regem os fenômenos físicos devem ser **invariantes** para diferentes referenciais inerciais. As regras de transformação que recebem o seu nome (expressões em (2.19)) são os fundamentos de simetria da mecânica de Newton, que deve ser igualmente aplicada por qualquer observador. No entanto, como pode ser visto, as leis da eletrodinâmica de Maxwell não obedecem às concepções clássicas. Quando publicou esses resultados em 1904, Lorentz conseguiu exprimir matematicamente as ideias do grande matemático francês Henri Poincaré (1854–1912), também defensor da teoria do éter, sobre aquilo que ele denominava de **princípio da relatividade**, no qual já se argumentava acerca de fenômenos relativos inerentes à luz (Peruzzo, 2011).

2.4 Einstein e o princípio da relatividade

Ainda que analiticamente corretas, as leis de transformação obtidas por Lorentz (equações em (2.18)) em 1904 não são suficientes para a constituição de uma nova teoria, pois não possuíam conexões com qualquer princípio físico do qual pudessem ser naturalmente derivadas. O passo decisivamente final foi dado por Einstein por meio de um artigo da sua série de publicações de 1905, o qual foi intitulado de **Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento**[9]. Distintamente do caminho tomado por Lorentz, que buscava explicar a nulidade das medições de Michelson, Einstein abordou o problema da eletrodinâmica de Maxwell de frente, evidenciando suas assimetrias para diferentes observadores, como pode ser visto na introdução do seu artigo:

[9] Não coincidentemente, o artigo de 1904 de Lorentz que continha suas novas regras de transformação era intitulado: *A Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento*.

> Que a eletrodinâmica de Maxwell – como a mesma hoje em dia e compreendida – na sua aplicação a corpos em movimento leve a assimetrias que parecem não estar relacionadas aos fenômenos, e conhecido. Se pense, por exemplo, a interação eletrodinâmica entre um ímã e um condutor. O fenômeno observável depende aqui somente do movimento relativo entre condutor e ímã, enquanto, no entendimento comum, os dois casos, que um ou o outro destes corpos esteja em movimento, tem que ser rigorosamente separados entre si. De fato, estando o ímã em movimento e o condutor em repouso, produz-se no entorno do ímã um campo elétrico com um certo valor de energia, que, nas regiões onde se encontram partes do condutor, dá origem a uma corrente elétrica. Porém, estando ímã em repouso e movimentando-se o condutor, não se gera então nos arredores do ímã nenhum campo elétrico, mas gera-se, por outro lado, no condutor uma forca eletromotriz, a qual não corresponde uma energia, mas que – pressuposta a igualdade do movimento relativo para os dois casos considerados – dá origem a correntes elétricas do mesmo tamanho e com a mesma direção, como as produzidas no primeiro caso pelas forças elétricas (Einstein, 1905, p. 891 – 921; traduzido por Oliver F. Piattella).

No decorrer do artigo, mediante um artifício conhecido como *gedankenexperiment* (uma expressão alemã que significa experimento mental), Einstein chega às mesmas equações de transformação de Lorentz, derivando-as a partir dos dois postulados a seguir:

1º. **Postulado da relatividade:** *"As leis da física são as mesmas para quaisquer referenciais inerciais"*.

2º. **Postulado da universalidade da velocidade da luz:** *"No vácuo, a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores inerciais, independentemente do movimento da fonte"*.

O trabalho de Einstein, esclareceu os resultados nulos obtidos por Michelson e Morley e os mesmos passaram a serem considerados pelo seu valor real, sugerindo que a velocidade da luz é uma constante universal, igual em todas as direções e para todos os observadores, independentemente do movimento do observador ou da fonte; sem a existência de referenciais privilegiados. "Não existe vento do éter, porque não existe éter" (Griffiths, 2011, p. 335).

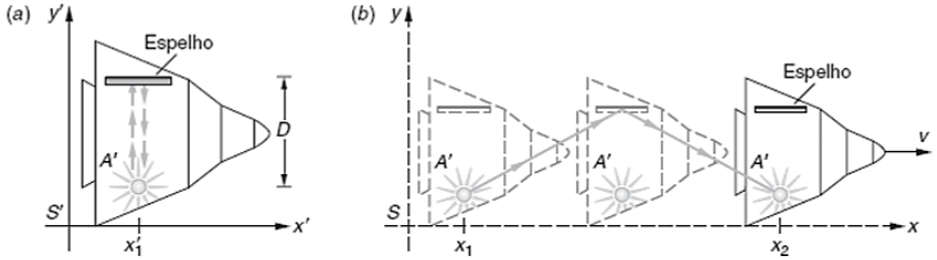
Os resultados de Einstein foram tratados por ele próprio sob o termo princípio da relatividade, tal como foi cunhado e popularizado por Poincaré. Max Planck (1858–1947) é a primeira pessoa a empregar o termo **teoria da relatividade** que, posteriormente, Einstein passou a se referir como teoria da relatividade especial, em distinção a teoria geral. Em seu trabalho, Einstein mostrou que o conceito de simultaneidade dos eventos não fazia mais sentido, sendo, na verdade, relativos aos estados de movimento dos observadores. Este emblemático fato é o início do que se parecia ser a ruptura com o classicismo de Newton, onde o tempo

universal e o espaço estático absoluto deixaram de existir. Estes, agora, são entidades dinâmicas, podendo dilatar-se ou contrair-se (Gazzinelli, 2009; Stachel, 2001).

2.4.1 Dilatação do tempo e contração do comprimento

O fenômeno da dilatação temporal pode ser demonstrado matematicamente mediante um dos mais famosos experimentos mentais utilizado por Einstein, o qual ele denominou de **"relógio de luz"**. Como pode ser observado na figura 6, a análise geométrica do problema é similar ao comportamento da luz nos percursos no interior do interferômetro de Michelon. A dilatação temporal é uma consequência direta implícita das transformações de Lorentz, as quais também podem ser usadas para demonstrar o fenômeno da dilatação.

Figura 6 – Esquematização do experimento mental do "relógio de luz".



Fonte: Adaptado de Llewellyn e Tipler, (2017, p. 48).

Considera-se, novamente, dois referenciais inerciais: S' e S. S' corresponde ao interior de uma nave espacial que se encontra em repouso e observa a passagem de uma outra nave (referencial em S) exatamente igual com velocidade v. De acordo com a imagem, no interior das duas naves, está o "relógio de luz", que se trata de uma fonte luminosa que emite um feixe vertical de luz que, ao atingir o teto da nave de altura D, onde há um espelho, é refletido novamente para o piso. Desse modo, ocorre as seguintes descrições do fenômeno de ida e volta do feixe de luz pelos tripulantes das naves:

- **Observador em S'**

O observador em S' está no interior da nave e permanece em repouso junto ao relógio de luz. Sua medição temporal do tempo de deslocamento do feixe de luz é:

$$c = \frac{D}{t'_{saida} - t'_{chegada}} = \frac{D}{\Delta t'} \Longrightarrow \Delta t' = \frac{D}{c}.$$

Para que o feixe possa retornar a fonte, se faz necessário a reflexão total do mesmo no espelho presente no teto, levando o feixe a percorrer uma distância de $2D$. Assim, o intervalo total medido pelo observador em S', definido como **tempo próprio**, é $\Delta t' = {}^{2D}/_{c}$.

- **Observador em S**

Considerando a perda da simultaneidade, o observador que está em movimento no referencial S apenas concorda com aquilo que ocorre em seu próprio referencial, discordando totalmente da descrição do que ocorre em S'. De fato, do ponto de vista do observador que se encontra em repouso em S' e observa a passagem da nave com velocidade v, este descreve a medição temporal do relógio de luz no interior de S conforme a relação pitagórica:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = D^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 \Longrightarrow \Delta t^2 = \frac{4D^2}{c^2 - v^2},$$

e finalmente,

$$\Delta t = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{2D}{c}.$$

Ao comparar as medidas temporais, é possível notar que a medida temporal em S discorda da medida temporal realizada em S' por um fator de $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Considerando que $2D/c = \Delta t'$, ocorre que

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \qquad \textbf{(2.20)}$$

A expressão acima equivale dizer que, para o observador em S que se encontra em movimento, **o tempo se encontra dilatado**, isto é, maior do que aquele que foi medido em S'. O observador em S toma por conclusão que tudo no seu referencial está atrasado ou se passando mais devagar. Este fenômeno é definido como **dilatação temporal** relativística (Gazzinelli, 2009).

Agora, considerando novamente a mesma configuração de referenciais na qual foi realizado o experimento do relógio de luz, duas réguas idênticas são postas paralelas uma com relação a outra na direção x. Uma das réguas permanecerá em repouso junto ao observador em S' e com esta o comprimento da outra régua será medido no instante em que a nave passar com velocidade v. O observador em S' analisa sua própria régua e estabelece uma medida L' para o seu comprimento (**comprimento próprio**). Durante o intervalo de tempo $\Delta t'$, quando ocorre a passagem da nave, o observador em S' infere que o comprimento da régua que se encontra no interior da nave é $L = v\Delta t'$. Porém, como $\Delta t' = \Delta t/\gamma$, implica que,

$$L = {}^{v\Delta t}/_{\gamma};$$

$$L = \frac{L'}{\gamma}. \qquad \textbf{(2.21)}$$

Conceitualmente, a equação (2.21) exprime o fenômeno da contração de FtizGerald. Todavia, como demonstrou Einstein, o fenômeno da contração não dependia do éter ou de qualquer referencial privilegiado. Para Einstein, longe de ser meros artifícios matemáticos, as

regras de transformação de Lorentz impunham e explicavam como de fato é a dinâmica da natureza (Gazzinelli, 2009; Peruzzo, 2011).

2.5 A geometria do espaço-tempo e a mecânica relativística

Ao realizar uma profunda inspeção no significado matemático das transformações de Lorentz, Hermann Minkowski (1864–1909), que havia sido professor de Einstein durante a sua formação na politécnica de Zurique, constatou em 1908 que as transformações de Lorentz são rotações hiperbólicas no espaço-tempo. Formalmente, o objeto definido como espaço-tempo se trata de uma **variedade** matemática, isto é, um **espaço topológico**[10] que localmente se parece com o espaço euclidiano (Bassalo, 2006; Spivak, 1965).

No espaço-tempo matemático de Minkowski, o intervalo dS (ou elemento de linha) é considerado um **escalar de Lorentz**, isto é, uma medida invariante que independe do referencial do qual está sendo medido;

$$dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = dS'^2,$$
$$\therefore dS^2 = dS'^2.$$

O espaço-tempo relativístico é um tipo especial de variedade, sendo um espaço vetorial real que permite a diferenciabilidade de funções (variedade diferenciável) com assinaturas $(-,+,+,+)$ ou $(+,-,-,-)$. A métrica de Minkowski é definida pela operação:

$$S^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu, \tag{2.22}$$

onde os índices em letras gregas valem $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$.

Utilizando a **notação de Einstein**, a equação (2.22) pode ser escrita como

$$S^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu. \tag{2.23}$$

Na expressão (2.23), o símbolo de somatório é suprimido e pode ser subentendido pela presença repedida dos índices gregos μ e ν. Quanto a x^μ e x^ν, estes são quadrivetores de posição (ou a **quadriposição**) que compõe os termos da métrica, conforme a representação;

$$\begin{cases} ct = x^0 \\ x = x^1 \\ y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases} \Longrightarrow x^\mu = x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \tag{2.24}$$

[10] Por sua vez, um espaço topológico é uma estrutura matemática que permite a formalização de conceitos analíticos como continuidade de uma função, convergência e conexidade.

As quantidades que possuem índices superiores são chamadas de **contravariantes**. Do contrário, têm-se as quantidades **covariantes**;

$$\begin{cases} ct = x_0 \\ x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = x_3 \end{cases} \Longrightarrow x_\mu = x_\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z). \qquad \textbf{(2.25)}$$

O termo $g_{\mu\nu}$ é denominado de **tensor métrico**, uma quantidade matemática que generaliza as noções de escalar, vetor e matriz, atuando como abaixador de índices ou elevador. Este último caso ocorre com a aplicação de $g^{\mu\nu}$, reciproco de $g_{\mu\nu}$ (BASSALO, 2006).

Ainda sobre as propriedades do tensor métrico, este tensor junto ao seu reciproco é definido como uma matriz 4×4, tal que,

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(2.26)}$$

Desse modo, as operações de baixar ou levantar índices são:

- **Levantar**

$$g^{\mu\nu}x_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = x^\mu;$$

$$\therefore g^{\mu\nu}x_\nu = x^\mu.$$

- **Abaixar**

$$g_{\mu\nu}x^\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = x_\mu;$$

$$\therefore g_{\mu\nu}x^\nu = x_\mu.$$

A partir desse novo formalismo matemático, chamado de formalismo tensorial, as transformações de Lorentz em (2.18) podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} ct = x^0 \\ x = x^1 \\ y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^2. \end{cases} \qquad \textbf{(2.26)}$$

Ou matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\beta & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{(2.27)}$$

ou ainda

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \tag{2.28}$$

na qual Λ^{μ}_{ν} é definida como a matriz de transformação de Lorentz.

Assumindo $(+,-,-,-)$ como a assinatura da métrica, tem-se que

$$\begin{cases} x^{\mu} = (ct, \vec{r}) & (i) \\ x_{\mu} = (ct, -\vec{r}) & (ii). \end{cases} \tag{2.29}$$

Dessa forma, a operação de contração $x_{\mu}x^{\mu}$ é:

$$\begin{cases} S^2 = x_{\mu}x^{\mu} \equiv (ct, -\vec{r})(ct, \vec{r}) = (c^2t^2, -\vec{r}^2); \\ S'^2 = x'_{\mu}x'^{\mu} \equiv (ct', -\vec{r}')(ct', \vec{r}') = \left(c^2t'^2, -\vec{r}'^2\right); \end{cases}$$

$$\therefore x_{\mu}x^{\mu} = x'_{\mu}x'^{\mu} \Longrightarrow S^2 = S'^2,$$

que é o intervalo de medida de espaço-tempo (Bassalo, 2006; Griffiths, 2011).

2.5.1 Mecânica relativística

Além de estar edificada sobre um espaço e tempo absolutos e distintos entre si, todas as quantidades clássicas que residem na mecânica de Newton se transformam em igualdade no espaço euclidiano tridimensional, como pode ser observado nas regras de transformação em (2.19). Em contraste à física newtoniana, a mecânica relativística tem as suas quantidades expressas por **quadrivetores** (ou tensores), que residem no espaço-tempo quadridimensional. Como se pode notar, a quadriposição não somente depende das três componentes clássicas, mas também possui uma componente na parte temporal.

Uma vez definida a quadriposição, as demais quantidades clássicas podem ser derivadas, conforme as operações convencionais. A **quadrivelocidade** pode ser obtida tomando-se a derivada sobre a quadriposição em relação ao tempo próprio, que será representado por $d\tau$, isto é,

$$V^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}.$$

Porém, conforme a equação (2.20),

$$dt = \gamma dt' = \gamma d\tau \Longrightarrow \gamma = \frac{dt}{d\tau};$$

e, então, pela regra da cadeia,

$$V^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt}; \tag{2.30}$$

cujas componentes são:

$$\begin{cases} V^0 = \gamma \dfrac{d}{dt}(ct) = \gamma c \\ V^i = \gamma \dfrac{d}{dt}\left(r^i\right) = \gamma v^i \end{cases} \Longrightarrow V^\mu = \left(\gamma c, \gamma v^i\right).$$

Note que a contração $V_\mu V^\mu$ resulta em:

$$V_\mu V^\mu = V^0 V^0 - V^i \cdot V^i = (\gamma c)^2 - \left(\gamma v^i\right) \Longrightarrow \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right);$$

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

$$\therefore V_\mu V^\mu = c^2.$$

Este resultado indica que qualquer objeto constituinte da realidade física, ainda que esteja em repouso para um determinado referencial, o objeto ainda possui velocidade na dimensão temporal e se desloca através desta com velocidade igual a c.

Agora, definindo o **quadrimomento** como

$$P^\mu = mV^\mu, \tag{2.31}$$

cujas componentes são

$$\begin{cases} P^0 = mV^0 = m\gamma c \\ P^i = mV^i = m\gamma v^i \end{cases} \Longrightarrow P^\mu = \left(m\gamma c, m\gamma v^i\right).$$

Multiplicando agora a componente temporal do quadrimomento por c, vem que

$$P^0 c = m\gamma c \cdot c = m\gamma c^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}(mc^2). \tag{2.32}$$

No regime $v \ll c$, a expansão binomial sobre γ até segunda ordem, resulta em

$$P^0 c = \gamma mc^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots; \right) mc^2;$$

$$P^0 c = mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

O termo de ordem 2 é a energia cinética clássica, enquanto o termo mc^2 pode ser entendido como uma certa energia de repouso, intrínseca à própria matéria. Assim, a quantidade $P^0 c$ é a **energia relativística total** do corpo, ou simplesmente a energia total (E), composta pelos termos cinético (T) e energia de repouso (E_0);

$$E = E_0 + T. \tag{2.33}$$

A equação (2.33) mostra que, ainda que esteja em repouso $(T = 0)$, o corpo apresenta uma quantidade gigantesca de energia $(E = mc^2)$. Posteriormente, para o desgosto de Einstein,

esse resultado foi utilizado pelos cientistas do projeto Manhattan para desenvolvimento das bombas nucleares durante a segunda grande guerra (Peruzzo, 2011).

Ademais, como $V_\mu V^\mu = c^2$, tem-se que o resultado da contração $P_\mu P^\mu$ é

$$P_\mu P^\mu = m^2 c^2;$$

todavia,

$$P_\mu P^\mu = P^0 P^0 - \vec{P} \cdot \vec{P} = (P^0)^2 - P^2 = m^2 c^2.$$

Conforme (2.32) e (2.33), P^0 pode ser definido como E/c, logo,

$$(P^0)^2 - P^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - P^2 = m^2 c^2.$$

Por fim, multiplicando todos os termos por c^2 e rearranjando-os:

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4; \qquad \textbf{(2.34)}$$

tem-se a **relação energia-momento**. (Gazzinelli, 2009; Griffiths, 2011).

2.6 Eletrodinâmica relativística

Tal como foram formuladas, ainda que naturalmente compatíveis com a relatividade especial, as leis da eletrodinâmica de Maxwell não exibem visualmente esta compatibilidade através das suas equações clássicas, fazendo-se necessário reescrevê-las no formalismo relativístico. Para isto, soluções ainda mais gerais do que aquelas obtidas em (2.6) e (2.7) devem ser encontradas, de modo que, qualquer campo $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ou $\vec{B}(\vec{r}, t)$ possa ser obtido a partir de $\rho(t, \vec{r})$ e $\vec{J}(t, \vec{r})$ quando conhecidos (Griffiths, 2011).

Como a divergência de $\vec{B}$ é nula, deve existir uma quantidade $\vec{A}$, tal que o rotacional sobre $\vec{A}$ seja exatamente $\vec{B}$, isto é,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \leftrightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \qquad \textbf{(2.35)}$$

Com este resultado, uma expressão mais geral para $\vec{E}$ pode ser obtida, aplicando o resultado acima à (2.3);

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{A}\right),$$

ou ainda

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Como o rotacional acima é nulo, o campo elétrico pode ser escrito neste caso como

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{2.36}$$

As quantidades $\vec{A}$ e ϕ são denominadas, respectivamente, de **potencial vetor** e **potencial escalar**. Agora, substituindo as expressões (2.35) e (2.36) nas equações (2.2) e (2.3), ocorre que:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0};$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right);$$

ou ainda,

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{2.37}$$

$$\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \left(\nabla^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) = \mu_0 \vec{J}. \tag{2.38}$$

As equações (2.37) e (2.38) contém todas as informações necessárias acerca das equações de Maxwell (Griffiths, 2011).

2.6.1 Transformações de calibre

As equações (2.37) e (2.38), exibem um perfil complexo e pouco interessante. Todavia, estas equações podem ser reescritas de modo mais simples em decorrência das **transformações de calibre**, isto é, transformações de simetria nas quais os potenciais em (2.37) e (2.38) não etsão definidos de modo único, havendo outras possibilidades. Uma dessas possibilidades é a construção de novos potenciais a partir dos antigos, onde a invariância e preservada:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}, \quad \phi' = \phi + \beta.$$

É possível mostrar que os novos potenciais $\vec{A}'$ e ϕ' correspondem aos mesmos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e, por isso, estas transformações são chamadas de transformações de calibre. Para o campo $\vec{B}$, nota-se que $\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \left(\vec{A} + \vec{\alpha}\right) = 0$. Para que o rotacional de $\vec{\alpha}$ seja nulo, é necessário que $\vec{\alpha} = \nabla\lambda$. Desse modo, resta que $\left(\nabla \times \vec{A}'\right) = \nabla \times \vec{A} = 0$, tal como antes.

Em relação ao campo $\vec{E}$, tem-se que

$$\vec{E} = -\nabla(\phi + \beta) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \vec{\alpha}\right);$$

mas, $\vec{\alpha} = \nabla\lambda$;

$$\vec{E} = -\nabla(\phi + \beta) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \nabla\lambda\right) = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right).$$

O termo $\nabla\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)$ é nulo e independe da posição, cujo resultado final é a expressão antiga em (2.36) (Griffiths, 2011).

Considerando à não unicidade dos potenciais, uma importante classe de calibre que simplifica significativamente as equações (2.37) e (2.38) é o **calibre de Lorenz**, definido por

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{2.39}$$

Esta imposição permite a simplificação do termo primário da equação (2.38) e a homogeneização do termo $\nabla \cdot \vec{A}$ em (2.37), resultando em

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \tag{2.40}$$

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}. \tag{2.41}$$

Nessas condições, vê-se que a grande vantagem do calibre de Lorenz é a possibilidade de igualar as equações sob a mesma combinação de operadores. A combinação $\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2 - \nabla^2$ é denominada de **d'alambertiano**, sendo simbolizado por $\square$. O d'alambertiano é a generalização do laplaciano com a inclusão da componente temporal, isto é,

$$\square \equiv \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

Dessa forma, as equações (2.40) e (2.41) podem ser reescritas em termos do d'alambertiano:

$$\begin{cases} \square\phi = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (i); \\ \square\vec{A} = \mu_0\vec{J} & (ii). \end{cases} \tag{2.42}$$

2.6.2 Formalismo covariante

Observando a equação da continuidade da carga elétrica em (2.5), é possível notar que a densidade corrente $\vec{J}$ pode ser transformada em um quadrivetor, multiplicando-se a parte temporal pela razão c/c:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}\left(\dfrac{c}{c}\right) = \dfrac{\partial \rho c}{\partial x^0} = \dfrac{\partial}{\partial x^0}(J^0) \\ \nabla \cdot \vec{J} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = \partial_i J^i \end{cases} \Longrightarrow J^\mu = (J^0, J^1, J^2, J^3).$$

Conforme a notação de Einstein, a operação ∂_i em J^i é o divergente do vetor J^i, enquanto J^μ é definido como **quadrivetor de densidade de corrente** ou **quadricorrente**. Portanto, a equação (2.5) na forma covariante é

$$\frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \partial_i J^i \Rightarrow \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0;$$

ou simplesmente

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{2.43}$$

Uma vez combinadas, as quantidades que compõe a quadricorrente mostram que as equações não homogêneas de Maxwell (2.1) e (2.4) estão relacionadas por uma entidade matemática que mistura mutuamente campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$;

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial E^i}{\partial x^i} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{c}{c}\right) = \dfrac{J^0}{\varepsilon_0 c} \Rightarrow \partial_i E^i = \mu_0 J^0; \\ \nabla \times \vec{B} = \begin{matrix} \dfrac{\partial B_z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial B_y}{\partial x^3} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 J^1; \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial x^3} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x^1} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = \mu_0 J^2; \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x^1} - \dfrac{\partial B_x}{\partial x^2} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t} = \mu_0 J^3. \end{matrix} \end{cases} \tag{2.44}$$

Nessa configuração, é possível observar que o objeto matemático que mistura os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não é um simples quadrivetor como a matriz Λ^μ_ν de Lorentz, e sim um **tensor antissimétrico de segundo ordem**, isto é,

$$t^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} t^{00} & t^{01} & t^{02} & t^{03} \\ t^{10} & t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ t^{20} & t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ t^{30} & t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{bmatrix}.$$

A condição antissimétrica para o tensor $t^{\mu\nu}$ exige que $t^{\mu\nu} = -t^{\nu\mu}$. Assim, as 16 componentes de (2.44) que relacionam mutuamente os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são, respectivamente,

$$t^{01} \equiv \mu_0\varepsilon_0 E_x, \quad t^{02} \equiv \mu_0\varepsilon_0 E_y, \quad t^{03} \equiv \mu_0\varepsilon_0 E_Z, \quad t^{12} \equiv B_x, \quad t^{31} \equiv B_y, \quad t^{23} \equiv B_z;$$

como $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, pode-se escrever;

$$t^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c^2 & -E_y/c^2 & -E_z/c^2 \\ E_x/c^2 & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c^2 & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c^2 & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

e as equações não homogêneas são:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \tag{2.45}$$

na qual $F^{\mu\nu}$ é o **tensor de campo eletromagnético** ou **tensor de Maxwell**. Este tensor unifica as equações (2.1) e (2.4) em uma única equação tensorial, que é a expressão em (2.45). Relativisticamente, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, como mostram as expressões em (2.44), estão misturados e a descrição de um fenômeno eletromagnético depende do estado de movimento do observador. Retomando o experimento do vagão de trem no artigo de Einstein, um observador em repouso que mede um campo $\vec{E}$ devido a presença de uma distribuição de cargas nas suas proximidades, o observador em movimento que se desloca com velocidade v junto ao vagão, este, além de inferir um campo $\vec{E}$, também constata a presença de um campo $\vec{B}$ (Neto, 2017).

Por sua vez, as equações homogêneas de Maxwell em (2.2) e (2.3) também podem ser obtidas diretamente de $F^{\mu\nu}$, realizando-se as substituições: $E/c^2 \to B$ e $B \to -E/c^2$. Estas substituições levam à construção de um novo tensor, sendo este um **tensor dual** à $F^{\mu\nu}$, isto é,

$$H^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c^2 & -E_y/c^2 \\ B_y & -E_z/c^2 & 0 & E_x/c^2 \\ B_z & E_y/c^2 & -E_x/c^2 & 0 \end{bmatrix};$$

e as equações homogêneas de Maxwell são:

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0. \tag{2.46}$$

Fazendo os índices gregos atuarem, observa-se que

$$\begin{cases} (\nu = 0) \Longrightarrow \partial_\mu H^{\mu 0} = \sum_{\nu=0}^{3} \dfrac{\partial B^\mu}{\partial x^\mu} = \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ (\nu = 1) \Longrightarrow \partial_\mu H^{\nu 1} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B_x}{\partial x^0} - \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\partial E_z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial E_y}{\partial x^3}\right) = \left(\nabla \times \vec{E} - \dfrac{\partial B}{\partial t}\right)_x = 0; \end{cases}$$

onde $\nu = 1$, fornece a componente x para a lei de Faraday, enquanto 2 e 3 fornecem, respectivamente y e z. Juntas as equações tensoriais (2.45) e (2.46) constituem a forma relativística da eletrodinâmica de Maxwell (Neto, 2017).

Por fim, uma quantidade de suma importância no contexto eletrodinâmico relativístico é chamada de **quadripotencial**. Esta quantidade reúne os potenciais elétrico e magnético em uma única entidade matemática, simplificando a descrição dos campos. Assim, tal como a quadricorrente abriga as componentes temporal e espacial da equação de continuidade de carga, o quadripotencial também é construído a partir das componentes temporal e espacial do calibre de Lorentz em (2.39), tal como segue:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0;$$

cujas componentes são

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \partial_i A^i \\ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{\phi}{c}\right) = \frac{\partial}{\partial x^0}(A^0) \end{cases} \Longrightarrow A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3).$$

A quantidade A^μ é o quadripotencial e este está relacionado ao tensor de campo eletromagnético conforme a relação (Griffiths, 2011):

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad \textbf{(2.47)}$$

2.7 Relatividade geral

Após concluir o trabalho de 1905 sobre a eletrodinâmica, onde as aparentes assimetrias do eletromagnetismo foram desmistificadas, Einstein sabia que aquele simples princípio da relatividade não estava completo. A teoria da relatividade especial é **restrita** aos referenciais inerciais, isto é, desconsidera-se os referenciais acelerados. A necessidade de ampliar a teoria era clara, uma vez que os movimentos, em sua grande maioria (principalmente em razão da gravidade), são acelerados. Portanto, Einstein, em 1907, mediante um *insight* (reconhecido por ele mesmo como o mais feliz da sua vida), intuiu que um observador em queda livre e não ciente de qualquer forma do estado de queda, não sente seu próprio peso. Esta intuição constitui o que Einstein chamou de **princípio da equivalência**:

"*todo e qualquer efeito gravitacional local é indistinguível de uma aceleração"*.

Einstein concluiu que uma teoria geral da relatividade implicaria em uma nova teoria da gravitação. A primeira parte dessa teoria começou em 1907, com o princípio da equivalência, chegando ao em 1915, quando Einstein publicou as equações de campo da relatividade geral. Essa teoria descreve a gravidade como um efeito curvatura do espaço-tempo, formulada com base na **geometria riemanniana** (Gazzinelli, 2009).

2.7.1 As equações de campo

Em seu artigo de 1915, intitulado de "Os Fundamentos da Teoria da Relatividade", Einstein exprimiu o **princípio da relatividade geral** como sendo:

"As leis da física devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em sistemas de referência animados de qualquer movimento".

O princípio da relatividade geral encontra-se matematicamente codificado nas **equações de campo de Einstein**. Estas equações podem ser obtidas através de um método

analítico alternativo àquele que Einstein originalmente seguiu[11], o qual se deve ao matemático David Hilbert (1862–1943). Hilbert tomou como ponto de partida o **princípio da mínima ação**, uma vez que, se um corpo está sujeito a um campo gravitacional, a trajetória naturalmente realizada pelo corpo será aquela cuja a ação da gravidade sobre o corpo seja mínima e esta trajetória (chamada de geodésica) será descrita pela equação de campo. Define-se por **ação** a quantidade escalar S, definida pela integral:

$$[S] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\{x_i, \dot{x}_i(t), t\}dt. \tag{2.48}$$

Realizando a análise dimensional de S, infere-se que suas dimensões são:

$$M^1L^2T^{-1} \Longrightarrow [kg]\frac{[m^2]}{[s^2]}[s].$$

No S.I., estas quantidades físicas constituem as grandezas de energia e tempo: $J.s$. O integrando $\mathcal{L}$ é chamado de **densidade lagrangiana**, ou simplesmente **lagrangiana**, uma função relacionada a energia do sistema cuja dependência são as posições, velocidades e implicitamente o tempo. Diz-se, então, que a ação é mínima quando a taxa de variação δ sobre S é nula;

$$\delta[S] = \delta\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\{x_i, \dot{x}_i(t), t\}dt = 0. \tag{2.49}$$

Para obter as equações de campo, é necessário encontrar uma ação S que contenha as informações necessárias que, ao ser minimizada, produza as equações de campo. Esta ação, nos dias de hoje, referente ao trabalho de Einstein e Hilbert, é denominada de **ação de Einstein-Hilbert**, composta por uma parte da ação da matéria-energia que preenche o espaço e outra referente a curvatura e dinamicidade do espaço-tempo, tal como segue;

$$S_{EH} = S_{ME} + S_C, \tag{2.50}$$

onde S_C deve ser uma integral sob o espaço-tempo quadridimensional e deve conter informações sobre a dinamicidade do mesmo. Já S_{EM} deve ser o mais simples possível, visto que, para cada distribuição de matéria ou energia no espaço resulta em um efeito diferente. Nestas condições, admite-se

$$\begin{cases} S_C = \int \mathcal{L}_C\sqrt{-g}d^4x\,; \\ S_{EM} = \int \mathcal{L}_{EM}\sqrt{-g}d^4x\,. \end{cases} \tag{2.51}$$

[11] Originalmente, Einstein obteve suas equações de campo através de um processo analítico estritamente complexo via análise tensorial e outras identidades matemáticas denominadas de identidades de Bianchi.

O termo $\sqrt{-g}$ é definido como **jacobiano**, obtido a partir da raiz quadrada do determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Este termo garante a invariância da ação quando há mudanças de coordenadas. Quanto as lagrangianas, levando-se em consideração que S_{EH} é um escalar, estas também devem ser um escalar que, no caso da curvatura, o escalar mais simples é o **escalar de Ricci**, que exprime o estado de curvatura do espaço-tempo. Por sua vez, $\mathcal{L}_{EM}$ da matéria-energia admite várias formas, sendo a mais simples aquela que considera a presença da radiação eletromagnética. Assim, as lagrangianas mais apropriadas são:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_C = 2\alpha(R - 2\Lambda); \\ \mathcal{L}_{EM} = -\dfrac{1}{4\mu_0 c} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}; \end{cases} \tag{2.52}$$

onde R é o escalar de Ricci, α e Λ são constantes escalares arbitrarias. Por simplicidade, a lagrangiana da matéria-energia continuará sendo apenas $\mathcal{L}_{ME}$, sem substituição. Assim, substituindo (2.52) em (2.51),

$$\begin{cases} S_C = \int 2\alpha(R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x\,; \\ S_{EM} = \int \mathcal{L}_{ME}\sqrt{-g}d^4x\,. \end{cases}$$

e, seguidamente em (2.50)

$$S_{EH} = \int 2\alpha(R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x + \int \mathcal{L}_{ME}\sqrt{-g}d^4x$$

$$S_{EH} = \int [2\alpha(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_{ME}]\sqrt{-g}d^4x$$

$$S_{EH} = 2\alpha \int [(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_{ME}]\sqrt{-g}d^4x. \tag{2.53}$$

A ação estabelecida acima deve ser minimizada, conforme a imposição (2.49), de modo que

$$\delta S_{EH} = \delta\left(2\alpha \int [(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_{ME}]\sqrt{-g}d^4x\right) = 0.$$

A variação δ na ação corresponde à uma **derivada funcional** em relação a métrica $g^{\mu\nu}$, uma vez que o escalar de Ricci e a ação como um todo são funções $g^{\mu\nu}$. Esta variação age no integrando de modo similar a regra da cadeia:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu},$$

logo,

$$\delta S_{EH} = 2\alpha \int \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}[(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_{ME}]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x = 0.$$

Calculando a derivada funcional, a expressão acima toma a forma:

$$2\alpha\int\left[\left(-\frac{R}{2\sqrt{-g}}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}+\sqrt{-g}\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}+\frac{\Lambda}{\sqrt{-g}}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}\right)+\sqrt{-g}\frac{\delta\mathcal{L}_{ME}}{\delta g^{\mu\nu}}-\frac{\mathcal{L}_{ME}}{2\sqrt{-g}}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}d^4x.$$

Como $\delta S_{EH}=0$, implica que a integração também é propriamente nula, assim,

$$2\alpha\left(-\frac{R}{2\sqrt{-g}}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}+\sqrt{-g}\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}+\frac{\Lambda}{\sqrt{-g}}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}\right)=-\sqrt{-g}\frac{\delta\mathcal{L}_{ME}}{\delta g^{\mu\nu}}+\frac{\mathcal{L}_{ME}}{2\sqrt{-g}}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Multiplicando-se ambos os lados da expressão acima pelo fator $2/\sqrt{-g}$, resulta,

$$2\alpha\left(\frac{R}{g}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}+2\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}-\frac{2\Lambda}{g}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}\right)=-2\frac{\delta\mathcal{L}_{ME}}{\delta g^{\mu\nu}}+\frac{\mathcal{L}_{ME}}{g}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Note que o lado direito da equação acima na sua forma mais geral contem informação acerca da matéria e qualquer outra forma de fonte de gravidade que se faça presente no espaço-tempo. A quantidade no lado direito da expressão é parte de um tensor de dois índices que pode ser simplesmente definida por $T_{\mu\nu}$, chamado de **tensor de energia-momento**. Realizando, essa substituição na expressão anterior, vem que,

$$2\alpha\left(\frac{R}{g}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}+2\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}-\frac{2\Lambda}{g}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}\right)=T_{\mu\nu},$$

e, dividindo a expressão por 2α:

$$\frac{R}{2g}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}+\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}-\frac{\Lambda}{g}\frac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}=\frac{1}{2\alpha}T_{\mu\nu}. \qquad \textbf{(2.54)}$$

Finalmente, resta calcular a variação do escalar de Ricci R e a variação do determinante do tensor métrico g. Estes dois resultados são bastantes simples, de modo que:

$$\begin{cases}\dfrac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}=R_{\mu\nu},\\ \dfrac{\delta g}{\delta g^{\mu\nu}}=-gg_{\mu\nu};\end{cases}$$

dessa forma, a equação (2.54) fica

$$\frac{R}{2g}\left(-gg_{\mu\nu}\right)+R_{\mu\nu}-\frac{\Lambda}{g}\left(-gg_{\mu\nu}\right)=\frac{1}{2\alpha}T_{\mu\nu};$$

ou ainda,

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=\frac{1}{2\alpha}T_{\mu\nu}.$$

Que são as equações de campo de Einstein.

Para campos gravitacionais fracos (limite newtoniano: $\mu=\nu=0$), o termo $1/2\alpha$ pode ser escrito

$$\frac{1}{2\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

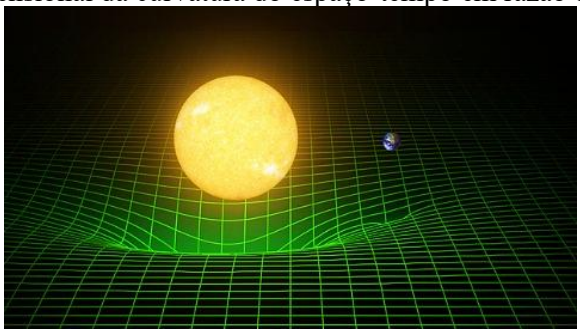
Portanto, em sua forma mais conhecida, as equações de campo de Einstein são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad \textbf{(2.55)}$$

Nessas equações, $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e G a constante gravitacional newtoniana ($G \sim 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 kg^{-1}s^{-2}$). As equações de campo de Einstein relacionam a dinâmica do espaço-tempo à distribuição de energia-matéria no próprio espaço-tempo, como pode ser visto de modo simplificado na figura 7. Em outras palavras, o lado esquerdo da equação, diz como deve se comportar a matéria-energia no espaço-tempo, conforme a geometria. O lado direito diz como o espaço-tempo deve se curvar na presença de matéria-energia, expressa pelo tensor de energia-momento (Carroll, 2019; Gazzinelli, 2009).

Dada a curvatura do espaço-tempo na presença de um corpo suficientemente massivo, Einstein previu que este fato poderia ser diretamente observado a partir de algum evento astronômico, no qual a luz de uma estrela distante, ao passar próxima do Sol, apresentaria um desvio mensurável em sua trajetória. Após tentativas de registro sem sucesso, duas expedições comandadas pelo astrofísico Arthur S. Eddington (1882–1944) em colaboração do astrônomo Andrew Crommelin (1865–1939), em 1919, realizaram registros fotográficos durante um eclipse solar total na cidade de Sobral, estado do Ceará e na Ilha do Principe, na costa da África. Por estarem mais nítidos, os registros feitos por Crommelin em Sobral evidenciaram que a luz da estrela observada próxima ao Sol durante o eclipse constava uma deflexão de $1{,}98'' \pm 0{,}30''$. Este resultado estava de acordo com as previsões de Einstein e da teoria, constituindo a primeira comprovação experimental da relatividade geral de Einstein (Gazzinelli, 2009).

Figura 7 – Exemplo bidimensional da curvatura do espaço-tempo em razão da presença de massa.



Fonte: Adaptado de Greene, (2001, p. 89).

A constante Λ, adicionada "arbitrariamente" no início da demonstração, é denominada de **constante cosmológica** ($\Lambda \sim 1{,}11 \times 10^{-52}\ m^2$), atualmente interpretada como a densidade

de energia do vácuo, sendo a candidata mais simples e natural para explicar a aceleração da expansão do Universo. A princípio, a constante foi introduzida por Einstein para produzir um efeito de estaticidade nas equações de campo, visto que a curvatura do espaço-tempo, em razão da densidade total de matéria e energia no Universo implicaria em colapso. Posteriormente, medições acuradas realizadas pelo astrônomo norte-americano Edwin Hubble (1889–1953) revelou a existência da expansão do Universo (Peruzzo, 2011; Gazzinelli, 2009).

2.8 A unificação de Kaluza–Klein

Até a descoberta de outras interações fundamentais, o eletromagnetismo de Maxwell junto à teoria da relatividade de Einstein pareciam ser tudo que havia de mais fundamental na natureza. Ao finalizar por completo o trabalho com a relatividade, o próprio Einstein se lançou em um programa teórico em busca de um constituinte teórico fundamental da natureza, isto é, uma teoria unificadora que acoplasse em uma única expressão matemática as equações de campo da relatividade com a eletrodinâmica de Maxwell. "Sua convicção era que um programa de unificação não só poderia combinar sua teoria de campo gravitacional da relatividade geral com as equações de Maxwell, mas também lançaria luz sobre o mistério quântico[12]" (Cheng, 2013, p. 283 – Tradução nossa).

Nesse sentido, por meio de um trabalho direcionado ao próprio Einstein em 1919, o matemático alemão Theodor Kaluza (1885–1954), observando a semelhança entre os **símbolos de Christoffel $\boldsymbol{\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}$** (expressões que surgem na construção tensorial das equações de campo da relatividade geral) e o tensor covariante de Maxwell $F_{\mu\nu}$, sugeriu uma possível unificação entre a relatividade geral e o eletromagnetismo por meio de uma abordagem geométrica para a teoria eletromagnética de Maxwell. Considera-se, portanto, o tensor covariante de Maxwell e os símbolos de Christoffel:

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; & (i) \\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right). & (ii) \end{cases}$$

De modo simples, Kaluza propôs inicialmente que a adição de mais uma dimensão na métrica original quadridimensional $g_{\mu\nu}$, com $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 5)$, permitiria calcular e reescrever o símbolo $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ em termos de $F_{\mu\nu}$. Na teoria de Kaluza o elemento de linha é

$$dS^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

[12] "His conviction was that a unification program not only could combine his GR gravitational field theory with Maxwell's equations but also shed light on the quantum mystery".

onde $\gamma_{\mu\nu}$ é a métrica pentadimensional de Kaluza, isto é,

$$\gamma_{\mu\nu}\begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 5} \\ g_{5\nu} & g_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu] & A_\mu \\ A_\nu & 1 \end{pmatrix}.$$

Expandindo os termos do intervalo espaço-temporal em termos da métrica, ocorre que:

$$dS^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \left(dx^5 + A_\mu dx^\mu\right)^2;$$

$$dS^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + (dx^5)^2 + 2A_\mu dx^\mu dx^5 + \left(A_\mu dx^\mu\right)(A_\nu dx^\nu).$$

e, por tanto,

$$dS^2 = \left(g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu\right)dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu 5}dx^\mu dx^5 + g_{55}(dx^5)^2. \quad \textbf{(2.56)}$$

A métrica imposta por Kaluza guarda uma característica particular: $g_{\mu\nu}$ e A_μ são funções que dependem unicamente do espaço-tempo quadrimensional. De outro modo, isso significa que o intervalo espaço-temporal em (2.56) não depende da coordenada da quinta dimensão, isto é, para qualquer $\partial_5\gamma_{\mu\nu} = 0$. Este fato recebe o nome **condição de cilindricidade**, cujo significado físico é o de uma dimensão extra compactada. Desse modo, é possível calcular os símbolos de Christoffel somente em termos da métrica 4-D. Tomando-se $\mu = 5$, ocorre que,

$$\Gamma^\lambda_{5\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(\partial_5 g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho 5} - \partial_\rho g_{5\nu}\right),$$

mas, como $\partial_5 g_{\nu\rho} = 0$, implica que

$$\Gamma^\lambda_{5\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(\partial_\nu g_{\rho 5} - \partial_\rho g_{5\nu}\right). \quad \textbf{(2.57)}$$

Comparando $\Gamma^\lambda_{5\nu}$ com a expressão (i) do tensor eletromagnético, vê-se que as expressões diferem uma da outra a menos de um termo:

$$\Gamma^\lambda_{5\nu} = \varphi F^\lambda_\nu,$$

como $g^{\lambda\rho}F_{\nu\rho} = F^\lambda_\nu$, ocorre que $\Gamma^\lambda_{5\nu} = F^\lambda_\nu \Leftrightarrow \varphi = 1/2$, e, portanto,

$$\Gamma^\lambda_{5\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}F_{\nu\rho}. \quad \textbf{(2.58)}$$

Com base nesses resultados, Kaluza constatou que o nosso universo 4-D, contendo separadamente eletromagnetismo e gravitação, é equivalente a um outro universo hipotético com 5 dimensões, onde há somente gravidade. Kaluza também mostrou que as equações homogêneas de Maxwell em (2.47) não são postuladas, mas sim consequências diretas de uma geometria pentadimensional, reescrevendo-as como sendo uma identidade de Bianchi para a relatividade geral (Cheng, 2013):

$$\partial_\lambda F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\rho} = 0. \quad \textbf{(2.59)}$$

A teoria de Kaluza entrou em dormência e assim permaneceu até os próximos avanços fornecidos pelo físico sueco Oskar Klein (1894–1977). Klein percebeu que a teoria de Kaluza (em decorrência da métrica não invariante proposta pelo mesmo) era uma teoria não invariante sob uma transformação geral de coordenadas. Porém, se esta for reescrita com a métrica correta, é possível atribuir um significado geométrico às transformações de calibre e estas passam a ser deslocamentos na dimensão extra compactada. Klein propõe, então, a substituição da métrica imposta por Kaluza, preservando a condição de cilindricidade. Em seu trabalho, Klein derivou a métrica a partir da mínima ação de uma partícula relativística com massa m, imersa em um campo eletromagnético em 4-D, seguida de uma comparação deste mesmo sistema físico para uma mínima ação calculada em 5-D. Após os cálculos de Klein, a nova métrica é

$$dS^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - g_{55}\left(dy - \frac{g_{5\mu}}{g_{55}}dx^\mu\right)^2,$$

onde

$$\gamma_{\mu\nu}\begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 5} \\ g_{5\nu} & g_{55}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}A_\mu A_\nu] & g_{55}A_\mu \\ g_{55}A_\nu & -g_{55}\end{pmatrix}.$$

Em posse desses novos resultados, Klein calculou a ação de Einstein-Hilbert (2.50), considerando um espaço 5-D e assumindo a constante cosmológica nula;

$$S_{EH} = 2\alpha \int R\sqrt{-g}d^5x.$$

Considerando $g_{55} = \chi(x^\mu)$ em $\gamma_{\mu\nu}$ um campo escalar, ao final do processo algébrico entre os símbolos de Christoffel tem-se a ação de Kaluza-Klein S_{KK};

$$S_{KK} = 4\alpha\pi r \int \sqrt{-g}\sqrt{\alpha}\left(R + \frac{\chi k^2}{4\mu_0 c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)d^4x,$$

onde a dimensão compacta varia de 0 a 2π, e k é uma reorganização do quadripotencial. Calculando a variação δS_{KK}, as equações de movimento derivadas a partir da ação de Kaluza-Kleins para as condições de contorno $\chi = 1$ e $A_\mu = 0$ são:

$$\begin{cases} G_{\mu\nu} = \dfrac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}; \\ \nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(2.58)}$$

onde o tensor de energia-momento depende intimamente de $F_{\mu\nu}$.

As duas expressões em (2.58) constituem o denominado **milagre de Kaluza-Klein**. As condições suficientemente impostas na ação de Kaluza-Klein ($\chi = 1$ e $A_\mu = 0$) resultam na unificação total entre a eletrodinâmica de Maxwell e as equações de campo de Einstein. Todavia, como indicam os fatos, para o desanimo de Kaluza e infortúnio de Klein, as ideias de

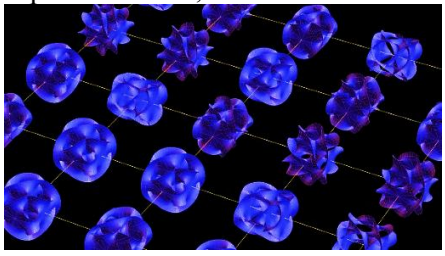
Kaluza, ainda que muito apreciadas inicialmente por Einstein, acabaram sendo desacreditadas pelo mesmo, implicando na publicação tardia da teoria. Quanto a Klein, outras interações fundamentais foram descobertas e descritas matematicamente com bastante sucesso, ao passo que as dimensões extras compactadas nunca foram observadas.

Atualmente, a essência da teoria de Kaluza-Klein pode ser encontrada nos fundamentos matemáticos da **teoria das cordas**. Datada de 1968, o modelo teórico das cordas foi introduzido pelo físico italiano Gabriele Veneziano (1942–), no intuito de descrever a interação fundamental entre as partículas. Posteriormente, na década de 70, o modelo teórico de Veneziano foi generalizado por Leonard Susskind (1940–), Yoichio Nambu (1921–2015) e Holger B. Nielsen (1941–), que passaram a compreender a pontualidade material das partículas fundamentais como o aspecto vibrante de filamentos (abertos ou fechados) de energia (as cordas). A remodelagem teórica da pontualidade material das partículas em termos das cordas conduziu à possibilidade de unificação da relatividade geral com a mecânica quântica, uma vez que, neste novo cenário, as equações de campo da relatividade emergem naturalmente do limite clássico e de baixa energia de uma teoria quântica mais fundamental. Conforme a ação de Polyakov para uma corda bosônica (ou mediadora):

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{h}h^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X), \qquad \textbf{(2.59)}$$

onde os termos X^μ, h^{ab} e $g_{\mu\nu}(X)$ correspondem, respectivamente, à campos escalares, à métrica da folha de mundo e a métrica do espaço-tempo alvo. Nesse cenário, a gravidade assume o caráter de uma interação de calibre, mediada por uma partícula fundamental hipotética chamada ***gráviton***, cujo o campo é dado pelo termo de flutuação: $g_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(X)$. Para ser efetiva, conforme o modelo ou tipo, a teoria exige 25, 11 ou 10 dimensões, curvadas e compactadas em escalas da ordem do comprimento de Planck ($l_P \cong 1{,}16 \times 10^{-35}\ m$), tal como retratadas pela figura 8 abaixo (Cheng, 2013; Greene, 2001; Salam, 1993).

Figura 8 – Dimensões extras curvadas e compactas na teoria das cordas. Na ordem do comprimento de Planck, cada ponto do espaço-tempo é uma entidade geométrica complexa denominada de variedade de Calabi-Yau que, tal como previu Kaluza, são dimensões extras curvadas e compactadas.



Fonte: Adaptado de Greene, (2001, p. 233).

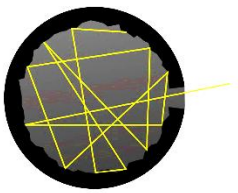
3 FUNDAMENTOS GERAIS DA TEORIA QUÂNTICA

Nos anos de 1900, quando parte da comunidade científica europeia buscava respostas para os resultados problemáticos do experimento de Michelson-Morley, outra parte estava centrada na busca pela compreensão da natureza da radiação e as propriedades atômicas emergentes. Este capítulo é dedicado às revolucionárias teorias que, até o ano de 1926, constituem a primeira quantização da luz, da matéria e a formalização geral de uma nova mecânica para natureza: a mecânica quântica. Junto à teoria da relatividade de Einstein, a teoria quântica compõe um novo segmento da ciência física que, em distinção da mecânica de Newton e de toda as concepções físicas desenvolvidas até 1901, recebeu o nome de **física moderna** ou a física do século XX.

3.1 Equipartição da energia e o problema da radiação do corpo negro

A busca pela compreensão da natureza da radiação e da luz conduziu naturalmente a comunidade científica à investigação das propriedades térmicas emissivas dos corpos opacos que, quando aquecidos, emitem radiação. No meio experimental, denominou-se de corpo negro um corpo idealmente opaco, capaz de absorver por completo toda a radiação que nele incide e, quando aquecido, emite radiação eletromagnética (luz e calor). A figura 9 ilustra um modelo idealizado de corpo negro: uma cavidade com um pequeno orifício, na qual a radiação que entra pelo pequeno orifício, é refletida múltiplas vezes no interior da cavidade até ser completamente absorvida. O problema da radiação de corpo negro surgiu quando tentou-se inferir a densidade espectral de energia irradiada pela cavidade ao ser aquecida.

Figura 9 – Idealização esquemática de um corpo negro e do comportamento da radiação em seu interior após adentrar por uma pequena cavidade.



Fonte: Adaptado de Peruzzo, (2012 p. 118).

Conforme a figura 9, ao entrar na cavidade, a radiação é idealmente refletida, implicando na agitação das partículas que compõe o interior do corpo e na emissão de energia. Ao ser inferida em laboratório, a densidade espectral da energia $u = u(\nu, T)$ na cavidade

apresentava graves divergências com os modelos teóricos: “Quando tentamos aplicar a mecânica clássica e a eletrodinâmica para explicar fenômenos atômicos, eles levam a resultados que estão em conflito óbvio com a experiência[13]” (Landau; Lifshitz, 1965, p. 1 – Tradução nossa).

3.1.1 Lei do deslocamento de Wien

A primeira tentativa teórica de descrição da densidade espectral de energia da radiação de corpo negro se deve ao físico Wilhelm Wien (1864–1928), em 1896. Wien, através de uma analogia termodinâmica, supôs que as condições no interior da cavidade seriam aquelas de uma expansão adiabática reversível (sem trocas de calor com o ambiente externo) em um gás e que a temperatura deveria estar relacionada intimamente com a emissão de luz. Em termos matemáticos, a relação entre o comprimento de luz emitido e o volume em uma expansão adiabática é dada por (Peruzzo, 2012; Greiner, 1989):

$$\lambda = V^{1/3} \Longrightarrow \lambda^3 V = cte.$$

Portanto, para Wien, o interior da cavidade deveria ser composto por pequenos corpos oscilantes, tal como as moléculas de um gás durante a expansão e que a radiação emitida pela cavidade deveria ser proveniente da agitação cinética destes pequenos corpos. Assim, a densidade espectral de energia deve satisfazer uma função universal F em termos do comprimento de onda λ e da temperatura T:

$$\frac{u(\lambda, T)}{\lambda^5} = F(\lambda, T).$$

Segundo a distribuição de Maxwell-Boltzmann, a energia das ondas eletromagnéticas, deve ser tal que

$$F(E) \propto e^{-\frac{E}{k_b T}},$$

onde k_b é a constante de Boltzmann: $\left(k_b \sim 1{,}38 \times 10^{-23}\ {}^{J}/_{K}\right)$. Em termos da frequência ν, a energia é $\beta\nu$, onde β é uma constante e para mais uma constante α introduzida que, ao ser ajustada convenientemente junto à β, tem-se a lei de distribuição de Wien:

$$u(\nu, T) = \alpha \nu^3 e^{-\beta \frac{\nu}{T}}. \qquad \textbf{(3.1)}$$

A partir da lei de distribuição acima, Wien constatou que os picos de emissão das curvas de radiância deslocam-se para os comprimentos de ondas mais curtos ou de alta

[13] “When we attempt to apply classical mechanics and electrodynamics to explain atomic phenomena, they lead to results which are in obvious conflict with experiment”.

frequência. Analiticamente, os picos de emissão podem ser considerados regiões de máximo local, onde as taxas de variação com relação à frequência são sempre nulas;

$$\frac{d}{d\nu}u(\nu,T)=0,$$

o que leva naturalmente a condição ou lei de deslocamento de Wien:

$$\nu_{max}=bT,$$

onde $(b=3/\beta\cong 2{,}9\times 10^{-3}\ m\cdot K)$ é a constante de proporcionalidade de Wien.

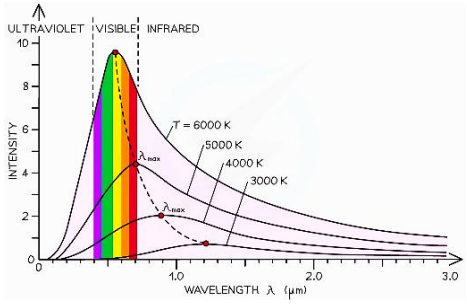
Como pode ser observado na figura 10, vê-se que a lei de distribuição de Wien descreve satisfatoriamente a radiação de alta frequência (pequenos comprimentos de onda), porém, falha gravemente na descrição da radiação baixa frequência (maiores comprimentos de onda). Pelo teorema da equipartição da energia, a densidade espectral de energia emitida por um corpo em equilíbrio térmico é uma contribuição quadrática de cada oscilador, isto é,

$$u(\nu,T)\propto \nu^2 T;$$

no entanto,

$$\begin{cases}\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\alpha\nu^3 e^{-\beta\frac{\nu}{T}}\right)\Longrightarrow u(\nu,T)\approx 0\,;\\ \lim\limits_{\nu\to 0}\left(\alpha\nu^3 e^{-\beta\frac{\nu}{T}}\right)\Longrightarrow u(\nu,T)\approx \alpha\nu^3.\end{cases}$$

Figura 10 – Deslocamentos dos picos de emissão das curvas de radiância conforme a lei do deslocamento de Wien.



Fonte: Adaptado de Peruzzo, (2012, p. 117).

3.1.2 Lei de Rayleigh-Jeans

Com base em argumentos derivados da teoria eletromagnética e mecanica estatística, os físicos John W. Strutt (Lord Rayleigh) (1842–1919) e James H. Jeans (1877–1946) propuseram a chamada lei de Rayleigh-Jeans, sendo ela o indicador mais conhecido da existência das discrepâncias entre os resultados teóricos e experimentais da radiação de corpo negro. Rayleigh e Jeans consideraram em sua análise um corpo negro em formato cubico, tal que $V=L^3$ e que suas paredes internas são perfeitamente condutoras. Ao adentrarem no interior

do corpo pela cavidade, as ondas eletromagnéticas descritas individualmente por vetores de onda assumem o perfil de **modos estacionários**, tal que;

$$\vec{k}(k_x, k_y, k_z) = \begin{cases} k_x = \dfrac{\pi n_x}{L} \\ k_y = \dfrac{\pi n_y}{L}, n \in \mathbb{N}^*; \\ k_z = \dfrac{\pi n_z}{L} \end{cases}$$

onde $k = \|\vec{k}\| = 2\pi\nu/c$.

Considerando a existência de 2 espécies de polarização para as ondas e que o número de modos presentes em um intervalo de frequência ν e $\nu + d\nu$ é uma quantidade dN, tal que

$$dN = 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot d^3k,$$

onde $V/(2\pi)^3$ é a densidade de estados estacionários no espaço e d^3k o volume interno do corpo, o número de modos pode ser calculado por simetria esférica, tomando-se

$$d^3k = k^2 Sen(\theta) dk d\theta d\phi;$$

$$dN = 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} k^2 Sen(\theta) dk d\theta d\phi.$$

Integrando as quantidades angulares, vê-se que

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} k^2 Sen(\theta) dk d\theta d\phi = k^2 4\pi dk,$$

e que

$$dN = \frac{2V}{8\pi^3} \cdot k^2 4\pi dk \Longrightarrow dN = \frac{Vk^2}{\pi^2} dk.$$

Como $k = 2\pi\nu/c$, logo $dk = 2\pi d\nu/c$;

$$dN = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{c} d\nu\right);$$

$$dN = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3} d\nu. \qquad \textbf{(3.2)}$$

Aplicando novamente o teorema da equipartição da energia, ao refletir a radiação incidente, os pequenos corpos oscilantes que compõem as paredes internas do corpo negro oscilam continuamente emitindo energia, cuja média é $\langle E \rangle = k_B T$. Portanto, a lei de Rayleigh-Jeans para densidade espectral de energia na cavidade é

$$u(\nu, T) = \frac{dU}{V} = \frac{[dN \cdot \langle E \rangle]}{V} = \frac{1}{V} \frac{8\pi V \nu^2}{c^3} d\nu \cdot k_B T;$$

que, simplificando a energia total por unidade de volume;

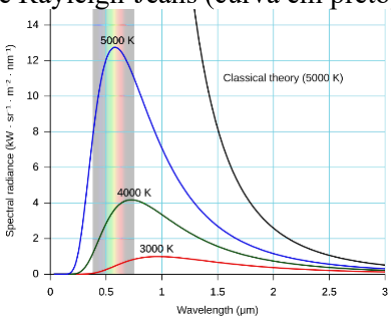
$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T. \tag{3.3}$$

A lei de Rayleigh-Jeans obedece ao teorema da equipartição da energia e, para baixas frequências, é compatível com os resultados experimentais. Todavia, quando analisada para altas frequências (na ordem do ultravioleta), a teoria falha catastroficamente, prevendo emissões infinitas de energia;

$$\begin{cases} \lim\limits_{\nu\to\infty} \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^2} k_B T\right) \Longrightarrow u(\nu, T) \approx \infty\,; \\ \lim\limits_{\nu\to 0} \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^2} k_B T\right) \Longrightarrow u(\nu, T) \approx 0. \end{cases}$$

Estes resultados, equivalem dizer que, na prática e a título de exemplo, ao ascender um simples palito de fósforo, este emitiria uma quantidade infinita de energia durante a combustão. Como pode ser visto na figura 11, a lei de Rayleigh-Jeans configura-se como o ápice do problema da radiação de corpo negro e até finalmente ser solucionada, a divergência na equação (3.3) para altas frequências recebeu o nome de **catástrofe do ultravioleta** (Greiner, 1989; Weinberg, 2015).

Figura 11 – Comparação entre os resultados experimentais (curvas coloridas) e o argumento clássico de Rayleigh-Jeans (curva em preto).



Fonte: Adaptado de Odenwald, (2024 p. 42).

3.2 Planck, Einstein e o princípio da quantização

A solução definitiva para a catástrofe do ultravioleta e da radiação de corpo negro ocorreu entre os anos de 1900 e 1901, através de uma proposta revolucionária contida em um artigo do físico alemão Max Planck. Planck, distintamente da proposta de Rayleigh e Jeans, sugere que os osciladores que compõe as paredes internas do corpo negro não oscilavam continuamente em emissão de energia, mas que estes oscilavam em quantidades discretas, emitindo energia em múltiplos e inteiros positivos de uma quantidade desconhecida ϵ. Assim, a energia emitida por cada oscilador é

$$E_n = n\epsilon \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}. \quad \textbf{(3.4)}$$

A energia média $\langle E \rangle$ de cada oscilador com temperatura T pode ser determinada usando a distribuição de Boltzmann:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot e^{-E_n/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/k_B T}};$$

substituindo $E_n = n\epsilon$ na equação acima,

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon \cdot e^{-n\epsilon/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon/k_B T}}.$$

Definindo $e^{-n\epsilon/k_B T} = x$, tal que $|x| < 1$;

$$\langle E \rangle = \epsilon \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}.$$

Conforme a convergência das expressões gerais das séries de Taylor das funções nx^n e x^n, os somatórios podem ser reescritos, de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{x-1};$$

e assim;

$$\langle E \rangle = \epsilon \cdot \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow \epsilon \cdot \frac{x}{1-x}.$$

Retornando à expressão $x = e^{-\epsilon/k_B T}$, tem-se que a energia média de cada oscilador é dada pela expressão:

$$\langle E \rangle = \epsilon \cdot \frac{e^{-\epsilon/k_B T}}{1 - e^{-\epsilon/k_B T}} = \frac{\epsilon}{e^{-\epsilon/k_B T} - 1}$$

Por fim, considerando novamente o número de modos eletromagnéticos por unidade de volume presentes em um intervalo de frequência ν e $\nu + d\nu$ para 2 polarizações:

$$u(\nu, T) = dN \cdot \langle E \rangle \Rightarrow \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \cdot \frac{\epsilon}{e^{-\epsilon/k_B T} - 1};$$

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\epsilon}{e^{-\epsilon/k_B T} - 1}. \quad \textbf{(3.5)}$$

Como indicavam os resultados experimentais, a quantidade desconhecida ϵ deveria ser uma função da frequência ν. Analiticamente, de modo que ϵ pudesse assumir as dimensões de energia, Planck observou que a frequência ν deveria estar acompanhada de um outro parâmetro, cuja dimensão era $J \cdot s$. Usando valores experimentais para a densidade de energia, Planck

verificou a presença de um certo parâmetro h, cujo valor era de $\sim 6{,}626 \times 10^{-34}\ J \cdot s$. Logo, em termos de ν e h, a **lei da radiação de Planck** é:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \qquad \textbf{(3.6)}$$

Posteriormente, viu-se que h não era somente um parâmetro para ajuste experimental, mas uma nova constante universalmente fundamental da natureza. A constante h, denominada de **constante de Planck**, constitui a menor unidade indivisível de ação no Universo (Greiner, 1989; Weinberg, 2015).

3.2.1 Efeito fotoelétrico

Ainda que estivesse correta, a solução proposta por Max Planck para a radiação na cavidade do corpo negro não foi bem acolhida, nem mesmo por ele próprio. Em seu "ato de desespero", além de romper com a aparente e inquestionável continuidade da energia, a necessidade da existência de minúsculas entidades oscilantes tornava a teoria ainda mais absurda e incômoda. Por diversas vezes, porém, sem sucesso, Planck tentou reelaborar sua teoria nos moldes clássicos e, mesmo sendo agraciado com o prêmio Nobel de 1918 pelo feito revolucionário, Planck nunca aceitou ou acreditou fielmente em seus próprios resultados (Peruzzo, 2012; Smolin, 2002).

Novamente, em sua série de publicações de 1905, Einstein apresentou os argumentos os decisivamente finais. Por meio de mais dois artigos, Einstein não somente comprovou a existência dos átomos (os corpos oscilantes) ao analisar movimentos de grãos de polem suspensos em fluido (movimento browniano), mas, também, o caráter verdadeiramente discreto e natural da energia, sendo este último resultado premiado com o Nobel em 1921. Desde os experimentos de Hertz, em 1887, acerca da radiação eletromagnética, observava-se que a luz tinha alguma influência sobre as faíscas geradas e detectadas nos equipamentos, sendo mais difícil haver passagem de descargas quando os instrumentos não estavam sob iluminação. Posteriormente, estudos experimentais realizados por Philipp Lenard (1862–1947) revelaram que a luz conseguia estabelecer uma corrente elétrica entre dois eletrodos, desde que estes estivessem ligados à alguma fonte de tensão e isolados do meio externo numa ampola evacuada. O estranho efeito que a luz parecia ter sobre os eletrodos metálicos (principalmente a radiação ultravioleta) denominou-se de **efeito fotoelétrico** (Nussenzveig, 2014).

O argumento de Einstein para o efeito fotoelétrico baseava-se na possibilidade do caráter discreto da luz, isto é, a luz seria composta por pequenos corpúsculos que, ao interagirem com os elétrons da superfície metálica dos eletrodos, transfeririam energia e ejetariam os mesmos. Cada corpúsculo carregaria consigo uma quantidade discreta de energia (como Planck propôs em 1900), tal que $E = h\nu$, assim, na interação com o elétron, este é ejetado do eletrodo com energia cinética;

$$h\nu - W = \frac{m_e v_m^2}{2},$$

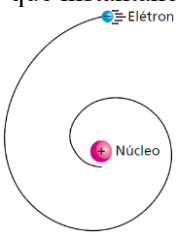
onde W é uma característica do próprio material chamada função de trabalho, associado ao trabalho necessário para a ejeção do elétron. Estes corpúsculos receberam o nome de **fótons** e representam os *quanta* de luz, a menor quantidade possível para a radiação eletromagnética. "A intensidade da luz é proporcional à energia total que transporta, e por conseguinte ao número de fótons, o que explica porque a foto-corrente é diretamente proporcional à intensidade da luz" (Nussenzveig, 2014, p. 209).

3.3 O problema da estabilidade atômica e o átomo de Bohr

Os diferentes tipos de estudos acerca da matéria e sua composição conduziram à diferentes modelagens de como seria sua estrutura fundamental. Em 1911, após sondar a estrutura atômica proposta por Joseph J. Thomson[14] (1856–1940) bombardeando uma folha fina de ouro com partículas alfa (núcleos de hélio), Ernest Rutherford (1871–1937) modelou o átomo similarmente à um sistema planetário, composto por um núcleo muito pequeno, denso e carregado positivamente, orbitado pelos elétrons de carga negativa. No entanto, o modelo proposto Rutherford viola gravemente a eletrodinâmica de Maxwell, implicando em instabilidade para o átomo e o colapso geral da matéria. Por se tratar de um modelo planetário, o movimento orbital circular dos elétrons ao redor do núcleo naturalmente implicaria na existência de uma força radial centrípeta acrescida à força coulombiana, bem como a emissão de radiação pelo elétron por estar acelerado (aceleração centrípeta) (Nussenzveig, 2014).

[14] Os estudos com raios catódicos de Thomson o conduziram à identificação e descoberta experimental do elétron enquanto partícula e formalização do modelo atômico "pudim de passas". Neste modelo, os elétrons estariam imersos em uma "massa" carregada positivamente.

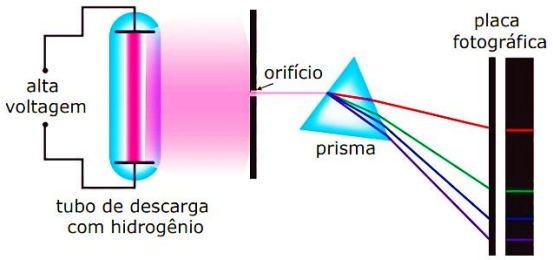
Figura 12 – Um sistema atômico simples, como o átomo de hidrogênio, segundo o modelo clássico de Thomson, colapsaria quase que instantaneamente irradiando energia.



Fonte: Adaptado de Biscuola, Doca e Bôas, (2012, p.337).

Além da estabilidade atômica, o modelo proposto por Rutherford não conseguia explicar a radiação característica de alguns elementos quando submetidos a descargas elétricas ou aquecidos. Sabia-se, por exemplo, que ao ser submetida a uma descarga, uma ampola à baixa pressão contendo hidrogênio emitia uma certa quantidade visível de luz que, quando decomposta por um prisma, revelava-se não como um espectro contínuo, mais sim como uma composição de **linhas espectrais** muito bem definida, como ilustra a figura 13 abaixo.

Figura 13 – Linhas espectrais do gás hidrogênio.



Fonte: Adaptado de Llewellyn e Tipler, (2017, p. 167).

Um primeiro passo na compreensão e regularidade destas linhas espectrais foi dado em 1885 por um professor do secundário suíço chamado Johann J. Balmer (1825–1898). Empiricamente, Balmer propôs que as linhas espectrais do hidrogênio na região visível e ultravioleta (seus comprimentos de onda) poderiam ser calculadas pela relação:

$$\lambda_n = 364{,}6\frac{n^2}{n^2-4}nm.$$

Três anos mais tarde, em 1888, os trabalhos independentes dos físicos Johannes R. Rydberg (1854–1919) e Walter Ritz (1878–1909) levaram a uma generalização da fórmula de Balmer;

$$\lambda_v^{-1} = R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) \Leftrightarrow (n \in \mathbb{N}^* \geq 2) > (m \in \mathbb{N}^* \geq 1), \qquad \textbf{(3.7)}$$

na qual m e n são números inteiros e R é a constante de Rydberg ($R = 1{,}097 \times 10^7\ m^{-1}$), sendo a mesma para todas as linhas do espectro de um elemento e varia ligeiramente, de forma regular, de elemento para elemento (Llewellyn e Tipler, 2017).

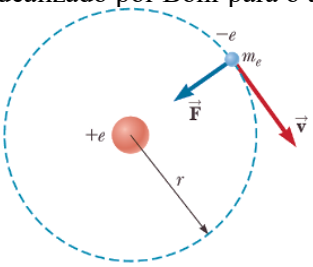
3.3.1 A quantização de Bohr

A solução para os problemas da estabilidade atômica e radiação espectral característica se deu de forma heurística em 1913, através do trabalho do físico dinamarquês Niels Henrik D. Bohr (1885–1962), mediante a imposição de dois postulados:

1º. *Em condições normais, os elétrons em um átomo estável orbitam o núcleo em posições especiais (estados estacionários), sem emissão de qualquer tipo de radiação.*

2º. *Quando excitados, isto é, recebem energia externa, os elétrons podem transitar de níveis mais baixos para os mais altos e, ao voltarem para a configuração original, liberam a energia recebida na forma de radiação luminosa.*

Figura 14 – Modelo idealizado por Bohr para o átomo de Hidrôgenio.



Fonte: Adaptado de Peruzzo, (2012, p. 142).

O segundo postulado está de acordo com a teoria de Einstein para os fótons de luz e obedece às leis de conservação. Em sua análise, Bohr considerou um sistema atômico simples, como o átomo de hidrogênio, onde o elétron orbita o núcleo em um trajeto aproximadamente circular. Partindo da condição de equilíbrio do sistema entre as forças centrípeta e elétrica (força coulombiana), a energia total do elétron bem como a frequência ν dos espectros de emissão podem ser determinadas, conforme a relação:

$$F_e = F_c;$$

$$k\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mu^2}{2},$$

onde k é a constante eletrostática e Z o número atômico. Explicitando a velocidade orbital u:

$$k\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mu^2}{2} \Longrightarrow u = \sqrt{\frac{kZe^2}{rm}}.$$

Finalmente, assim como Einstein e Planck consideraram que a energia apresentava um caráter discreto, Bohr considerou que o módulo do momento angular L também era quantizado, sendo constituído de múltiplos inteiros da quantidade $h/2\pi$. Por aparecer constantemente em

meio as equações, a quantidade $h/2\pi$ recebeu uma nomenclatura e simbologia própria: **constante reduzida de Planck** $(\hbar)$. Assim;

$$L = mur = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar;$$

$$L = n\hbar. \tag{3.8}$$

Desse modo, combinando a condição de quantização (3.8) com a velocidade orbital, é possível determinar os raios orbitais de cada posição possível do elétron em suas transições:

$$mur = n\hbar \Longrightarrow r = \frac{n\hbar}{mu};$$

$$r = \frac{n\hbar}{m}\left(\sqrt{\frac{rm}{kZe^2}}\right).$$

Elevando ambos os membros da igualdade anterior ao quadrado:

$$r^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2}\frac{rm}{kZe^2} \Longrightarrow r = \frac{n^2\hbar^2}{mkZe^2}.$$

Formalmente, tem-se que $r = r_n$ e que $\hbar^2/mke^2 = a_B$, portanto,

$$r_n = \frac{n^2}{Z}a_B. \tag{3.9}$$

a_B é uma constante ($a_B = 0{,}529$ Å) e se chama **raio de Bohr**. Cada raio r_n possível é um múltiplo do raio de Bohr, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, sendo o próprio a_B o menor estado possível, quando $n = 1$.

Ademais, as diferentes linhas espectrais estão relacionadas aos diferentes estados de energia do elétron quando transita das órbitas mais altas para as mais baixas. A energia total do elétron em uma respectiva órbita é a soma da sua energia cinética com a parte potencial elétrica:

$$E_T = K + V = \frac{mu^2}{2} + \left(\frac{kZe^2}{r}\right);$$

$$E_T = -\frac{kZe^2}{2r}, \tag{3.10}$$

que, por sua vez, é uma função da posição conforme os possíveis raios:

$$E_n = -\frac{kZe^2}{2r} = \left(-\frac{kZe^2}{2}\right)\frac{mkZe^2}{n^2\hbar^2};$$

$$E_n = -\frac{mk^2Z^2e^4}{2\hbar^2n^2}.$$

A dependência da energia com relação as posições orbitais quantizadas também fazem da energia uma quantidade quantizada. Assumindo: $(mk^2e^4/2\hbar^2) = E_0$, ocorre que,

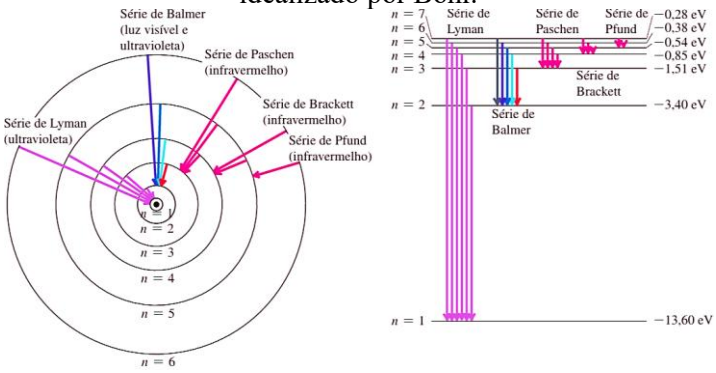
$$E_n = -E_0 \frac{Z^2}{n^2} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.11}$$

A diferença de energia dos elétrons no processo de transição entre os estados estacionários resulta na emissão de radiação com diferentes frequências, segundo a equação de condição de frequência de Bohr (Llewellyn e Tipler, 2017):

$$\Delta E = -E_0 \frac{Z^2}{n_i^2} - \left(-E_0 \frac{Z^2}{n_f^2}\right) = E_f - E_i = h\nu. \tag{3.12}$$

A equação (3.12) é justamente a equação obtida empiricamente por Rydberg e Ritz. Como $\nu = c/\lambda$, ocorre que $\lambda^{-1} = \Delta E/hc$ e a constante de Rydberg vale $R = E_0(Z^2/hc)$. Nestas equações, n é compreendido como o **número quântico principal**. Quando $n = 1$, diz-se que o átomo está em seu **estado de energia fundamental**, onde $E_0 = 13{,}6\ eV$ (Peruzzo, 2012; Llewellyn e Tipler, 2017).

Figura 15 – Transições energéticas do elétron nos níveis de energia (camadas) no modelo atômico idealizado por Bohr.



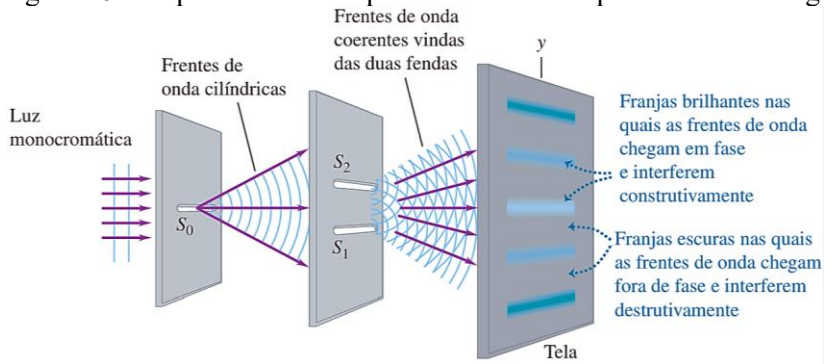
Fonte: Adaptado de Freedman e Young, (2016, p. 252).

3.4 Ondas de matéria e a dualidade onda-partícula

De modo geral, o trabalho de Einstein de 1905 acerca das propriedades da luz possui como resultado central a comprovação do caráter corpuscular da radiação eletromagnética. Em verdade, um feixe luminoso monocromático como o de um *laser* não é contínuo, mas sim uma composição de minúsculos "pacotes" individuais de energia, os *quanta* de luz. O caráter corpuscular da luz foi proposto por Newton durante os seus estudos com a luz entre os anos de 1665 e 1666, afirmando que as diferentes cores em um arco-íris e os fenômenos da luz como um todo poderiam ser explicados se cada cor fosse constituída por minúsculas partículas com diferentes tamanhos, obedecendo às suas leis da mecânica. Em oposição à teoria corpuscular da luz de Newton, destaca-se o trabalho de Christiann Huygens (1629–1695), renomado intelectual e contemporâneo de Newton. Huygens não somente defendeu o caráter ondulatório

da luz, mas desenvolveu explicações satisfatórias sobre a dinâmica da luz em termos de frentes de ondas. O impasse entre Newton e Huygens aparentemente chegou ao fim em 1801, quando o cientista britânico Thomas Young (1773–1829) realizou o icônico experimento de difração da luz entre fendas. Em seu experimento, Young observou que ao passar entre duas fendas com larguras da ordem do comprimento de onda da luz que estava sendo observada, a luz difratava e se apresentava em um padrão de faixas de interferência em um anteparo após a dupla fenda, demonstrando o caráter ondulatório da luz (Odenwald, 2024; Peruzzo, 2012).

Figura 16 – Experimento da dupla fenda realizado por Thomas Young.



Fonte: Adaptado de Freedman e Young, (2016, p. 97).

Inspirado pela ideia contemporânea de corpuscularidade da luz proposta por Einstein, Louis-Victor de Broglie (1892–1987), um historiador francês, propõe para os fins de sua tese de doutorado, em 1923, que a natureza é dotada de simetrias, uma vez que, se o que pode ser observado ou é matéria ou radiação e esta é granular, então, as partículas, de algum modo, deveriam apresentar um caráter ondulatório.

Desde o trabalho de Planck, sabia-se que $E = h\nu$ e que $\nu = {}^{c}/_{\lambda}$, logo,

$$E = \frac{hc}{\lambda}.$$

Conforme a relação relativística de energia-momento em (2.34), a energia de um fóton livre está relacionada ao termo: $E = Pc$, onde P é o momento linear da partícula. Assim, essas expressões podem ser combinadas;

$$E = Pc = \frac{hc}{\lambda};$$

$$\lambda = {}^{h}/_{P}. \qquad \textbf{(3.13)}$$

A equação (3.13) é a expressão matemática para o **comprimento de onda de de Broglie**, que relaciona às características ondulatórias aos corpos materiais e vice-versa. O comprimento de onda é inversamente proporcional a massa do corpo, assim, um corpo grande

e massivo possui comprimento de onda desprezível, apesar de real. Ademais, a hipótese de de Broglie trouxe uma nova interpretação aos estados estacionários do átomo de Bohr. Agora, os estados estacionários podem ser compreendidos como regiões onde as ondas de matéria dos elétrons se ajustam às orbitas circulares em números inteiros de comprimentos de onda;

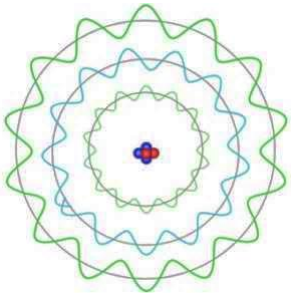
$$n\lambda = 2\pi r,$$

que, ao ser relacionado com (3.13), retorna à condição de quantização do momento angular de Bohr (3.8) (Peruzzo, 2012):

$$\lambda = \frac{2\pi r}{n} = \frac{h}{P};$$

$$Pr = n\hbar = L.$$

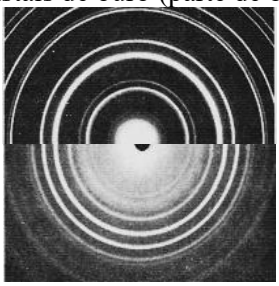
Figura 17 – O átomo de Bohr constituído de ondas eletrônicas estacionárias de matéria.



Fonte: Adaptado de Odenwald, (2024, p. 60).

Cerca de quatro anos mais tarde, em 1927, a hipótese de de Broglie foi confirmada experimentalmente nos trabalhos de George Thomson (1892–1975) (filho de Joseph J. Thomson), Clinton J. Davisson (1881–1958) e Lester H. Germer (1896–1971). George Thomson observou a reflexão de um feixe monocromático de elétrons em pequenos cristais metálicos, tal como faziam os raios X. Davison e Germer observaram a difração de elétrons quando bombardeados em um alvo de níquel. Pelos estudos teóricos e experimentais das propriedades ondulatórias da matéria, Louis de Broglie foi agraciado com o Nobel em 1929, bem como George Thomson e Davison, em 1937 (Peruzzo, 2012).

Figura 18 – Imagens comparativas entre a difração de raios X (parte de cima) e difração de elétrons em cristais de ouro (parte de baixo).



Fonte: Adaptado de Peruzzo, (2012, p. 184).

3.5 Heisenberg, Schrödinger e a mecânica quântica

Até o ano de 1925, o ato de quantização das grandezas físicas como energia e momento angular não pareciam mais que artifícios matemáticos que, de algum modo, permitiam que os modelos teóricos se adequassem aos resultados experimentais. A quantização de Bohr, por exemplo, apesar de estar de acordo com as observações experimentais, a mesma não responde como acontecem as transições eletrônicas dos elétrons entre as orbitas ou que forças, caso exista alguma, estão envolvidas nesse processo. Em Copenhague, determinado a compreender à essência dinâmica da matéria, Niels Bohr, em um programa teórico que ficou conhecido como **a física dos jovens**, cercou-se das jovens mentes mais brilhantes da Europa e ali, Bohr e seus discípulos passaram a sondar os mistérios e estranhezas do átomo (Rovelli, 2021).

Enquanto trabalhavam arduamente em Copenhague, apenas uma coisa era clara para Bohr e seus colegas à medida que "avançavam": a teoria quântica era algo radicalmente diferente! Todo o tipo de ferramental matemático e física teórica disponível era testada e nada era capaz de explicar como ocorriam os saltos eletrônicos. A solução do problema deu-se por meio do gênio criativo do jovem físico alemão Werner Heisenberg (1901–1976), enquanto recuperava-se de uma crise alérgica (febre do feno) na ilha de Helgoland. A princípio, tal como seus colegas, Heisenberg havia tentado de tudo e, no entanto, nada funcionou. Tudo mudou quando Heisenberg adotou uma posição observacionista, passando a trabalhar somente com aquilo que a natureza estava disposta a revelar: os raios e energias de Bohr; frequências e amplitudes (intensidade) da radiação que eram medidas. Para o espanto de todos, os primeiros resultados de como essas grandezas físicas (que passaram a ser chamadas de **observáveis**) estavam relacionadas, estas não obedeciam às estruturas matemáticas convencionais, de modo que até mesmo a ordem das operações importava nos cálculos. Assim, Heisenberg, em 1925, aos 23 anos de idade, em colaboração com Max Born (1882–1970) e Pascual Jordan (1902–1980), desenvolveu a **mecânica matricial**, a primeira formulação matemática formal da mecanica quântica, capaz de descrever unificadamente os fenômenos do átomo de Bohr (Peruzzo, 2012; Rovelli, 2021).

A mecânica matricial de Heisenberg possui como base a álgebra de matrizes, onde as grandezas físicas são descritas por operadores lineares. Para certos pares de observáveis, valem as relações de comutação:

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hbar; \quad \textbf{(3.14)}$$

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \quad \textbf{(3.15)}$$

onde $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os operadores lineares descritores das quantidades físicas observáveis. A relação de comutação em (3.14) expressa que dois valores de observáveis não comutam entre si, o que significa dizer que a medição precisa dos valores destas grandezas não pode ser realizada simultaneamente. Do contrário, quando há comutação, tem-se a regra expressa pela relação (3.15). Estes resultados conduziram Heisenberg em 1927 ao seu **princípio da incerteza**. O princípio da incerteza de Heisenberg estabelece um limite de precisão sobre a medida simultânea dos valores das quantidades observáveis. Para dois observáveis, como posição $\hat{x}$ e momento $\hat{p}$, ao serem medidos, a informação primária acerca dos valores de um perturba gravemente a informação sobre os valores do outro e vice-versa, tal como expressa a relação:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{3.16}$$

A equação (3.16) estabelece o limite de precisão dos valores de um observável com relação ao outro. Ao inferir-se precisamente o valor de um observável, o outro terá suas informações perturbadas na ordem do fator $\hbar/2$ e quase nada poderá ser dito sobre o mesmo. Por suas notáveis contribuições ao desenvolvimento da mecanica quântica, sendo considerado o criador da mesma, Heisenberg foi agraciado com o Nobel em 1932 (Peruzzo, 2012; Polkinghorne, 2022).

3.5.1 A equação de Schrödinger

Poucos meses após a publicação da mecânica matricial de Heisenberg, o físico austríaco Erwin Schrödinger (1887–1961), em 1926, introduziu uma nova formulação matemática alternativa para os fenômenos quânticos. Schrödinger considerou seriamente a proposta ondulatória da matéria de de Broglie e propôs que todas as informações acerca do elétron e do seu comportamento (dinâmica) estavam ocultas nas soluções de uma equação de onda, similar à aquelas obtidas por Maxwell para os campos elétrico e magnético. Desse modo, ao considerar que o elétron é descrito por uma certa entidade matemática $\Psi(\vec{r}, t)$, denominada de **função de onda**, de modo que $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$, onde Ψ_0 é uma constante de amplitude, e pelas definições de energia de Planck e comprimento de onda de de Broglie;

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{h}{P} \\ E = h\nu \end{cases} \Leftrightarrow \hbar = \frac{h}{2\pi} \Longrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{P}{\hbar} = \dfrac{2\pi}{\lambda}; \\ \omega = \dfrac{E}{\hbar} = 2\pi\nu. \end{cases} \tag{3.17}$$

Ademais, segue que a função de onda deve obedecer à uma equação de onda clássica característica, onde vale as relações de derivação com relação ao espaço $\vec{r}$ e o tempo t:

$$\begin{cases} \nabla^2_{\vec{r}}\Psi(\vec{r},t) = \left(i\vec{k}\right)\Psi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = i\vec{k}\Psi(\vec{r},t); \\ \partial_t\Psi(\vec{r},t) = (-i\omega)\Psi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = -i\omega\Psi(\vec{r},t). \end{cases} \quad \textbf{(3.18)}$$

Combinando os resultados de (3.17) aos de (3.18), é possível notar que o vetor de onda $\vec{k}$ e a frequência angular ω conectam, respectivamente, o momento $\vec{P}$ e a energia E à operadores diferenciais que atuam diretamente na função de onda $\Psi(\vec{r},t)$:

$$\begin{cases} \vec{P} = \hbar\vec{k} \Rightarrow \hat{P} = -i\hbar\nabla_{\vec{r}}; \\ E = \hbar\omega \Rightarrow \hat{H} = i\hbar\partial_t. \end{cases}$$

Por fim, tomando-se a conservação da energia em termos das quantidades observáveis na forma de operadores atuando sobre função de onda, tem-se que:

$$E_T = K + V \Longrightarrow \hat{H}\Psi(\vec{r},t) = \hat{K}\Psi(\vec{r},t) + \hat{V}\Psi(\vec{r},t).$$

Na mecânica quântica, a quantidade $\hat{H}$ é definida como o **operador hamiltoniano** do sistema, e este compreende a energia total do mesmo. Logo, pelas relações anteriores:

$$K^{15} = \frac{\hat{P}\cdot\hat{P}}{2m} = (-i\hbar)^2\nabla^2_{\vec{r}}, \quad \hat{H} = i\hbar\partial_t;$$

cujo resultado final em termos da energia total é

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}\right)\Psi(\vec{r},t). \quad \textbf{(3.19)}$$

A equação acima é a equação de Schrödinger para o caso tridimensional, onde ∇^2 é o operador diferencial laplaciano $\left(\nabla\cdot(\nabla\Psi)\right)$ atuando sobre a função de onda com relação à $\vec{r} = (x,y,z)$. Considerando-se apenas uma dimensão e o hamiltoniano independente do tempo, a equação (3.19) se reduz à:

$$\hat{H}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V\psi(x). \quad \textbf{(3.20)}$$

Ademais, a equação de Schrödinger permite que certas informações acerca do átomo de hidrogênio de Bohr sejam obtidas, bastando resolvê-la em simetria esférica e considerar o potencial de Coulomb. Cada solução das equações diferenciais resultantes do método de separação de variáveis carrega números especiais (**números quânticos**) que delimitam a unicidade do elétron no respectivo estado energético. O **número quântico principal $\boldsymbol{n}$**, obtido da equação radial, designa os principais níveis de energia (orbitas estacionárias) do elétron. O **número quântico orbital $\boldsymbol{\ell}$** surge da equação angular e quantifica a forma dos orbitais. Por

[15] Como $K = {mu^2}/{2}$ e que $P = mu$, as expressões se combinam na forma $K = P^2/2m$.

fim, o **número quântico magnético m_ℓ** ocorre da equação azimutal e mede as projeções de ℓ na direção z. Por ser mais simples de operar que as matrizes de Heisenberg, a **mecânica ondulatória** de Schrödinger prevaleceu em meio a comunidade científica, e em um curto espaço de tempo proporcionou uma segunda revolução na compreensão da energia e da matéria em escalas atômicas (Peruzzo, 2012; Polkinghorne, 2022).

3.6 Realismo e formalismo da teoria quântica

Entre as motivações que moveram Shcrödinger na busca por uma teoria mais simples para o elétron estava os estranhos saltos eletrônicos nas órbitas de Bohr. A mecânica matricial de Heisenberg e seus operadores de observáveis davam conta da dinâmica do elétron, mas ainda não apresentava qualquer explicação para os saltos. Em contrapartida, Heisenberg profere profundas críticas ao formalismo ondulatório. Notou-se que, por mais simples que fosse calcular e obter as informações para o elétron, as soluções da equação de Shcrödinger não eram entidades fisicamente reais. Parte do problema foi dissipado quando Max Born reinterpretou a função de onda como sendo uma **densidade de probabilidade complexa** que, ao ser normalizada pela **regra de Born**, retorna à quantidade física desejada em termos de uma probabilidade real confinada em um intervalo espacial, tal como expressa a equação (3.21).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 = 1. \qquad \textbf{(3.21)}$$

Schrödinger também foi reconhecido com o Nobel de física em 1933 por suas contribuições, porém, dadas as tantas implicações decorrentes de sua teoria, estas terminaram por afastá-lo definitivamente da mecânica quântica, onde passou a se dedicar à assuntos da biologia e a organização da vida (Júnior, 2019).

Até os dias atuais, a natureza probabilística do mundo em regime quântico é caso de grandes investigações e debates. Em seu tempo, Bohr e Einstein foram íntimos correspondentes e empreenderam calorosos debates sobre os fundamentos da realidade. Particularmente, Einstein abominou a ideia de uma realidade probabilística[16], oferecendo outras interpretações nas quais o realismo e a localidade[17] dos fenômenos fossem preservados. Em contrapartida, os

[16] Diante do caráter probabilístico da realidade, Einstein passou a dizer que "Deus não joga dados" e, por isso, ofereceu uma interpretação para a mecânica quântica baseada em "variáveis ocultas", que permitiam a recuperação do realismo físico da teoria (Polkinghorne, 2022).

[17] Em mecânica quântica, os termos realismo e localidade referem-se, respectivamente, ao fato das propriedades da partícula ou sistema realmente existirem, independente da medição e que a mesma não viole o princípio de causa e efeito (causalidade).

argumentos de Einstein eram sempre contornados de modo engenhoso por Bohr. Junto à Heisenberg, Bohr desenvolveu o que até os dias de hoje é compreendido como a interpretação[18] mais comum e "adequada" da teoria quântica, a qual foi intitulada de **interpretação de Copenhague**.

Segundo Neumann (1955), em sua obra intitulada *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Fundamentos Matemáticos da Mecânica Quântica) o conjunto de postulados a seguir definem a formalidade axiomática da mecânica quântica:

1º. **Postulado dos observáveis**: Toda grandeza física observável (energia, posição, momento, etc.) é representada por um **operador hermitiano**. Os valores da medição de uma grandeza correspondem à autovalores do operador correspondente.

2º. **Postulado do estado**: O estado físico de uma partícula ou sistema é descrito por uma função de onda (ou vetor de estado $|\Psi(\vec{r}, t)\rangle$ contido no espaço de Hilbert), que contém todas as informações sobre a partícula ou sistema.

3º. **Postulado da evolução temporal**: Se o sistema estiver isolado (sem interação externa), este evolui de modo unitário e determinístico segundo a **equação de Schrödinger**, onde as funções de onda do sistema são soluções da mesma.

4º. **Postulado da medição**: Ao realizar uma medição, o sistema que flutua sob todos os possíveis estados "colapsa" para um único estado correspondente ao valor observado, e esse processo tem um **caráter probabilístico**, descrito pela **regra de Born**.

5º. **Postulado da composição de sistemas**: O espaço de estados de um sistema composto é o **produto tensorial** dos espaços de Hilbert dos sistemas individuais, permitindo a existência de **estados emaranhados**.

O quarto postulado introduziu formalmente o que pode ser compreendido como o maior mistério da mecânica quântica. A noção da existência de um **colapso da função de onda** abriu espaço para o que geralmente é chamado de **problema da medição**. Este problema decorre da violação clássica dos conceitos de realismo e localidade, implicando que uma partícula ou sistema quântico livre de interações segue com suas propriedades (descritas pela função de onda) indeterminadas, como uma onda que permeia todo o espaço, que, ao ser observada, isto é, medida instrumentalmente, manifesta-se (colapsa) **instantaneamente**, violando o segundo postulado da relatividade (Júnior, 2019).

[18] Em (OSVALDO, 2019), denomina-se de interpretação o conjunto de teses que se agrega ao formalismo minimo da teoria e que em nada afeta as previsões observacionais da própria teoria.

4. MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA

Os primeiros indícios da correlação entre a mecânica quântica e a relatividade de Einstein manifestaram-se discretamente, durante as medições por interferometria realizadas por Michelson e Morley em 1887, na busca pelo éter luminífero. O conjunto de modificações feitas por Morley no projeto original de Michelson garantiu ao aparelho a sensibilidade necessária para observar acidentalmente descontinuidades nas linhas de cor vermelha do espectro de emissão do hidrogênio. As linhas aparentemente contínuas do espectro de emissão do hidrogênio eram explicadas pela teoria de Bohr e foram denominadas de **estrutura "grossa"**. Por sua vez, de acordo (Peruzzo, 2012), as misteriosas descontinuidades (linhas escuras estritamente finas que separavam uma única franja luminosa vermelha em 2) foram denominadas de **estrutura "fina"** e ganharam explicação somente em 1916, a partir da regra de quantização proposta por Arnold Sommerfeld (1868–1951) no modelo atômico de Bohr, ao considerar órbitas elípticas e **correções relativísticas**. Este capítulo é dedicado integralmente ao segundo ingrediente da teoria de Sommerfeld para a estrutura fina e unificação, em partes, das duas principais teorias do início do século XX: a relatividade especial e a mecânica quântica. Inicialmente, mostrar-se-á, que a equação de Schrödinger em (3.19) é um não invariante relativístico, isto é, por ser uma lei fundamental da natureza, a equação (3.19) muda sua forma conforme o estado de movimento do observador (violação do postulado da relatividade). Em seguida, abordar-se-á as principais teorias quânticas relativísticas: a teoria de Klein-Gordon, a teoria de Dirac para o elétron e a teoria de campos vetoriais massivos de Proca, bem como estas teorias foram remodeladas na constituição da teoria quântica de campos.

4.1 Sobre a não invariância da equação de Schrödinger

Desde que foi observada pela primeira vez em 1912, o crescente interesse na radiação composta de partículas de altas energias oriundas do espaço cósmico profundo chamada de **raios cósmicos**, exigiu da teoria de Schrödinger uma descrição completa acerca das propriedades relativísticas dessas partículas, incluindo as características relacionadas aos diferentes referenciais de observação. Ao considerar o mais simples dos casos, aquele de uma partícula livre de interações, onde $V = 0$ e $\vec{r} = x$ na equação (3.18):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}, \tag{4.1}$$

e sobre a mesma, aplicar as regras de transformação de Lorentz (2.18) para o tempo e espaço, lembrando que $t' = \gamma(t - ux/c^2)$ e $x' = \gamma(x - ut)$, pela regra da cadeia, obtém-se;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \equiv \left(\dfrac{\partial t'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t'} + \dfrac{\partial x'}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x'}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right)\right]\dfrac{\partial}{\partial t'} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}[\gamma(x - ut)]\dfrac{\partial}{\partial x'} \end{cases} \Rightarrow \left[\gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial t'}\right) - \gamma u\left(\dfrac{\partial}{\partial x'}\right)\right]; \\ \dfrac{\partial}{\partial x} \equiv \left(\dfrac{\partial x'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \dfrac{\partial t'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial t'}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}[\gamma(x - ut)]\dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right)\right]\dfrac{\partial}{\partial t'} \end{cases} \Rightarrow \left[\gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial x'}\right) - \gamma\dfrac{u}{c^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial t'}\right)\right], \end{cases}$$

e então:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial t'}{\partial t} = \gamma\left(-\dfrac{\partial}{\partial t'} + u\dfrac{\partial}{\partial x'}\right); \\ \dfrac{\partial x'}{\partial x} = \gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial x'} - \dfrac{u}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t'}\right). \end{cases} \tag{4.2}$$

A equação de Schrödinger possui um termo de segunda ordem no espaço, logo,

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = \left[\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)\right]^2 = \gamma^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\frac{u}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \frac{u^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right).$$

Substituindo a expressão imediatamente anterior junto à parte temporal em (4.2) na equação (4.1), resulta na equação de Schrödinger quando analisada da perspectiva de uma transformação de referencial $\Psi(x,t) \longrightarrow \Psi(x',t')$:

$$i\hbar\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - u\frac{\partial}{\partial x'}\right)\Psi(x',t') = -\frac{\gamma^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\frac{u}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \frac{u^2}{c^4}\frac{\partial}{\partial t'^1}\right)\Psi(x',t') \tag{4.3}$$

Como é possível notar, a tentativa de aplicar a teoria de Schrödinger à cenários relativísticos resulta em falha absoluta. Quando comparada ao caso não relativístico, a equação (4.3) apresenta divergências em relação a equação (4.1), pois contém termos transgressores que não se fazem presentes na equação original.

4.2 Equação de Klein-Gordon

A tentativa de se obter uma teoria quântica relativística remonta ao próprio trabalho original de Schrödinger de 1926 e foi parcialmente concluída de modo independe pelos físicos Vladimir A. Fock (1898–1974) e Walter Gordon (1893–1939), junto à Oskar Klein também em 1926. Conforme (Tavares e Aroucha, 2020), a teoria consiste em reescrever a equação de Schrödinger partindo da relação relativística de energia-momento em (2.34). Incialmente, os termos da equação (2.34) devem ser considerados e escritos na forma de operadores quânticos: E_T (hamiltoniano) para a energia e $P = \hat{P}$ para o momento;

$$\begin{cases} \vec{P} \to \hat{P} = -i\hbar\nabla_{\vec{r}} \\ E_T \to \hat{H} = i\hbar\partial_t \end{cases} \Longrightarrow (i\hbar\partial_t)^2 = [(-i\hbar\nabla_{\vec{r}})^2 c^2 + m^2 c^4];$$

$$\left(-\hbar\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = \left(-\hbar^2\nabla_{\vec{r}}^2 c^2 + m^2 c^4\right).$$

Por fim, dividindo os termos da equação por c^2 e $-\hbar$; organizando-os convenientemente e fazendo a equação resultante atuar sobre uma função de onda $\phi(\vec{r}, t)$, vem que

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right]\phi(\vec{r}, t) = 0; \tag{4.4}$$

que é a equação de Klein-Gordon-Fock ou simplesmente equação Klein-Gordon e constitui a primeira teoria quântica relativística formal. Por simplicidade, a expressão pode ser escrita de modo mais compacta, assumindo a notação relativística de índices no sistema de unidades naturais, onde:

$$\hbar = [E \cdot t] = c = \left[\frac{L}{t}\right] = 1;$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right]\phi(\vec{r}, t) = 0.$$

O objeto $\partial_t^2 - \nabla^2$ que atua sobre a função de onda ϕ é exatamente o d'alambertiano $\square$ com unidades naturais $c = \hbar = 1$ que, em notação de índices, é $\partial_\mu \partial^\mu$ e, portanto:

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right]\phi(\vec{r}, t) = 0. \tag{4.5}$$

4.2.1 Análise da teoria de Klein-Gordon

I. Soluções

Por ser a generalização relativística da equação de Schrödinger, as funções de onda que satisfazem a equação de Klein-Gordon possuem a forma de ondas planas do tipo

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 e^{-iP_\mu r^\mu} = \phi_0 e^{-i\left(P_0 r^0 - \vec{P}\cdot\vec{r}\right)};$$

ou ainda, como $P_0 r^0 = \left(E/c\right) \cdot ct = Et$:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 e^{i(\vec{P}\cdot\vec{r} - Et)}. \tag{4.6}$$

Quando aplicada na equação (4.5), a função de onda acima retorna à equação relativística de energia-momento:

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right]\phi_0 e^{i(\vec{P}\cdot\vec{r} - Et)} = 0;$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \left[\phi_0 e^{i(\vec{P}\cdot\vec{r} - Et)}\right] + m^2 e^{i(\vec{P}\cdot\vec{r} - Et)} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\left[\phi_0 e^{i(\vec{P}\cdot\vec{r} - Et)}\right] + m^2 e^{i(\vec{P}\cdot\vec{r} - Et)} = 0.$$

A derivada temporal de segunda ordem atuando sobre a função de onda retorna $-E^2$, enquanto que a atuação do laplaciano sobre a parte espacial traz $-\left|\vec{P}\right|^2$, resultando em

$$-E^2\left[\phi_0 e^{i(\vec{P}\cdot\vec{r}-Et)}\right]-\left\{-\left|\vec{P}\right|^2\left[\phi_0 e^{i(\vec{P}\cdot\vec{r}-Et)}\right]\right\}+m^2\phi_0 e^{i(\vec{P}\cdot\vec{r}-Et)}=0.$$

$$E^2=\left|\vec{P}\right|^2+m^2.$$

$$E=\pm\sqrt{\left|\vec{P}\right|^2+m^2}. \qquad \textbf{(4.7)}$$

Como pode-se observar, a teoria de Klein-Gordon admite soluções com energias negativas para partículas livres, fato este não observado experimentalmente (Tavares e Aroucha, 2020).

II. Densidade de probabilidade

Sendo uma equação de onda quântica para partículas livres relativísticas, a equação (4.5) deve trazer informações sobre um elétron, por exemplo, em termos da densidade de probabilidade, tal como faz a equação de Schrödinger. Para tal, considera-se a equação (4.5) e seu complexo conjugado, escrito como ϕ^*, de modo que, multiplicando a equação (4,5) pela esquerda por ϕ^* e o complexo conjugado por ϕ, e tomando a diferença entre ambas:

$$\left\{\left[\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right]\phi\right\}\phi^*-\left\{\left[\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right]\phi^*\right\}\phi=0.$$

$$\phi^*\left[\partial_\mu\partial^\mu\right]\phi-\phi\left[\partial_\mu\partial^\mu\right]\phi^*=0.$$

mas, $\partial_\mu\partial^\mu=\partial_t^2-\nabla^2$;

$$[\partial_t^2\phi-\nabla^2\phi]\phi^*-[\partial_t^2\phi^*-\nabla^2\phi^*]\phi=0.$$

Separando os termos temporais dos termos espaciais e agrupando-os por semelhança;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right]-\nabla[\phi^*\nabla\phi-\phi\nabla\phi^*]=0.$$

Ocorre que os termos entre colchetes são, respectivamente, a densidade de probabilidade $\rho(\vec{r},t)$ e a densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r},t)$ de probabilidade;

$$\begin{cases}\left[\phi^*\dfrac{\partial\phi}{\partial t}-\phi\dfrac{\partial\phi^*}{\partial t}\right]\equiv\rho(\vec{r},t);\\ [\phi^*\nabla\phi-\phi\nabla\phi^*]\equiv\vec{J}(\vec{r},t).\end{cases}$$

Em cenários não relativísticos, as soluções da equação de Schrödinger constituem densidades de probabilidade a serem normalizadas. Logo, como designa a regra de normalização de Born, tem-se que $\rho(\vec{r},t)=|\phi|^2=\phi\cdot\phi^*$, e ainda que $\vec{J}(\vec{r},t)=\hbar/_{2im}\,[\phi^*\nabla\phi-\phi\nabla\phi^*]$.

No entanto, no caso da teoria de Klein-Gordon, tem-se que a equação de continuidade para a conservação da densidade de probabilidade é determinada reorganizando os termos da equação:

$$\phi^*\left[\partial_\mu \partial^\mu\right]\phi - \phi\left[\partial_\mu \partial^\mu\right]\phi^* = 0.$$

$$\partial^\mu\left(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*\right) = 0.$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{4.8}$$

onde J^μ é a quadricorrente cujas componentes são

$$\begin{cases} J_0 \equiv \rho(\vec{r}, t) = i[\phi^* \partial_0 \phi - \phi \partial^0 \phi^*]; \\ J_i \equiv \vec{J}(\vec{r}, t) = -i[\phi^* \partial_i \phi - \phi \partial_i \phi^*]. \end{cases}$$

Teoricamente, os resultados anteriores deveriam constituir uma equação de continuidade, onde a densidade de probabilidade e a densidade de corrente de probabilidade devem ser conservadas, todavia, não é o que acontece e o resultado em (4.8) não pode ser interpretado.

Tomando-se uma solução arbitraria na forma de uma onda plana,

$$\phi = N e^{i(\vec{P}\cdot\vec{r} - Et)},$$

onde N é uma constante de amplitude qualquer e E são os estados possíveis de energia em (4.8). Ao substituir na expressão para a densidade de probabilidade:

$$\rho(\vec{r}, t) = i[\phi^*(-iE)\phi - \phi(iE)\phi^*];$$

$$\rho(\vec{r}, t) = i[-iE|\phi|^2 - iE|\phi|^2];$$

$$\rho(\vec{r}, t) = 2E|N|^2.$$

Em verdade, o simples ato de substituição que resultou na equação (4.5) é insuficiente para definir uma teoria quântica. A descontinuidade da densidade de probabilidade se dá em função das energias negativas que também são admitidas como solução, pois, se $E < 0$, então, $\rho(\vec{r}, t) < 0$. Ademais, antes de serem normalizadas pela inclusão da unidade imaginaria i nas componentes J_0 e J_i, a densidade e a corrente de probabilidade não são entidades reais. Ao considerar uma função de onda genérica do tipo $\phi = Re^{iS}$, onde R e S são funções reais, quando aplicada em (4.5), resulta em $\rho(\vec{r}, t) = 2iR^2 \partial_t S$, uma quantidade puramente imaginária. Portanto, é fisicamente inadmissível a existência de probabilidades negativas, bem como probabilidades não definidas no conjunto real (Gomes, 2024).

4.3 Equação de Dirac

Parte dos problemas encontrados na teoria de Klein-Gordon se dá em função da hamiltoniana não linear e, consecutivamente, da derivada temporal de segunda ordem, que resulta da substituição direta dos operadores de energia e momento na expressão da energia total relativística (2.34). A problemática da não linearidade foi contornada em 1928 por Paul

Dirac (1902–1984), ao propor uma hamiltoniana linearizada em termos dos coeficientes $\vec{\alpha}$ e β a serem determinados;

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},t) = (\vec{\alpha}\cdot(Pc) + \beta mc^2)\phi(\vec{r},t) = \hat{H}\phi(\vec{r},t).$$

Fazendo $P \longrightarrow \hat{P} = -i\hbar\nabla_{\vec{r}}$ e realizando a substituição na expressão anterior, tem-se a equação de Dirac:

$$i\hbar\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t} = (-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla_{\vec{r}} + \beta mc^2)\phi(\vec{r},t) = \hat{H}\phi(\vec{r},t).$$

4.3.1 Sobre os coeficientes $\vec{\alpha}$ e β

De início, ao observar o produto $\vec{\alpha}\cdot\nabla$, nota-se que $\vec{\alpha}$ deve possuir mais de uma componente, pois o próprio laplaciano $\nabla_{\vec{r}}$ enquanto operador atua nas componentes espaciais (x,y,z). A teoria deve permitir a recuperação da equação (2.34) ao tomar o produto da hamiltoniana de Dirac sobre ela mesma;

$$E^2 = \hat{H}^2\phi(\vec{r},t) = \left[\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\cdot p_i)c + \beta mc^2\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{3}(\alpha_j\cdot p_j)c + \beta mc^2\right]\phi(\vec{r},t).$$

Desenvolvendo o produto no lado esquerdo da expressão anterior:

$$\left\{\sum_{i=1}^{3}c^2(\alpha_i\cdot p_i) + \left[\sum_{i=j=1}^{3}(\alpha_i\alpha_j) + \sum_{j=i=1}^{3}(\alpha_j\alpha_i)\right]p_ip_jc^2 + \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)p_imc^3 + \beta^2m^2c^4\right\}.$$

e organizando semelhantemente os termos, tem-se que

$$\hat{H}^2\phi(\vec{r},t) = \left[\alpha_i^2\alpha_j^2 + (\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)p_ip_jc^2 + (\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)p_imc^3 + \beta^2m^2c^4\right]\phi(\vec{r},t).$$

Analisando os resultados do produto termo a termo, é possível verificar as seguintes condições para os coeficientes $\vec{\alpha}$ e β são:

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = I = 1, \quad \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}I = 0, \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0.$$

O fato das somas dos produtos entre todos $\vec{\alpha}_i$ e β serem nulas significa a existência de relações de anticomutação que, segundo o formalismo de Heisenberg, é possível somente se $\vec{\alpha}_i$ e β forem matrizes. A princípio, Dirac supôs que $\vec{\alpha}_i$ e β poderiam ser as matrizes de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

As chamadas **matrizes sigma de Pauli** apareceram pela primeira vez em 1927 nos trabalhos de Wolfgang Pauli (1900–1958), como componentes da equação de Schrödinger-Pauli que descreve a interação de rotação de uma partícula com um campo eletromagnético;

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{bmatrix}=\left[\frac{1}{2m}\left(\sigma\cdot\left(-i\hbar\nabla_{\vec{r}}-q\vec{A}^{i}\right)^{2}+q\phi\right)\right]\begin{pmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{pmatrix}.$$

Posteriormente, Dirac concluiu que $\vec{\alpha}_i$ e β não poderiam ser simplesmente as matrizes sigmas. Os coeficientes $\vec{\alpha}_i$ e β devem ser matrizes quadradas e de ordem superior, mais precisamente da ordem 4×4 e acomodar em sua estrutura interna as matrizes de Pauli;

$$\vec{\alpha}_i=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\end{pmatrix};$$

ou simplesmente,

$$\vec{\alpha}_i=\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}_i\\ \vec{\sigma}_i & 0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}.$$

4.3.2 Forma covariante e os Espinores

A mecânica quântica relativística desenvolvida por Dirac possui consistência relativística e pode ser escrita na forma covariante. Para tal, uma vez que $\vec{\alpha}_i$ e β são matrizes, se faz necessário tomar a equação de Dirac e multiplicá-la pela esquerda por β;

$$\beta\left[i\hbar\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}=(-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla_{\vec{r}}+\beta mc^{2})\phi(\vec{r},t)\right];$$

$$\beta i\hbar\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}=(-\beta i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla_{\vec{r}}+\beta^{2}mc^{2})\phi(\vec{r},t).$$

Reorganizando os termos da expressão anterior e usando a condição $\beta^2=1$;

$$\left(\beta i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\beta i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla_{\vec{r}}-mc\right)\phi(\vec{r},t)=0.$$

Finalmente, assumindo por simplicidade as unidades naturais $\hbar=c=1$ e definindo a quantidade γ^{μ}, de modo que

$$\gamma^{\mu}=\begin{cases}\gamma^{0}=\beta\partial_t;\\ \gamma^{i}=\beta i\vec{\alpha}\cdot\nabla_{\vec{r}};\end{cases}$$

e assim,

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\phi(\vec{r},t)=0.$$

As quantidades γ^{μ}, por acomodarem as matrizes $\vec{\alpha}_i$ e β, também são compreendidas como matrizes e estas são definidas como as **matrizes gama de Dirac**. Ademais, dada a ação do hamiltoniano sobre $\phi(\vec{r},t)$, isso implica naturalmente que $\phi(\vec{r},t)$ também deve ser uma matriz, mais precisamente uma matriz coluna com quatro componentes. Mantendo a notação imposta por Pauli, isto é, designando $\phi(\vec{r},t)$ simplesmente por ψ, tem-se que o objeto ψ é

denominado de **Espinor de Dirac** e está diretamente relacionado as diferentes soluções que podem ser extraídas da equação de Dirac (Gomes, 2024; Neto, 2017);

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0. \tag{4.9}$$

4.3.3 Análise e discussão da teoria de Dirac

Os resultados que compõem a teoria de Dirac representam um marco revolucionário na ciência física e constituem a grandeza de um sucesso teórico sem precedentes. Para início de análise, considerando-se o cenário de um elétron livre que, tal como na teoria de Klein-Gordon, pode ser descrito como uma função de onda plana, como pode ser visto em (Greiner, 2000);

$$\psi = \psi_i e^{-i\left(p_\mu \vec{r}^{\mu}\right)} = \psi_i e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)};$$

substituindo-a na equação de Dirac, tem-se que:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi_i e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} = 0.$$

Resgatando a forma matricial das componentes embutidas em γ^{μ}, tem-se que

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}_i \\ \vec{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}\cdot\hat{P} - m\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{bmatrix}\psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4\end{bmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} = 0.$$

Agora, realizando as devidas diferenciações (temporais e espaciais) sobre a exponencial complexa, ocorre;

$$\begin{pmatrix} E-m & 0 & -p_z & -(p_x - ip_y) \\ 0 & E-m & -(p_x - ip_y) & p_z \\ p_z & p_x - ip_y & -E-m & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & -E-m \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4\end{bmatrix} = 0.$$

Para que o sistema acima não seja identicamente nulo e contenha unicamente soluções não triviais, a matriz à direita deve obedecer à condição $\det(M) = 0$, implicando em duas soluções de energia em unidades naturais:

$$\det(M) \equiv E^2 - P^2 - m^2 = 0;$$

$$E = \pm\sqrt{P^2 + m^2}.$$

Por simplicidade, dada a dupla degeneração[19] para energia, o sistema 4×4 pode ser organizado em pares e em termos das matrizes de Pauli:

[19] Em mecânica quântica, a degeneração da energia refere-se à situação em que um ou mais estados quânticos distintos possuem o mesmo nível de energia.

$$\begin{bmatrix} (E-m)\cdot I & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (-E-m)\cdot(-I) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_i(p) \\ v_i(p) \end{bmatrix} = 0;$$

onde,

$$u_i(p) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}; v_i(p) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema de ordem maior resulta em sistema menor e desacoplado de equações no espaço dos momentos:

$$\begin{cases} (E-m)u_i(p) - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})v_i(p) = 0; \\ -(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_i(p) + (E+m)v_i(p) = 0. \end{cases}$$

Isolando $v_i(p)$, na segunda equação, de modo que $E + m \neq 0$;

$$v_i(p) = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_i(p)}{E+m}.$$

Substituindo o resultado anterior na primeira equação do sistema e usando o fato $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^2$ e, multiplicando tudo por $E + m$, vem que;

$$(E-m)(E+m)u_i(p) - (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_i(p)}{E+m}(E+m) = 0;$$

$$(E^2 - m^2)u_i(p) - \vec{p}^2 u_i(p) = 0. \quad \textbf{(4.10)}$$

Analogamente, os mesmos procedimentos são tomados na manipulação algébrica da primeira equação, resultando em:

$$(E^2 - m^2)v_i(p) - \vec{p}^2 v_i(p) = 0. \quad \textbf{(4.11)}$$

Por fim, normalizando as equações (4.10) e (4.11), tem-se as soluções da equação de Dirac para uma partícula livre.

$$u_i(p) \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2E_P}}\begin{pmatrix} Y^{\pm} \\ \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}{E+m}Y^{\pm} \end{pmatrix}, v_i(p) \equiv \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2E_P}}\begin{pmatrix} \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}{E+m}Y^{\pm} \\ Y^{\pm} \end{pmatrix};$$

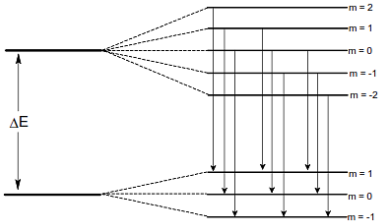
Onde u_i e v_i são autovetores da hamiltoniana de Dirac. Logo, a solução geral são as superposições das energias positiva e negativa em u_i e v_i:

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\left[u_i(\vec{p},Y)e^{-i(p_\mu \vec{r}^\mu)} + v_i(\vec{p},Y)e^{i(p_\mu \vec{r}^\mu)}\right]. \quad \textbf{(4.12)}$$

De acordo com Peruzzo (2012), a quantização desenvolvida e imposta por Sommerfeld ao átomo de hidrogênio de Bohr resolveu parcialmente a problemática contida na estrutura fina dos espectros atômicos que, além de ser o resultado de efeitos relativísticos, também se dava em função de uma outra propriedade quântica intrínseca do elétron denominada de ***spin***. Diferente de todas as teorias propostas até o momento, o spin apareceu naturalmente nas soluções da equação da teoria de Dirac e está explicito pela dupla degeneração das energias. As

evidências da existência do spin datam do ano de 1896, quando se observou que a estrutura fina espectral se tornava mais evidente, isto é, desdobravam-se quando as espécies atômicas eram submetidas à campos magnéticos (efeito Zeeman), revelando que os elétrons eram dotados de um momento magnético orbital.

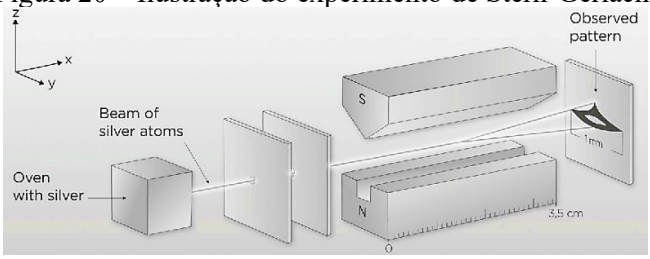
Figura 19 – Efeito Zeeman: desdobramento do espectro de emissão (antes contínuo) em componentes mais evidentes da estrutura fina (descontinuidades entre as faixas luminosas).



FONTE: Adaptado de Peruzzo, (2012, p. 40).

Posteriormente, em 1922, em um experimento conduzido pelos cientistas alemães Otto Stern (1888–1969) e Walther Gerlach (1889–1979) para a determinação da quantização do momento angular intrínseco do elétron (quantização espacial), percebeu-se que, ao passarem por um campo magnético não homogêneo, os átomos de prata emitidos por um forno agrupavam-se em duas regiões distintas (quando se era esperado que estes formassem um único agrupamento contínuo na direção z), tal como ilustra a figura 20.

Figura 20 – Ilustração do experimento de Stern-Gerlach.



FONTE: Adaptado de Pessoa, (2019, p. 40).

As consequências do efeito Zeeman junto as propriedades espectrais atômicas conduziram Pauli em 1924 na formulação da **hipótese da dupla valência** para elétrons. A partir disso, Pauli explica as diferentes propriedades espectrais através de um **princípio da exclusão**: *"dois elétrons em um mesmo estado de energia não podem compartilhar dos mesmos valores de números quânticos, onde ao menos um deles deve diferir com relação ao outro."* Mais tarde, em 1925, George E. Uhlenbeck (1900–1988) e Samuel A. Goudsmit (1902–1978) reinterpretaram a dupla valência de Pauli no contexto do experimento de Stern-Gerlach, sugerindo uma nova propriedade do elétron que designaram de spin (do inglês, "giro"). O spin é uma propriedade puramente quântica, não havendo similares no cotidiano clássico. Uma

forma aproximada de idealização dessa propriedade é pensar o spin como espécie de giro (ou rotação) do elétron no entorno do próprio eixo, tal como um pião (Peruzzo, 2012).

De volta à teoria de Dirac, o spin ou "giro" do elétron é definido pelo operador $\hat{s}$, onde $\hat{\sigma}_{\vec{r}}$ são as matrizes de Pauli para as direções (x, y, z):

$$\hat{s}_{\vec{r}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_{\vec{r}}.$$

Para qualquer direção estabelecida, o spin assume unicamente dois valores semi-inteiros, sendo o valor positivo $+\hbar/2$ compreendido como "para cima" (ou *Spin Up* [↑]) e o valor negativo, $-\hbar/2$, é definido como "para baixo" (*Spin Down* [↓]). À título de exemplo, considerando-se a direção z:

$$\hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z \equiv \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$

$$\hat{s}_z = \begin{cases}\hat{s}^{\uparrow}{}_z = +\dfrac{\hbar}{2};\\ \hat{s}^{\downarrow}{}_z = -\dfrac{\hbar}{2}.\end{cases}$$

Portanto, dada a dupla degeneração da energia nas soluções da equação de Dirac para a partícula livre (supondo $\vec{p} = \vec{p}_z$), cada estado de energia (positivo u_i ou negativo v_i) está relacionado, também, à um estado de spin:

$$Y^+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad Y^- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}u_1 = \sqrt{\dfrac{E+m}{2E_P}}\begin{pmatrix}Y^+\\ \dfrac{(\vec{\sigma}_z\cdot\vec{p})}{E+m}Y^+\end{pmatrix}\\ u_2 = \sqrt{\dfrac{E+m}{2E_P}}\begin{pmatrix}Y^-\\ \dfrac{(\vec{\sigma}_z\cdot\vec{p})}{E+m}Y^-\end{pmatrix}\end{cases}, \begin{cases}v_1 = \sqrt{\dfrac{E+m}{2E_P}}\begin{pmatrix}\dfrac{(\vec{\sigma}_z\cdot\vec{p})}{E+m}Y^+\\ Y^+\end{pmatrix}\\ v_2 = \sqrt{\dfrac{E+m}{2E_P}}\begin{pmatrix}\dfrac{(\vec{\sigma}_z\cdot\vec{p})}{E+m}Y^-\\ Y^-\end{pmatrix}\end{cases};$$

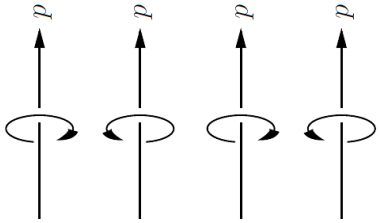
$$\begin{cases}u_1^{\uparrow} = \sqrt{\dfrac{E+m}{2E_P}}\begin{pmatrix}1\\0\\ \dfrac{(\vec{\sigma}_z\cdot\vec{p})}{E+m}\\0\end{pmatrix}\\ u_2^{\downarrow} = \sqrt{\dfrac{E+m}{2E_P}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \dfrac{(\vec{\sigma}_z\cdot\vec{p})}{E+m}\end{pmatrix}\end{cases}, \begin{cases}v_1^{\uparrow} = \sqrt{\dfrac{E+m}{2E_P}}\begin{pmatrix}\dfrac{(\vec{\sigma}_z\cdot\vec{p})}{E+m}\\0\\1\\0\end{pmatrix}\\ v_2^{\downarrow} = \sqrt{\dfrac{E+m}{2E_P}}\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{(\vec{\sigma}_z\cdot\vec{p})}{E+m}\\0\\1\end{pmatrix}\end{cases}.$$

É cabível acrescentar ainda que a medição simultânea do spin $\hat{s}$ e da hamiltoniana $\hat{H}$ de Dirac não é possível, pois a medição destes operadores, de acordo com as relações de incerteza de Heisenberg, não são comutáveis entre si $\left(\hat{H}, \hat{s}\right) = \hat{H}\hat{s} - \hat{s}\hat{H} \neq 0$. Todavia, esse

impasse das incertezas das medições é contornado tomando-se o operador de projeção de $\hat{s}$ na direção do movimento, o qual é denominado de **helicidade** $\hat{\mathrm{h}}$ (Neto, 2017);

$$\hat{\mathrm{h}} = \frac{\hat{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}.$$

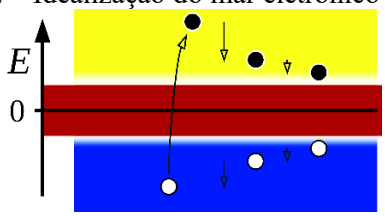
Figura 21 – Possíveis estados de helicidade para uma partícula conforme a energia. Os dois primeiros estados referem-se à $E > 0$ e os dois últimos à $E < 0$.



FONTE: Adaptado de Lancaster e Blundell, (2014, p. 329).

Ademais, sobre as persistentes soluções que contém estados de energia negativa, Dirac propôs uma nova e miraculosa interpretação em 1930. Dirac interpretou todo o vácuo como um mar de energia negativa (**mar de Dirac**) completamente preenchido que, em obediência ao princípio de exclusão de Pauli, os elétrons ali presentes estariam proibidos de decaírem para níveis de energia ainda mais baixos. Portanto, um elétron no mar de Dirac está apto a receber radiação e ser transportado para um estado de energia positiva, deixando uma lacuna onde estava anteriormente, podendo ser considerada como uma partícula positiva e simétrica ao elétron (Gomes, 2024).

Figura 22 – Idealização do mar eletrônico de Dirac.



Fonte: Adaptado de Odenwald, (2024, p. 115)

De início, pensou-se que tal partícula poderia ser o próton, todavia, durante estudos com raios cósmicos em 1932, Carl Anderson (1905–1991) descobre através de uma câmara de nuvens uma partícula de massa igual e carga oposta ao elétron. Tal partícula foi denominada de **pósitron** que, além de ser a descoberta de uma antipartícula, é, também, a descoberta da existência de antimatéria (Neto, 2017; Peruzzo, 2012; Polkinghorne, 2022).

Por fim, a teoria de Dirac também garante a conservação da densidade de probabilidade. Partindo da equação (4.9):

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0,$$

e sua adjunta[20]:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m\right)\bar{\psi}\ =0;$$

multiplicando-se a primeira equação por $\bar{\psi}$ pela esquerda e a segunda por ψ pela direita:

$$\begin{cases}\bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=0\Rightarrow\left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-m\bar{\psi}\psi\right)=0;\\ \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m\right)\bar{\psi}\psi=0\Rightarrow\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}\psi+m\bar{\psi}\psi\right)=0.\end{cases}$$

Agora, somando os dois resultados anteriores:

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi+\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}\psi=0;$$

ou ainda,

$$(\bar{\psi}\gamma^{\mu})\partial_{\mu}\psi+\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}\right)\gamma^{\mu}\psi=0.$$

A expressão acima é a quadridivergencia da **densidade de carga-corrente**, onde $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi=J^{\mu}$, e, portanto;

$$\partial_{\mu}J^{\mu}=0,$$

que é a da equação de continuidade (Bassalo, 2006).

4.4 Equação de Proca

O trabalho do físico romeno Alexandru Proca (1897–1955) remonta a primeira metade do século XX e está intimidante relacionado às forças nucleares recém descobertas na mesma época. Sabia-se que a eletrodinâmica de Maxwell descrevia a dinâmica do campo vetorial A^{μ} composto integralmente por fótons que, por serem destituídos de massa, resulta em uma ação de baixa intensidade e de longa distância da força eletromagnética. Opostamente a este resultado, a **força nuclear forte**, proposta como modelo fenomenológico por Hideki Yukawa (1907–1981) em 1935 para explicar a coesão e estabilidade do núcleo atômico, estabelece a existência de uma força de interação com similaridade à eletromagnética, modelada pelo potencial de Yukawa:

$$V(r)=\frac{g_{s}}{4\pi r}e^{-\frac{mrc}{\hbar}};$$

cuja intensidade de atuação é significativamente elevada, porém, de baixíssimo alcance, não ultrapassando à ordem de $10^{-14}\ m$ (Shwartz, 2014).

[20] A construção da equação adjunta parte da definição do espinor adjunto de Dirac, isto é, por serem matrizes, $\bar{\psi}=\psi^{\dagger}\gamma^{0}$, onde $\psi^{\dagger}$ é o transposto de conjugado do espinor ψ.

Partindo de uma equação do tipo Klein-Gordon e substituindo a função de onda original $\phi(\vec{r},t)$ pelo campo vetorial $A^{\mu}=\left(\phi/_{c}\,,A^{i}\right)$, tem-se que cada uma das componentes de A^{μ} satisfaz à uma equação de Klein-Gordon:

$$\left[\partial_{\mu}\partial^{\mu}+m^{2}\right]A^{\mu}=\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\mu}+m^{2}A^{\mu}=0.$$

Nota-se que o calibre de Lorentz $\left(\partial_{\mu}A^{\mu}=0\right)$ surge automaticamente na relação, apenas comutando a ordem dos operadores: $\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\mu})=0\leftrightarrow\partial^{\mu}\left(\partial_{\mu}A^{\mu}\right)$. Agora, tomando-se a equação (2.45) e a forma expandida do tensor de Maxwell: $F^{\mu\nu}=\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}$, ocorre que;

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu})=\mu_{0}J^{\nu}.$$

Ademais, a construção de uma teoria de campos vetoriais massivos depende da eliminação das redundâncias de calibre que são naturalmente nativas da regra de transformação de calibre: $A^{\mu}\rightarrow A^{\mu}+\partial^{\mu}\Lambda$. Assim, da expressão acima, observando que

$$\partial_{\mu}(\partial^{\nu}A^{\mu})\equiv\partial^{\nu}\left(\partial_{\mu}A^{\mu}\right)=0,$$

e ainda que

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\mu}=-m^{2}A^{\mu}=0,$$

logo,

$$\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu})-(-m^{2}A^{\mu})=\mu_{0}J^{\nu}.$$

A introdução do termo massivo induz uma quebra de simetria, reduzindo os quatro graus de liberdade originais para apenas três, como de fato é esperado de uma teoria de campos vetoriais massivos. O fato de $m^{2}A^{\mu}$ ser identicamente nulo originalmente demostra a destituição de massa do fóton, do contrário, não poderia haver ação eletromagnética à longas distâncias, mediada pelo campo A^{μ}. Por fim, considerando as equações no vácuo, onde não existem fontes $(\mu_{0}J^{\nu}=0)$, tem-se a equação de Proca para campos vetoriais massivos:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}+m^{2}A^{\mu}=0. \qquad \textbf{(4.13)}$$

4.4.1 Análise da equação de Proca

Por ser derivada diretamente da estrutura algébrica da equação de Klein-Gordon, a equação de Proca é uma equação de onda relativística que descreve campos vetoriais massivos. Suas soluções também são ondas planas:

$$A^{\mu}(\vec{r},t)=\epsilon^{\mu}e^{-i(k_{\mu}x^{\mu})};$$

onde ϵ^{μ} é o vetor de polarização, que satisfaz a condição $\epsilon^{\mu}k_{\mu}=0$, que designa a existência dos três graus de liberdade (ou polarização) para a partícula, uma longitudinal e duas

transversais. A presença do termo de massa junto ao campo vetorial evidencia a quebra de simetria de calibre que rege a interação eletromagnética, sendo este o ponto de conexão com a teoria de Yukawa. Considerando um campo estático $\partial_0 A^\mu$, a equação (4.13) se reduz à

$$(\nabla^2 + m^2)A^\mu = 0,$$

cujas soluções são o próprio potencial de Yukawa;

$$V(r) \equiv A^0(\vec{r}) \propto \frac{e^{-\frac{m\vec{r}c}{\hbar}}}{4\pi r}.$$

Portanto, a quebra da simetria intensidade-ação em razão da presença do termo de massa junto às soluções da equação de Proca evidencia que o curto alcance da força proposta por Yukawa ocorre pela intermediação de partículas significativamente massivas. De fato, a coesão nuclear é possível somente pela existência de uma força residual intermediada por um grupo de partículas denominadas de *píons* (π^0, π^+, π^-), que remanesce de uma interação ainda mais fundamental e geral (Lancaster e Blundell, 2014).

4.5 De partículas à campos

De modo geral, o brilhante trabalho de Dirac no desenvolvimento de uma mecânica quântica relativística ainda não garantia uma unificação satisfatória entre a mecânica quântica e a relatividade especial. Inconsistências físicas como causalidade e localidade ainda persistiam, pois as teorias quânticas relativísticas desenvolvidas até então eram aplicadas somente à sistemas pontuais, isto é, átomos e partículas. Nesse sentido, Dirac buscou entre os anos de 1932 à 1933 uma forma mais fundamental e consistente da qual sua teoria pudesse ser derivada. A resposta obtida para a eliminação das inconsistências reside em uma generalização do princípio usado por Hilbert na obtenção das equações de campo da relatividade geral e na substituição da pontualidade material dos sistemas por um meio fisicamente contínuo denominado de **campo**.

Em termos matemáticos, um campo é entidade física que preenche todo o espaço e possui infinitos graus de liberdade, onde toda e qualquer interação é local e se propaga através do próprio campo com velocidade $\leq c$. Assim, cada partícula da teoria de Dirac (Klein-Gordon ou Proca) é, na verdade, uma manifestação local em um tipo específico campo (Júnior, 2019).

Em Neto (2017), considera-se que em um sistema clássico descrito por um número finito de graus de liberdade (coordenadas generalizadas $\vec{x}_i$ e suas velocidades $\dot{\vec{x}}_i$), este sistema

obedece ao princípio da mínima ação em (2.49), cujas equações de movimento são equivalentes à segunda lei de Newton:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}_i}\right) = 0, i = 1, 2, \dots N. \tag{4.14}$$

A equação acima é denominada de **equação de Euler-Lagrange**, onde a densidade lagrangiana $\mathcal{L}$ do sistema é uma função das energias cinética K e potencial V:

$$\mathcal{L} = K + V = m\frac{\dot{\vec{x}}_i^{\,2}}{2} + V(\vec{x}_i).$$

Assim, a transição para o contínuo se dá substituindo o caráter discreto das coordenadas generalizada com índice i por um contínuo $\phi(\vec{r}, t)$, e a ação em (2.49) passa ser

$$[S] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\{\phi(\vec{r}, t), \dot{\phi}(\vec{r}, t), t\} dt, \; \dot{x}_i \leftrightarrow \phi(\vec{r}, t). \tag{4.15}$$

Pelo o princípio da mínima ação, a condição $\delta S = 0$ também deve ser válida para (4.15), o que resulta naturalmente nas equações de Euler-Lagrange generalizadas para campos:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\{\phi(\vec{r}, t), \dot{\phi}(\vec{r}, t), t\} d^3\vec{r} = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right] = 0. \tag{4.16}$$

Ainda conforme Neto (2017), a partir da equação acima, é possível construir o formalismo hamiltoniano do sistema, definido no espaço de fases. Para tal, considera-se o momento conjugado à $\phi(\vec{r}, t)$, definido por

$$\pi(\vec{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{r}, t)},$$

cuja a densidade hamiltoniana é

$$\mathcal{H}(\phi, \pi) = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}, \tag{4.17}$$

da qual se deriva as equações de Hamilton para a dinâmica dos campos:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi};$$

e, portanto

$$H = \int \mathcal{H} d^3\vec{r}. \tag{4.18}$$

Sob a forma de campos, as teorias relativísticas guardam mais informações do que as teorias de sistemas pontuais clássicos. Para o caso da teoria de Klein-Gordon, observa-se que o objeto $\phi(\vec{r}, t)$ imposto por substituição direta é, na verdade, uma função escalar com infinitos

graus de liberdade e não constitui realmente uma função de onda (ou vetor de estado no espaço de Hilbert). Portanto, a equação de Klein-Gordon constitui uma equação clássica e descreve a dinâmica de um campo escalar real, cuja densidade lagrangiana para o campo escalar é:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{4.19}$$

O primeiro termo de $\mathcal{L}_{KG}$ descreve a evolução do campo escalar no espaço-tempo, podendo ser compreendido como o termo cinético. O segundo termo, ou termo massivo, carrega informações de energia, que está diretamente ligado à massa da partícula descrita pelo campo e é um equivalente à parte potencial. Substituindo a expressão acima na equação (4.16), é possível obter a equação de Klein-Gordon (Lancaster e Blundell, 2014).

Quanto a teoria de Dirac, a densidade lagrangiana para o campo de Dirac (ou campo espinorial) é

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \tag{4.20}$$

Do mesmo modo, a substituição da equação (4.20) em (4.16) retorna à equação de Dirac. A quantização do campo de Dirac conduz à dinâmica dos elétrons e demais partículas dotadas de spin semi-inteiro (LANCASTER, BLUNDELL, 2014).

Por fim, a densidade lagrangiana que rege a teoria dos campos dos campos massivos de Proca é

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu. \tag{4.21}$$

A menos das unidades naturais ($\mu_0 = c = 1$), tem-se que o primeiro termo da densidade lagrangiana de Proca, tal como visto em (2.52), é a densidade lagrangiana para o campo eletromagnético de Maxwell $\mathcal{L}_{EM}$:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{4.22}$$

Tal como os casos anteriores, a lagrangiana de Maxwell fornece as equações para a dinâmica dos campos elétrico e magnético, constituindo o termo cinético da lagrangiana de Proca. Em termos de campos, a quebra da simetria (invariância de calibre) em razão da presença do termo de massa torna-se mais evidente. No limite $m \to 0$, as equações de Maxwell são recuperadas, adicionando-se o termo referente às fontes de carga e corrente;

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu - A_\mu J^\mu.$$

Na equação de movimento de Proca, o termo $A_\mu J^\mu$ é um termo de acoplamento mínimo, logo, a mesma descreve a interação de partículas de spin inteiro via correntes de matéria, constituindo campos de força de alcance muito curto e finito (Griffiths, 2008).

5 EM BUSCA DA UNIFICAÇÃO

Antes mesmo de tê-lo concluído em sua forma mais geral, o trabalho de Dirac em mecânica quântica relativística foi merecidamente reconhecido como o Nobel de física em 1933, junto à Schrödinger. A reformulação das teorias quânticas relativísticas em termos de campos possibilitou a construção de teorias mais fundamentais e gerais, mediante o processo da **segunda quantização** (quantização dos campos), sendo este o elemento primordial para a compressão moderna dos fundamentos da natureza. O presente e último capítulo é destinado à quantização dos campos e um destes campos está conectado às chamadas **interações (ou forças) fundamentais**. Começando pela eletrodinâmica quântica, que pode ser considerada a primeira teoria de unificação de maior sucesso e de caráter completo entre a mecânica quântica e relatividade especial, abordar-se-á como essa teoria serviu de modelo para o desenvolvimento de teorias mais complexas, chamadas de teorias de Yang-Mills, e como juntas fornecem a estrutura matemática necessária para a constituição do modelo padrão da física de partículas elementares. Abordar-se-á, também, acerca das limitações e perspectivas correlacionadas à busca por uma teoria de campo unificada.

5.1 A eletrodinâmica quântica – QED[21]

A eletrodinâmica quântica, segundo Richard Feynman (1918–1988) (1985), é a estranha teoria da luz e da matéria e como estas se relacionam em nível fundamental. Os resultados acerca da eletrodinâmica quântica são obtidos a partir da mínima ação do campo resultante da combinação dos campos individuais de Dirac e eletromagnético quantizados, acrescidos de um termo de interação mutua:

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{D} + \mathcal{L}_{I};$$

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi + e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A^{\mu} \qquad \textbf{(5.1)}$$

O Processo de quantização dos campos pode ser feito via quantização canônica[22]. Tal método é devido ao trabalho matemático conjunto de Heisenberg, Jordan e Dirac. O método em questão promove às quantidades contínuas clássicas $\phi(\vec{r}, t)$ à posição de operadores no espaço de fases, passando a obedecer às regras de comutação;

[21] Termo utilizado de modo abrangente nas literaturas inglesas: *Quantum Electrodynamics – QED*.
[22] Existem outros métodos para a quantização de sistemas além do método de quantização canônica, como o método de integrais de trajetórias de Feynman e o método de quantização estocástica.

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t},$$

em que

$$\{A, H\} = \int d^3\vec{r} \left[\frac{\delta A}{\delta\phi(\vec{r}, t)}\frac{\delta H}{\delta\pi(\vec{r}, t)} - \frac{\delta A}{\delta\pi(\vec{r}, t)}\frac{\delta H}{\delta\phi(\vec{r}, t)}\right].$$

Na expressão acima, $\phi(\vec{r}, t)$ trata-se do próprio campo em uma posição $\vec{r}$ do espaço e em um dado instante de tempo t. $\pi(\vec{r}, t)$ é o momento canônico conjugado ao campo $\phi(\vec{r}, t)$. Por sua vez, $\delta A/\delta\phi(\vec{r}, t)$ e $\delta H/\delta\pi(\vec{r}, t)$ são derivadas funcionais, que medem como o funcional muda em resposta à uma pequena variação local no campo ou no momento canônico. Como um todo, a expressão entre colchetes é denominada de **parêntese de Poisson** para os funcionais A e H. A diferença anterior leva as relações fundamentais de Poisson para campos;

$$\{\phi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)\} = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'),$$
$$\{\phi(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}', t)\} = 0 = \{\pi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)\};$$

onde $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ é a função delta de Dirac tridimensional. Os parênteses de Poisson são cruciais para a transição da teoria de campos clássica para a teoria quântica de campos. Pela regra de quantização canônica, os parênteses de Poisson são substituídos pelo comutador:

$$\{A, H\} = -\frac{i}{\hbar}[A, H],$$

e assim,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, H] + \frac{\partial A}{\partial t};$$

que é a equação de movimento de Heisenberg. Dessa forma, ao serem quantizados, tem-se as relações de comutação quânticas:

$$[\phi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)] = i\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'),$$
$$[\phi(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}', t)] = 0 = [\,\pi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)];$$

cuja evolução temporal é governada pela equação de movimento de Heisenberg.

5.1.1 Quantização do campo de Dirac

Segundo (GOMES, 2024; NETO 2017), de modo arbitrário, soluções ainda mais gerais do que aquela vista em (4.13) podem ser estabelecidas para a equação de Dirac, tais como

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sum_r \int \frac{d^3p}{E_p/m}\left[a^{(r)}(p)u^{(r)}(p)e^{-i(p_\mu r^\mu)} + b^{(r)\dagger}v^{(r)}(p)e^{i(p_\mu r^\mu)}\right]; \quad \textbf{(5.2)}$$

e, também, a sua adjunta:

$$\bar{\psi}(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sum_r\int\frac{d^3p}{E_p/m}\left[b^{(r)}(p)\bar{v}^{(r)}(p)e^{-i(p_\mu r^\mu)}+a^{(r)\dagger}\bar{u}^{(r)}(p)e^{i(p_\mu r^\mu)}\right]. \quad \textbf{(5.3)}$$

Nessas equações de solução, os objetos $a^{(r)}$ e $b^{(r)}$, bem como $a^{(r)\dagger}$ e $b^{(r)\dagger}$ são operadores que, quando quantizados, descrevem os fenômenos de criação e aniquilação de partículas virtuais. Para se obter a quantização do campo de Dirac, se faz necessário considerar um sistema de equações de movimento com graus de liberdade extras, denotados pelas variáveis $\theta_\alpha(t)$. Estas variáveis são denominadas de variáveis de Grassmann. Assim, a nova densidade hamiltoniana em termos das novas variáveis pode ser reescrita a partir de (4.19) acrescida do termo $\dot{\theta}_\alpha\pi_\alpha$;

$$\mathcal{H}(\phi,\theta,\pi)=\pi\dot{\phi}+\dot{\theta}_\alpha\pi_\alpha-\mathcal{L}. \quad \textbf{(5.4)}$$

Tomando a variação $\delta\mathcal{H}$, tem-se as novas equações de movimento:

$$\dot{\phi}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi},\quad \dot{\pi}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi},\quad \dot{\pi}_\alpha=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta_\alpha},\quad \dot{\theta}_\alpha=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_\alpha}.$$

Dessa maneira, em função das novas equações de movimento, ocorre que as soluções (5.2) e (5.3) podem ser substituídas na densidade hamiltoniana para a teoria de Dirac;

$$\mathcal{H}=\dot{\psi}_\alpha\pi_\alpha+\dot{\psi}_\alpha^\dagger\pi_\alpha^\dagger-\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi,$$

e calcular a hamiltoniana (4.20) do sistema, levando ao resultado:

$$H=\sum_r\int\frac{d^3p}{E_p/m}E_p\left[a^{\dagger(r)}(p)a^{(r)}(p)-b^{(r)}(p)b^{\dagger(r)}(p)\right]. \quad \textbf{(5.5)}$$

Deve-se enfatizar que a hamiltoniana não é positiva definida e, assim, a energia não é limitada inferiormente. Uma solução para esta problemática reside na imposição das regras de anticomutação;

$$\left\{b^{(r)}(p),b^{\dagger(r)}(p')\right\}=\mathcal{C}. \quad \textbf{(5.6)}$$

Com essa imposição, a menos de uma constante, a expressão em (5.5) se torna

$$H=\sum_r\int\frac{d^3p}{E_p/m}E_p\left[a^{\dagger(r)}(p)a^{(r)}(p)+b^{\dagger(r)}(p)b^{(r)}(p)\right]. \quad \textbf{(5.7)}$$

Definindo as quantidades

$$\frac{m}{E_p}a^\dagger a=\eta_a,\quad \frac{m}{E_p}b^\dagger b=\eta_b;$$

que devem ser interpretadas como as densidades do número de partículas, a quantização da teoria de Dirac dependerá da aplicação dos anticomutadores, que podem ser obtidos diretamente de uma adaptação da regra de quantização canônica;

$$\{A,H\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}\left(\hat{A}\hat{B} - (-1)^{nAnH}\hat{H}\hat{A}\right). \tag{5.8}$$

Logo, decorre de (5.8) que, para tempos iguais (simbolizado por $+$), as relações de anticomutação para os spinores de Dirac:

$$\left\{\psi_\alpha(\vec{r},t), \psi_\beta(\vec{r}',t)\right\}_+ = \left\{\psi_\alpha^\dagger(\vec{r},t), \psi_\beta^\dagger(\vec{r}',t)\right\}_+ = 0;$$

$$\left\{\psi_\alpha(\vec{r},t), \psi_\beta^\dagger(\vec{r}',t)\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'). \tag{5.9}$$

Por fim, reitera-se que a quantização do campo de Dirac (bem como de qualquer outro campo) leva à uma expansão das soluções em termos das quantidades $a^{(r)}$, $b^{(r)}$ e seus complexos conjugados $a^{\dagger(r)}$ e $b^{\dagger(r)}$. Tal como vistas em (5.2) e (5.3), essas quantidades são definidas como operadores de criação e aniquilação de partículas, validando em nível quântico a expressão clássica de Einstein: $E = mc^2$. Dado o curto período de tempo de existência dessas partículas, as mesmas são compreendidas como **partículas virtuais**, implicando na existência de uma flutuação de vácuo ou **energia de ponto zero**, no qual, quando o operador $a^{(r)}$ aniquila um elétron, $b^{\dagger(r)}$ é responsável por criar um pósitron. Portanto, em um sentido mais essencial, um elétron ou qualquer outra partícula descrita pela teoria de Dirac, pode ser compreendida como a manifestação local do campo espinorial quântico de Dirac (Neto, 2017).

5.1.2 Quantização do campo eletromagnético

A quantização do campo eletromagnético depende de uma premissa importante. Partindo da densidade lagrangiana (4.22), é possível perceber claramente que o formalismo canônico é constituído de vínculos, isto é, restrições de primeira classe que implicam na nulidade do momento canônico associado ao campo vetorial A_μ;

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \Longrightarrow -F^{\mu 0} = E^i,$$

e, portanto, $\pi^0 \approx 0$. A existência de tais restrições está diretamente ligada à simetria de calibre da teoria eletromagnética clássica e a suas redundâncias de calibre, assim como a componente temporal do quadripotencial (A_0) não constitui uma variável dinâmica. Para sanar a problemática dos vínculos e retomar o procedimento de quantização canônica, as componentes do quadripotencial devem ser tratadas de modo independente, mediante a imposição de uma lagrangiana modificada:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2, \tag{5.10}$$

onde λ é um parâmetro não nulo. Desse modo, as equações de Euler-Lagrange passam a ser

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\mu - (1-\lambda)\partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 0, \tag{5.11}$$

cujo momento conjugado, que antes era nulo, passa à ser:

$$\pi^\mu = F^{\mu 0} - \lambda g^{\mu 0} \partial_\nu A^\nu. \tag{5.12}$$

Por simplicidade, fazendo $\lambda = 1$, obtém-se

$$\begin{cases} \pi^0 = -\partial_\alpha A^\alpha; \\ \pi^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i. \end{cases}$$

Uma vez que π^0 não é mais nulo, a quantização canônica decorre diretamente;

$$\{A^\mu(\vec{r},t), A^\nu(\vec{r}',t)\}_+ = \{\pi^\mu(\vec{r},t), \pi^\nu(\vec{r}',t)\}_+ = 0;$$

$$\{\pi^\mu(\vec{r},t), A_\nu(\vec{r}',t)\} = -i\delta^\mu_\nu \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'). \tag{5.13}$$

Sobre as equações de Euler-Lagrange em (5.11), o primeiro termo nada mais é que calibre de Lorentz, uma equação de onda já conhecida, cujas soluções são superposições de ondas planas, tal como segue,

$$A^\mu(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3p}{2p^0} \sum_{\lambda=1}^{4} \epsilon^{(\lambda)\mu} \left\{ a_\lambda(p) e^{-i(p_\mu \vec{r}^\mu)} + a^\dagger_\lambda(p) e^{i(p_\mu \vec{r}^\mu)} \right\}. \tag{5.14}$$

A partir desse resultado, e retomando novamente os resultados obtidos por Proca, a expressão em (5.14) é a solução mais geral para a equação $(\nabla^2 + m^2)A^\mu = 0$, quando $m \to 0$. Como visto anteriormente, por não serem dotadas de massa, as partículas (também consideradas virtuais em razão da atuação dos operadores de criação a_λ e aniquilação $a^\dagger_\lambda$) que compõem o campo eletrodinâmico são os fótons que, para o calibre de Lorentz $p_\mu a^\mu(\vec{p}) = 0$, portam somente dois estados de polarização (um longitudinal e um vertical) conforme o **vetor de polarização** $\vec{\epsilon}(\vec{p},\lambda)$, onde $\lambda = 1, 2$ (Gomes, 2024; Neto 2017).

5.1.3 Renormalização e grupo de simetria

Uma vez concluída, esperava-se que a eletrodinâmica quântica pudesse oferecer informações acerca das quantidades mensuráveis do elétron (como massa e carga) com o mais elevado grau de precisão, entretanto, a princípio, foi algo muito distante de acontecer. No início dos anos 30, durante o cálculo da autoenergia do elétron, Robert Oppenheimer (1904–1967) constata que a mesma era infinita;

$$W(\vec{k}) \approx \frac{\hbar^2 c^2 e^2}{\hbar c E(\vec{k})} \int^\infty \lambda d\lambda,$$

e até mesmo a variação $\Delta W(\vec{k})$ ainda tendia ao infinito, implicando na absoluta dispersão das linhas espectrais. A solução para os infinitos da eletrodinâmica quântica se deve à um sofisticado método matemático, fruto do trabalho independente de Feynman, Shin'ichiro Tomonaga (1906–1979) e Julian Schwinger (1918–1994), denominado de **renormalização**.

Notou-se que os paramentos físicos designados pela densidade lagrangiana original (carga e e massa m) são quantidades "blindadas" e não observáveis diretamente e, por isso, passaram a ser chamados de parâmetros "nus", os quais são diretamente afetados pela **polarização do vácuo**. Assim, o método de renormalização consiste na redefinição dos parâmetros antigos em termos de constantes reguladoras:

1. Campo do elétron: $\psi \to \psi_r$;
$$\psi = \sqrt{Z_2}\psi_r.$$
2. Campo do fóton: $A^\mu \to A^\mu_r$;
$$A^\mu = \sqrt{Z_3}A^\mu_r.$$
3. Carga do elétron: $e \to e_r$;
$$e = Z_1/Z_2\sqrt{Z_3}\, e_r.$$
4. Massa do elétron: $m \to m_r$;
$$m = m - \delta m_r.$$

O ponto-chave do processo de renormalização (decorrente da simetria de calibre) é a conexão direta entre campo e carga, expressão pela igualdade;
$$Z_e = 1/\sqrt{Z_3}.$$
A igualdade acima significa que a renormalização da carga elétrica está intrinsecamente ligada à renormalização do campo do fóton. O fenômeno de blindagem dos parâmetros físicos decorre da **polarização do vácuo**, ou seja, da contínua criação e aniquilação de pares de elétron-pósitron virtuais. Este efeito impede o acesso direto ao "elétron fundamental" (ou "nu"), de modo que apenas a carga "efetiva" ou "vestida" é observável. Desse modo, a densidade lagrangiana era dada antes por (5.1) em termos dos velhos parâmetros, pode ser reescrita em termos das constantes reguladoras:
$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{(Z_3 - 1)}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (Z_2 - 1)\bar{\psi}\big(i\gamma^\mu\partial_\mu - [m + \delta m_r]\big)\psi - (Z_2 - 1)e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu.$$
Os parâmetros reguladores (ou de normalização) são funções das quantidades físicas dimensionais (**processo de regularização**);

$$\left.\begin{array}{l} A + B\Lambda^2 + Cln(\Lambda) + \cdots ; \Lambda \to \infty \\ A + \dfrac{B}{\epsilon} + Cln(y^*) + \cdots ; \epsilon \to \infty \end{array}\right\}.$$

Os métodos de renormalização para a eletrodinâmica quântica foram apresentados por seus respectivos autores em 1948, na conferência de Shelter Island, Nova York. Posteriormente, apesar da forte aparência de distinção entre os métodos, o físico anglo-americano Freeman Dyson (1923–2020) demonstrou que estes eram equivalentes em 1949. Feynman, Schwinger e Tomonaga foram agraciados com o Nobel pelo feito da renormalização da eletrodinâmica quântica (Gomes, 2017; Morris, 1998).

Em termos gerais, conforme as informações fornecidas pela densidade lagrangina, a eletrodinâmica quântica como uma teoria quântica de campo descreve como a radiação (descrita e mediada pelo campo de fótons virtuais) interage com a matéria, mais precisamente com as partículas geradoras e portadores de carga, como o elétron que, por sua vez, é uma manifestação local da dinâmica do campo quântico spinorial de Dirac. Classicamente, a teoria de Dirac é dotada de uma simetria global que, em razão do seu caráter relativístico, se transforma conforme a regra:

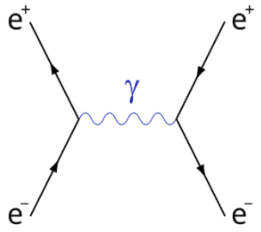
$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\theta}\psi,$$

onde $e^{i\theta}$ é uma constante de fase complexa. Assim, a eletrodinâmica quântica é o resultado da promoção de simetrias locais ao campo quantizado de Dirac, mediante a introdução do campo de calibre (ou de gauge) $A_\mu(\vec{r}, t)$. A introdução do campo de calibre, que se transforma segundo a regra: $A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + 1/q^- \, \partial\theta$, onde θ também é uma fase, responsável pela introdução do termo de interação $e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$ elétron-fóton na densidade (5.1); e q^- é a carga do elétron. Uma vez acoplados, observa-se a nova regra de transformação para os campos:

$$D_\mu\psi \longrightarrow e^{i\theta}\left(\partial_\mu\psi - iq^- A_\mu\psi\right) = e^{i\theta}D_\mu\psi,$$

tal que D_μ é denominada de **derivada covariante** $D_\mu \equiv \partial_\mu\psi - iq^- A_\mu\psi$. Essa regra de transformação corresponde ao grupo de rotações do plano complexo ou plano das fases, denominado de grupo $U(1)$. Por ser o resultado de uma simples adição, a transformação de fase da eletrodinâmica quântica é comutativa e isso faz da mesma uma **teoria de calibre abeliana**. A principal consequência do caráter abeliano e, portanto, comutativo das transformações de simetria do grupo de calibre da eletrodinâmica quântica é a neutralidade de carga e a liberdade de longo alcance dos fótons, onde os fótons são partículas fundamentais plenamente livres.

Figura 23 – Diagrama de Feynman para o processo de criação e aniquilação de partículas virtuais. Nesse processo, um elétron e^- e um pósitron e^+ aniquilam-se mutuamente gerando radiação eletromagnética, intermediada pelo fóton γ que, após um certo tempo t, torna a decair em um novo par de $e^- \leftrightarrow e^+$, resultando no fenômeno da polarização do vácuo.



Fonte: Adaptado de Odenwald, (2024, p. 144)

5.2 As interações fundamentais

Até o final dos anos 30, a comunidade científica estava convencida de que todos os processos físicos eram decorrentes da manifestação de pelo menos quatro forças ou interações fundamentais. Além das forças gravitacional e eletromagnética muito bem conhecidas de longas datas, teorizou-se até a primeira metade dos anos 30 a existência de duas outras interações relacionadas aos processos atômicos. A primeira delas, denominada de **força nuclear fraca**, foi investigada em 1934 pelo físico italiano Enrico Fermi (1901–1954) e a ela atribuiu-se os processos de decaimento beta, descobertos por Marie Curie (1867–1934) e seu marido, Pierre Curie (1859–1906), durante os estudos com os elementos recém descobertos na época, polônio e o rádio. Os processos de decaimento beta são de dois tipos, de modo que;

$$\left.\begin{array}{l} \beta^+ \Longrightarrow n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ \beta^- \Longrightarrow p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e \end{array}\right\},$$

em β^+, um nêutron decai em um próton, um elétron e um antineutrino do elétron. Em β^-, observa-se que o próton decai em um nêutron, um pósitron e em um neutrino do elétron (Salam, 1993; Kaku, 1993).

A teoria de Fermi para a força fraca consistia em uma força de contato, resultante de vórtices locais de dois grupos de partículas denominadas *léptons* e *hádrons*. Ocorria que, para altas energias, a teoria era não normalizável. Fermi postulou ainda que a hamiltoniana efetiva para a teoria era do tipo:

$$\mathcal{H}_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_H^{\mu} J_{\mu}^{L} + \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_H^{\mu} J_{\mu}^{L}\right)^{\dagger}, \qquad \textbf{(5.15)}$$

na qual G_F é a constante de Fermi, cujo valor ($G_F \approx 1{,}1664 \times 10^{-5} GeV^{-2}$) quantifica a intensidade de interação. J_H^{μ} e J_{μ}^{L} são, respectivamente, as densidades de correntes das partículas envolvidas na formação dos vórtices. A segunda interação, chamada **força nuclear forte**, foi investigada por Yukawa como a geradora da coesão do núcleo atômico (Neto, 2017).

5.3 Teorias de Yang-Mills

Segundo (Neto, 2017; Kaku, 1993) após o processo de renormalização, o sucesso da eletrodinâmica quântica inspirou os físicos teóricos Yang Cheng-Ning (1922–2025) e Robert Mills (1927–1999), em 1954, a buscarem uma generalização da mesma como descritora das interações nucleares. Em 1932, Heisenberg havia proposto que a semelhança entre prótons e nêutrons poderia ser explicada se estes fossem considerados os como diferentes estados de um mesmo objeto chamado **núcleon**. Nesse modelo, o grupo de simetria é denominado de **simetria de isospin**, uma simetria de caráter global descrita pelo grupo $SU(2)$. Assim, diferente da proposta inicial de Heisenberg, Yang e Mills buscaram simetrias locais para o isospin, conduzindo naturalmente à uma generalização da eletrodinâmica. Junto a eletrodinâmica quântica, as duas teorias resultantes de Yang-Mills são denominadas **teorias de calibre**.

As duas principais teorias de Yang-Mills podem ser derivadas a partir da densidade lagrangiana geral de Yang-Mills:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\right)\psi, \tag{5.16}$$

onde $F^{\mu\nu a}$ é a generalização do tensor de Maxwell, de modo que;

$$F^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu} + gf^{abc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu}. \tag{5.17}$$

Ocorre que, diferente da eletrodinâmica quântica, as teorias de Yang-Mills são teorias não abelianas, isto é, são constituídas de grupos de transformação não comutativos do tipo $SU(N)$. O objeto A^{a}_{μ} em (5.17) é definido como o **campo de calibre** das interações, onde o índice a corresponde à uma simetria interna relacionada ao grupo de transformações e ao número de mediadores que constituem o campo de calibre. Em outros termos, o índice a (que varia $N^2 - 1$) quantifica um valor de "carga", chamada de carga de isospin. A não comutatividade significa a existência de autointeração entre os constituintes dos campos de calibre, bem como a dotação de carga elétrica por parte dos mediadores.

Ademais, os novos termos observados em (5.17): g e f^{abc} são, respectivamente, o acoplamento de interação, decorrente da aplicação da derivada covariante generalizada $\left(D_{\mu} = \partial_{\mu} + igA^{a}_{\mu}T^{a}\right)$, e as constantes de estrutura do grupo $SU(N)$, segundo a generalização de relações matriciais;

$$[T^{a}, T^{B}] = i\epsilon^{abc}T^{c} \longrightarrow [T^{a}, T^{B}] = if^{abc}T^{c}. \tag{5.18}$$

5.3.1 Teoria eletrofraca

Em um trabalho datado de 1956, com a colaboração de Tsung-Dao Lee (1926–2024), Yang postulou que a força nuclear fraca violava a **simetria de paridade** (ou especular). Observou-se através de experimentos que as emissões de elétrons pelo decaimento beta do isótopo cobalto-60 tinham preferência pela direção relacionada ao spin do núcleo, quando se esperava que a taxa de emissão deveria ser a mesma para todas as direções. Verificou-se, portanto, que a força nucelar fraca atua somente em partículas de helicidade esquerda, isto é, partículas cuja projeção do spin aponta na direção oposta ao movimento. Por este importante trabalho, Yang e Lee foram laureados com o Nobel em 1959 (Neto, 2017; Salam, 1993).

Junto ao resultado de 1954, uma importante constatação oriunda dos estudos de simetria especular de Lee e Yang em 1957 relacionados à interação fraca, é que esta deveria ser mediada por um trio (ou tripleto) de partículas mensageiras, pois,

$$SU(N) \xrightarrow{N=2} SU(2) \Rightarrow a = N^2 - 1 = 3;$$
$$\therefore A_\mu^3, a = 1, 2\ ,3.$$

Segundo esse modelo, essas partículas deveriam possuir massa nula, spin unitário e apenas duas delas deveriam ser carregadas eletricamente. No entanto, apesar de correto quanto ao número de mediadores e ao número de spin, o modelo de Yang-Mills não corresponde ao fenômeno de interação fraca, uma vez que, dados esses parâmetros, a força nuclear fraca deveria ser análoga ao eletromagnetismo e possuir alcance infinito (Neto, 2017; Salam, 1993).

Apesar da problemática com as massas dos mediadores, o fato de um deles ser eletricamente neutro trouxe indícios de que a força nuclear fraca poderia estar intimamente relacionada ao eletromagnetismo, possibilitando um caminho para a unificação entre essas interações. Assumindo que o mediador neutro fosse o próprio fóton, necessitava-se compreender como a força nuclear fraca atua universalmente entre as partículas de helicidade esquerda em pequenas escalas, enquanto o eletromagnetismo atua quase infinitamente entre todas as partículas eletricamente carregadas, independente da helicidade. Como forma de contorno para todas essas questões, Sheldon Glashow (1932–), estendendo os modelos de unificação ditos eletrofracos de Schwinger, estabeleceu a estruturara de simetria:

$$SU(2)_L \times U(1)_{EM}. \qquad \textbf{(5.19)}$$

Nessa nova estrutura de simetria, onde o índice L exprime a participação única de férmions de helicidade esquerda e $U(1)_{EM}$ é o grupo eletrodinâmico, os antigos mediadores com massa nula das interações fracas foram remodelados, sendo, agora, um dupleto massivo e carregado com

as terminologias de W^+ e W^-. Enquanto isso, o terceiro membro para a composição do tripleto (que incialmente pensou-se ser o fóton eletrodinâmico γ), foi teorizado e denominado de Z^0 que, diferente do fóton, deve indispensavelmente massivo e eletricamente neutro. A razão de mensageiros massivos é justificada pela intensidade de ação da força fraca que, para uma escala da ordem de $10^{-18}\,m$, é equiparável à intensidade de ação da força eletromagnética. Posteriormente, notou-se que a inclusão teórica do mensageiro Z^0 trouxe divergências não renormalizáveis à teoria, fazendo-se necessário a presença insubstituível do fóton como componente de mistura em altas energias para corrigi-las (Neto, 2017; Salam, 1993).

A combinação em (5.19) prevê a existência de correntes neutras, corroborando com o modelo fenomenológico da possível existência real do mediador Z^0. No entanto, a densidade lagrangiana da combinação revela em seu penúltimo termo:

$$\mathcal{L} = [\ldots] + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\sigma}}{2}\cdot\overrightarrow{W_\mu} + ieEA_\mu\right)\psi_L + \mathcal{L}',$$

no qual $\overrightarrow{W_\mu}$ refere-se aos mediadores de calibre dos campos de $SU(2)_L$ e $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli, que estão relacionadas à componente E através da expressão,

$$E = \frac{(1-\sigma^2)}{2} \leftrightarrow E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ocorre que a combinação (5.19) não é adequada, pois os elementos de E não comutam com os geradores do grupo $SU(2)_L$. Assim, para que haja comutação completa para com os geradores de $SU(2)_L$, de modo que as componentes do isospinor ψ_L possam possuir a mesma carga elétrica, define-se o operador de **hipercgarga**: $Y = 2Q - \sigma^3$ e, então, a nova combinação;

$$SU(2)_L \times U(1)_Y. \qquad \textbf{(5.20)}$$

A forma correta para a estrutura de simetria observada em (5.20) foi obtida por Glashow em meados da década de 60 é o que se denomina de **unificação eletrofraca**. Por ser derivada diretamente da estrutura matemática de Yang-Mills, a interação eletrofraca é uma interação não abeliana, correspondendo exatamente a unificação das forças eletromagnética e fraca em uma só interação, algo possível somente em cenários de altas temperaturas e energias, da ordem de $E \sim 246\ GeV$ e $T \sim 10^{15}\ K$. A lagrangiana total para a teoria eletrofraca é:

$$\mathcal{L}_{EW} = -\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left(D_\mu H\right)^\dagger\left(D_\mu H\right) + m^2H^\dagger H - (H^\dagger H)^2, \qquad \textbf{(5.21)}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ é, agora, o tensor do campo B_μ de calibre de hipercarga e $W^a_{\mu\nu}$ são os campos de calibre para o grupo $SU(2)_L$, com $a = 1, 2, 3$. Por fim, quanto aos últimos termos em (5.21), estes são os responsáveis pela **quebra espontânea da simetria** de calibre que resulta nas forças eletromagnética e fraca em baixas energias, tal como conhecemos. Ocorre que, no

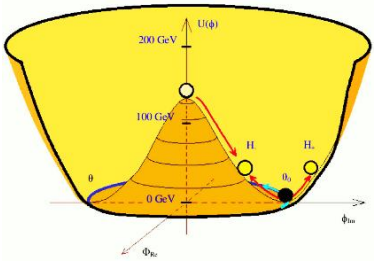
cenário de unificação, isto é, em altas temperaturas e energias, os campos de calibre B_μ e $W^a_{\mu\nu}$ são constituídos unicamente de partículas não massivas que, em um processo de **transição de fase**, os campos B_μ e $W^a_{\mu\nu}$ se decompõem nos campos convencionais A_μ, Z^0 e $W^\pm$ (Kaku, 1993; Schwartz, 2014).

A transição de fase faz parte do processo natural de expansão e esfriamento do Universo, ocorrendo logo após sua origem ($t \sim 10^{-12}\ s$). Neste processo, o **campo escalar de Higgs**, ou simplesmente **campo de Higgs**, descrito pelos últimos termos da lagrangiana (5.21), quebrou espontaneamente a simetria ao adquirir valor diferente de zero, levando os mediadores da força fraca a adquirirem massa e a atuarem somente em pequenas escalas. Por sua vez, o fóton permaneceu sem massa, possuindo um alcance infinito de interação. Este processo, no qual as partículas ganham massa a partir do campo não nulo de Higgs, é denominado de **mecanismo de Higgs**. Matematicamente, o mecanismo de Higgs e a ação do campo de escalar de Higgs ocorre conforme a mudança dos parâmetros do **potencial de Higgs**, que se encontra ilustrado pela figura 24. Portanto, dada a expressão do potencial de Higgs;

$$V(H) = -\frac{1}{2}m^2(H^\dagger H) + \frac{1}{4}\lambda(H^\dagger H)^2,$$

quando os parâmetros do potencial acima atingem a configuração $m^2 < 0 \Longrightarrow \lambda > 0$, isso leva automaticamente as partículas a ganharem massa. Este resultado foi obtido de modo independente entre aos anos de 1967 e 1968, sendo incorporado à teoria de Glashow por Steven Weinberg (1933–2021) e Abdus Salam (1926–1996). (Neto, 2017; Schwartz, 2014).

Figura 24 – De acordo com o potencial do Higgs, o mecanismo de atribuição de massa pelo campo de Higgs pode ser modelado por uma figura semelhante à um chapéu mexicano.



Fonte: Adaptado de Lancaster e Blundell, (2014, p. 437).

A relação entre os mediadores de calibre eletrofraco B_μ e $W^a_{\mu\nu}$ com os campos usuais A_μ, Z^0 e $W^\pm$ é dada pelo ângulo de mistura fraco de Weinberg:

$$\begin{bmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Cos(\theta_W) & -Sen(\theta_W) \\ Sen(\theta_W) & Cos(\theta_W) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(5.22)}$$

no qual o fóton γ e o mensageiro Z^0 resultam das misturas ortogonal e complementar dos mensageiros eletrofracos B_μ e W_μ^3, enquanto W^+ e W^- surgem de $1/\sqrt{2}\left(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2\right)$ (Lancaster e Blundell, 2014).

5.3.2 Cromodinâmica quântica - QCD[23]

A cromodinâmica quântica é a segunda teoria de Yang-Mills, responsável por modelar corretamente a força nuclear forte. O modelo proposto inicialmente por Yukawa apresentou problemas em regimes de altas energias, bem como o mediador da interação estava incorreto. Ocorreu que, conforme o modelo matemático não abeliano de Yang-Mills, o mediador deveria possuir spin unitário, enquanto o píon, estabelecido como mediador por Yukawa, tinha spin nulo. Apesar de não efetiva fundamentalmente, a teoria de Yukawa trouxe relevantes contribuições para a física de partículas, sendo reconhecida com o Nobel de física em 1949. Outro importante fato que impulsionou o desenvolvimento da cromodinâmica quântica foi o advento dos **aceleradores de partículas**, maquinas capazes de fragmentar a matéria corpuscular através de colisões. A sondagem do interior da matéria com essa nova metodologia deu-se por volta de 1956, remontando os trabalhos de Robet Hofstadter (1915–1990) em física nuclear. Assim, colisões entre núcleos atômicos pesados indicaram que os prótons e nêutrons não eram eles próprios entidades fundamentais (Odenwald, 2024; Salam, 1993).

Dado o aumento do poder energético de sondagem dos aceleradores de partículas logo após os eventos da segunda grande guerra, este fato conduziu a comunidade de teóricos e físicos de partículas à um verdadeiro **zoológico de partículas**, cuja organização e explicação para as mesmas permanecia em insolúvel. Em 1964, os trabalhos dos teóricos Murray Gell-Mann (1929–2019), George Zweig (1934–) e Yuval Ne'eman (1925–2006) (sendo este último de modo independente), propunham que uma possível organização para o zoológico de partículas poderia ser dada através de propriedades intrínsecas às próprias partículas, em especial a ação da força nuclear forte sobre as mesmas. No modelo teórico original de Gell-Mann e Zweig, estes propuseram a existência de partículas fundamentais chamadas *quarks*, especificadas por uma característica particular chamada **sabor**, sendo os três primeiros: $up - u$, $down - d$ e $strange - s$. Posteriormente, verificou-se que haviam outros três tipos de sabores quarks: $charm - c$, $top - t$ e $botton - b$. Os quarks possuem carga elétrica fracionada com relação ao elétron e as suas diferentes combinações resulta em dois conjuntos de partículas chamadas

[23] Termo utilizado de modo abrangente na literatura inglesa: *Quantum Chromodynamics – QCD*.

mésons ou *bárions*. Assim, o píon de Yukaua, conforme suas propriedades exclusivas, seria um tipo de méson, composto por um quark u e sua antiparticula $\bar{u}$. Prótons e neutros são classificados como bárions, oriundos da combinação dos quarks u e d com suas respectivas cargas fracionadas (Odenwald, 2024; Salam, 1993):

$$p^+ \rightarrow \begin{bmatrix} u^{+\frac{2}{3}e} \\ u^{+\frac{2}{3}e} \\ d^{-\frac{1}{3}e} \end{bmatrix}, \quad n^0 \rightarrow \begin{bmatrix} d^{-\frac{1}{3}e} \\ d^{-\frac{1}{3}e} \\ u^{+\frac{2}{3}e} \end{bmatrix}.$$

Ademais, constatou-se que os quarks possuem spin fracionado e que obedecem ao princípio da exclusão de Pauli, sendo, portanto, descritos pela teoria relativística de Dirac. Junto aos léptons de Fermi, que também obedecem à teoria de Dirac, este conjunto de partículas constituem um só grupo de partículas chamadas *férmions*. O passo final na consolidação da cromodinâmica quântica está na definição de uma outra propriedade intitulada **carga de cor**. Experimentos posteriores indicaram que haviam bárions constituídos de quarks ocupando o mesmo estado quântico que, segundo o princípio da exclusão, é algo proibido. Nesse sentido, a carga de cor permite a distinção entre os quarks, ainda que estes possuam os mesmos números quânticos e ocupem o mesmo estado. Assim, o conjunto dos seis quarks são distinguidos identicamente uns dos outros pelas cargas de cor: $Red - r$, $Green - g$ e $Blue - b$. Cada quark pode possuir as três cargas de cores, implicando na existência de 18 tipos diferentes de quarks (Odenwald, 2024; Salam, 1993).

Em razão da existência da carga de cor, o grupo de simetria cromodinâmica para a teoria de Yang-Mills é definido como $SU(3)$ e corresponde aos geradores:

$$SU(N) \xrightarrow{N=3} SU(3) \Rightarrow a = N^2 - 1 = 8;$$
$$\therefore A_\mu^8, a = 1, 2, \dots, 8;$$

na qual, 8 são o número de mediadores da força nuclear forte. Estas partículas, por garantirem a coesão do núcleo atômico, conseguindo superar as repulsões eletrostáticas entre as partículas no núcleo, são chamadas de *glúons*, um trocadilho com a palavra inglesa para cola. A dinâmica do campo de glúons é descrita pela densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{i=1}^{6} \bar{\psi}_i \left(i\gamma^\mu D_\mu - m_i \right) \psi_i \, ; \qquad \textbf{(5.23)}$$

onde $F_{\mu\nu}^a$ é o tensor do campo de calibre;

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

e

$$\psi_i = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_i = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_r & \bar{\psi}_g & \bar{\psi}_b \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

Um resultado final acerca da cromodinâmica quântica envolve o confinamento dos quarks. Os quarks são observados de forma quase livres somente em colisões de altas energias nos aceleradores de partículas (ocasionando a chuva de partículas), isto é, em cenários da altas energias. Nesse cenário, a intensidade da força nuclear forte decai, revelando sua ação em curtas distâncias. Esse fenômeno de confinamento em baixas energias é denominado de **liberdade assintótica**, uma característica das teorias de calibre não abelinas. No caso da cromodinâmica, a liberdade assintótica é uma consequência direta da componente $gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ e calculável pela função beta de primeira ordem;

$$\beta_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi}\left(-\frac{11N}{6} + \frac{n_f}{3}\right).$$

A descoberta da liberdade assintótica pelos físicos teóricos David Gross (1941–), Frank Wilczek (1951–) e, independentemente, por David Politzer (1949–) em 1973 pode ser considerada como um dos maiores triunfos teóricos das teorias de calibre, o que lhes rendeu o Nobel de física em 2004. Verificou-se, portanto, que as teorias de calibre se mostram como o ingrediente mais importante e, talvez, fundamental em qualquer teoria livre assintoticamente (Kaku, 1993).

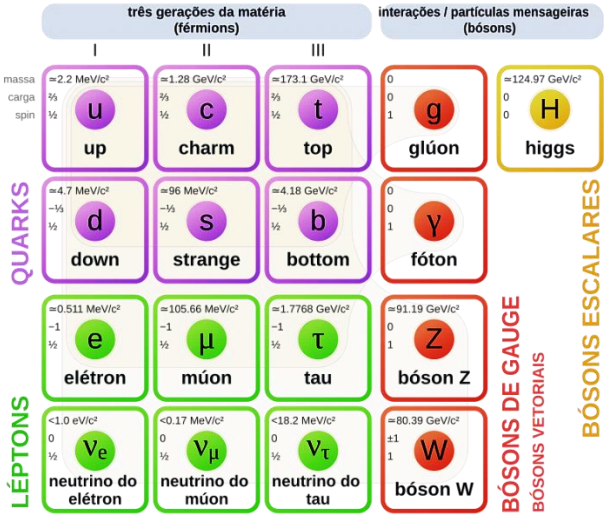
5.4 O modelo padrão

De acordo com Kaku (1993), o modelo padrão da física de partículas, ou simplesmente modelo padrão, é a teoria física resultante da combinação dos resultados atingidos com a teoria eletrofraca, a cromodinâmica quântica junto a ação do campo de Higgs;

$$\mathcal{L}_{SM} = [SU(2)_L \times U(1)_Y]_H \times SU(3)_{CQD}. \tag{5.25}$$

Como retratado pela figura 25, o modelo padrão descreve três das quatro interações fundamentais em termos das suas partículas mediadores e os constituintes fundamentais da matéria (receptoras das interações). Como pode ser observado, o modelo padrão é constituído primariamente por duas famílias de partículas: os **bósons de calibre**, responsáveis pela mediação das forças fundamentais e as três gerações de matéria, os férmions.

Figura 25 – Esquematização do Modelo Padrão da Física de Partículas.



Fonte: Adaptado de Odenwald, (2024, p. 153).

Por sua vez, as três gerações de matéria subdividem-se em dois grupos: os quarks e léptons. Quarks e léptons obedecem à estatística de Fermi-Dirac, ao princípio da exclusão de Pauli e são os responsáveis por constituir toda a matéria conhecida. Pelo seu feito na organização dos constituintes da matéria (modelo-quark), Gell-Mann recebeu o Nobel de física em 1969. Os bósons de calibre encontram-se divididos entre bósons vetoriais e o bóson escalar de Higgs. Os bósons não obedecem à exclusão de Pauli e seguem a estatística de Bose-Einsten. Os Bósons vetoriais Z^0, W^+ e W^-, previstos durante o processo teórico de unificação da força eletrofraca por Weinberg, Salam e Glashow (laureados com o Nobel em 1979) foram detectados em 1983, bem como as correntes neutras fracas, mediadas por Z^0. A dinâmica dos bósons vetoriais da interação fraca é descrita pela teoria de Proca de campos vetoriais massivos. O bóson de Higgs, responsável por atribuir massa as partículas através do mecanismo de Higgs, pode ser descrita de modo aproximado pela equação de campo escalar de Klein-Gordon. A partícula de Higgs foi teorizada principalmente por Peter Higgs (1929–2024). A partícula de Higgs foi detectada em 2012 no LHC (sigla inglesa para Grande Colisor de Hádrons), o que lhe rendeu o prêmio Nobel de física em 2013 (Peruzzo, 2012).

5.5 Lacunas

Apesar do enorme sucesso teórico e precisão em testes experimentais, a primeira grande lacuna que pode ser observada sem esforço no conteúdo do modelo padrão é a ausência da gravidade em termos da relatividade geral de Einstein. Na linguagem formal de uma teoria

quântica de campos, é esperado que a gravidade seja uma interação de campo mediada por um bóson de spin 2 (o gráviton). O gráviton nunca foi detectado, bem como as tentativas de unificação das demais forças com à gravitação de Einstein, cujo caráter é puramente geométrico, resultaram em divergências (infinitos) ainda não renormalizáveis. Ademais, uma unificação completa entre a cromodinâmica quântica e a força eletrofraca em uma só teoria de campo unificada (**força eletronuclear**) demanda de estruturas matemáticas de simetria do tipo $SU(5)$, $SO(10)$ ou $E6$, além das energias e temperaturas que remontam à origem do Universo $(\sim 10^{16}\ GeV)$ (era da grande unificação). Esses modelos teóricos preveem fenômenos ainda não observados, como o decaimento do próton, algo que possivelmente pode vir a ocorrer em uma escala de tempo da ordem de $\sim 10^{34}$ anos (Greene, 2001; Salam, 1993).

6 CONCLUSÃO

Por fim, retomando ao objetivo geral, avaliou-se e constata-se que, para fins didáticos e maior eficiência na aprendizagem dos assuntos que constituem a física moderna e contemporânea, a contextualização histórica o tratamento linear dos fatos são ferramentais pedagógicas essenciais. Portanto, o objetivo do presente trabalho encontra-se plenamente satisfeito, uma vez que, seguindo cronologicamente o desdobrar dos fatos, é possível chegar de modo objetivo e claro à atual situação na qual se encontra a ciência física e seus esforços na busca por uma explicação final.

Apesar de ainda haver importantes detalhes que, para os fins do presente texto, são demasiadamente complexos, esse trabalho centrou seu escopo nos principais acontecimentos que constituem os pilares fundamentais na construção de uma ontologia da natureza que, como pode ser observado, permanece em aberto. Apesar dos grandes esforços teóricos, pondera-se, também, acerca das atuais limitações energéticas e tecnológicas, o que impede experimentações mais precisas e eficazes.

REFERÊNCIAS

BASSALO, J. M. **Eletrodinâmica Quântica**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

BISCUOLA, G. J.; DOCA, R. H.; BÔAS, N. V. **Tópicos de física**: volume 3. São Paulo: Saraiva, 2012.

BLUM, E. K.; LOTOTSKY, S. V. **MATHEMATICS OF PHYSICS AND ENGINEERING**. Singapura: World Scientific, 2006.

CARROLL, S. M. **Sapacetime and Geometry**: An Introctution to General Relativity. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

CHENG, T.-P. **Einstein's Physics**: Atoms, Quanta, and Relativity; Derived, Explained, and Appraised. Oxford: Oxford University Press, 2013.

EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. **Annalen de Physik**, v. 17, p. 891-921, 30 jun. 1905.

FEYNMAN, R. P. **QED**: The Strange Theory of Light and Matter. Princeton: Princeton University Press, 1985.

GAZZINELLI, R. **Teoria da Relatividade Especial**. São Paulo: Blaucher, 2009.

GOMES, M. O. **Teoria Quântica dos Campos**. São Paulo: Edusp, 2024.

GREENE, B. **O Universo Elegante**: supercordas, dimensões ocultas e a busca por uma teoria definitiva. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.

GREINER, W. **QUANTUN MACHINICS**: An Introduction. New York: Springer, 1989.

GREINER, W. **Relativistic Quantum Machinics**: Wave Equations. Berlin: Springer, 2000.

GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. São Paulo: Pearson, 2011.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Elementary Particles**. Weinheim: Wiley-VCH, 2008.

HUNT, B. J. **Os seguidores de Maxwell**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2015.

JÚNIOR, O. P. **Conceitos de Física Quântica** (Vol. 1). São Paulo: Livraria da Física, 2019.

KAKU, M. **Quantum field theory**: a modem introduction. New York: Oxford University Press, 1993.

LANCASTER, T.; BLUNDELL, S. J. **Quantum Field Theory for the Gifted Amateur**. Oxford: Oxford University Press, 2014.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **QUANTUM MECHANICS**: NON-RELATIVISTIC THEORY. Oxford: Pergamon Press, 1965.

MORRIS, R. **Uma breve história do infinito**: dos paradoxos de Zenão ao mundo quântico. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

NETO, J. B. **Teoria de Campos e a Natureza**: parte quântica. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

NEUMANN, J. v. **Mathematical Foundations of Quantum Mechanics**. Princeton: Princeton University Press, 1955.

NUSSENZVEIG, M. H. **Curso de Física Básica 4**: ótica, relatividade, física quantica. São Paulo: Blucher, 2014.

ODENWALD, S. **A História da Física Quântica**: de Heisenberg a Schrödinger. Rio de Janeiro: Atlas Book, 2024.

PERUZZO, J. **Fronteiras da Física**: Tópicos de Física Moderna e Contemporânea (Vol. I). Irani: Clube de Autores, 2012.

PERUZZO, J. **Fronteiras da Física**: Tópicos de Física Moderna e Contemporânea (Vol. III). Irani: Clube de Autores, 2012.

POLKINGHORNE, J. C. **Teoria Quântica**. Porto Alegre: L&PM POCKET, 2022.

ROVELLI, C. **A realidade não é o que parece**: a estrutura elementar das coisas. Rio de Janeiro: Objetiva, 2017.

ROVELLI, C. **O abismo vertiginoso**: um mergulho nas ideias e nos efeitos da física quântica. Rio de Janeiro: Objetiva, 2021.

SALAM, A.; HEISEMBERG, W.; DIRAC, P. A. **A Unificação das Forças Fundamentais**: o grande desafio da física comtemporânea. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1993.

SCHWARTZ, M. D. **Quantum Field Theory and the Standard Model**. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

SMOLIN, L. **Três caminhos para a gravidade quântica**. Rio de Janeiro: Rocco, 2002.

SPIVAK, M. **Calculus on Manifolds**: A Modem Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

STACHEL, J. **O Ano Miraculoso de Eintein**: cinco artigos que mudaram a face da física. Rio de Janeiro: UFRJ, 2001.

TAVARES, M.; AROUCHA, S. **Mecânica Quântica Relativística**: Uma introdução ao campo de Klein-Gordon. Beau Bassin: Novas Edições Acadêmicas, 2020.

TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. **Física Moderna**. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

WEINBERG, S. **Lectures on Quantum Mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física IV**: ótica e física moderna. São Paulo: Pearson, 2016.