



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO DE ENGENHARIAS
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

LAERCIO CLEIDSON BEZERRA

**ANÁLISE DE DIMENSIONAMENTO EM LAJES MACIÇAS BIDIRECIONAIS
SOBRE APOIOS RÍGIDOS E FLEXÍVEIS**

MOSSORÓ - RN

2018

LAERCIO CLEIDSON BEZERRA

**ANÁLISE DE DIMENSIONAMENTO EM LAJES MACIÇAS BIDIRECIONAIS
SOBRE APOIOS RÍGIDOS E FLEXÍVEIS**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Centro de Engenharias para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador (a): Profa. Sc. Christiane Mylena Tavares de Menezes Gameleira – UFERSA.

MOSSORÓ – RN

2018

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

574a Bezerra, Laercio Cleidson.
ANÁLISE DE DIMENSIONAMENTO EM LAJES MACIÇAS
BIDIRECIONAIS SOBRE APOIOS RÍGIDOS E FLEXÍVEIS /
Laercio Cleidson Bezerra. - 2018.
76 f. : il.

Orientadora: Chistiane Mylena Tavares de
Menezes Gameleira.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Engenharia Civil,
2018.

1. Modelo simplificado. 2. Flecha. 3. Análise
estrutural. I. Tavares de Menezes Gameleira,
Chistiane Mylena , orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

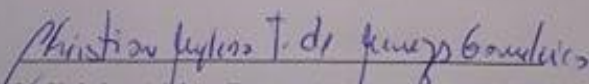
LAERCIO CLEIDSON BEZERRA

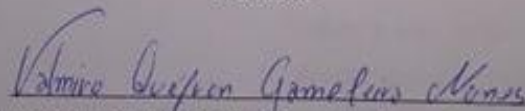
**ANÁLISE DE DIMENSIONAMENTO EM LAJES MACIÇAS BIDIRECIONAIS
SOBRE APOIOS RÍGIDOS E FLEXÍVEIS**

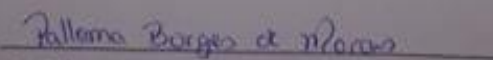
Monografia apresentada à Universidade
Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA,
Centro de Engenharias para a obtenção
do título de Bacharel em Engenharia
Civil.

APROVADA EM: 06 / 04 / 2018

BANCA EXAMINADORA


Profa. M.Sc Christiane Mylena Tavares de Menezes Gameleira (UFERSA)
Presidente


Prof. M.Sc Valmiro Quêfren Gameleira Nunes (UFERSA)
Primeiro Membro


Profa. Palloma Borges de Moraes (MEMBRO EXTERNO)
Segundo Membro

DEDICATÓRIA

A Elziene Marcelino dos Santos , minha mãe,
a base de todo o meu ser, pela sua garra,
batalha, carinho e responsabilidade, um
verdadeiro exemplo a ser seguido, tudo que
sou hoje eu devo a ela.

A Antônio José Bezerra , meu pai, que sempre
esteve ao meu lado a todo momento me dando
forças nos momentos de lutas e glórias.

Ao meu Deus e ao senhor Jesus Cristo, por me
conceder o dom da vida, a vontade e o espírito
de sempre querer alcançar os meus objetivos, e
além disso, por me dar oportunidade de
conviver com pessoas maravilhosas que é a
minha família.

Enfim, a toda minha família, que é o meu
alicerce, por contribuir na minha educação,
formação, pela força e pelos incentivos diários.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me proporcionar grandes conquistas e vitórias, no qual nunca deixei de insistir naquilo que acredito, em que pude me firmar e manter minha fé, crendo que só ele é único e digno de todo louvor e glória. Por me conceder tantas alegrias e realizações com uma família linda e maravilhosa. Por sempre estar ao meu lado nos momentos difíceis, fortalecendo a minha crenças e valores sem perder as esperanças na vida.

A minha mãe, Elziene Marcelino dos santos, por todo o amor e carinho que tem me dado todos esses anos, pelos momentos inesquecíveis ao meu lado, por sempre colocar seus filhos a frente de qualquer coisa, fazendo o impossível para o bem-estar dos mesmos. Por me ensinar o certo e o errado, tornando a base de toda a estruturação do meu ser, com sua responsabilidade, dignidade, carinho, amor e afeto.

A meu pai, Antônio José Bezerra, sempre me conduzindo a trilhar o caminho certo, nessa jornada bastante necessária, que é a carreira acadêmica.

Ao meu irmão, Lamonier Lamirte Bezerra, pelo seu significado na minha trajetória de vida, pela sua força e ajuda que me auxiliou a chegar até onde estou, como também pelo seu grande carinho.

A minha irmã, Laleska Lamoniele Bezerra, pelo seu significado na minha trajetória de vida, pela sua força e ajuda que me auxiliou a chegar até onde estou, como também pelo seu grande carinho.

A toda a minha família que sempre me guiou e me ensinou o significado do amor, carinho e esperança.

A todos os meus avós, tios, primos e amigos em especial a Maria Marcelino dos Santos e Maria do Socorro Justino são duas pessoas inquestionáveis e de uma bondade inigualável.

A minha querida orientadora, Msc. Christiane Mylena Tavares de Menezes Gameleira, por toda a paciência e esforço em me ajudar, dispondo sempre do seu tempo para me corrigir, contribuindo para o meu crescimento nesta universidade.

Ao campus da UFERSA Mossoró, por ter colocado grandes profissionais pelo meu caminho, fortalecendo mais o meu conhecimento.

“Cheguemo-nos aqui a Deus.”

(I Samuel 14:36)

RESUMO

Existem inúmeros modelos matemáticos para o estudo do comportamento à flexão das lajes. Eles são utilizados para analisar os esforços internos e deslocamentos, de acordo com as condições de contorno, sua forma e dos carregamentos impostos sobre as placas. Com a expansão do sistema computacional, surgiram softwares cada vez mais desenvolvidos como o Structural Analysis Program (SAP 2000) em que se baseia no Método dos Elementos Finitos (MEF), permitindo uma análise mais precisa e global da estrutura, permitindo simular as restrições em cada elemento aproximando-se ainda mais da realidade. O modelo simplificado utilizando as tabelas de Marcus e Bares trata-se de lajes isoladas, desconsiderando a flexibilidade das vigas que lhe servem de apoio. Para a realização da análise estrutural é preciso de um modelo, principalmente um que esteja o mais próximo da estrutura real, com este propósito, o trabalho faz um comparativo de um pavimento simples, obtendo seus esforços e deslocamentos de várias maneiras, pelo método simplificado ou manual observando a sua validação junto com o MEF proveniente do SAP 2000. De outra forma, em um pavimento mais arrojado, foram analisados os esforços internos e flechas, a partir do método manual, observando que a depender da forma do pavimento em estudo, a simplificação pode tornar o método inviável ao se comparar a estrutura delineada sobre MEF no SAP 2000.

Palavras-chave: Modelo simplificado; Flecha; Análise estrutural.

ABSTRACT

There are numerous mathematical models for the study of bending behavior of slabs. They are used to analyze internal stresses and displacements, according to the contour conditions, their shape and the loads imposed on the plates. With the expansion of the computational system, more and more developed software such as the Structural Analysis Program (SAP 2000), based on the Finite Element Method (MEF), has been developed, allowing a more precise and global analysis of the structure, such as simulating the constraints in each element coming closer to reality. The simplified model using the Marcus and Bars tables are isolated slabs, disregarding the flexibility of the beams that support it. In order to perform the structural analysis, a model is needed, especially one that is closest to the real structure. For this purpose, the work compares a simple pavement, obtaining its efforts and displacements in several ways, using the simplified method or manual, observing its validation together with the MEF from the SAP 2000. Otherwise, in a bolder pavement, the internal stresses and arrows were analyzed, from the manual method, noting that depending on the shape of the pavement under study, the simplification may render the method impractical when comparing the structure outlined for MEF in SAP 2000.

Keywords: Simplified model; Arrow; Structural analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação do comprimento efetivo da laje	23
Figura 2: Representação de engaste ou apoio na laje	25
Figura 3: Espessura da laje	25
Figura 4: Condições de vínculo da placa.....	34
Figura 5: Representação do comprimento efetivo l_x	35
Figura 6: Momentos positivos e negativos da placa.....	35
Figura 7: Condições de casos estabelecidas por Bares.....	36
Figura 8: Diagrama de compatibilização entre lajes adjacentes.....	39
Figura 9: Ilustração de pavimento simplificado	44
Figura 10: Compatibilização de momentos máximos positivos e negativos em x e y pelo método manual	47
Figura 11: Representação de momentos máximos positivos e negativos bidirecional pelo Método de Marcus e Bares (sentido da esquerda para a direita ou debaixo para cima).....	48
Figura 12: Momento positivo e negativo na direção de x considerando apoios rígidos	49
Figura 13: Momento positivo e negativo na direção de y considerando apoio rígido	49
Figura 14: Momento positivo e negativo na direção de x considerando apoio flexível.....	50
Figura 15: Momento positivo e negativo na direção de y considerando apoio flexível.....	50
Figura 16: Carga de combinação quase permanente	51
Figura 17: Flecha máxima imediata em laje sobre apoio rígido.....	51
Figura 18: Flecha imediata em laje sobre apoio flexível.....	52
Figura 19: Projeto arquitetônico do pavimento	53
Figura 20: Planta com representação de elementos estruturais no pavimento	54
Figura 21: Ilustração de momentos, engaste e apoio nas lajes pelo método de Marcus e Bares	58
Figura 22: 1º Seção longitudinal de compatibilização de momentos máximos positivos e negativos por Marcus e Bares da esquerda para a direita.....	59
Figura 23: 2º Seção longitudinal de compatibilização de momento máximo positivo e negativo por Marcus e Bares da esquerda para a direita	60
Figura 24: 1º, 2º e 3º Seção transversal de compatibilização de momento máximo positivo e negativo por Marcus e Bares da esquerda para a direita	61

Figura 25: 4°, 5° e 6° seção transversal seção de compatibilização de momento máximo positivo e negativo por Marcus e Bares da esquerda para a direita.....	61
Figura 26: 7° Seção transversal de compatibilização de momento máximo positivo e negativo por Marcus e Bares	62
Figura 27: Redução da rigidez a torção das vigas	63
Figura 28: Ilustração de momento máximo na transversal em lajes pelo MEF em apoios rígidos	63
Figura 29: Ilustração de momento máximo na longitudinal em lajes pelo MEF sobre apoio rígido.....	64
Figura 30: Ilustração de momento máximo na transversal em lajes pelo MEF com apoios flexíveis	64
Figura 31: Ilustração de momento máximo em lajes na longitudinal pelo MEF sobre apoios flexíveis	65
Figura 32: Flecha imediata em lajes pelo MEF em apoios rígidos	65
Figura 33: Flecha imediata em lajes pelo MEF em apoios flexíveis.....	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Carga variável em estruturas de edificações.....	22
Tabela 2: Classe de agressividade ambiental	24
Tabela 3: Cobrimento de elementos estruturais	24
Tabela 4: Considerações de bordas apoiadas ou engastadas	25
Tabela 5: Coeficiente em função do tempo	33
Tabela 6: Limite de deslocamento em elementos de concreto armado	33
Tabela 7: Tabela para combinação de serviços usuais	37
Tabela 8: Tabela de coeficiente de redução.....	38
Tabela 9: Pré-dimensionamento de laje simplificada.....	43
Tabela 10: Laje armada em duas direções.....	43
Tabela 11: Carga atuante em laje simplificada.....	45
Tabela 12: Momentos máximos positivos e negativos em x e y pelo Método de Marcus	45
Tabela 13: Momentos máximos positivos e negativos em x e y pelo Método de Bares	46
Tabela 14: Pré-dimensionamento de lajes	53
Tabela 15: Cargas atuantes nas lajes	55
Tabela 16: Relação entre os vãos de laje pelo método de Marcus	55
Tabela 17: Momentos positivos e negativos atuante nas duas direções das lajes pelo método de Marcus	56
Tabela 18: Relação entre os vãos de laje pelo método de Bares	56
Tabela 19: Momentos atuantes positivo e negativo nas duas direções de lajes pelo método de Bares	57
Tabela 20: Comparação entre os momentos de laje pelo método manual e computacional na direção de x.....	67
Tabela 21: Comparação entre os momentos de lajes pelo método manual e computacional na direção de y.....	67
Tabela 22: Comparação de momentos em lajes no MEF apoios flexíveis e rígidos com método manual na direção de x	67
Tabela 23: Comparação de momentos em lajes no MEF apoios flexíveis e rígidos com método manual na direção de y	67
Tabela 24: Flecha imediata em lajes pelo método manual e computacional.....	68
Tabela 25: Flecha diferida no tempo pelo método manual e computacional	69

Tabela 26: Comparação dos momentos em lajes na transversal pelo MEF e o método manual	69
Tabela 27: Comparação dos momentos em lajes na longitudinal pelo MEF e o método manual	70
Tabela 28: Comparação dos momentos na transversal em lajes pelo MEF sobre apoios flexíveis e rígidos e o método manual	70
Tabela 29: Comparação dos momentos em lajes na longitudinal pelo MEF sobre apoios flexíveis e rígidos e o método manual	71
Tabela 30: Flecha imediata das lajes do 2º pavimento pelo MEF e método manual	71
Tabela 31: Flecha diferida no tempo das lajes do 2º pavimento pelo MEF e método manual	72

LISTA DE EQUAÇÕES

Equação 1: Carga de alvenaria na laje.....	21
Equação 2: Relação entre os vãos da laje.....	22
Equação 3: Comprimento efetivo da laje.....	23
Equação 4: Altura útil da laje.....	24
Equação 5: Espessura da laje.....	25
Equação 6: Altura de vigas em tramos intermediário.....	26
Equação 7: Altura de vigas em tramos externos.....	26
Equação 8: Altura de vigas em balanço.....	26
Equação 9: Resistência média do concreto a tração.....	28
Equação 10: Resistência do concreto característico a tração inferior.....	28
Equação 11: Resistência do concreto característico a tração superior.....	28
Equação 12: Módulo de deformação tangente Inicial.....	28
Equação 13: Módulo de elasticidade secante.....	28
Equação 14: Equação geral da placa.....	31
Equação 15: Rigidez da placa a flexão.....	31
Equação 16: Momento fletor em relação a x.....	31
Equação 17: Momento fletor em relação a y.....	31
Equação 18: Esforço cortante em relação a x.....	31
Equação 19: Esforço cortante em relação a y.....	31
Equação 20: Coeficiente da flecha diferida no tempo.....	32
Equação 21: Coeficiente para taxa de armadura comprimida.....	32
Equação 22: Coeficiente em função do tempo.....	33
Equação 23: Momento positivo na direção de x e y pelo método de Marcus.....	35
Equação 24: Momento negativo na direção de x e y pelo método de Marcus.....	35
Equação 25: Momento positivo na direção de x e y pelo método de Bares.....	37
Equação 26: Momento negativo na direção de x e y pelo método de Bares.....	37
Equação 27: Flecha imediata da laje.....	37
Equação 28: Momento de fissuração da peça.....	38
Equação 29: Compatibilização de momento.....	40

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas.

AUTOCAD – Computer Aided Design

CA – Concreto Armado

CQC - Combinação Quase Permanente

CSI – Computers & Structures.Inc

GPa – Gigapascal

MEF – Método dos Elementos Finitos

Mpa – Megapascal

SAP – Structural Analysis Program

UFERSA – Universidade Federal Rural do Semi-Árido

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 OBJETIVOS	18
1.1.1 Objetivos gerais.....	18
1.1.2 Objetivos específicos.....	18
1.2 METODOLOGIA	19
2 REVISÃO DA LITERATURA	20
2.1 LAJES	20
2.1.1 Tipos de lajes.....	20
2.1.2 Ações nas lajes	21
2.1.3 Classificação quanto a armadura	22
2.1.4 Espessuras, cobertura mínimo e pré-dimensionamento	23
2.2 CONCRETO ARMADO	26
2.2.1 Concreto.....	26
2.2.1.1 Massa específica.....	26
2.2.1.2 Propriedade mecânica	27
2.2.2 Aço.....	29
2.3 PROCEDIMENTO PARA CALCULO DE LAJES.....	29
2.3.1 Método de cálculo elástico	30
2.3.1.1 Método manual.....	33
2.3.1.2 Método dos Elementos Finitos	40
3 MATERIAIS E MÉTODOS	42
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	43
4.1 PRÉ – DIMENSIONAMENTO DE LAJE MACIÇA EM PAVIMENTO SIMPLIFICADO	43
4.1.1 Carga atuante nas lajes.....	44
4.1.1.1 Método manual.....	45
4.1.1.2 Modelo computacional	48
4.2 PRÉ – DIMENSIONAMENTO DE LAJE MACIÇA EM PAVIMENTO ARROJADO	52
4.2.1 Carga atuante nas lajes	55
4.2.1.1 Método manual.....	55

4.2.1.2 Modelo computacional	62
4.3 COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS	66
4.3.1 Pavimento simplificado	66
4.3.1.1 Flechas.....	67
4.3.2 Pavimento arrojado	69
4.3.2.1 Flechas.....	71
5 CONCLUSÕES.....	73
REFERÊNCIAS	74

1 INTRODUÇÃO

Não é de hoje que estruturas são feitas para suportar cargas, os egípcios usavam pedras que se encontravam em pedreiras ao longo do rio Nilo para construir seus monumentos (templos e pirâmides). Os vãos das vigas nessas estruturas precisavam ser curtos para evitar falhas por flexão. Estes templos e pirâmides tinham capacidade limitada para suportar cargas verticais ou horizontais, pois as construções deveriam ser relativamente baixas. Para dar estabilidade nesses elementos as colunas deveriam ser grossas (LEET; UANG; GILBERT, 2010).

Atualmente, as lajes são classificadas em vários tipos. Dentre elas pode ser destacada a laje maciça que, por sua vez, podem ser classificadas quanto a direção de suas armaduras. Quanto a essa distribuição existem dois casos, a laje armada em uma direção e laje armada em duas direções (PINHEIRO, 2007). Para as lajes armadas em duas direções existem dois processos de cálculos na obtenção dos esforços, são eles o elástico e o plástico (CARNEIRO, 2008).

O pavimento é uma estrutura única, contínua, formada por lajes e vigas apoiadas por pilares em pontos estrategicamente estudados. O cálculo dessa estrutura única requer o emprego de métodos numéricos refinados, como o Método dos Elementos Finitos, e/ou o uso de computadores com grande velocidade e capacidade de armazenamento. Entretanto, antes de utilizar um software sofisticado para a realização de projetos estruturais, é imprescindível que o projetista entenda o funcionamento da estrutura, o que se consegue com a adoção de modelo simples (ARAÚJO, 2010).

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivos gerais

O estudo tem o objetivo de atender aos critérios de segurança, estabilidade e economia, Para tanto, serão feitas análises de métodos de modelos para o dimensionamento de lajes maciças por meio de tabelas que considera seus apoios rígidos, como também o Método dos Elementos Finitos apoiados tanto por elementos rígidos como flexíveis.

1.1.2 Objetivos específicos

- Cálculo de momentos fletores máximos positivos e negativos na direção de x e y pelo método manual;
- Deslocamento máximo por meio de tabelas de acordo com os critérios estabelecidos por Bares;
- Obtenção de momentos fletores pelo Método dos Elementos Finitos;
- Deslocamentos por meio do Método dos Elementos Finitos;
- Comparação do método manual e o modelo computacional considerando as lajes apoiada por contorno rígido e flexível;

1.2 METODOLOGIA

O estudo foi composto por análise bibliográfica do dimensionamento de lajes maciças de concreto armado, pelo processo de Marcus e método de Bares que teve como auxílio os softwares *Microsoft excel* e o *Computer Aided Design (AUTOCAD)* em conjunto. Uma forma atual de obter soluções precisas de dimensionamento é pelo método computacional que tem como base o Método dos Elementos Finitos provenientes do software *Structural Analysis Program (SAP)*, nele foi feito estudo sobre principalmente a flexibilidade dos seus apoios.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 LAJES

As lajes são elementos planos, comumente utilizados em posição horizontal, onde a sua altura apresenta dimensão muito menor em relação à largura e ao comprimento (CARNEIRO, 2008). Essas placas têm como função principal receber os esforços provenientes de cada pavimento, decorrente do uso da construção, e prosseguir até aos seus contornos onde estão os apoios, dirigindo-se até aos pilares e estabilizando nas fundações ao transmiti-los ao solo. (PINHEIRO; MUZARDO; SANTOS, 2003).

Determinados pavimentos de um edifício podem ser executados por diferentes tipos de lajes, como as de lajes maciças, nervuradas, cogumelo, além de diversos tipos de lajes pré-moldadas. A definição de qual será utilizada depende de quantas e quais considerações serão estabelecidas, sejam elas econômicas e em relação à segurança, como também a sua compatibilidade do projeto arquitetônico analisado (ARAÚJO, 2010).

2.1.1 Tipos de lajes

Nas obras estruturais realizadas cotidianamente, as lajes representam aproximadamente 50 % do consumo de concreto. Os tipos de lajes, como as maciças, são de seção homogênea, executadas sobre fôrmas, que as moldam, e escoramentos, que as sustentam até que adquiram sua própria resistência (CARNEIRO, 2008).

As lajes nervuradas apresentam nervuras nas fibras tracionadas, onde ficam concentradas as armações, entre as quais podem ser colocados materiais inertes (isopor, tijolo, etc.) com função de enchimento permanente, o que simplifica a forma plana e deixa a superfície inferior lisa para receber o acabamento no teto, podendo ser pré-moldadas ou moldadas *in loco* (CARNEIRO, 2008). As lajes nervuradas são vistas como uma ótima alternativa para os casos nos quais se deseja reduzir cargas na estrutura, economizar concreto e vencer maiores vãos variando-se de 7 a 15 m. Nelas se encontram um melhor aproveitamento do aço e do concreto, pois se assemelha ao princípio de viga T (PORTO; FERNANDES, 2015).

As do tipo cogumelo apoiam-se diretamente nos pilares. Esse tipo de laje apresenta diversas vantagens, como a facilidade na execução com fôrmas e armação, redução de pé direito, facilita a instalação de vários tipos de tubulações, torna mais flexível o embutimento

de alvenarias ou divisórias. Mesmo com uma grande quantidade de vantagens, a ausência de vigas torna o sistema mais comprometido, colocando em risco a estabilidade horizontal (CARNEIRO, 2008).

As lajes com fôrma de aço incorporado, também denominadas de lajes mistas de aço e concreto são constituídas por uma fôrma de aço nervurada conformada a frio sobre a qual o concreto é inserido, elas apresentam diversas vantagens, destacando-se a facilidade de instalação, sem a necessidade de molde e escoras, proporcionando rápido processo construtivo. Durante a sua fase inicial a fôrma de aço deve suportar isoladamente as ações provenientes da estrutura, antes que o concreto chegue a atingir 75% de sua resistência a compressão (FAKURY; SILVA; CALDAS, 2016).

2.1.2 Ações nas lajes

Os carregamentos a serem considerados em lajes variam bastante, essas ações vão desde as pessoas e equipamentos removíveis, chamadas de cargas acidentais, até os esforços permanentes como o peso próprio da estrutura, do revestimento e peso das paredes. Para que seja possível determina-las devem-se considerar os critérios estabelecidos nas normas da ABNT NBR 6118, NBR 8681 e NBR 6120 (BASTOS, 2015). De acordo com Porto e Fernandes (2015), para as lajes armadas em duas direções é necessário conhecer o tipo de alvenaria que irá compor a estrutura, como também o seu peso específico, a espessura, comprimento, altura e a área da laje no qual se encontra a parede, obtendo sua carga da seguinte forma:

$$\rho_{alv} = \frac{e H L \gamma_{alv}}{A_{laje}} \quad \text{Eq. (1)}$$

Em que:

e = espessura da alvenaria acabada (m);

H = altura da alvenaria (m);

L = comprimento da parede (m);

A_{laje} = área da laje (m^2);

γ_{alv} = peso específico do elemento de vedação (KN/m^3);

ρ_{alv} = carga de alvenaria (KN/m^2);

Segundo a ABNT NBR 6120:1980 – Cargas para cálculo de estrutura das edificações, Item 2.2.1.2, as cargas verticais que se consideram atuando nos pisos das edificações, além das que se aplicam em caráter particular envolve aos carregamentos provenientes de pessoas, móveis, utensílios e veículos e são distribuídas de maneira uniforme por toda a área, com valores mínimos destacados na tabela 1.

Tabela 1: Carga variável em estruturas de edificações

4 Bibliotecas	Sala com estantes de livros a ser determinada em cada caso ou 2,5 kN/m ² por metro de altura observado, porém o valor mínimo de	6
5 Casas de máquinas	(incluindo o peso das máquinas) a ser determinada em cada caso, porém com o valor mínimo de	7,5
6 Cinemas	Platéia com assentos fixos Estúdio e platéia com assentos móveis Banheiro	3 4 2
7 Clubes	Sala de refeições e de assembléia com assentos fixos Sala de assembléia com assentos móveis Salão de danças e salão de esportes Sala de bilhar e banheiro	3 4 5 2
8 Corredores	Com acesso ao público Sem acesso ao público	3 2
9 Cozinhas não residenciais	A ser determinada em cada caso, porém com o mínimo de	3
10 Depósitos	A ser determinada em cada caso e na falta de valores experimentais conforme o indicado em 2.2.1.3	-
11 Edifícios residenciais	Dormitórios, sala, copa, cozinha e banheiro Despensa, área de serviço e lavanderia	1,5 2
12 Escadas	Com acesso ao público (ver 2.2.1.7) Sem acesso ao público	3 2,5
13 Escolas	Anfiteatro com assentos fixos Corredor e sala de aula Outras salas	3 2

Fonte: (NBR: 6120, 1980).

2.1.3 Classificação quanto à armadura

Para Pinheiro (2007), as lajes maciças de concreto armado podem ser classificadas em relação à forma geométrica, se é de engaste, livre ou apoiada e quanto à direção de sua armadura. Uma classificação muito importante das lajes maciças é aquela referente à direção ou direções da armadura principal. Existem dois casos: laje armada em uma direção ou laje armada em duas direções. As lajes armadas em uma direção têm a razão do seu lado l_y , o comprimento efetivo de y , e o seu lado menor ou com maior número de engastes l_x , o comprimento efetivo de x , maior que 2 enquanto as que estão em duas direções essa razão é igual ou menor que 2, de acordo com a equação 2 presente:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad \text{Eq. (2)}$$

$\lambda > 2$ Laje armada em uma direção
 $\lambda \leq 2$ Laje armada em duas direções

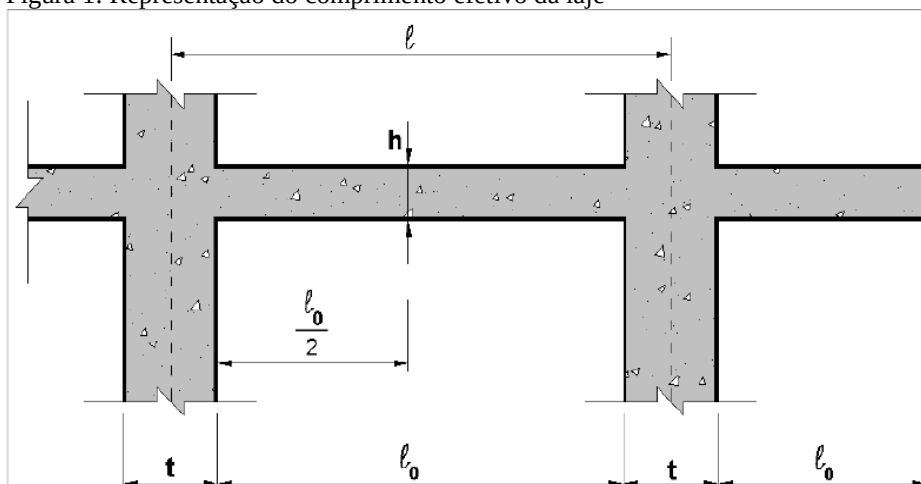
Conforme a ABNT NBR 6118:2014 os vãos efetivos das lajes armadas em duas direções devem ser calculados pela seguinte expressão:

$$l = l_0 + a_1 + a_2 \quad \text{Eq. (3)}$$

Com:

$$a_1 \leq \left\{ t/2 \text{ e } 0,3h \right. \quad a_2 \leq \left\{ t/2 \text{ e } 0,3h \right.$$

Figura 1: Representação do comprimento efetivo da laje



Fonte: (BASTOS, 2015).

Para efeitos de simplificação, segundo Bastos (2015), é usual considerar os vãos teóricos ou efetivos até os eixos dos apoios, como mostra a figura 1

2.1.4 Espessuras, cobrimento mínimo e pré-dimensionamento

As espessuras e cobrimento mínimo devem estar de acordo com a norma ABNT NBR 6118:2014.

De acordo com o item 13.2.4.1 da ABNT NBR 6118:2014 as Lajes maciças devem ter os seguintes valores de espessuras mínimas:

- 7 cm para cobertura não em balanço;
- 8 cm para lajes de piso não em balanço;

- 10 cm para lajes em balanço;

São especificados também os valores mínimos de cobrimento para armaduras das lajes, de acordo com a agressividade do meio em que se encontram, obtidas pela tabela 2 Classe de agressividade ambiental ABNT NBR 6118:2014.

Tabela 2: Classe de agressividade ambiental

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana ^{a, b}	Pequeno
III	Forte	Marinha ^a	Grande
		Industrial ^{a, b}	
IV	Muito forte	Industrial ^{a, c}	Elevado
		Respingos de maré	

Fonte: (ABNT NBR 6118, 2014).

Uma vez definida a classe de agressividade e o tipo de estrutura a ser executada, pela mesma norma NBR mencionada anteriormente, os cobrimentos mínimos obtidos pela tabela 3:

Tabela 3: Cobrimento de elementos estruturais

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	I	II	III	IV ^c
		Cobrimento nominal mm			
Concreto armado	Laje ^b	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo ^d	30		40	50
Concreto protendido ^a	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

Fonte: (ABNT NBR 6118, 2014).

Conforme Bastos (2015) é necessário estimar inicialmente a altura útil das lajes maciças de concreto armado. Existem vários e diferentes processos de cálculo para o pré-dimensionamento desses elementos, sendo um deles dado pela equação 4:

$$d = \frac{(2,5 - 0,1n)l^*}{100} \quad \text{Eq. (4)}$$

Onde:

d = Altura útil da laje;

n = numero de bordas engastadas da laje;

l^* = dimensão da laje com o menor valor entre:

$$l^* \leq (0,7l_x \text{ e } l_y)$$

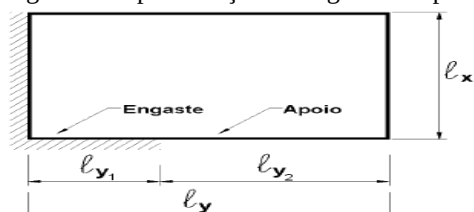
Quanto ao número de engastes, quando duas lajes adjacentes possuem espessuras muito diferentes é mais adequado considerar a laje de maior espessura apenas apoiada na de menor espessura e a menor engastada na de maior espessura (BASTOS, 2015). Em casos enfatizados por Pinheiro (2007), pode ocorrer, uma borda do elemento com uma parte engastada e a outra apoiada, nessa categoria será necessário consultar a tabela 4 e a figura 2:

Tabela 4: Considerações de bordas apoiadas ou engastadas

$l_{y1} \leq \frac{l_y}{3}$	Considera-se a borda totalmente apoiada
$\frac{l_y}{3} < l_{y1} < \frac{2 \cdot l_y}{3}$	Calculam-se os esforços para as duas situações – borda totalmente apoiada e borda totalmente engastada – e adotam-se os maiores valores no dimensionamento
$l_{y1} \geq \frac{2 \cdot l_y}{3}$	Considera-se a borda totalmente engastada

Fonte: (PINHEIRO, 2007).

Figura 2: Representação de engaste ou apoio na laje

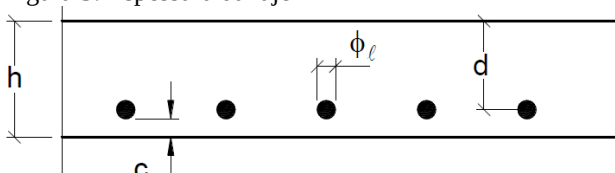


Fonte: (PINHEIRO, 2007).

Sua espessura total é dada pela equação 5 e a Figura 3 , quando não se conhece o diâmetro da barra longitudinal da laje (ϕ_l), ele deve ser estimado, variando entre 5 mm a 10 mm (BASTOS 2015).

$$h = C + \frac{\phi_l}{2} + d \quad \text{Eq. (5)}$$

Figura 3: Espessura da laje



Fonte: (BASTOS, 2015).

Conforme Pinheiro (2007), as vigas ou apoio das lajes, não podem possuir largura menor do que 12 cm e que uma estimativa grosseira para a altura das lajes é dada pelas equações a seguir:

$$h_{est} = \frac{l_0}{12} \quad \text{Tramos intermediários} \quad (\text{Eq. 6})$$

$$h_{est} = \frac{l_0}{10} \quad \text{Tramos externos ou vigas bi apoiadas} \quad (\text{Eq. 7})$$

$$h_{est} = \frac{l_0}{5} \quad \text{Balanços} \quad (\text{Eq. 8})$$

2.2 CONCRETO ARMADO

Para suprir as deficiências do concreto, associa-se a ele as armaduras, usualmente constituídas por barras de aço. Os dois materiais devem resistir solidariamente aos esforços solicitantes, materiais esses que servem de matéria prima para a execução das lajes maciças. Essa solidariedade é garantida pela aderência (PINHEIRO, 2007). E quando a peça for solicitada não pode haver deslizamento ou o seu escorregamento. Portanto, essa solidariedade é uma condição básica para que o conjunto se comporte como uma peça monolítica em que é indispensável à aderência eficiente entre seus os componentes (CLÍMACO, 2013).

2.2.1 Concreto

Concreto é um material de construção proveniente da mistura, em traço, de maneira adequada, de: aglomerantes, agregados e água. É o constituinte estrutural mais utilizado no mundo. Seu consumo por ano é da ordem de uma tonelada por habitante. A composição resultante de seus constituintes resulta em um material de construção cujas características diferem substancialmente daquelas apresentadas pelos elementos que deram a sua origem (PINHEIRO, 2007).

Como material estrutural, as principais características do concreto simples são a sua boa resistência à compressão, facilidade no transporte e moldagem, meio predominantemente alcalino protetor das armaduras em relação ao meio externo e durabilidade elevada, análogo ao da pedra natural (CLÍMACO, 2013).

2.2.1.1 Massa específica

Segundo o item 8.2.2 da NBR 6118: 2014, serão considerados os concretos de massa específica normal (ρ_c), compreendida entre 2000 kg/m³ e 2800 kg/m³. Para efeito de cálculo, pode-se adotar para o concreto simples o valor 2400 kg/m³ e para o concreto armado 2500 kg/m³.

2.2.1.2 Propriedade mecânica.

As principais propriedades mecânicas do concreto são: resistência à compressão, resistência à tração e módulo de elasticidade. Essas propriedades são determinadas a partir de ensaios, executados em condições específicas. Geralmente, os ensaios são realizados para controle da qualidade e atendimento às especificações (PINHEIRO, 2007).

- Resistência à compressão

No Brasil, a resistência à compressão do concreto é determinada por meio de ensaios padronizados de corpo de prova de cilindros, com 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura. No caso de concreto de alta resistência, com ruptura acima de 50 MPa, a capacidade das prensas tem levado a utilizar corpos de prova com 10 cm de diâmetro e 20 cm de altura (FUSCO, 2013). A norma ABNT NBR 6118: 2014, item 8.2.1, denomina que as classes de resistência a compressão do concreto, variam entre os grupos I e II.

A resistência à compressão simples, comumente chamada de f_c , é a característica mais importante. Na curva de Gauss encontram-se dois valores de fundamental importância: resistência média do concreto à compressão, f_{cm} , e resistência característica do concreto à compressão, f_{ck} . Pode-se definir f_{ck} como sendo o valor da resistência que tem 5% de probabilidade de não ser alcançado, em ensaios de corpos-de-prova de um determinado lote de concreto. A ABNT NBR 8953 define as classes de resistência em função de f_{ck} . Concreto classe C30, por exemplo, corresponde a um concreto com $f_{ck} = 30\text{Mpa}$ (PINHEIRO, 2007).

- Resistência à tração

Na resistência do concreto a tração tem-se, a resistência do concreto à tração direta, f_{ct} , a resistência média do concreto à tração, f_{ctm} , valor obtido da média aritmética dos resultados, e a resistência característica do concreto à tração, f_{ctk} como o valor da resistência que tem 5% de probabilidade de não ser alcançado pelos resultados de um lote de concreto,

em ensaios de tração do concreto, encontram-se os de tração direta, compressão diametral e tração na flexão (PINHEIRO, 2007). Na falta de ensaios, de acordo com a norma ABNT NBR 6118:2014 as resistências à tração direta média podem ser obtidas a partir da resistência à compressão f_{ck} e as resistências $f_{ctk, inf}$, resistência do concreto característico a tração inferior e $f_{ctk, sup}$, resistência do concreto característico a tração superior, em função de f_{ctm} , como apresentado nas equações 9, 10 e 11:

$$f_{ctm} = 0,3 * f_{ck}^{2/3} \quad (\text{Eq. 9})$$

$$f_{ctk, inf} = 0,7 * f_{ctm} \quad (\text{Eq. 10})$$

$$f_{ctk, sup} = 1,3 * f_{ctm} \quad (\text{Eq. 11})$$

- Módulo de elasticidade

Outra importante propriedade em estruturas de concreto consiste na relação entre os esforços de tensões e as deformações. Sabe-se que em resistência dos materiais a relação entre tensão e deformação, para determinados intervalos, pode ser considerada linear, ou seja, $\sigma = E * \epsilon$, sendo σ a tensão, ϵ a deformação específica e E o módulo de elasticidade ou módulo de deformação longitudinal (PINHEIRO, 2007).

Para o concreto a expressão do módulo de elasticidade é aplicada somente à parte retilínea da curva tensão-deformação ou, quando não existir uma parte retilínea, a expressão é aplicada à tangente da curva na origem. Neste caso, tem-se o Módulo de Deformação Tangente Inicial, E_{ci} . Na avaliação do comportamento de um elemento estrutural ou de uma seção transversal, pode ser adotado um módulo de elasticidade único, à tração e à compressão, igual ao módulo de elasticidade secante (E_{cs}). Quando não forem feitos ensaios e não existirem dados mais precisos sobre o concreto, para a idade de referência de 28 dias, conforme a ABNT NBR 6118:2014 e item 8.2.8, pode-se estimar o valor do módulo de elasticidade inicial e o módulo de elasticidade secante usando as equações 12 e 13:

$$E_{ci} = \alpha E 5600 * f_{ck}^{1/2} \quad (\text{Eq. 12})$$

$$E_{cs} = 0,88 * E_{ci} \quad (\text{Eq. 13})$$

Com:

$\alpha E = 1$ para granito e gnaisse;

E_{ci} = em MPa para f_{ck} de 20 MPa a 50 MPa;

E_{cs} = em MPa;

2.2.2 Aço

Aço é uma liga metálica composta essencialmente de ferro e de pequenas quantidades de carbono podendo chegar até 2% da composição. Na construção civil, esse tipo de liga possuem teores de carbono da ordem de 0,18% a 0,25%. Entre outras características, o aço possui elevada resistência e ductilidade, muito importantes para a Engenharia Civil. Este material, adequadamente dimensionado e detalhado, resiste muito bem à maioria dos tipos de solicitação. Mesmo em peças comprimidas, além de fornecer ductilidade, o aço aumenta a resistência à compressão (PINHEIRO, 2007). Segundo valores obtidos pela ABNT NBR 6118:2014 e itens 8.3.3 e 8.3.5 sua massa específica e módulo de elasticidade, são 7850 kg/m³ e 210 GPa, respectivamente.

As barras e os fios, de acordo com as suas propriedades mecânicas são classificados em diversas categorias. As categorias de concreto armado, são: CA-25, CA-40, CA-50 e CA-60 (fios), elas são normalizadas pela ABNT NBR 7480 (Especificação Brasileira – Barras e fios Destinados a Armaduras para Concreto Armado). O seu número indica o valor de resistência característico f_{yk} do limite de escoamento a tração, dado em kN/cm² (FUSCO, 2013).

2.3 PROCEDIMENTO PARA CALCULO DE LAJES MACIÇAS

A primeira teoria consistente sobre o dimensionamento de elementos de concreto armado surgiu com uma publicação de Edward Mörsch em 1902, de origem alemã, ele possui status de engenheiro e professor da Universidade de Stuttgart na Alemanha. Seus estudos resultaram de ensaios experimentais que fizeram surgir às primeiras normas para o cálculo e construção em concreto armado (PINHEIRO, 2007).

Em lajes bidirecionais, suas solicitações podem ser calculadas como placas em regime elástico, o qual se mostra adequado para lajes submetidas a cargas de serviço (verificação dos estados limite de serviço), ou regime rígido plástico, relacionada à laje em comportamento de ruptura (verificação dos estados limite ultimo). Usualmente, para dimensionamento dos esforços solicitantes das lajes, estas são consideradas como placas em regime elástico

(PORTO; FERNANDES, 2015). O cálculo em regime elástico, pode ser realizado a partir da equação diferencial fundamental da teoria das placas, denominada equação de Lagrange, admitindo material homogêneo, isótropo, elástico e linear. A equação relaciona o deslocamento elástico, da placa com carga uniforme, normal à superfície (CARNEIRO, 2008).

Quando se aplica um esforço no concreto, aparecem deformações na direção e transversal aplicada à força. A relação entre a deformação transversal e a deformação longitudinal é chamada coeficiente de Poisson ν (BASTOS, 2006). A ABNT NBR 6118:2014, diz que esse coeficiente deve ser tomado como igual a 0,2, em caso de estruturas de concreto armado, para tensões de compressão menores que $0,5f_c$ e tensões de tração menores que f_{ct} .

Os esforços e deformações causados por solicitações nas estruturas devem obedecer a dois estados limites, são os de serviço e o último. Eles estão relacionados à sua utilização e a ruína da estrutura (ABNT NBR 6118, 2014). Em relação a sua utilização, uma estrutura ultrapassa o Estado Limite de Serviço quando não atende aos requisitos de estabilidade, conforto e durabilidade exigidos pela Norma durante o dimensionamento, enquanto no Estado Limite Ultimo trata do colapso ou qualquer forma de ruína total ou parcial da estrutura. Uma estrutura é dita segura, quando as solicitações são menores do que as resistências para qualquer Estado Limite considerado. A margem de segurança no dimensionamento é obtida através da introdução de coeficientes de ponderação aos esforços solicitantes de projeto (CARVALHO E FIGUEIREDO FILHO, 2013).

2.3.1 Método de Cálculo Elástico

A correta determinação dos esforços solicitantes nas lajes é uma das tarefas mais complexa dentro da análise estrutural dos edifícios. Isto se deve ao fato de que os esforços no pavimento de um prédio dependem da interação entre as vigas e os pilares que a compõem. O pavimento é uma estrutura contínua, formada por lajes e vigas apoiadas por pilares. O cálculo dessa estrutura de forma conjunta requer o emprego de métodos numéricos refinados, como o Método dos Elementos Finitos, e o uso de computadores de grande velocidade e capacidade de armazenamento. Mas, é imprescindível que o projetista entenda o seu funcionamento, o que se consegue com a adoção de modelo simples e manual. Esses modelos simplificados têm sido utilizados desde o princípio em projetos de estruturas e tem sido comprovado na prática, através do projeto de estruturas que foram construídos e se mantiveram seguros e em bom funcionamento durante sua vida útil (ARAÚJO, 2010).

Alguns resultados do método elástico podem ser feitos pela teoria das placas delgadas, Kirchhorff e também por Timoshenko & Woinosky (1959) e Bares (1972). Para fins práticos de simplificação de cálculos considera-se o concreto armado como um material homogêneo, apesar de ser constituído de concreto e aço, atribuindo a placa como um material elástico, homogêneo, isótropo, sobre efeito de pequenos deslocamentos e linear fisicamente (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2007).

Segundo Carvalho & Figueiredo Filho (2004), em modelos simplificados, outras considerações são feitas para facilitar o emprego das condições de contorno na resolução do problema de determinação de esforços. Por exemplo, não há transmissão de momentos de torção para as vigas, as ações das placas nas vigas são uniformemente distribuídas e não há transmissão de carga para os pilares, as vigas de contorno são indeslocáveis na vertical e a rotação das placas é de apoio simples ou engastada. Tendo isso em vista, e considerando-se um elemento de placa com dimensões dx e dy , e analisando esse elemento quanto a deformações e ao equilíbrio, obtêm-se a equação de quarta ordem, Eq. 14, uma equação geral das placas, ou de Lagrange, de onde se provem as equações de momentos em determinadas coordenadas e se encontram na seguinte forma em função de w :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad (\text{Eq. 14})$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{Eq. 15})$$

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{Eq. 16})$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{Eq. 17})$$

Conforme Araújo (2010) as equações do esforço cortante em x e y podem ser escritos em função de w , de acordo com a função abaixo:

$$v_x = -D \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{Eq. 18})$$

$$v_y = -D \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{Eq. 19})$$

Em que:

W = deslocamento vertical da placa

P = carregamento da placa

x, y = coordenada de um ponto genérica da placa

D = é a rigidez da placa a flexão

E = módulo de deformação longitudinal do concreto

h = espessura da placa

ν = coeficiente de poisson

m_x = momento fletor em relação a x

m_y = momento fletor em relação a y

v_x = esforço cortante em relação a x

v_y = esforço cortante em relação a y

No regime elástico, a solução da equação geral das placas ou equação diferencial é tarefa muito complexa, o que motivou o surgimento de diversas tabelas, de diferentes origens e autores, com coeficientes que proporcionam o cálculo dos momentos fletores e das flechas para casos específicos de apoios e carregamentos. Há diversas tabelas de diferentes autores como: Czerny, Bares, Szilard, e Marcus. De modo geral abrangem os casos de lajes retangulares, triangulares, circulares, apoiadas em pilares, com bordas livres, sob carregamento uniforme e triangular (BASTOS, 2015). Segundo Pinheiro, Muzardo e Santos (2003), na maioria dos casos não é possível determinar de forma exata uma solução para a equação geral pelo método simplificado, recorrendo-se a processos numéricos para a sua resolução, como por exemplo, o Método dos Elementos Finitos. Ainda para o cálculo de deslocamentos máximos é necessário obter a dimensão da flecha imediata e diferida de lajes, de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, item 17.3.2.1.2, análogo ao de viga, a flecha diferida decorre de cargas de longa duração em função da fluência do concreto e pode ser calculada de maneira aproximada pela multiplicação da flecha imediata pelo fator αf dado pela seguinte expressão:

$$\alpha f = \frac{\Delta \varepsilon}{1+50\rho'} \quad (\text{Eq. 20})$$

Onde:

$$\rho' = \frac{A_s'}{bd} \quad (\text{Eq. 21})$$

‘As’, área de armadura comprimida;

b, largura da seção transversal;

d, altura útil;

ε , é um coeficiente em função do tempo que pode ser obtido diretamente da tabela ou calculado pela expressão:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) = 0,68(0,996^t)t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses} \quad (\text{Eq. 22})$$

$$\varepsilon(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses}$$

Tabela 5: Coeficiente em função do tempo

Tempo (t) meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	≥ 70
Coeficiente $\xi(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

Fonte: (ABNT NBR 6118, 2014).

Os valores limites máximos de deslocamento que visam proporcionar melhor segurança e adequado comportamento e limite de vibrações na estrutura em serviço encontra-se na tabela 6.

Tabela 6: Limite de deslocamento em elementos de concreto armado

Tipo de efeito	Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento-limite
Aceitabilidade sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	$\ell/250$
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas acidentais	$\ell/350$
Efeitos estruturais em serviço	Superfícies que devem drenar água	Coberturas e varandas	Total	$\ell/250^{(1)}$
	Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e pistas de boliche	Total	$\ell/350 + \text{contra-flecha}^{(2)}$
			Ocorrido após a construção do piso	$\ell/600$
	Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Ocorrido após nivelamento do equipamento	De acordo com recomendação do fabricante do equipamento

Fonte: (ABNT NBR 6118, 2014).

2.3.1.1 Método Manual

- Processo de Marcus e por meio de Séries

Através de métodos elásticos, a determinação da distribuição dos momentos em uma laje baseia-se na solução da equação de diferencial que rege o seu comportamento. Essas soluções limitam-se a casos de condições de contorno bem simples e que levem a soluções

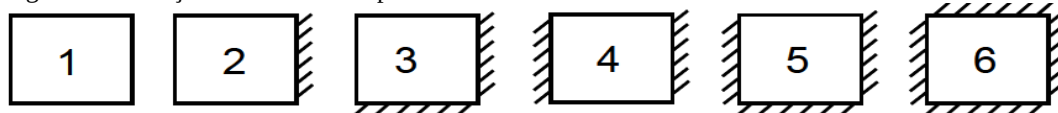
precisas. Para a solução de um carregamento uniformemente distribuído já é necessário fazer uma série numérica. Vários autores voltados para o cálculo estrutural, incluíram em suas bibliografias, tabelas para o cálculo de lajes isoladas com várias condições de apoio e carregamento (BANKI, 2013).

Utilizado inicialmente por Marcus (Timoshenko & Woinowsky, 1959), o processo de grelha equivalente substitui a laje por uma grelha equivalente ou uma malha de vigas, com o cálculo de seus esforços considerando as bordas indeslocáveis verticalmente (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2007).

De acordo com Carneiro (2008), O chamado Processo de Marcus é um dos mais empregados na determinação dos momentos fletores em lajes retangulares. O cálculo dos seus esforços é realizada baseando-se na teoria das grelhas ou quinhões de carga, corrigidos por coeficientes obtidos da solução da equação de quarta ordem, a equação de Lagrange. Essa teoria consiste em dividir a laje em faixas de largura unitária, paralelas aos bordos e ortogonais entre si, onde a carga total da laje, p , é dividida em duas parcelas, p_x e p_y , obtidas em função da relação entre os vãos e da vinculação da laje e chamadas de quinhões de carga, sendo $p_x + p_y = p$. As faixas, admitidas como vigas independentes submetidas aos respectivos quinhões de carga, produzem esforços mais elevados por não considerar a ligação com as outras faixas, daí a necessidade de correção por meio de coeficientes resultantes da equação de Lagrange. O cálculo dos momentos fletores em lajes retangulares, apoiadas em todo seu contorno, pelo processo de Marcus pode ser realizado por meio de tabelas conforme o passo a passo e ilustrações a seguir:

- a)** Observa-se as condições de vínculo na placa, e escolhe o tipo de laje a ser calculada, há 6 tipos entre elas, com bordas entre engastes e apoiadas:

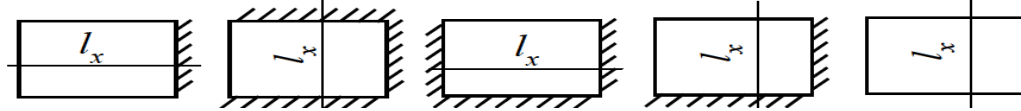
Figura 4: Condições de vínculo da placa



Fonte: (CARNEIRO, 2008).

- b)** Calcula-se $\lambda = \frac{l_y}{l_x}$, onde l_x é o vão com maior número de engastes, quando os engastes tiverem a mesma quantidade, l_x será o menor vão, como mostrado a seguir:

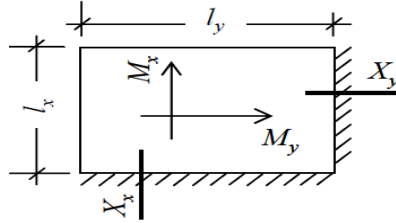
Figura 5: Representação do comprimento efetivo l_x



Fonte: (CARNEIRO, 2008).

c) Com o valor de λ definido, pela tabela de Marcus, obtém-se os coeficientes m e n para o cálculo de momento positivo e negativo:

Figura 6: Momentos positivos e negativos da placa



Fonte: (CARNEIRO, 2008).

Momentos positivos

$$M_x = \frac{p l_x^2}{m_x}$$

(Eq. 23)

$$M_y = \frac{p l_y^2}{m_y}$$

Momentos negativos

$$X_x = -\frac{p l_x^2}{n_x}$$

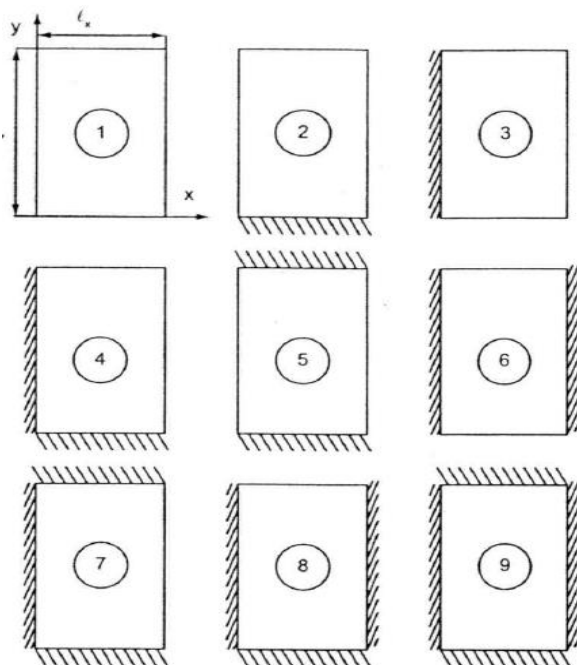
$$X_y = -\frac{p l_y^2}{n_y}$$

(Eq. 24)

O método de Bares, tem como princípio a solução da equação de lagrange, por meio de técnicas numéricas com diferentes fundamentos e graus de precisão baseada em integração por séries trigonométricas (CLÍMACO, 2013). Bastante adequando para confecção de tabelas, o processo de cálculo de placa por série possibilita determinar momentos fletores máximos e flechas máximas que provém de uma dada geometria e condições de vinculação da placa, nesse sentido cada laje deve ser discretizada individualmente de acordo com a sua vinculação, apoio ou engaste, de acordo com a figura 7, serão 9 casos apresentados e desenvolvidas por Bares (1972) e adaptados para o coeficiente de Poisson igual a 0,2, para esta solução o l_y

sempre será o maior comprimento efetivo da laje (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2007).

Figura 7: Condições de casos estabelecidas por Bares



Fonte: (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2007).

De acordo com Carvalho; Figueiredo Filho (2007), As equações dos momentos máximos positivos e negativos e o deslocamento máximo podem ser obtidos, a seguir:

$$\begin{aligned} M_x &= \mu_x \frac{p l x^2}{100} \\ M_y &= \mu_y \frac{p l x^2}{100} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 25})$$

$$\begin{aligned} X_x &= \mu'_x \frac{p l x^2}{100} \\ X_y &= \mu'_y \frac{p l x^2}{100} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 26})$$

$$a = \alpha \frac{p l x^4}{100 E h^3} \quad (\text{Eq. 27})$$

Para o cálculo da flecha imediata necessita-se da consulta das tabelas 7 e 8.

Tabela 7: Tabela para combinação de serviços usuais

Combinações de serviço (ELS)	Descrição	Cálculo das solicitações
Combinações quase permanentes de serviço (CQP)	Nas combinações quase permanentes de serviço, todas as ações variáveis são consideradas com seus valores quase permanentes $\psi_2 F_{qk}$	$F_{d,ser} = \Sigma F_{gi,k} + \Sigma \psi_2 F_{qj,k}$
Combinações frequentes de serviço (CF)	Nas combinações frequentes de serviço, a ação variável principal F_{q1} é tomada com seu valor frequente $\psi_1 F_{q1k}$ e todas as demais ações variáveis são tomadas com seus valores quase permanentes $\psi_2 F_{qk}$	$F_{d,ser} = \Sigma F_{gi,k} + \psi_1 F_{q1k} + \Sigma \psi_2 F_{qj,k}$
Combinações raras de serviço (CR)	Nas combinações raras de serviço, a ação variável principal F_{q1} é tomada com seu valor característico F_{q1k} e todas as demais ações são tomadas com seus valores frequentes $\psi_1 F_{qk}$	$F_{d,ser} = \Sigma F_{gi,k} + F_{q1k} + \Sigma \psi_1 F_{qj,k}$
onde $F_{d,ser}$ é o valor de cálculo das ações para combinações de serviço; F_{q1k} é o valor característico das ações variáveis principais diretas; ψ_1 é o fator de redução de combinação frequente para ELS; ψ_2 é o fator de redução de combinação quase permanente para ELS.		

Fonte: (ABNT NBR 6118, 2014).

Tabela 8: Tabela de coeficiente de redução

Ações		γ_{f2}		
		ψ_0	ψ_1^a	ψ_2
Cargas acidentais de edifícios	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas ^b	0,5	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas ^c	0,7	0,6	0,4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
Vento	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0

Fonte: (ABNT NBR 6118, 2014).

Em que:

m_x e m_y os momentos máximos em relação a x e y ;

X_x e X_y os momentos máximos negativos em x e y ;

a , o deslocamento vertical elástico

μ_x , μ_y , μ'_x e μ'_y , tabelados de acordo com a vinculação da laje;

α , coeficiente tabelado;

$p = F_{d,ser}$, carregamento em serviço quase permanente distribuído uniforme;

l_x , menor vão da laje;

E , módulo de deformabilidade do concreto;

h , altura ou espessura da laje;

Conforme Bastos (2015), para a determinação do deslocamento vertical, a flecha, é necessário ainda conhecer o estágio de cálculo da seção crítica considerada. Em estruturas de concreto armado, seus elementos trabalham parcialmente, entre o estágio I e II, não fissurado e fissurado, quem irá delimitar esse critério é a seguinte fórmula:

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{Y_t} \quad (\text{Eq. 28})$$

Sendo:

α , 1,5 para seções retangulares;

Em que:

α é o fator que relaciona a resistência a tração na flexão com a resistência a tração direta;

y_t é a distância do centro de gravidade até a fibra mais tracionada;

I_c é o momento de inércia da seção bruta do concreto;

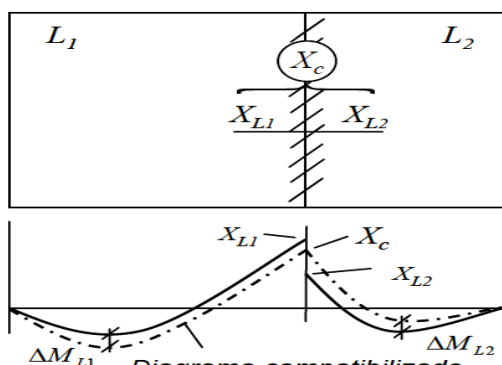
f_{ct} é a resistência a tração direta do concreto, para a determinação do momento de fissuração deve ser utilizado o f_{ct} , m no estado limite de deformação excessivo;

- Compatibilização de momentos

De acordo com Carneiro (2008), o cálculo dos momentos fletores através do método manual é realizado como lajes isoladas. No trabalho conjunto, as lajes admitidas contínuas e adjacentes possuem, normalmente, sobre um mesmo apoio, momentos de engastamento diferentes decorrente ao cálculo isolado. Dessa forma, entre lajes adjacentes, o momento negativo deve ter valor único, o que requer a compatibilização dos momentos das lajes engastadas. O momento compatibilizado pode ser obtido por:

$$X_c \geq \begin{cases} 0,8 \cdot (\text{do maior entre } X_{L1} \text{ e } X_{L2}) \\ \frac{X_{L1} + X_{L2}}{2} \end{cases}$$

Figura 8: Diagrama de compatibilização entre lajes adjacentes



Fonte: (CARNEIRO, 2008).

Conforme Carneiro (2008), como consequência da compatibilização, deve-se corrigir os momentos positivos, aumentando quando o momento negativo isolado de engastamento da

laje for maior que o momento compatibilizado e inalterado quando ocorrer de forma contrária, de acordo com a equação a seguir:

$$\Delta ML1 = \frac{XL1 - Xc}{2} \quad (\text{Eq. 29})$$

2.3.1.2 Método dos Elementos Finitos

Com a popularização do acesso ao computador e o grande desenvolvimento que o MEF, Método dos Elementos Finitos, teve na década de 60, passou-se a ser prática corrente a análise de estruturas de geometria diversa, constituídas por múltiplos materiais e sujeitas a variados tipos de carregamento. Outros métodos deixaram de ser utilizados, com esse avanço tão promissor. Hoje em dia, tem como principal ênfase fornecer soluções teóricas de problemas simples para validar métodos aproximados (AZEVEDO, 2003).

O Método dos Elementos Finitos consiste em resolver um sistema estrutural através da sua divisão em um número finito de elementos com formas e propriedades geométricas já estabelecidas (SOUZA, 2003). Este modelo trata-se de um método numérico em que as equações da matemática de difícil execução são aproximadas sobre regiões mais simples, como os quadriláteros, tetraedros e triângulos, que posteriormente se reúnem, para que o equilíbrio através de pontos nodais que interligam os domínios, sejam satisfeitos (BUENO, 2013).

Os elementos compostos por esse problema, geralmente são sistemas estruturais reticulados, formado por barras conectados em suas extremidades com elementos nodais, ou um sistema contínuo, em que a estrutura é um corpo não dividido em sua extensão, sendo subdividido artificialmente por uma malha conectada entre si com elementos nodais. Seus resultados melhoram bastante, quando maiores são as suas subdivisões. Os elementos de placas possuem comumente, de três a quatro nós, dependendo do formato das subdivisões das malhas. Em cada nó existem seis graus de liberdade, três de translação U1, U2 e U3 e três de rotações R1 e R2 e R3 (GUESSI, 2017).

O modo como o MEF é formulado e aplicado depende, em parte, de algumas características relacionadas a cada tipo em questão, como a classificação quanto a sua geometria, o material do qual será constituído e ações devidamente aplicadas. E ainda precisa-se considerar outros aspectos que antecedente a análise estrutural, como as ações de origem

dinâmica ou estática e elementos em análise linear ou não linear. Elas são em geral dinâmicas, onde consideram-se as forças de inércia associadas às acelerações a que cada um dos seus componentes fica sujeito. Mas, em muitos casos as ações são aplicadas de um modo bem lento, desprezando-se as forças de inércia, a partir dessa teoria designa-se análise como estática. Enquanto em relação à geometria da estrutura, admite-se que não há sua modificação, na distribuição dos esforços e das tensões, todo o estudo é feito com base na geometria indeformada, pois as ações provocadas são muito pequenas quando comparadas com as dimensões dos componentes da estrutura, considerando a sua análise de forma linear (AZEVEDO, 2003).

3 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento do trabalho, foram feitas pesquisas no campo teórico de dimensionamento estrutural de lajes de concreto armado. Estas pesquisas serviram como base para a definição dos conceitos indispensáveis para a análise das lajes maciças de pavimentos de concreto armado. A teoria clássica de Kirchhoff para placas delgadas permite o estudo sobre lajes, aplicando algumas restrições aos modelos de análise estrutural com o objetivo de determinar os esforços internos e os deslocamentos por cada um deles e compará-los.

Nos modelos estudados, as condições de uso para esse comportamento consideram o concreto armado um material elástico linear, resultando em esforços no estado limite de serviço. Essas condições foram estabelecidas pelo Métodos dos Elementos Finitos e as tabelas de Marcus e Bares. A obtenção dos seus resultados de forma manual teve como auxílio o software Microsoft excel e a ferramenta AUTO CAD. No desenvolvimento do MEF, foi utilizado Programa SAP 2000 criada pela empresa da California *Computers & Structures, Inc* (CSI).

A pesquisa prática é composta pela determinação e análise dos esforços internos e deslocamentos de lajes maciças de concreto armado em diversas situações, variando o tipo de pavimento, sua forma e as condições de apoio, mostrando então a viabilidade de cada método, enfatizando assim, que o MEF possui parâmetros que simulam o comportamento real da estrutura através dos dados de entrada.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1. PRÉ – DIMENSIONAMENTO DE LAJES MACIÇAS EM PAVIMENTO SIMPLIFICADO

Neste exemplo, considera-se o piso de um pavimento residencial localizada na cidade de Mossoró, em perímetro urbano cuja classe de agressividade II encontra-se o cobrimento de 2,5 cm e admitindo-se inicialmente o diâmetro das armaduras como 1 cm, composto por lajes maciças de concreto armado. O pavimento é formado por quatro lajes retangulares 4 x 4,5 m cada uma, apoiadas sobre seis vigas, com a altura dimensionadas de acordo com o tramo correspondente. Por critérios de simplificação optou-se pelo comprimento efetivo das lajes até o eixo dos seus apoios.

No pré-dimensionamento das placas, a sua solução envolve os comprimentos efetivos, o número de engastes, o cobrimento e a bitola de aço a ser utilizada, conforme a tabela 9.

Tabela 9: Pré-dimensionamento de laje simplificada

PRÉ-DIMENSIONAMENTO DE LAJES				
lajes	L1	L2	L3	L4
lx (cm)	400	400	400	400
ly (cm)	450	450	450	450
$l^* = 0,7 \cdot ly$	315	315	315	315
Menor valor de $0,7 \cdot ly$ e lx	315	315	315	315
Engastes (n)	2	2	2	2
Cobrimento (cm)	2,5	2,5	2,5	2,5
Bitola/2 (cm)	0,5	0,5	0,5	0,5
$d = \frac{(2,5 - 0,1n) \cdot l}{100}$ (cm)	7,2	7,2	7,2	7,2
Espessura h (cm)	10,2	10,2	10,2	10,2
Espessura Adotada h (cm)	11,0	11,0	11,0	11,0

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

De acordo com a tabela 10, as Lajes são consideradas como armadas em duas direções, pois a relação entre seu o maior e menor comprimento efetivo (λ) é menor ou igual a 2.

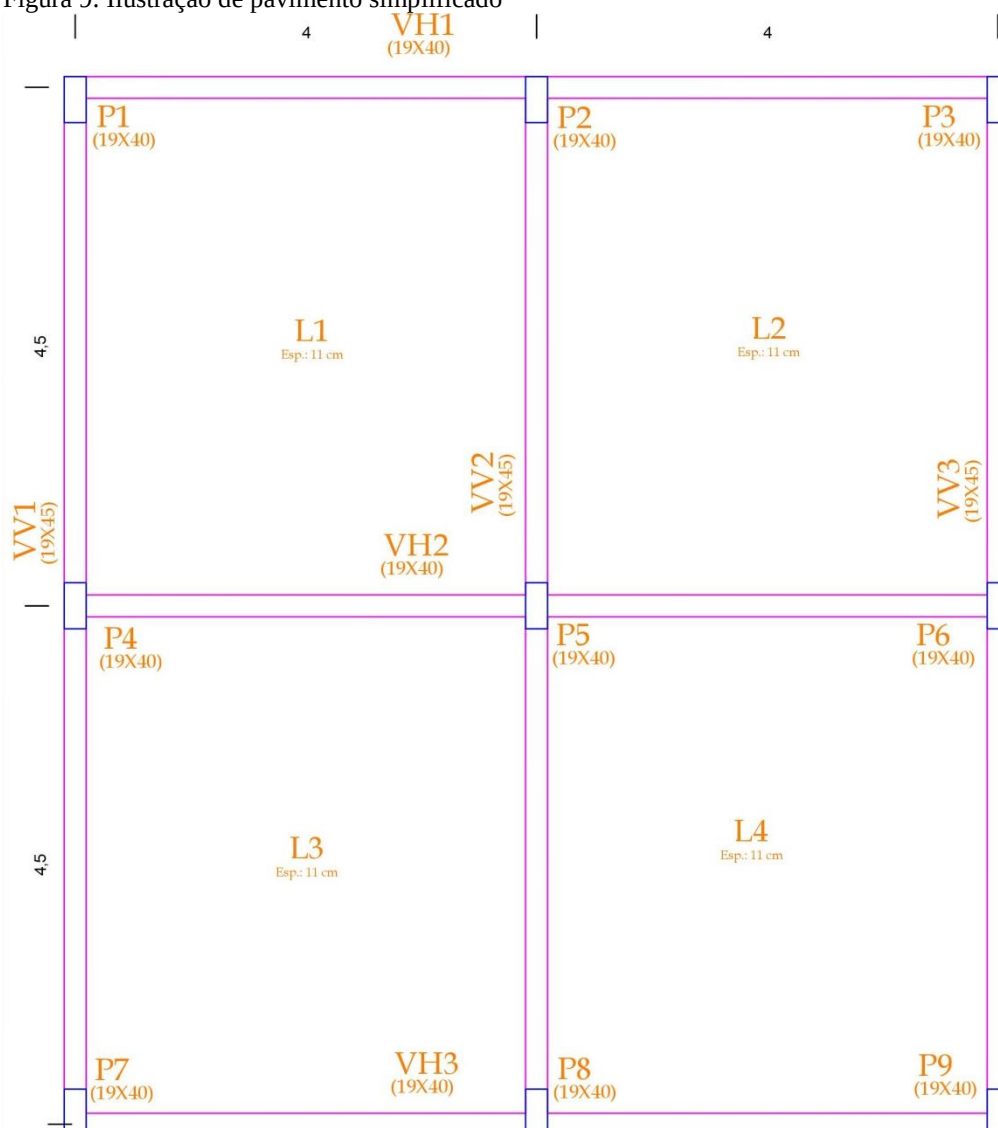
Tabela 10: Laje armada em duas direções

Lajes	Dimensões			
	L1	L2	L3	L4
LX (m)	4	4	4	4
LY (m)	4,5	4,5	4,5	4,5
Razão LY/LX (λ)	1,13	1,13	1,13	1,13
Direção das Armaduras	2	2	2	2

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

A figura 9, ilustra o pré-dimensionamento dos elementos lajes e vigas, do pavimento simplificado a ser estudado.

Figura 9: Ilustração de pavimento simplificado



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

4.1.1. Carga atuante nas lajes

As cargas atuantes nas lajes são o peso próprio de 2,75 kN/m², com γ do concreto de 25 kN/m³ e espessuras de 11 cm, as de revestimento do piso e teto de 1,38 kN/m² e carga variável de 2 kN/m², totalizando uma carga de 6,13 kN/m² em cada laje, estão sendo mostrados na tabela 11. Ainda outras características do concreto devem ser consideradas como a resistência característica f_{ck} de 30 MPa, coeficiente de Poisson ν de 0,2 e o Modulo de Elasticidade Secante do Concreto:

$$E_{cs} = 0,88 * 5600 * f_{ck}^{\frac{1}{2}} = 26992 \text{ MPa}.$$

Tabela 11: Carga atuante em laje simplificada

Laje	L1	L2	L3	L4
Área da Laje (m ²)	18,0	18,0	18,0	18,0
Peso Esp. Concreto γ (Kn/m ³)	25	25	25	25
Espessura (m)	0,11	0,11	0,11	0,11
Pé-direito (m)	2,8	2,8	2,8	2,8
Comp. Linear de Alvenaria (m)				
Peso P. Laje (Kn/m ²)	2,75	2,75	2,75	2,75
Peso R. Piso (Kn/m ²)	1	1	1	1
Peso R. Teto (Kn/m ²)	0,38	0,38	0,38	0,38
Peso Bloco cerâmico (Kn/m ²)				
$P. Alv = \frac{Pé.d.*C.L.*P.b.}{Área\ de\ laje}$ (Kn/m ²)				
Cômodo nas Lajes				
Carga Permanente (kn/m ²)	4,13	4,13	4,13	4,13
Carga Variável (kn/m ²)	2	2	2	2
Carga Total (kn/m ²)	6,13	6,13	6,13	6,13

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

4.1.1.1 Método Manual

Pelo método de Marcus, os quatro elementos referem-se ao caso 3 da tabela de Marcus para lajes armadas em cruz de acordo com λ , obtendo os momentos máximos positivos e negativos em x e y, cujo coeficientes são o $m_x = 29,7$; $m_y = 37,92$; $n_x = 12,91$ e $n_y = 16,48$.

Tabela 12: Momentos máximos positivos e negativos em x e y pelo Método de Marcus

MOMENTO FLETOR (Kn.m)				
Lajes	L1	L2	L3	L4
LY/LX (λ)	1,130	1,130	1,130	1,130
LX	4,000	4,000	4,000	4,000
Cargas q (kn/m ²)	6,130	6,130	6,130	6,130
Tipo	caso 3	caso 3	caso 3	caso 3
m_x	29,700	29,700	29,700	29,700
m_y	37,920	37,920	37,920	37,920
n_x	12,910	12,910	12,910	12,910
n_y	16,480	16,480	16,480	16,480
$MX = \frac{q * LX^2}{m_x}$ (kn.m)	3,302	3,302	3,302	3,302
$MY = \frac{q * LX^2}{m_y}$ (kn.m)	2,586	2,586	2,586	2,586
$X_x = \frac{q * LX^2}{n_x}$ (kn.m)	-7,597	-7,597	-7,597	-7,597
$X_y = \frac{q * LX^2}{n_y}$ (kn.m)	-5,951	-5,951	-5,951	-5,951

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

De acordo com λ , pelo método de Bares, os elementos referem-se ao caso 4 da tabela de Bares para lajes armadas em duas direções, obtendo os momentos máximos positivos e negativos em x e y, cujo coeficientes são o $\mu_x = 3,53$; $\mu_y = 2,8$; $\mu'_x = 8,28$ e $\mu'_y = 7,5$.

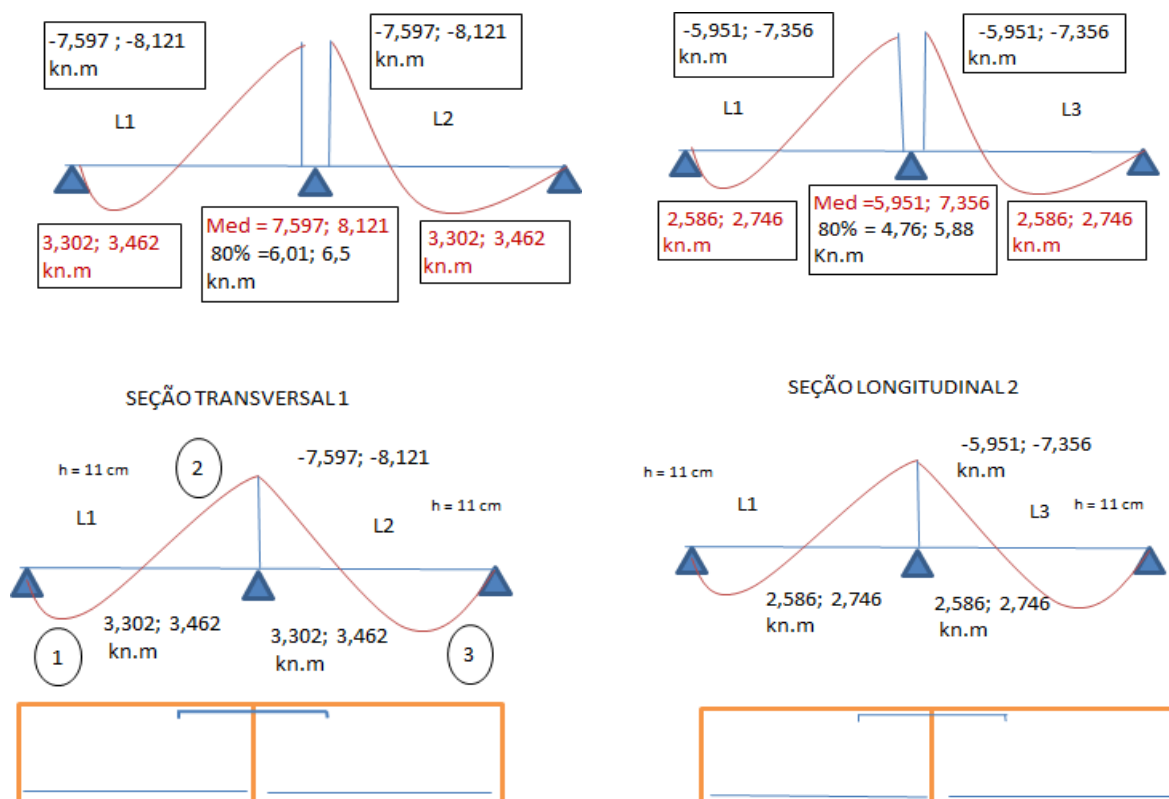
Tabela 13: Momentos máximos positivos e negativos em x e y pelo Método de Bares

Lajes LY/LX (λ) LX Cargas q (kn/m ²) Tipo μ_x μ_y μ'_x μ'_y	MOMENTO FLETOR (Kn.m)			
	L1	L2	L3	L4
LY/LX (λ)	1,130	1,130	1,130	1,130
LX	4,000	4,000	4,000	4,000
Cargas q (kn/m ²)	6,130	6,130	6,130	6,130
Tipo	caso 4	caso 4	caso 4	caso 4
μ_x	3,530	3,530	3,530	3,530
μ_y	2,800	2,800	2,800	2,800
μ'_x	8,280	8,280	8,280	8,280
μ'_y	7,500	7,500	7,500	7,500
$MX = m_x \frac{q \cdot LX^2}{100}$ (kn.m)	3,462	3,462	3,462	3,462
$MY = m_y \frac{q \cdot LX^2}{100}$ (kn.m)	2,746	2,746	2,746	2,746
$X_x = m'_x \frac{q \cdot LX^2}{100}$ (kn.m)	8,121	8,121	8,121	8,121
$X_y = m'_y \frac{q \cdot LX^2}{100}$ (kn.m)	7,356	7,356	7,356	7,356

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

A figura 10 mostra a compatibilização de momentos da esquerda para a direita pelo método de Marcus e pelo método de Bares, em que o momento máximo negativo compatibilizado deve ser o maior valor entre a média dos momentos ou 80% do maior valor. Em relação aos momentos positivos, ele permanece quando o valor negativo compatibilizado for superior ao da laje analisada e aumentado, no caso inverso.

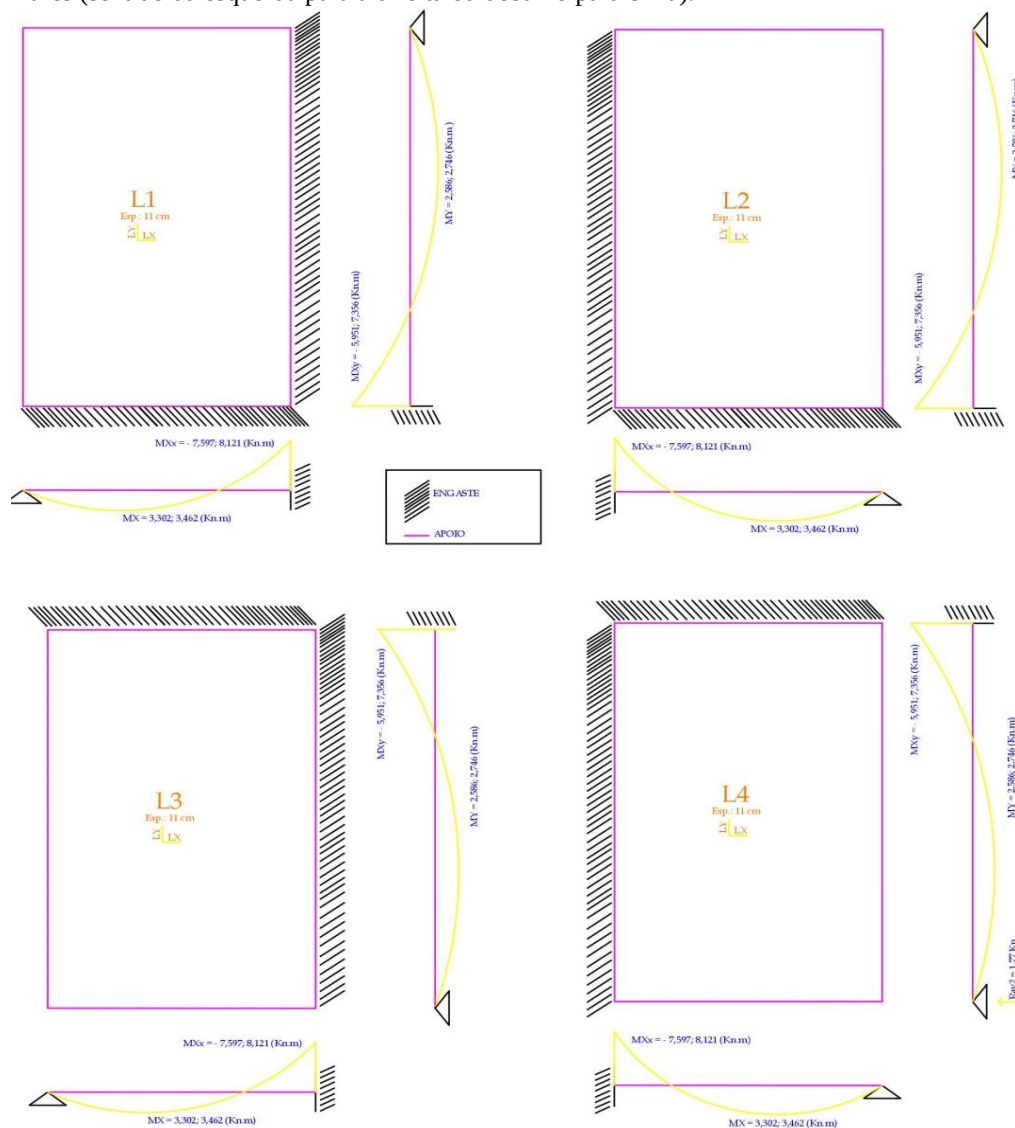
Figura 10: Compatibilização de momentos máximos positivos e negativos em x e y pelo método manual



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

A representação de engaste, apoio e momentos máximos do pavimento em análise manual está descrita de acordo com a figura 11.

Figura 11: Representação de momentos máximos positivos e negativos bidirecional pelo Método de Marcus e Bares (sentido da esquerda para a direita ou debaixo para cima).



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

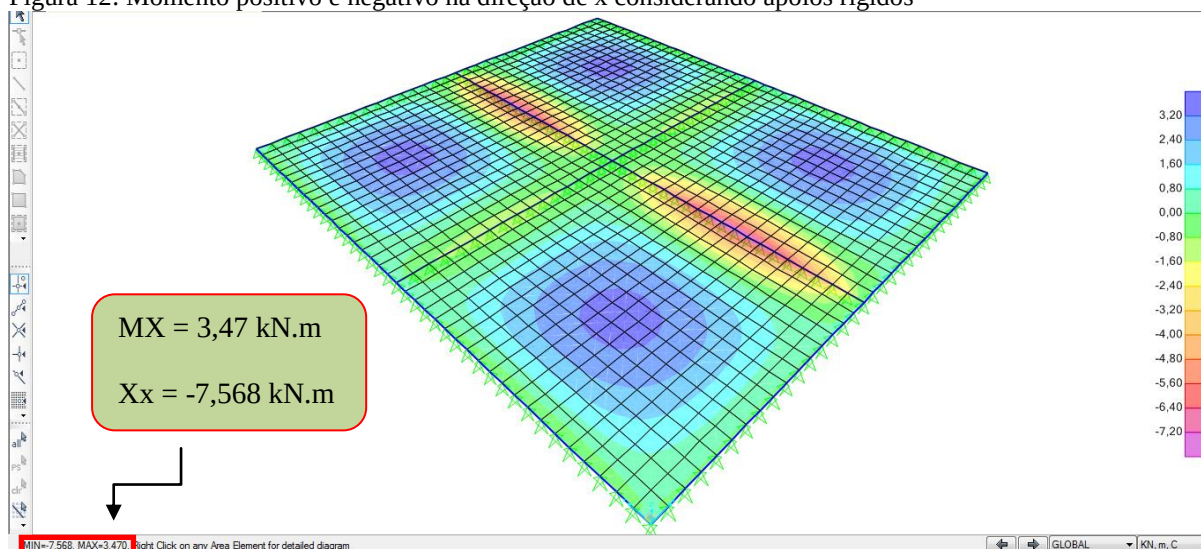
4.1.1.2 Modelo Computacional

A utilização do modelo pelo método computacional é feita por meio do software comercial SAP 2000, desenvolvido pelo *Computers & Structures, Inc* (CSI). Nesta análise, foram simuladas as lajes apoiando-se por vigas rígidas indeslocáveis verticalmente e de outra forma considerando a sua flexibilidade impondo apoios de acordo com a planta de fôrma mostrada anteriormente.

Os esquemas apresentam a modelagem da malha de elementos finitos, e suas condições de contorno. Nestes casos, as lajes e vigas foram divididas em elementos finitos retangulares de 20 x 22,5 cm, totalizando 1496, sendo 1280 de lajes e 216 de vigas reduzindo a rigidez à torção por causa da fissuração. Os diagramas das figuras 12 e 13, apresentam os

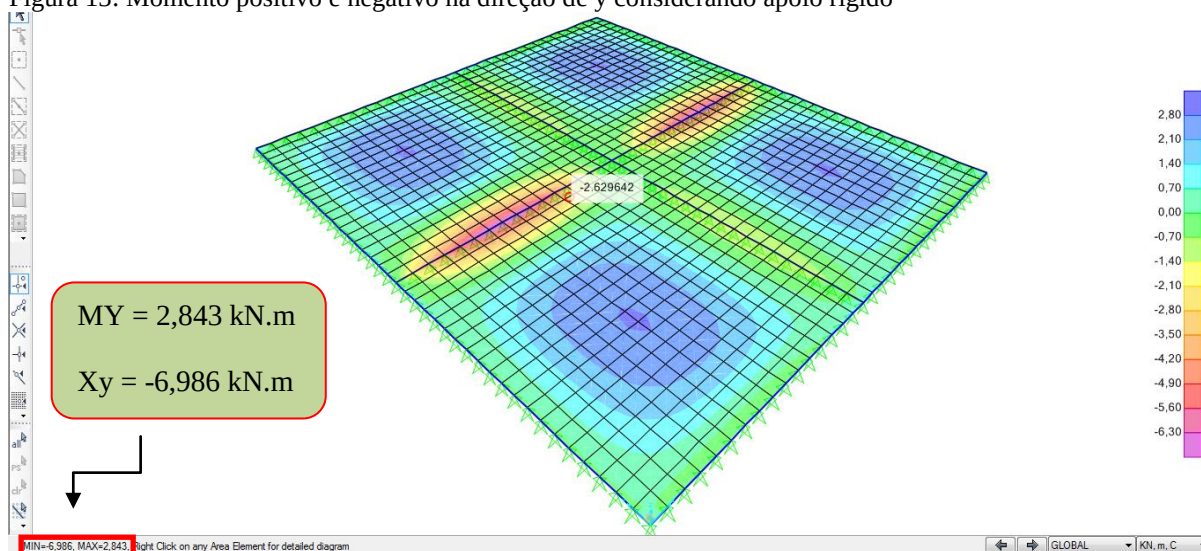
respectivos momentos fletores, nas direções (x) e (y), respectivamente, considerando os seus apoios rígidos. De acordo com o problema proposto, os momentos máximos positivos e negativos na direção de x foram 3,47 kN.m e -7,568 kN.m, na direção de y eles apresentaram valores de 2,843 kN.m e -6,986 kN.m

Figura 12: Momento positivo e negativo na direção de x considerando apoios rígidos



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

Figura 13: Momento positivo e negativo na direção de y considerando apoio rígido

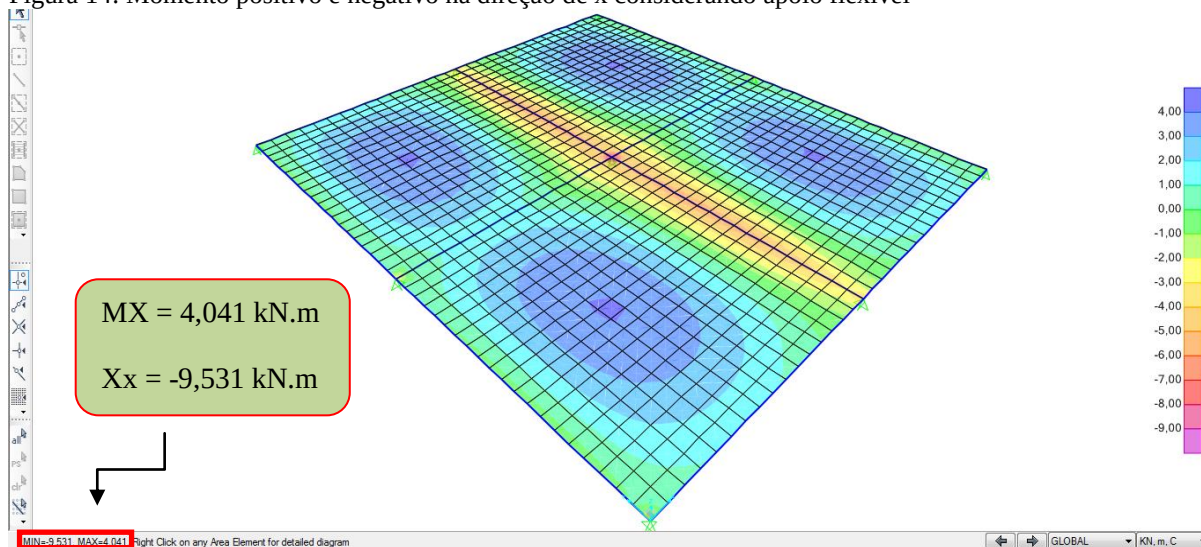


Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

Nas figuras 14 e 15, as 4 lajes de mesmas características foram discretizadas sobre apoios flexíveis, onde a rigidez a torção das vigas foram reduzidas a apenas 15% da rigidez elástica. Nas duas direções houve acréscimo de momentos positivos e negativos se comparados ao modelo manual e até mesmo a modelagem do SAP em lajes sobre apoios rígidos, pois além da redução da rigidez, as lajes possuem apoios indicados de acordo com a

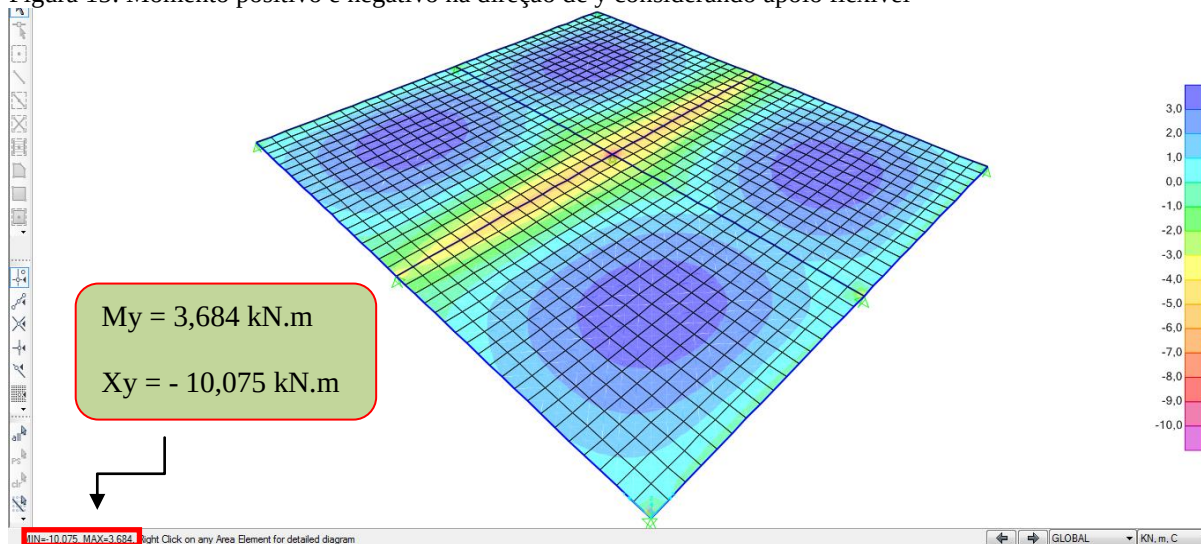
figura 9 da planta de ilustração do pavimento. Os momentos máximos na direção de x foram 4,041 kN.m e -9,531 kN.m, em y indicaram momentos positivos de 3,684 kN.m e negativos de -10,075 kN.m.

Figura 14: Momento positivo e negativo na direção de x considerando apoio flexível



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

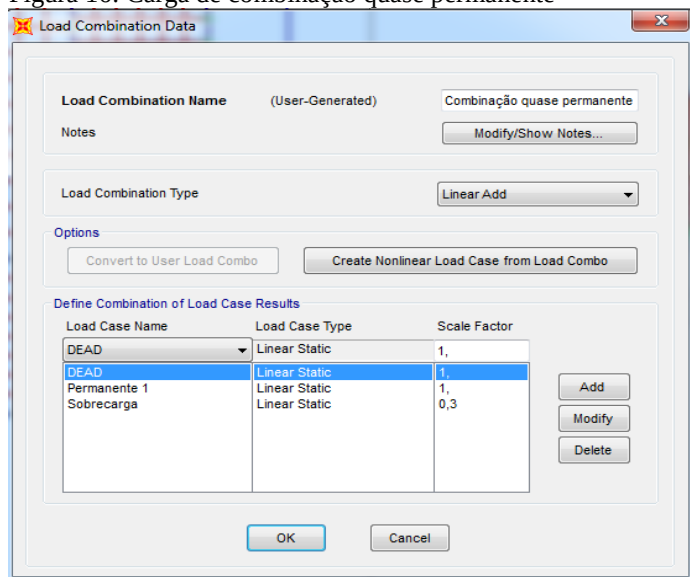
Figura 15: Momento positivo e negativo na direção de y considerando apoio flexível



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

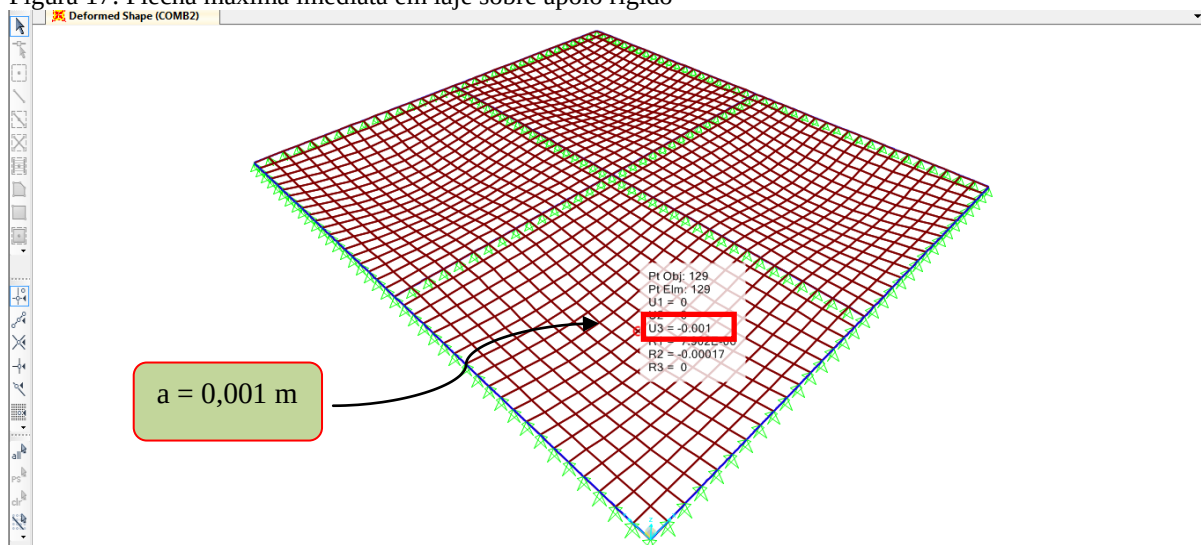
As figuras 17 e 18 mostram os deslocamentos máximos imediatos ocasionados pelas cargas atuantes, nas lajes sobre apoios considerados rígidos a flecha máxima foi de 0,001 m enquanto na laje de apoio flexível o deslocamento máximo foi de 0,0018 m, para obtenção desses resultados, foi inserido, por exigência da ABNT NBR 6118, o carregamento para a combinação quase permanente de acordo com a figura carga de combinação quase permanente.

Figura 16: Carga de combinação quase permanente



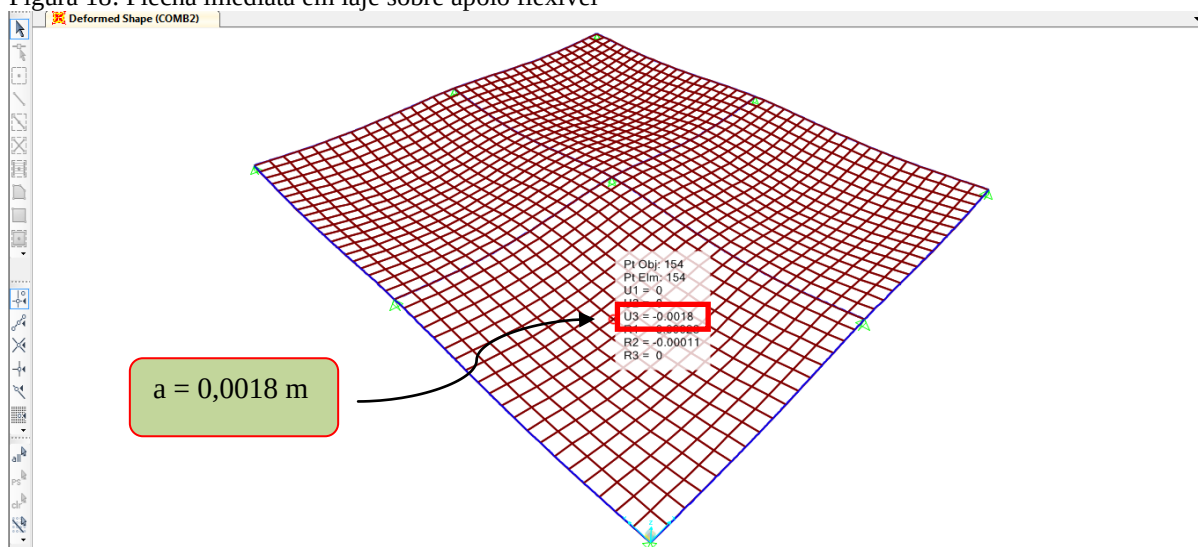
Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

Figura 17: Flecha máxima imediata em laje sobre apoio rígido



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

Figura 18: Flecha imediata em laje sobre apoio flexível



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

4.2. PRÉ - DIMENSIONAMENTO DE LAJES MACIÇAS EM PAVIMENTO ARROJADO

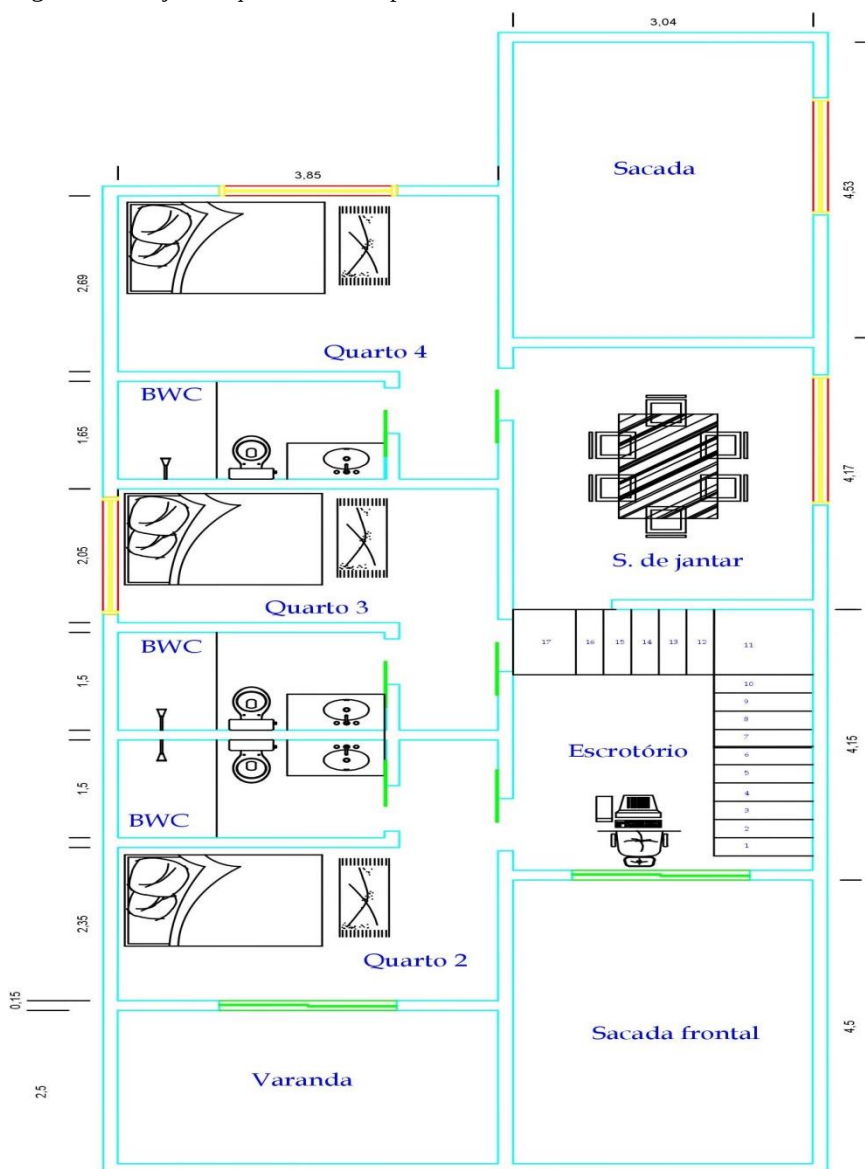
Lajes com formas estruturais mais simples podem ser calculadas por modelos simplificados. Esses modelos consideram os painéis de lajes de forma independente das vigas que lhe servem de apoio, já um pavimento arrojado é aquele formado por elementos que acompanha todo o projeto arquitetônico conforme mostrado na figura 19 e representado na figura 20. Essa estrutura ser estudado em laje maciça de concreto armado está localizado também na cidade de Mossoró, estado do Rio Grande do Norte, região semi-árida do Brasil, em perímetro urbano cuja classe de agressividade II encontra-se o cobrimento de 2,5 cm e admitindo-se inicialmente o diâmetro das armaduras como 1 cm, ou seja, com as mesmas prescrições e características da estrutura anterior, chega-se aos valores mínimos de espessuras das lajes maciças conforme a tabela 14 de pré-dimensionamento de lajes.

Tabela 14: Pré-dimensionamento de lajes

PRÉ-DIMENSIONAMENTO DE LAJES								
lajes	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
lx (cm)	315	400	315	385	196	415	315	248
ly (cm)	470	450	400	400	296	400	448	400
$l^* = 0,7 \cdot ly$	329	315	280	280	207,2	280	313,6	280
Menor valor de $0,7 \cdot ly$ e lx	315	315	280	280	196	280	313,6	248
Engastes (n)	2	2	2	3	3	3	1	2
Cobrimento (cm)	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
Bitola/2 (cm)	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$d = \frac{(2,5 - 0,1n) \cdot l}{100}$ (cm)	7,2	7,2	6,4	6,2	4,3	6,2	7,5	5,7
Espessura h (cm)	10,2	10,2	9,4	9,2	7,3	9,2	10,5	8,7
Espessura Adotada h (cm)	11,0	11,0	10,0	10,0	8,0	10,0	11,0	9,0

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA 2017).

Figura 19: Projeto arquitetônico do pavimento



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

4.2.1. Carga atuante nas lajes

As cargas atuantes nas lajes são o peso próprio, com γ do concreto de 25 kN/m³ e espessuras da respectiva laje, as de revestimento do piso e teto de 1,38 kN/m², carga variável, como também de parede em algumas lajes como L2, L4 e L6 conforme a tabela 15 ilustrada abaixo. Além de outras características do concreto a ser considerada como a resistência característica f_{ck} de 30 Mpa, coeficiente de Poisson ν de 0,2 e o Modulo de Elasticidade Secante do Concreto $E_{cs} = 0,88 * 5600 * f_{ck}^{\frac{1}{2}} = 26992 \text{ MPa}$.

Tabela 15: Cargas atuantes nas lajes

Laje	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
Área da Laje (m ²)	14,8	18,0	12,6	15,4	5,8	16,6	14,1	9,9
Peso Esp. Concreto γ (kN/m ³)	25	25	25	25	25	25	25	25
Espessura (m)	0,11	0,11	0,1	0,1	0,08	0,1	0,11	0,09
Pé-direito (m)	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8
Comp. Linear de Alvenaria (m)		4,5		4,5		4,5		
Peso P. Laje (kN/m ²)	2,75	2,75	2,5	2,5	2	2,5	2,75	2,25
Peso R. Piso (kN/m ²)	1	1	1	1	1	1	1	1
Peso R. Teto (kN/m ²)	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38
Peso Bloco cerâmico (kN/m ²)		1,8		1,8		1,8		
$P. Alv = \frac{Pê.d. \cdot C.L. \cdot P.b.}{Área \text{ de laje}}$ (kN/m ²)		1,26		1,47		1,37		
Cômodo nas Lajes	Sacada	Quarto 4 e BWC	S. de jantar	Quarto 3 e BWC	Escritório	Quarto 2 e BWC	Sacada frontal	Varanda
Carga Permanente (kN/m ²)	4,13	5,39	3,88	5,35	3,38	5,25	4,13	3,63
Carga Variável (kN/m ²)	3	1,5	2	1,5	3	1,5	3	3
Carga Total (kN/m ²)	7,13	6,89	5,88	6,85	6,38	6,75	7,13	6,63

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

4.2.1.1 Método Manual

Pelo método de Marcus, os 8 elementos de lajes foram considerados como armados em duas direções, pois em todos os casos a relação entre os vãos λ , são menores ou igual a 2. Há um caso em específico na L6, esse elemento possui 3 bordas engastadas, tendo como L_x o vão com maior número de engaste com valor de 4,5 m e L_y com dimensão de 4 m, da mesma forma a L4 possui 3 bordas de engaste com L_x de 3,85 m e L_y de 4 m.

Tabela 16: Relação entre os vãos de laje pelo método de Marcus

Lajes	Dimensões							
	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
LX (m)	3,15	4	3,15	3,85	1,96	4,15	3,15	2,48
LY (m)	4,7	4,5	4	4	2,96	4	4,48	4
Razão LY/LX (λ)	1,49	1,13	1,27	1,04	1,51	0,96	1,42	1,61
Direção das Armaduras	2	2	2	2	2	2	2	2

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

De acordo com as condições de contorno estabelecida e o valor da relação entre os vãos, pelo método de Marcus, as lajes variaram entre os tipos 3 e 5, nesses casos foram encontrados coeficientes tabelados estabelecendo suas condições para então identificar os momentos máximos positivos e negativos conforme a tabela a 17.

Tabela 17: Momentos positivos e negativos atuante nas duas direções das lajes pelo método de Marcus

Lajes	MOMENTO FLETOR (kN.m)							
	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
LY/LX (λ)	1,490	1,125	1,270	1,039	1,510	0,964	1,422	1,613
LX	3,150	4,000	3,150	3,850	1,960	4,150	3,150	2,480
Cargas q (kN/m ²)	7,130	6,890	5,880	6,853	6,380	6,746	7,130	6,630
Tipo	caso 3	caso 3	caso 3	caso 5	caso 3	caso 5	caso 3	caso 3
mx	20,750	30,140	24,920	41,770	20,490	47,060	21,780	19,390
my	46,060	37,810	40,190	51,760	46,710	49,570	43,920	46,710
nx	9,620	13,080	11,070	17,130	9,540	19,060	9,970	9,190
ny	21,360	16,410	17,860	24,700	21,750	23,420	20,100	23,820
$MX = \frac{q \cdot LX^2}{mx}$ (kN.m)	3,410	3,658	2,341	2,432	1,196	2,469	3,248	2,103
$MY = \frac{q \cdot LX^2}{my}$ (kN.m)	1,536	2,916	1,452	1,962	0,525	2,344	1,611	0,873
$Xx = \frac{q \cdot LX^2}{nx}$ (kN.m)	-7,354	-8,428	-5,270	-5,930	-2,569	-6,096	-7,096	-4,437
$Xy = \frac{q \cdot LX^2}{ny}$ (kN.m)	-3,312	-6,718	-3,267	-4,112	-1,127	-4,961	-3,520	-1,712

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

Pelo método de Bares, os 8 elementos de lajes foram considerados com armação bidirecional, pois em todos os casos a relação entre os vãos λ , são menores ou igual a 2. No método de Bares não houve nenhuma especificidade, pois independente da disposição do vão o Ly será sempre o maior dos vãos e o Lx o menor.

Tabela 18: Relação entre os vãos de laje pelo método de Bares

Lajes	Dimensões							
	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
LX (m)	3,15	4	3,15	3,85	1,96	4	3,15	2,48
LY (m)	4,7	4,5	4	4	2,96	4,15	4,48	4
Razão LY/LX (λ)	1,49	1,13	1,27	1,04	1,51	1,04	1,42	1,61
Direção das Armaduras	2	2	2	2	2	2	2	2

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

De acordo com as condições de contorno estabelecida pela planta de representação de elementos estruturais entre laje engastada na outra ou simplesmente apoiada em viga e o valor da relação entre os vãos, pelo método de Bares, os tipos de lajes variaram entre o caso do tipo 3 e 5, nesses problemas serão encontrados coeficientes tabelados de acordo com as suas

condições de contorno das lajes para então obter os momentos máximos positivos e negativos conforme a tabela abaixo.

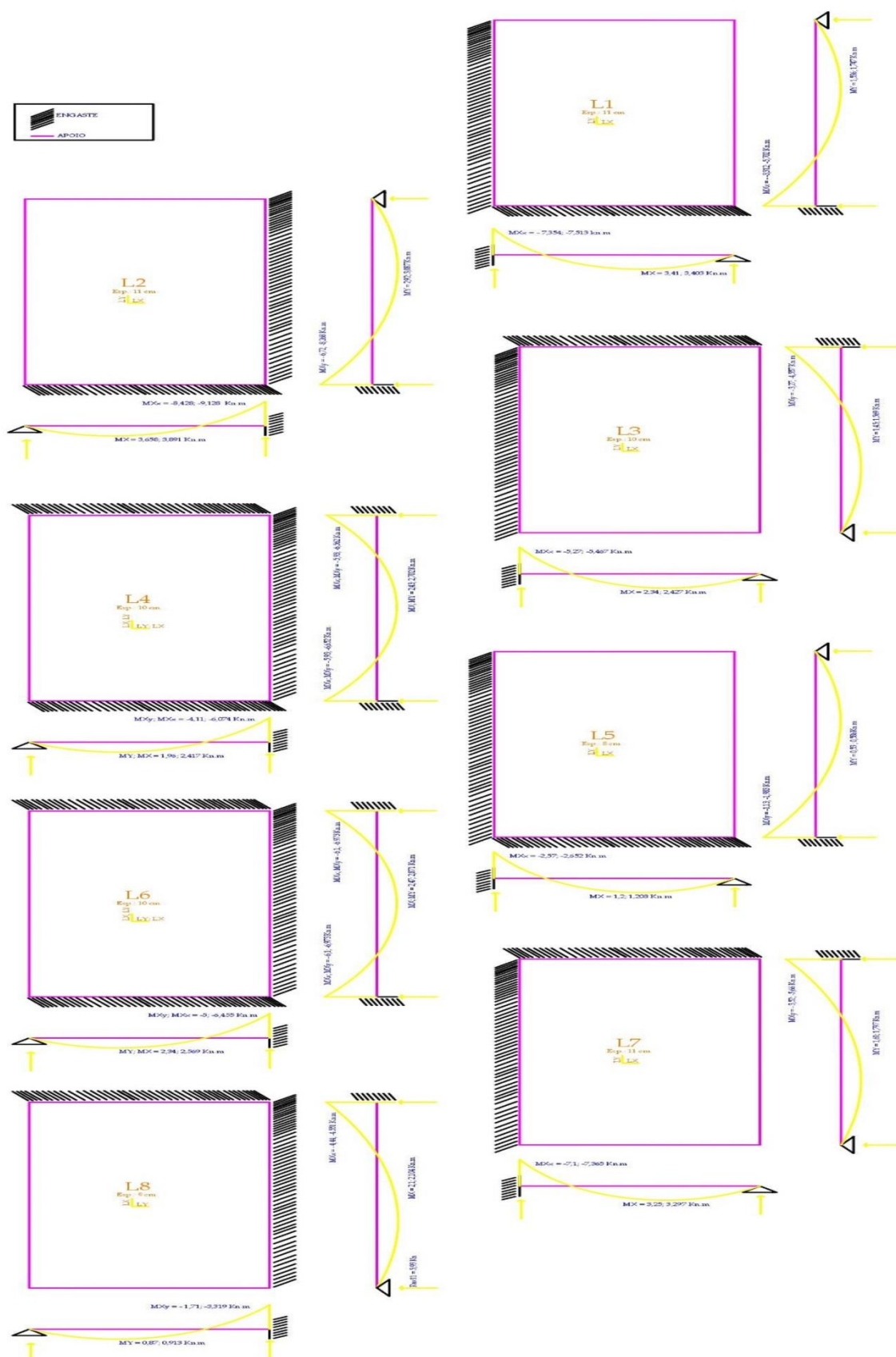
Tabela 19: Momentos atuantes positivo e negativo nas duas direções de lajes pelo método de Bares

Lajes	MOMENTO FLETOR (kN.m)							
	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
LY/LX (λ)	1,49	1,13	1,27	1,04	1,51	1,04	1,42	1,61
LX	3,150	4,000	3,150	3,850	1,960	4,000	3,150	2,480
Cargas q (kN/m ²)	7,130	6,890	5,880	6,853	6,380	6,746	7,130	6,630
Tipo	caso 4	caso 4	caso 4	caso 7	caso 4	caso 7	caso 4	caso 4
μ_x	4,810	3,530	4,160	2,380	4,930	2,380	4,660	5,160
μ_y	2,470	2,800	2,690	2,660	2,390	2,660	2,540	2,240
μ'_x	10,620	8,280	9,370	5,980	10,820	5,980	10,410	11,160
μ'_y	8,060	7,500	7,810	6,460	8,090	6,460	8,000	8,140
$MX = mx \frac{q \cdot LX^2}{100}$ (kN.m)	3,403	3,891	2,427	2,417	1,208	2,569	3,297	2,104
$MY = my \frac{q \cdot LX^2}{100}$ (kN.m)	1,747	3,087	1,569	2,702	0,586	2,871	1,797	0,913
$X_x = m'_x \frac{q \cdot LX^2}{100}$ (kN.m)	7,513	9,128	5,467	6,074	2,652	6,455	7,365	4,551
$X_y = m'_y \frac{q \cdot LX^2}{100}$ (kN.m)	5,702	8,268	4,557	6,562	1,983	6,973	5,660	3,319

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

Na figura 21 são apresentados os momentos máximos positivos e negativos, como também a posição dos eixos x e y pela formulação de Marcus e Bares (Método manual), conforme as condições de contorno. Esses momentos estão posicionados da esquerda para direita e de cima para baixo, começando pelos valores de Marcus e terminando com os números de Bares.

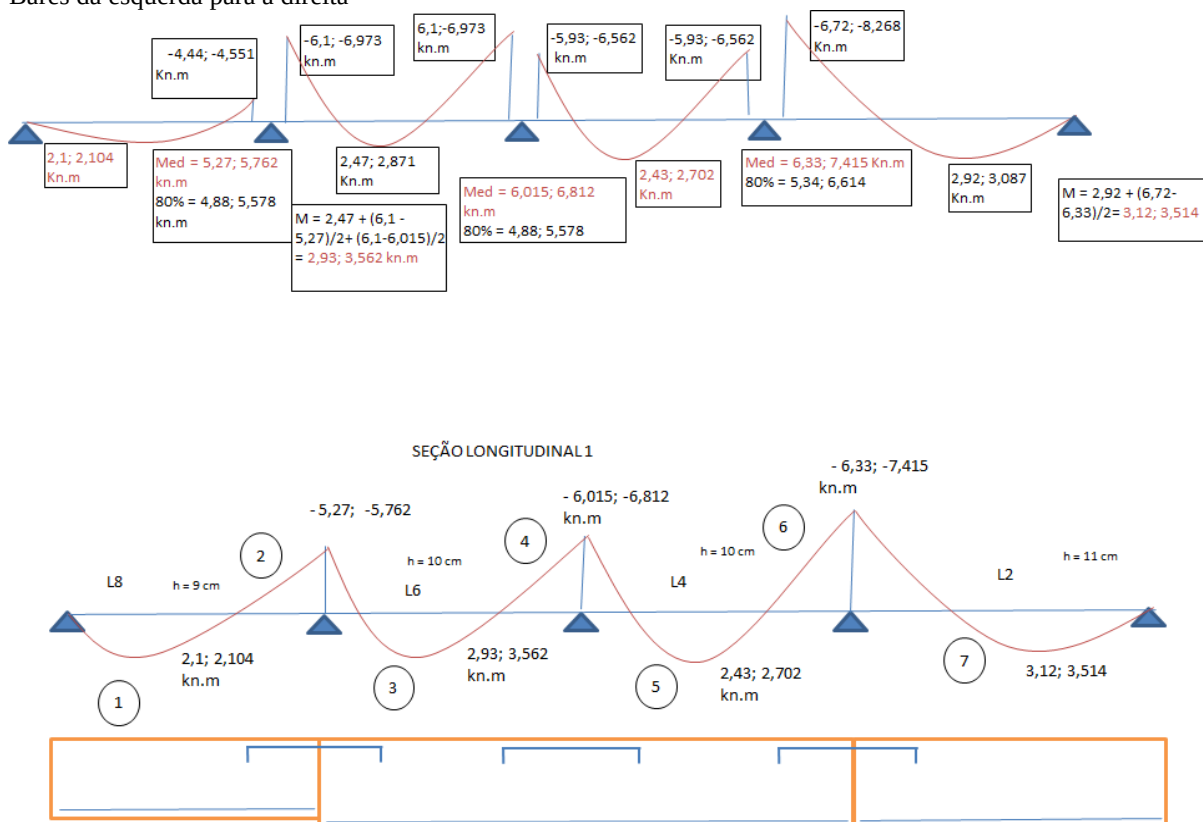
Figura 21: Ilustração de momentos, engaste e apoio nas lajes pelo método de Marcus e Bares



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

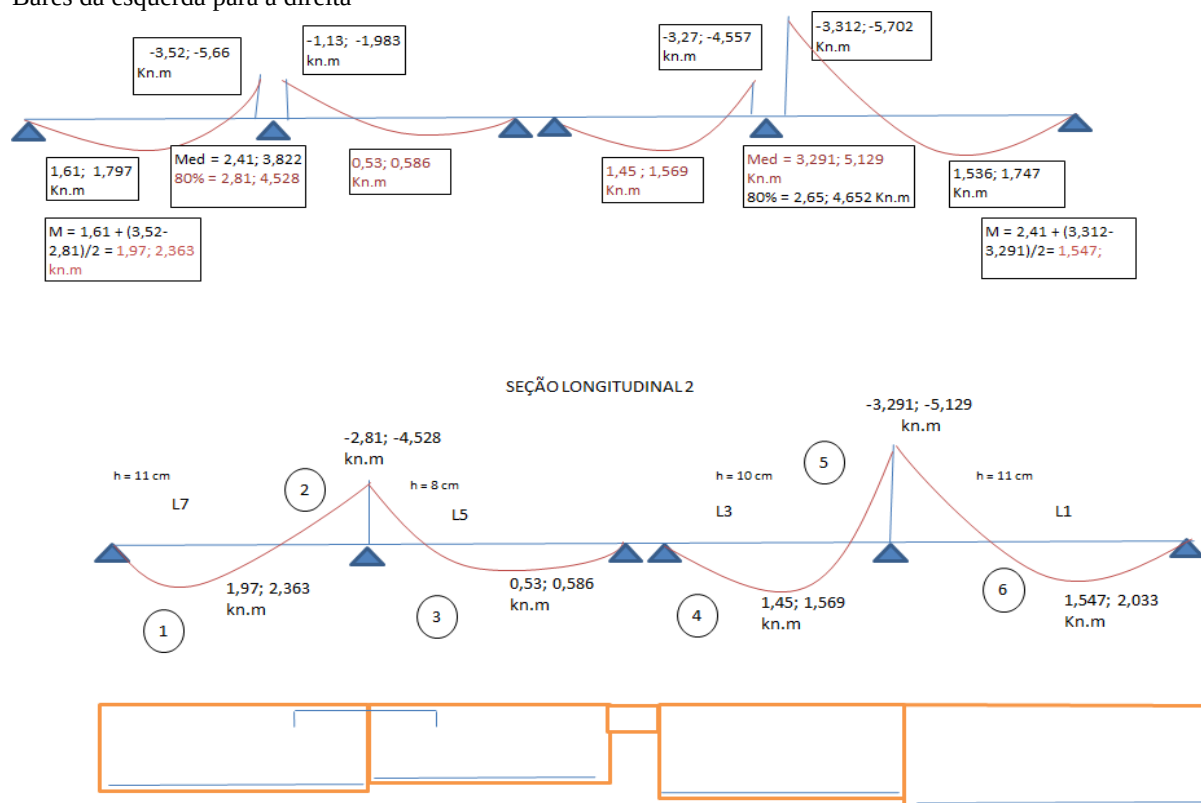
As figuras 22 e 23 de seções longitudinais mostra a compatibilização de momentos máximos no meio dos vãos em lajes de concreto armado pelo método de Marcus e pelo método de Bares, em que o momento máximo negativo compatibilizado deve ser o maior valor entre a média dos momentos ou 80% do maior valor. Em relação aos momentos positivos, ele permanece quando o valor negativo compatibilizado for superior ao da laje analisada e aumentado, no caso inverso.

Figura 22: 1ª Seção longitudinal de compatibilização de momentos máximos positivos e negativos por Marcus e Bares da esquerda para a direita



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

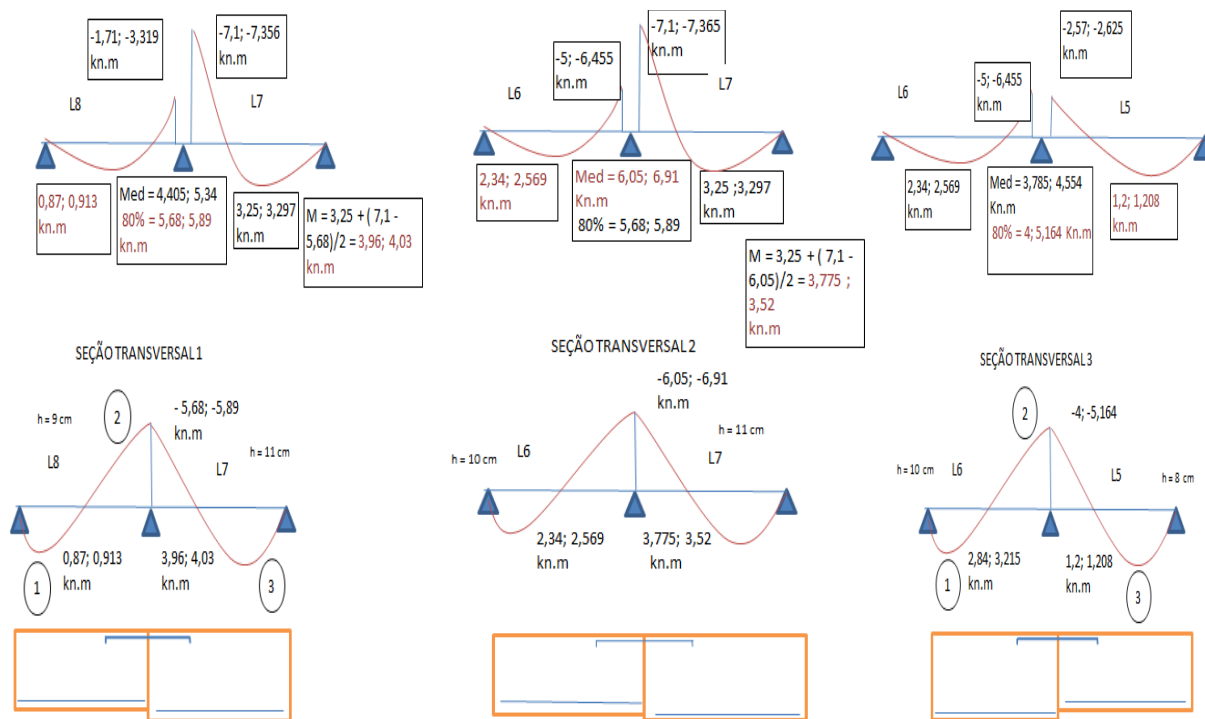
Figura 23: 2ª Seção longitudinal de compatibilização de momento máximo positivo e negativo por Marcus e Bares da esquerda para a direita



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

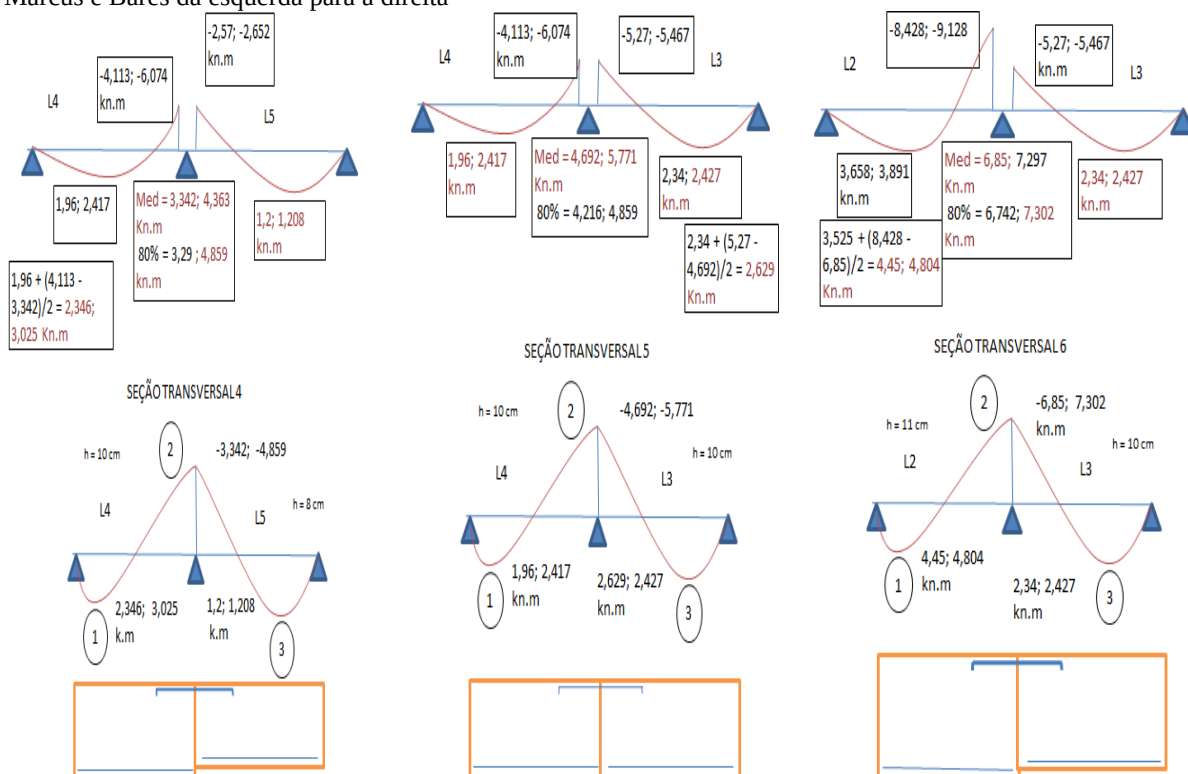
As figuras 24, 25 e 26 das seções transversais mostra a compatibilização de momentos da esquerda para a direita pelo método de Marcus e pelo método de Bares, em que o momento máximo negativo compatibilizado deve ser o maior valor entre a média dos momentos ou 80% do maior valor. Em relação aos momentos positivos, ele permanece quando o valor negativo compatibilizado for superior ao da laje analisada e aumentado, no caso inverso.

Figura 24: 1º, 2º e 3º Seção transversal de compatibilização de momento máximo positivo e negativo por Marcus e Bares da esquerda para a direita



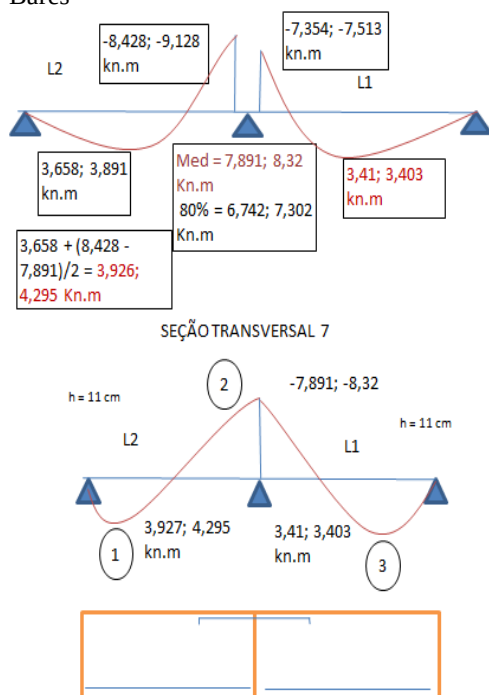
Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

Figura 25: 4º, 5º e 6º seção transversal seção de compatibilização de momento máximo positivo e negativo por Marcus e Bares da esquerda para a direita



Fonte:(AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

Figura 26: 7ª Seção transversal de compatibilização de momento máximo positivo e negativo por Marcus e Bares



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

4.2.1.2 Método Computacional

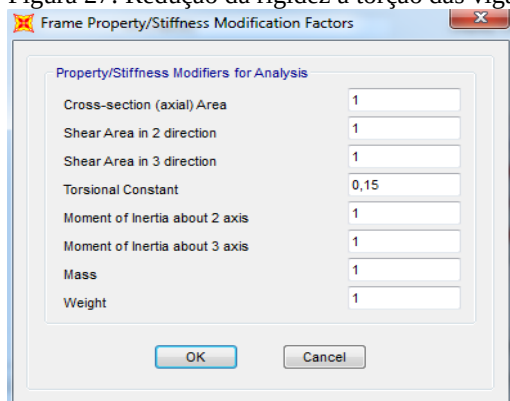
Os esquemas a seguir, apresentam a modelagem da malha de elementos finitos, e suas condições de contorno. Nestes casos, as 8 lajes foram divididas em elementos finitos retangulares, totalizando 914, sendo 700 de lajes e 214 de vigas, no pavimento. A laje que apresentou a menor subdivisão discretizada em elementos finitos foi a L8 com 40 cm x 31 cm, já o elemento estrutural que apresentou a maior subdivisão foi a L4 com 40 cm x 48,12 cm.

Para um bom resultado nas análises de estruturas, o espaçamento máximo de 50 cm entre as barras da grelha que simula uma laje deve ser considerado (KIMURA, 2007). Desta forma, o espaçamento máximo entre as barras na subdivisão de lajes no MEF foi de 50 cm x 50 cm foi estabelecido.

Os diagramas, apresentam os respectivos momentos fletores, nas direções (x) e (y), respectivamente, considerando os seus apoios rígidos como também flexíveis.

Em uma forma de aproximação, no item 14.6.6.2 da ABNT NBR 6118:2014 é permitida que nas grelhas e nos pórticos espaciais fosse realizado a redução da rigidez a torção das vigas por fissuração a 15% da rigidez elástica.

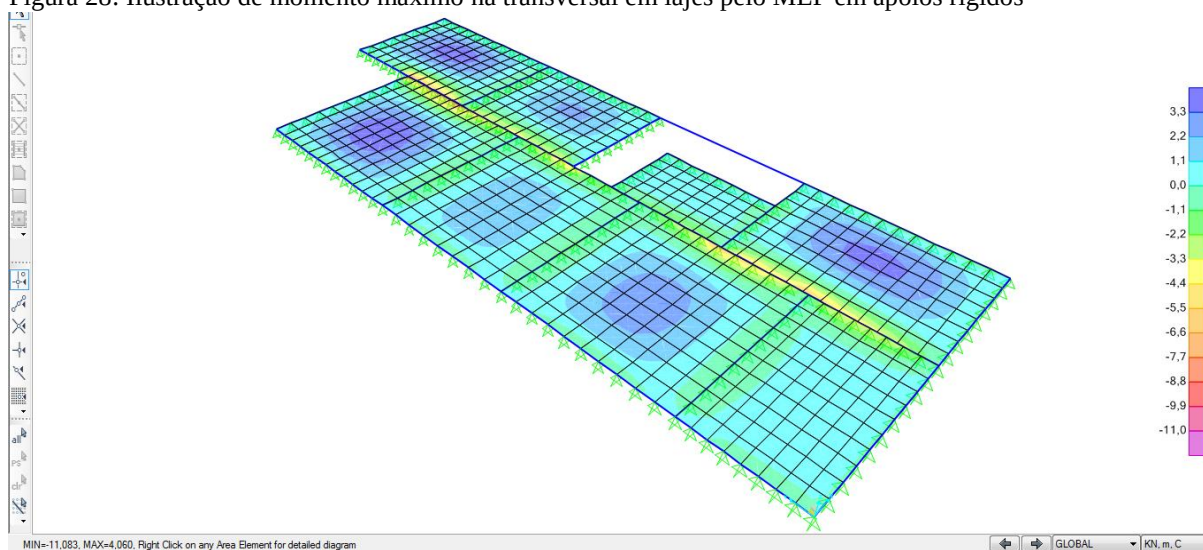
Figura 27: Redução da rigidez a torção das vigas



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

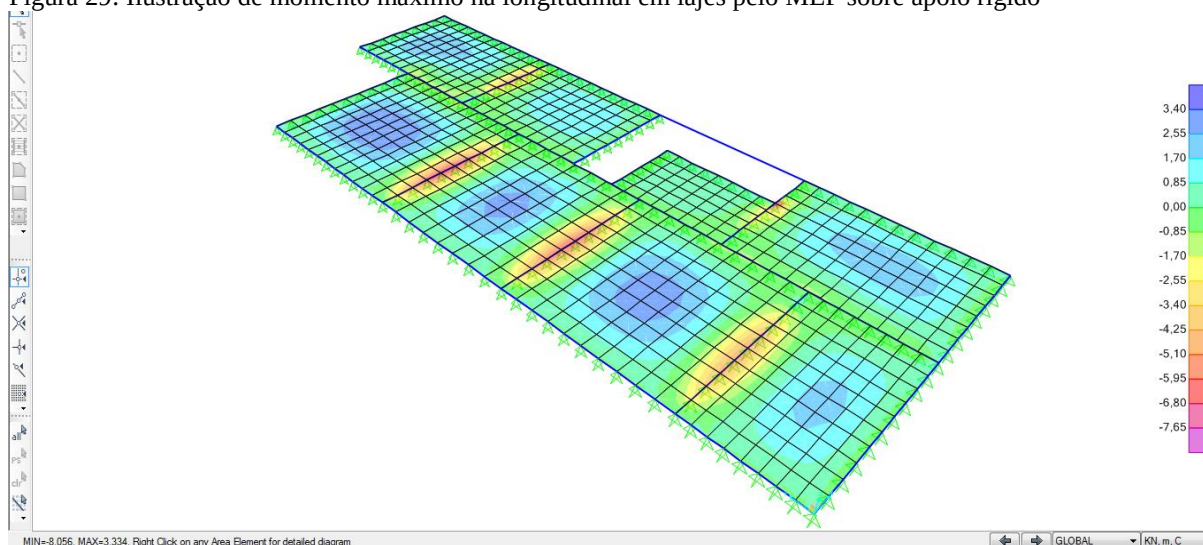
De acordo com o problema proposto, as ilustrações nas figuras 28 e 29 apresentam os momentos máximos positivos e negativos na direção de x e y considerando todo o contorno das lajes rígidas neste 2º pavimento.

Figura 28: Ilustração de momento máximo na transversal em lajes pelo MEF em apoios rígidos



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

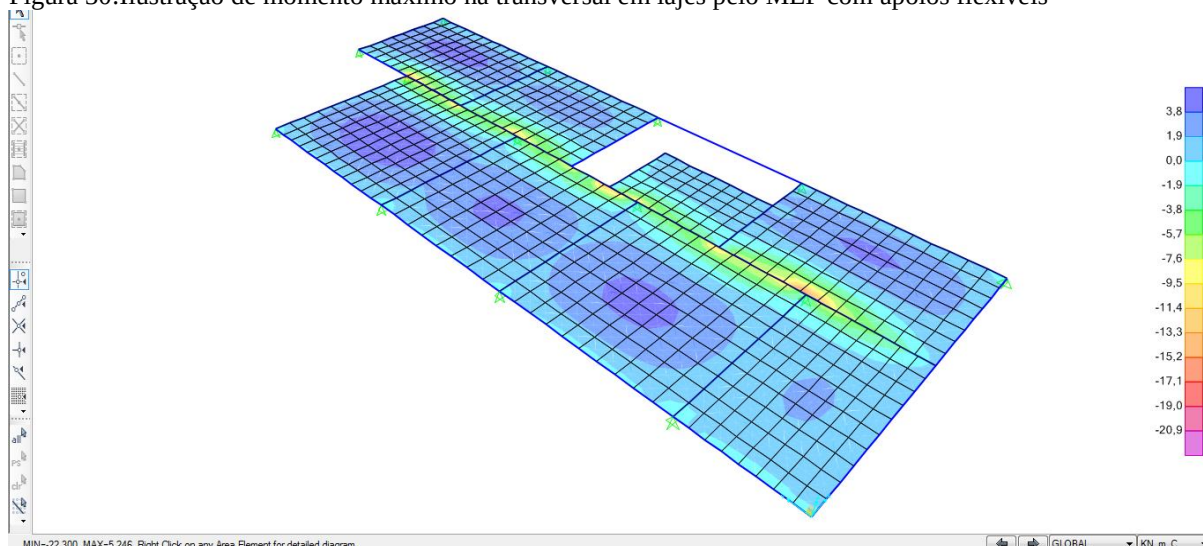
Figura 29: Ilustração de momento máximo na longitudinal em lajes pelo MEF sobre apoio rígido



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

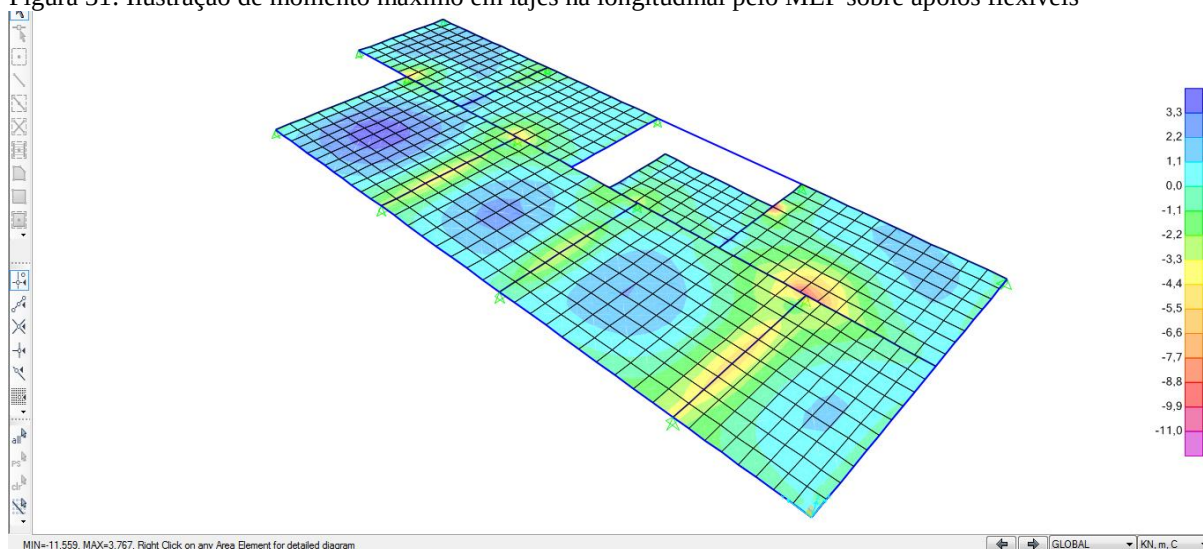
Nas figuras 30 e 31, são apresentadas as 8 lajes discretizadas sobre apoios flexíveis, onde a rigidez a torção das vigas foram reduzidas a apenas 15% da rigidez elástica, nas duas direções houve acréscimo ou decréscimo de momentos positivos e negativos se comparados ao modelo manual e até mesmo a modelagem do SAP em lajes sobre apoios rígidos, pois os esforços obtidos pelo método manual de lajes são analisadas e dimensionadas de maneira isolada, além da redução da rigidez, as lajes possuem apoios indicados de acordo com planta de ilustração do pavimento.

Figura 30: Ilustração de momento máximo na transversal em lajes pelo MEF com apoios flexíveis



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

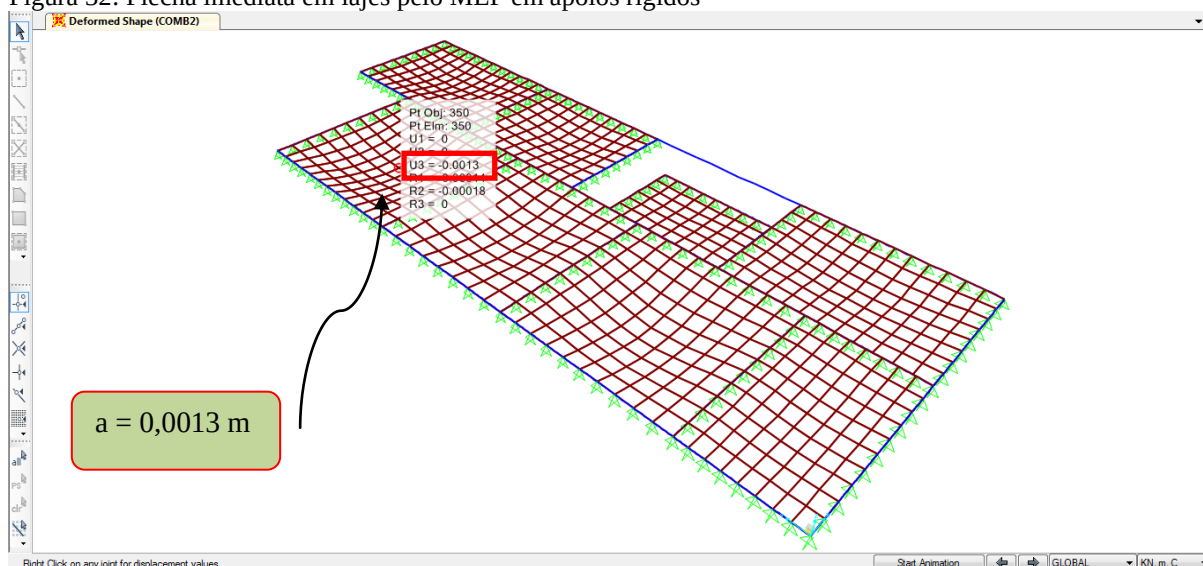
Figura 31: Ilustração de momento máximo em lajes na longitudinal pelo MEF sobre apoios flexíveis



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

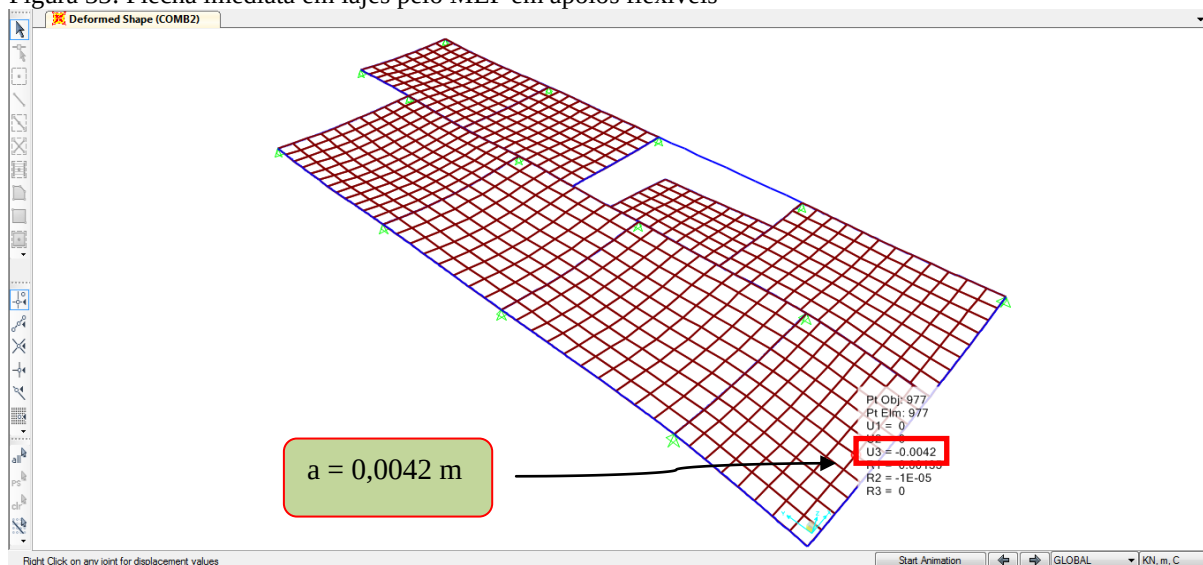
As figuras 32 e 33 mostram os deslocamentos máximos imediatos ocasionados pelas cargas atuantes, a L2 apresentou o maior deslocamento vertical em lajes sobre apoios considerados rígidos, a flecha máxima foi de 0,0013 m enquanto que na laje de apoio flexível o deslocamento máximo foi de 0,0042 m causado pelas cargas da L8, para obtenção desses resultados, também foi inserido, por exigência da ABNT NBR 6118, o carregamento para a combinação quase permanente.

Figura 32: Flecha imediata em lajes pelo MEF em apoios rígidos



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

Figura 33: Flecha imediata em lajes pelo MEF em apoios flexíveis



Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

4.3. COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS

4.3.1 Pavimento simplificado

Na comparação dos problemas envolvendo o modelo manual e computacional, observou-se que na análise das lajes com apoios rígidos, tanto manual como computacional, os dados de momento quase não se alteraram tanto na direção de x como de y, pois trata-se de um pavimento simplificado de 4 lajes em que a compatibilização de momentos permanece como se fosse apenas os de uma única laje, observando, especificamente com o de Bares, a margem de segurança é maior do que na de Marcus, por exemplo na tabela 20, o momento negativo das lajes na direção de x pelo método de Bares apresenta uma margem de segurança de 7% em relação ao MEF com apoio rígido, enquanto que no processo de Marcus, esse mesmo momento representa quase que a mesma dimensão em MEF com apoio rígido. Em relação aos dois eixos, x e y, o que se mostrou mais desfavorável a segurança foi o eixo y, no método de Marcus, o momento negativo apresenta apenas 85% do momento da laje no software, mostrado na tabela 21.

Tabela 20: Comparação entre os momentos de laje pelo método manual e computacional na direção de x

Momentos em x (kN.m)	Processo de Marcos		Método de Bares		MEF com apoios rígidos	
	positivos	negativo	positivo	Negativos	positivo	negativo
Laje 1	3,302	-7,597	3,462	-8,121	3,47	-7,568
Laje 2	3,302	-7,597	3,462	-8,121	3,47	-7,568
Laje 3	3,302	-7,597	3,462	-8,121	3,47	-7,568
Laje 4	3,302	-7,597	3,462	-8,121	3,47	-7,568
Comparação ao MEF	95%	100%	100%	107%	-	

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

Tabela 21: Comparação entre os momentos de lajes pelo método manual e computacional na direção de y

Momentos em y (kN.m)	Processo de Marcos		Método de Bares		MEF com apoios rígidos	
	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo
Laje 1	2,586	-5,951	2,746	-7,356	2,843	-6,986
Laje 2	2,586	-5,951	2,746	-7,356	2,843	-6,986
Laje 3	2,586	-5,951	2,746	-7,356	2,843	-6,986
Laje 4	2,586	-5,951	2,746	-7,356	2,843	-6,986
Comparação ao MEF	91%	85%	97%	105%	-	

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

Quando parte para a comparação do modelo discretizado de maneira manual com o MEF sobre apoios flexíveis nas tabelas 22 e 23, os momentos começam a se distanciar, principalmente no eixo y, pois os apoios nessa direção possuem rigidez menor se comparados aos do eixo x, sem contar também com a redução da rigidez a torção dos apoios nas duas direções sem nenhum tipo de alteração de suas seções geométricas e a inserção de pilares de acordo com a planta de fôrma do projeto.

Tabela 22: Comparação de momentos em lajes no MEF apoios flexíveis e rígidos com método manual na direção de x

Momentos em x (kN.m)	Processo de Marcos		Método de Bares		MEF apoios rígidos		MEF apoios flexíveis	
	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo
Laje 1	3,302	-7,597	3,462	-8,121	3,47	-7,568	4,041	-9,531
Laje 2	3,302	-7,597	3,462	-8,121	3,47	-7,568	4,041	-9,531
Laje 3	3,302	-7,597	3,462	-8,121	3,47	-7,568	4,041	-9,531
Laje 4	3,302	-7,597	3,462	-8,121	3,47	-7,568	4,041	-9,531
Comparação ao MEF apoio flexível	82%	80%	86%	85%	86%	79%	-	

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

Tabela 23: Comparação de momentos em lajes no MEF apoios flexíveis e rígidos com método manual na direção de y

Momentos em y (kN.m)	Processo de Marcos		Método de Bares		MEF apoios rígidos		MEF apoios flexíveis	
	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo
Laje 1	2,586	-5,951	2,746	-7,356	2,843	-6,986	4,055	-10,075
Laje 2	2,586	-5,951	2,746	-7,356	2,843	-6,986	4,055	-10,075
Laje 3	2,586	-5,951	2,746	-7,356	2,843	-6,986	4,055	-10,075
Laje 4	2,586	-5,951	2,746	-7,356	2,843	-6,986	4,055	-10,075
Comparação ao MEF apoio flexível	64%	59%	68%	73%	70%	69%	-	

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

4.3.1.1 Flechas

Quando se compara os deslocamentos verticais imediatos de 0,11 cm no cálculo manual pelo método de Bares, com MEF sobre apoios rígidos, esses valores não se alteram, agora, partindo-se para a flexibilidade das vigas o acréscimo de flecha é bem acentuado, chegando a quase o dobro dos valores manual e MEF sobre apoios rígidos com valor de 0,18 cm. Valendo salientar que a rigidez da laje na seção bruta é incluída para o cálculo dos deslocamentos verticais quando o M_r , momento de fissuração é menor que o M_a , momento positivo atuante na laje analisada.

Tabela 24: Flecha imediata em lajes pelo método manual e computacional

Laje Tipo	FLECHA IMEDIATA			
	L1 Caso 4	L2 Caso 4	L3 Caso 4	L4 Caso 4
Lx (cm)	400	400	400	400
λ (LY/LX)	1,130	1,130	1,130	1,130
M_a (kN.cm)	346	346	346	346
I_c (cm ⁴)	11092	11092	11092	11092
$M_r = \frac{1.5 f_{ct} I_c}{Y_t}$ (kN.cm)	876,182	876,182	876,182	876,182
g (kn/m ²)	4,130	4,130	4,130	4,130
q (Kn/m ²)	2	2	2	2
$q \cdot \Psi_2$	0,6	0,6	0,6	0,6
$p = g + q$ (kN/cm ²)	0,000473	0,000473	0,000473	0,000473
h (cm)	11	11	11	11
E_{cs} (Kn.cm ²)	2699,18	2699,18	2699,18	2699,18
α	3,12	3,12	3,12	3,12
$a = \alpha \frac{p l x^4}{100 E h^3}$ (cm)	0,11	0,11	0,11	0,11
Flecha (a) MEF rígido (cm)	0,1	0,1	0,1	0,1
Flecha (a) MEF flexível (cm)	0,18	0,18	0,18	0,18

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2018).

Para analisar se a estrutura é viável, acrescenta-se na flecha imediata, o deslocamento vertical diferido no tempo em que considera a fluência do concreto, esse valor total de deslocamento é comparado com as medidas prescritas na norma ABNT NBR 6118:2014, para verificar a aceitabilidade sensorial e as vibrações excessivas, analisando a situação mais desfavorável que é o MEF sobre apoios flexíveis, a estrutura atende aos dois casos, pois os seus maior deslocamento é de 0,42 cm em que é permitido na aceitabilidade sensorial valor de até 1,6 cm e vibrações excessiva dimensão de 1,14 cm.

Tabela 25: Flecha diferida no tempo pelo método manual e computacional

Flecha Imediata		L1	L2	L3	L4
Flecha (a) M. Bares		0,11	0,11	0,11	0,11
Flecha (a) MEF rígido		0,1	0,1	0,1	0,1
Flecha (a) MEF flexível		0,18	0,18	0,18	0,18
Flecha diferida $a_t = \{a * (1 + \alpha f)\} \text{ (cm)}$		L1	L2	L3	L4
$\alpha f = \frac{\Delta \varepsilon}{1 + 50 \rho'}$		1,32	1,32	1,32	1,32
Flecha (at) M. Bares		0,26	0,26	0,26	0,26
Flecha (at) MEF rígido		0,23	0,23	0,23	0,23
Flecha (at) MEF flexível		0,42	0,42	0,42	0,42
Aceitabilidade sensorial (cm)		1,6	1,6	1,6	1,6
Vibrações excessivas (cm)		1,14	1,14	1,14	1,14

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA).

4.3.2 Pavimento arrojado

No pavimento mais delineado, fica bem comprometida a comparação de modelo manual com o MEF sobre apoios rígidos, o dimensionamento do modelo manual verifica apenas a laje de forma isolada, quando partimos para o software, seus elementos lajes e vigas trabalham de forma conjunta provocando algumas distorções como no método de Marcus. Um dos piores caso foi o momento na transversal da L3 em que apresentou apenas 81% do MEF sobre apoio rígido, em uma região ainda mais crítica foi o momento positivo na transversal da L4 do mesmo método apresentar apenas 63% do computacional sobre apoio rígido. Em contrapartida houve casos em que o modelo manual de Bares apresentou uma margem de segurança de 154%, no momento transversal negativo compatibilizado entre L4 e L5. Sendo assim, há casos que inviabilizam a comparação do modelo sobre estrutura de apoio fixo e deslocável em pavimentos mais detalhados, havendo casos favorável a segurança, como também desfavorável. Na tabela 26, as duas ultimas linhas apresentam a comparação em relação ao o modelo de referência, a penúltima linha diz sobre a situação mais desfavorável, a ultima a mais favorável, em relação a todos os momentos, sejam eles positivos ou negativos de cada método.

Tabela 26: Comparação dos momentos em lajes na transversal pelo MEF e o método manual

Momentos na transversal (kN.m)	Processo de Marcus		Método de Bares		MEF apoios rígidos	
	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo
L1 e L2	3,41; 3,927	-7,891	4,295; 3,403	-8,32	3,811; 4,06	-7,819
L2 e L3	4,45; 2,34	-6,85	4,804; 2,427	-7,302	4,06; 2,413	-7,208
L3 e L4	1,96; 2,629	-4,692	2,427; 2,569	-5,771	2,413; 2,133	-4,92
L4 e L5	2,346; 1,2	-4,692	3,025; 1,208	-4,859	2,133; 1,106	-1,91
L5 e L6	1,2; 2,84	-4	1,208; 3,215	-5,164	1,106; 2,832	-6,32
L6 e L7	2,34; 3,775	-6,05	2,569; 3,52	-6,91	2,832; 3,669	-5,772
L7 e L8	3,96; 0,87	-5,68	4,03; 0,913	-5,89	3,669; 0,8774	-5,16
Comparação ao apoio rígido	81%	63%	84%	82%	-	
	123%	246%	120%	254%		

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

O momento na longitudinal chega a ser bem mais crítico, comparado ao da transversal, no momento negativo entre L5 e L7 no método de Marcus apresenta apenas 36% do momento MEF rígido, momento máximo pontual localizado na extremidade de L5 com L7, na figura 27.

Tabela 27: Comparação dos momentos em lajes na longitudinal pelo MEF e o método manual

Momento na longitudinal (kN.m)	Processo de Marcus		Método de Bares		MEF com apoios rígidos	
	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo
L1 e L3	1,547 ; 1,45	-3,29	2,033 ; 1,569	-5,129	2,346 ; 1,701	-4,755
L3 e L5	1,45; 0,53	-	1,569 - 0,586	-	1,701; 0,625	-
L5 e L7	0,53; 1,97	-2,81	0,586; 2,363	-4,528	0,625; 2,093	-7,803
L2 e L4	3,12 - 2,43	-6,33	3,514; 2,702	-7,415	3,334; 2,914	-6,995
L4 e L6	2,43 - 2,93	-6,015	2,702; 3,562	-6,812	2,914; 3,029	-6,32
L6 e L8	2,93 - 2,1	-5,27	3,562 ; 2,104	-5,762	3,029 ; 1,965	-5,196
Comparação ao apoio rígido	66%	36%	87%	58%	-	
	107%	101%	118%	111%		

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

Análogo aos outros casos visualizados anteriormente, para um pavimento de contorno diferenciado, os momentos obtidos pelo método manual apresentam valores bem discrepantes se comparado MEF com apoios flexíveis e até mesmo ao MEF sobre apoio rígido. Nesses casos tanto na direção transversal como longitudinal para a obtenção dos momentos, foi considerado os apoios nas vigas de acordo com o projeto do segundo pavimento, em cada momento obtido verificou-se o caso mais crítico como também a região em que apresentava a maior margem de segurança, nas figuras 28 e 29.

Tabela 28: Comparação dos momentos na transversal em lajes pelo MEF sobre apoios flexíveis e rígidos e o método manual

Momentos na transversal (kN.m)	Processo de Marcus		Método de Bares		MEF apoio rígido		MEF apoios flexíveis	
	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo
L1 e L2	3,41; 3,927	-7,891	4,295; 3,403	-8,32	3,811; 4,06	-7,819	4,614; 5,245	-15,660
L2 e L3	4,45; 2,34	-6,85	4,804; 2,427	-7,302	4,06; 2,413	-7,208	5,245; 3,024	-11,830
L3 e L4	1,96; 2,629	-4,692	2,427; 2,569	-5,771	2,413; 2,133	-4,92	3,024; 4,167	-10,410
L4 e L5	2,346; 1,2	-4,692	3,025; 1,208	-4,859	2,133; 1,106	-1,91	4,167; 0,940	-12,740
L5 e L6	1,2; 2,84	-4	1,208; 3,215	-5,164	1,106; 2,832	-6,32	0,94; 4,325	-9,909
L6 e L7	2,34; 3,775	-6,05	2,569; 3,52	-6,91	2,832; 3,669	-5,772	4,325; 4,13	-16,304
L7 e L8	3,96; 0,87	-5,68	4,03; 0,913	-5,89	3,669; 0,8774	-5,16	4,13; 2,01	-14,69
Comparação ao apoio flexível	43%	37%	45%	42%	44%	15%	-	
	128%	58%	129%	62%	118%	64%		

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

Tabela 29: Comparação dos momentos em lajes na longitudinal pelo MEF sobre apoios flexíveis e rígidos e o método manual

Momento na longitudinal (kN.m)	Processo de Marcus		Método de Bares		MEF com apoio rígido		MEF com apoios flexíveis	
	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo	positivo	negativo
L1 e L3	1,547; 1,45	-3,29	2,033; 1,569	-5,129	2,346; 1,701	-4,755	2,067; 0,985	-2,58
L3 e L5	1,45; 0,53	-	1,569; 0,586	-	1,701; 0,625	-	0,985; 1,45	-
L5 e L7	0,53; 1,97	-2,81	0,586; 2,363	-4,528	0,625; 2,093	-7,803	1,45; 1,503	-10,519
L2 e L4	3,12 - 2,43	-6,33	3,514; 2,702	-7,415	3,334; 2,914	-6,995	3,766; 2,53	-4,324
L4 e L6	2,43 - 2,93	-6,015	2,702; 3,562	-6,812	2,914; 3,029	-6,32	2,53; 2,241	-3,653
L6 e L8	2,93 - 2,1	-5,27	3,562; 2,104	-5,762	3,029; 1,965	-5,196	2,241; 1,241	-6,41
Comparação ao apoio flexível	37%	27%	40%	43%	43%	74%	-	
	169%	165%	170%	199%	139%	184%		

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

4.3.2.1 Flechas

Nesse pavimento os deslocamentos verticais imediatos obtidos pelo método de Bares apresentaram dimensões quase que iguais aos deslocamentos obtidos pelo MEF sobre apoios rígidos. Quando é considerado o deslocamento do contorno das lajes, pelo MEF sobre apoio flexível o acréscimo de deslocamento torna-se bem acentuado, principalmente na L8, saltando de 0,042 cm no método manual, para 0,43 cm no MEF sobre apoio flexível, justamente por causa da disposição do pilar.

Tabela 30: Flecha imediata das lajes do 2º pavimento pelo MEF e método manual

Laje	FLECHAS IMEDIATAS							
	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
Tipo	Caso 4	Caso 4	Caso 4	Caso 7	Caso 4	Caso 7	Caso 4	Caso 4
Lx (cm)	315	400	315	385	196	400	315	248
λ (Ly/Lx)	1,49	1,13	1,27	1,04	1,51	1,04	1,42	1,61
Ma (kN.cm)	343,0	389,1	242,7	270,2	120,8	287,1	329,7	210,4
lc (cm ²)	11091,7	11091,7	8333,3	8333,3	4266,7	8333,3	11091,7	6075,0
$M_r = \frac{1,5 f_{ct} l_c}{Y_t}$ (kN.cm)	876,2	876,2	724,1	724,1	463,4	724,1	876,2	586,5
g (kN/m ²)	4,130	5,390	3,880	5,350	3,380	5,250	4,130	3,630
q (kN/m ²)	3	1,5	2	1,5	3	1,5	3	3
q* Ψ_2	0,9	0,45	0,6	0,45	0,9	0,45	0,9	0,9
p = g + q (kN/cm ²)	0,000503	0,000584	0,000448	0,000580	0,000428	0,000570	0,000503	0,000453
h (cm)	11	11	10	10	8	10	11	9
Ecs (kN.cm ²)	2699,18	2699,18	2699,18	2699,18	2699,18	2699,18	2699,18	2699,18
α	4,38	3,12	3,73	2,04	4,53	2,04	4,23	4,77
$a = \alpha \frac{p L x^4}{100 E h^3}$ (cm)	0,060	0,130	0,061	0,096	0,021	0,110	0,058	0,042
Flecha (a) MEF rígido (cm)	0,07	0,13	0,06	0,09	0,02	0,12	0,07	0,03
Flecha (a) MEF flexível (cm)	0,11	0,25	0,08	0,21	0,21	0,19	0,29	0,42

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

No deslocamento total acrescentou-se na flecha imediata, o deslocamento vertical diferido no tempo em que considera a fluência do concreto, esse valor total de deslocamento é

comparado com as medidas prescritas na norma ABNT NBR 6118:2014. Neste caso todas as lajes atenderam as prescrições para aceitabilidade sensorial e vibrações excessivas, em lajes sobre apoios flexíveis, a única laje que não atendeu essa exigência foi a L8, por apresentar flecha máxima de 0,97 cm, sendo permitido até 0,71 cm, no quesito de aceitabilidade sensorial.

Tabela 31: Flecha diferida no tempo das lajes do 2º pavimento pelo MEF e método manual

Flecha Imediata	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
Flecha (a) M. Bares	0,06	0,13	0,061	0,096	0,021	0,11	0,058	0,042
Flecha (a) MEF rígido	0,07	0,13	0,06	0,09	0,02	0,12	0,07	0,03
Flecha (a) MEF flexível	0,11	0,25	0,08	0,21	0,21	0,19	0,29	0,42
Flecha diferida								
$at = \{a * (1 + \alpha f)\} (cm)$	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
$\alpha f = \frac{\Delta \varepsilon}{1 + 50 \rho'}$	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32
Flecha (at) M. Bares	0,14	0,30	0,14	0,22	0,05	0,26	0,13	0,10
Flecha (at) MEF rígido	0,16	0,30	0,14	0,21	0,05	0,28	0,16	0,07
Flecha (at) MEF flexível	0,26	0,58	0,19	0,49	0,49	0,44	0,67	0,97
Aceitabilidade sensorial (cm)	0,90	1,14	0,90	1,10	0,56	1,14	0,90	0,71
Vibrações excessivas (cm)	1,26	1,6	1,26	1,54	0,784	1,6	1,26	0,992

Fonte: (AUTORIA PRÓPRIA, 2017).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao incluir a ausência de rigidez das vigas no modelo computacional observou-se que houve uma influência na obtenção dos esforços internos e dos deslocamentos das lajes de concreto armado. No pavimento mais simples, mostrou-se a viabilidade dos cálculos manuais pelas tabelas de Marcus e Bares em que se aproxima muito do Método dos Elementos Finitos com apoios estáticos, gerando resultados praticamente similares. Já na modelagem em que os apoios são constituídos por vigas flexíveis, observa-se um aumento dos momentos fletores, devido à influência da rigidez nas vigas. Em relação aos deslocamentos máximos, todos os resultados obtidos pelas diferentes análises considerando apoios rígidos, quase não se alteraram, quando comparado os deslocamentos de cada laje com a flecha limite imposta em norma, considerando todo o contorno flexível, todas as lajes atenderam a exigência.

Quando se parte para um pavimento de contorno mais difícil, o método simplificado se torna inviável, pois nele as lajes são discretizadas de forma individual, não havendo a interação com os demais elementos constituído pelo pavimento, neste mesmo pavimento ao comparar a flecha limite total com os deslocamentos de cada laje, observou-se que apenas a L8 não atendeu a prescrição de aceitabilidade sensorial.

Portanto, foi visto que tanto o modelo simplificado com a confecção das tabelas de Marcus e Bares como o Método dos Elementos Finitos oferecem resultados satisfatórios para o dimensionamento de lajes maciças de concreto armado. Entretanto, o cálculo que tem como princípio o MEF proporciona a análise de lajes com formas irregulares, sujeitas às mais diversas condições de apoio e de carregamento.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estrutura de concreto. 3º ed. Rio de Janeiro: Abnt, 2014. 238 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: Cargas Para Cálculo de Estruturas de Edificações. 1 ed. Rio de Janeiro: Abnt, 1980. 5 p. ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. 1995. Catálogo ABNT. Rio de Janeiro. 360p.

ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado**. 3. ed. Rio Grande: Dunas, 2010. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAgmfoAB/curso-concreto-armado-jose-milton-araujo-volume-2>>. Acesso em: 25 out. 2017.

AZEVEDO, Alvaro Ferreira Marques. **Método dos Elementos Finitos**. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003. 258 p. Disponível em: <http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano5/mnae/Livro_MEF_AA.htm>. Acesso em: 25 dez. 2017.

BANKI, A.L. e Coelho, J.A., 2013, **Modelo de Análise de Lajes de Concreto Armado**, Disponível em <http://faq.altoqi.com.br/content/245/588/pt-br/modelos-de-an%C3%A1lise-de-lajes-de-concreto-armado.html>. Acesso em: 16 Jul. 2017.

BASTOS, Paulo Sergio dos Santos. **Estruturas de concreto armado**. 2014. Disponível em <<http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/Introducao.pdf>>. Acesso em: 07 jul. 2017.

BASTOS, Paulo Sergio dos Santos. **Estruturas de concreto armado**. 2015. Disponível em < <http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/Lajes.pdf> >. Acesso em: 08 jul. 2017.

BUENO, Jeferson Rafael. **Influência da flexibilidade de Vigas de Apoio no Projeto de Lajes Maciças de Concreto Armado**. 2013. 196 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013

CARNEIRO, Ronaldson. **Estruturas de concreto II**. 2008. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfB9IAI/estruturas-concreto-ii>>. Acesso em: 08 jul. 2017.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jason Rodrigues de. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado – segundo a NBR 6118:2003**. 2. Ed. São Carlos: UFSCar, 2004. 374 p. il.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jason Rodrigues de. **Calculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2003**. 3. ed. São Carlos: Edufscar, 2007. 368 p.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jason Rodrigues de. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2003**. 3 ed. São Carlos, 5ª reimpressão: Editora EdUFSCar, 2013.

CARVALHO, Roberto Chust; PINHEIRO, Libânio Miranda. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: volume 2. São Paulo: Pini, 2009.

CLÍMACO, João Carlos Teatili de Souza. **Estruturas de Concreto Armado: Fundamentos de Projeto, Dimensionamento e Verificação**. 2. ed. Brasília: Editora Unb: Finatec, 2013. 410 p.

FAKURY, Ricardo Hallal; SILVA, Ana Lydia Reis de Castro e; CALDAS, Rodrigo Barreto. **Dimensionamento de Elementos Estruturais de Aço e Mistos de Aço e Concreto**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016. 494 p.

FAY, Liliana. **Estruturas Arquitetônicas Composição & Modelagem**. 2006. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/conteute/ABAAhEjoAC/estruturas-arquitetonicas-composicao-modelagem>>. Acesso em: 17 mai. 2017

FUSCO, Péricles Brasiliense. **Técnica de Armar as Estruturas de Concreto**. 2. ed. São Paulo: Pini, 2013. 395 p

GIONGO, José Samuel. **Concreto armado: Dimensionamento considerando o estado limite último de elementos estruturais lineares submetidos a ação do momento fletor**. 2009. 61 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

GUESSI, Diorges Evandro. **Análise de Lajes Maciças em Concreto Armado com Plastificação**. 2017. 164 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

KIMURA, Alio. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado: cálculos de edifícios com o uso de sistemas computacionais**. 1^o Ed. São Paulo: Editora PINI LTDA, 2007.

LEET, Kenneth M.; UANG, Chia-ming; GILBERT, Anne M. **Fundamentos da análise estrutural**. 3. ed. São Paulo: Amgh Editora Ltda, 2010. 810 p. Disponível em: <www.feis.unesp.br/Home/.../pos.../fundamentos-da-analise-estrutural-leet-2.pdf>. Acesso em: 17 mai. 2017.

PINHEIRO, Libânio Miranda. **Fundamentos do Concreto e Projeto de Edifícios**. 2007. Disponível em: <http://coral.ufsm.br/decc/ECC1006/Downloads/Apost_EESC_USP_Libanio.pdf>. Acesso em: 09 jul. 2017.

PINHEIRO, Libânio M.; MUZARDO, Cassiane D.; SANTOS, Sandro P. Lajes Maciças. São Paulo, 2003. Disponível em: <<http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/concreto/Textos/11%20Lajes%20Macicas.pdf>>. Acesso em: 09 jul. 2017.

PORTO, Thiago Bomjardim; FERNANDES, Danielle Stefane Gualberto. **Curso Básico de Concreto Armado Conforme NBR 6118/2014**. São Paulo: Oficina de Textos, 2015. 210 p.

SOUZA, Marcel B. S. **Análise comparativa de áreas de armadura em lajes de concreto armado utilizando tabelas de Czerny e o método dos elementos finitos**. Goiás, 2003. Disponível em <http://www2.ucg.br/nupenge/pdf/Marcel_Bruno_Silveira_e_Souza.pdf>. Acesso em: 25 nov. 2017.

