



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

MARIANA LOPES NOGUEIRA

**CIRCUITOS ELÉTRICOS MODELADOS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ESPECIAIS**

PAU DOS FERROS – RN

2018

MARIANA LOPES NOGUEIRA

**CIRCUITOS ELÉTRICOS MODELADOS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ESPECIAIS**

Monografia apresentada à Banca Examinadora do Curso Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor
(UFERSA – Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros)

PAU DOS FERROS – RN

2018

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

N778c Nogueira, Mariana.
CIRCUITOS ELÉTRICOS MODELADOS POR EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ESPECIAIS / Mariana Nogueira. - 2018.
32 f. : il.

Orientador: Otávio Paulino Lavor .
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2018.

1. Circuito RC. 2. Circuito RL. 3. Circuito
RLC. 4. Equação de Cauchy-Euler. 5. Equações de
Bessel. I. Paulino Lavor , Otávio, orient. II.
Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS

**CIRCUITOS ELÉTRICOS MODELADOS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ESPECIAIS**

MARIANA LOPES NOGUEIRA

Monografia apresentada à Banca Examinadora do Curso Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semiárido em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

APROVADA EM: 13 / 04 / 2018

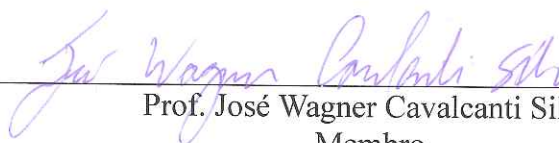
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor
Orientador



Prof. Antonio Diego Silva Farias
Membro



Prof. José Wagner Cavalcanti Silva
Membro

*Dedico este trabalho aos meus pais **Cleidimar Pereira Lopes Nogueira** e **Francisco Salves Nogueira**, assim como a minha irmã **Viviane Lopes Nogueira**, por todo amor e incentivo, acreditando sempre no meu melhor.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço principalmente a minha mãe, Cleidimar Pereira Lopes Nogueira, que desde pequena me incentiva a estudar e ser cada vez melhor. Obrigada por sempre acreditar em mim, nas inúmeras vezes que eu achava que não conseguiria entender. Muito obrigada por sua determinação, espero que um dia eu possa ser tão determinada quanto. Ainda, lhe agradeço por tudo que deixaste de fazer para que eu pudesse ter um estudo e um futuro melhor e espero continuar esta trajetória, que me ensinaste quão difícil, mas satisfatória é a caminhada.

A minha irmã, Viviane Lopes Nogueira, agradeço por todos os momentos que tentou me ensinar a praticidade e ao cuidado que sempre teve comigo. Espero que essa minha pequena conquista sirva de estímulo para que você consiga galgar com cada vez mais ânimo a seu êxito na entrada da faculdade de medicina.

Ao meu orientador, o professor Dr. Otávio Paulino Lavor, pela confiança em mim não só neste trabalho, mas ao longo da trajetória nesta graduação. E ainda por servir de inspiração, mostrando que através da força de vontade podemos vencer diversos obstáculos e seguir em frente com confiança.

A todos os professores da UFERSA que, com certeza, de alguma forma influenciaram positivamente no aprendizado tanto no espaço da universidade quanto fora deste espaço.

Aos amigos que partilham comigo até esse momento todas as alegrias e agonias desde o início deste curso. Aos que aqui conheci, bem como a uma grande amiga, Giseli Allende, que apesar do pouco tempo que permanecemos juntas no curso, pôde contribuir imensamente com essa pequena jornada e construir uma grande amizade. Muito obrigada.

Agradeço ainda a todos os meus familiares e amigos de toda vida escolar, que de alguma forma estão presente nesta caminhada.

Muito obrigada a todos, vocês são parte desta conquista!

“Meu espírito. Isso é uma novidade. Não sei exatamente o que significa, mas indica que eu sou uma lutadora. De uma maneira mais ou menos corajosa. Não sou sempre antipática. Tudo bem, não saio por aí amando todo mundo que encontro pelo caminho, meus sorrisos não aparecem com facilidade, mas me importo com as pessoas.”

Jogos Vorazes (Suzanne Collins).

RESUMO

Circuitos elétricos são amplamente usados nos diversos dispositivos que se tem acesso, sendo seus principais componentes resistores, capacitores e indutores. Tais elementos quando associados causam diferentes comportamentos na carga elétrica que os interliga e que pode ser avaliado através das leis de Kirchhoff. Sendo que o fator mais peculiar sobre o qual se pode analisar tal comportamento é o tempo. A variação temporal de cargas e correntes podem ser avaliadas mediante modelagem matemática e uso de equações diferenciais a fim de se prever o comportamento final destas. É através da identificação de equações de Cauchy-Euler e de Bessel que este trabalho irá verificar o comportamento analítico da carga e corrente elétrica para circuitos RC, RL e RLC.

Palavras-Chave: Circuito RC. Circuito RL. Circuito RLC. Equação de Cauchy-Euler. Equações de Bessel.

ABSTRACT

Electrical circuits are widely used in the various devices that have access, being its main components resistors, capacitors and inductors. Such elements when associated cause different behaviors in the electric charge that interconnects them and that can be evaluated through the laws of Kirchhoff. Since the most peculiar factor on which such behavior can be analyzed is time. The temporal variation of loads and currents can be evaluated through mathematical modeling and the use of differential equations in order to predict the final behavior of these. The temporal variation of loads and currents can be evaluated through mathematical modeling and the use of differential equations in order to predict the final behavior of these. It is through the identification of Cauchy-Euler and Bessel equations that this work will verify the analytical behavior of the load and electric current for RC, RL and RLC circuits.

Keywords: RC circuit. RL circuit. RLC circuit. Equation of Cauchy-Euler. Equations of Bessel.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Circuito RC	22
Figura 2 – Circuito RL	23
Figura 3 – Circuito RLC	24

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	111
2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	14
2.1 EQUAÇÃO DE CAUCHY- EULER	16
2.2 EQUAÇÃO DE BESSEL.....	19
3 CIRCUITOS ELÉTRICOS	21
3.1 CIRCUITO RC	21
3.2 CIRCUITO RL	23
3.3 CIRCUITO RLC	24
4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	26
4.1 CIRCUITO RC COMO UMA EQUAÇÃO DE CAUCH-EULER	26
4.2 CIRCUITO RL COMO UMA EQUAÇÃO DE CAUCH-EULER.....	27
4.3 CIRCUITO RLC COM RESISTÊNCIA VARIÁVEL COMO FUNÇÃO DE BESSEL	29
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	311
REFERÊNCIAS	32

1 INTRODUÇÃO

Desde a descoberta da eletricidade por Tales de Mileto, diversas explorações sobre este tema foram feitas, seja por Oersted, Michael Faraday, Maxwell ou Henri Hertz, dentre outros. Destas explorações surgiram os diversos equipamentos utilizados atualmente, dispositivos que funcionam a partir da passagem de corrente elétrica entre seus terminais. Dos quais pode-se citar: capacitores, resistores, termistores, dielétricos e indutores que podem formar um sistema fechado formando circuitos, dos quais tem-se que os mais comuns são circuito RC, RL e RLC.

Os circuitos elétricos são os meios que permitem a distribuição da corrente elétrica entre os aparelhos que os constituem e de acordo com tais equipamentos possuem comportamentos diversos.

Para realizar a correta aplicação deste recurso é necessário prever o comportamento da corrente bem como da tensão que o sistema estará submetido no transcorrer de determinado tempo, a fim de evitar sobrecargas, curtos-circuitos e diversos inconvenientes em celulares, motores, computadores, TVs, dentre tantos equipamentos utilizados habitualmente. Tais previsões são realizadas por modelagens matemáticas, através de equações diferenciais.

Como nem todos os circuitos são iguais, tampouco estão sobre a influência de fatores isolados, sofrem variações em seus componentes, principalmente ao que tange a resistência. Visto que tal dispositivo impede a passagem livre de corrente, quando esta varia, também o faz variar, bem como a temperatura, que pode alternar com transcorrer do tempo.

O circuito RC é formado por dois dispositivos, um capacitor que é “responsável pelo acúmulo de cargas para liberá-la no momento certo” KÍTOR (2017), e um resistor, nas extremidades de cada um desses dispositivos existe uma diferença de potencial. No circuito quando a chave é fechada a corrente de elétrons fluirá pelo circuito aumentando assim a cargas no capacitor, sendo que os valores da corrente variam com o tempo e circulam em um único sentido (YOUNG; FREEDMAN, 2009).

O circuito RL tem como componentes um resistor e um indutor. Os resistores têm como principal característica a transformação de energia elétrica em energia térmica, já os indutores transformam energia elétrica em energia magnética. O indutor é um fio condutor enrolado em forma helicoidal e quando a corrente circula por esse dispositivo aparece um campo magnético ao redor dele. Este tem uma grandeza característica que fornece a intensidade com que irá responder a alteração da corrente, esta grandeza se chama indutância,

representada pela letra L e tem como unidade de medida o Henry (H) (YOUNG; FREEDMAN, 2009).

O circuito RLC além de ser formado por um indutor e um capacitor possui a representação de um resistor. A indutância (L) gerada pelo indutor, representado por uma espira no diagrama do circuito, promove o armazenamento de energia magnética. Usualmente o circuito é conectado com duas chaves, na qual o capacitor é carregado e posteriormente é desconectado com a fem e ligado em série ao resistor e indutor.

Através da lei das malhas de Kirchhoff, obtém-se o comportamento da carga e corrente que fluem pelos sistemas. Na literatura, este tema é bem abordado levando em consideração que a resistência é constante. Para os casos de resistência variável, seja linear ou quadrática no tempo, faz-se necessária nova modelagem matemática, assim como grande maioria dos problemas cotidianos.

Dentre estas equações, encontram-se as equações diferenciais (E.D) que permitem a relação de uma variável com suas derivadas, como o caso da velocidade e aceleração ou carga elétrica e corrente. No estudo de carga e corrente, os circuitos elétricos podem apresentar resistência constante ou variável. O caso de resistência constante é bem encontrado na literatura e o caso de resistência é apresentado em algumas situações com dependência temporal em circuitos. Buscando uma compreensão e desenvolvimento deste campo de estudo, esta pesquisa teve as seguintes questões de partida: é possível modelar circuitos submetidos a resistências não constantes com equações diferenciais? Como as resistências podem se apresentar? As equações podem ser solucionadas analiticamente?

Isto posto, é de grande importância para engenharia a possibilidade de aferir resultados sobre corrente e tensão elétrica em circuitos com resistência variável, como se evidenciou neste trabalho, com o intuito de possibilitar o desenvolvimento e aprimoramento dos sistemas elétricos, tão comumente aplicados.

Assim, o trabalho no seu desenvolvimento estrutura-se inicialmente com apresentação dos principais aspectos teóricos e conceituais sobre a temática abordada, explanando inicialmente uma abordagem conceitual sobre equações diferenciais, bem como algumas das diversas formas de resolução conhecidas. No segundo momento, ressalta-se os tipos de circuitos elétricos mais usuais e como seus dispositivos funcionam para promover o efeito desejado sobre a corrente que os percorrem. O trabalho tem como objetivo geral identificar o comportamento matemático da carga e corrente elétrica em circuitos com resistências variáveis no decorrer do tempo. E como objetivo específico propõe-se compreender a resistência variável em circuitos elétricos, modelar circuitos elétricos com

resistência variável como equações diferenciais especiais e por fim, obter soluções analíticas para carga e corrente em circuitos com resistência variável. Para isto, recorre-se a uma metodologia descritiva, na qual, através de revisão bibliográfica buscou-se verificar o comportamento que circuitos elétricos podem apresentar mediante variações temporais de resistência elétrica.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equação diferencial é uma equação que envolve derivadas das variáveis dependentes em relação a variáveis independentes. Devido a sua grande diversidade podem ser classificadas quanto ao: tipo de derivada que apresenta (simples ou parcial), número de funções desconhecidas, a ordem das derivadas e à linearidade destas (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Aspectos como ordem, classificam a equação pelo grau da derivada mais alta, bem como a linearidade que requer “... (1) a variável dependente e suas derivadas possuem grau um e (2) seus coeficientes dependerem apenas da variável independente.”(ÇENGEL; PALM III, 2014, p.16).

A respeito destas equações que possuem derivadas de somente uma variável, chama-se Equação Diferencial Ordinária (EDO). As quais modelam diversas situações do cotidiano, como a velocidade de disseminação de doenças, mudanças populacionais e descrições do movimento de queda utilizando a aceleração como a derivada da velocidade no tempo e a resistência do ar γ , mostrada na equação (2.1).

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \quad (2.1)$$

A solução destas equações é encontrada quando a substituindo (e suas derivadas) na equação e obtém-se a verificação da igualdade. Contudo, muitas vezes não será possível obter-se soluções explícitas, isto é, em função de uma única variável; mas implícitas, como $G(x,y)=0$ (ZILL; CULLEN, 2014).

O método de resolução destas equações pode ser muitas vezes de forma simplificada, aplicando integrais; outrora se faz necessário fazer um rearranjo matemático, principalmente nas equações lineares. Mas há sistemas que é essencial realizar mudanças de variáveis a fim de tornar-las lineares e assim obter-se suas soluções. Estas são chamadas de equações especiais, e de acordo com o tipo de mudança de variável realizada, atribui-se o nome ao autor que primeiro a descreveu. Por exemplo: Equações de Bernoulli, Equação de Cauchy-Euler, Equações de Clairaut, dentre outras (BASSANEZI, 2012).

As Equações diferenciais, principalmente as EDOs são de grande valia para a modelagem matemática de problemas reais, como os citados. Entretanto, é necessário “a identificação das variáveis responsáveis pela variação do sistema” (ZILL, 2016, p.21), avaliação do intervalo em que se avalia aquele comportamento, o estabelecimento de

hipóteses e a verificação do comportamento final, a fim de prever o comportamento que o processo se desenvolve.

Dentre as diversas classificações das equações diferenciais, verifica-se a relacionada homogeneidade. Nas quais, equações homogêneas são do tipo

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = 0 \quad (2.2)$$

Que é uma equação homogênea de segunda ordem. Já as equações não homogêneas, da mesma ordem da equação (2.2) são como (2.3)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = G(x) \quad (2.3)$$

Para equações como a (2.2), a solução geral é chamada de solução homogênea. Enquanto para (2.3), tem-se além da solução anterior, tem-se outra, denominada solução particular que não envolve quaisquer constantes, como é característico das primeiras (ZILL; CULLEN, 2001).

Para demonstrar que em equações do tipo não homogênea a solução é dada por

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p \quad (2.4)$$

Zill e Cullen (2001) supõem y_p e y como soluções de equações do tipo (2.3), a primeira como solução não homogênea e a segunda, como uma solução arbitrária. E por serem soluções, irão satisfazer a equação, como mostra (2.5) e (2.6). De modo que as substituindo realizando a subtração das mesmas, observa-se que se obtém se uma equação homogênea (2.7), surgindo assim uma nova relação.

$$\frac{d^2 y_p}{dx^2} + P(x) \frac{dy_p}{dx} + Q(x) y_p = G \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = G \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 (y - y_p)}{dx^2} + P(x) \frac{d(y - y_p)}{dx} + Q(x) (y - y_p) = 0 \quad (2.7)$$

A relação mostra $y - y_p$ que é suficiente para obtenção de uma solução homogênea

$$y - y_p = y_h \Rightarrow y = y_h + y_p \quad (2.8)$$

Para obtenção de uma solução particular, têm-se como ferramentas o método dos coeficientes indeterminados e o método de variação de parâmetros. No qual o primeiro consiste em utilizar hipóteses com coeficientes desconhecidos, que são obtidos substituindo a

provável solução na equação original e satisfazendo-a. Contudo, para $G(x)$, “O requisito básico... é que tenha somente um número finito de derivadas linearmente independentes.” (ZILL; CULLEN, 2001). Para isto, segundo Zill (2016) “ $g(x)$ é uma constante k , uma função polinomial, uma função exponencial $e^{\alpha x}$, uma função seno ou cosseno $\sin \beta x$ ou $\cos \beta x$, ou somas e produtos finitos dessas funções.”

2.1 EQUAÇÃO DE CAUCHY-EULER

Equações de Cauchy-Euler se enquadram em equações diferenciais que possuem ordem superior, isto é, apresentar derivada de ordem maior que 1, como de segunda, terceira e quarta ordem. Dentre tais equações superiores, se subdivide nas que possuem coeficientes constantes e as que possuem coeficientes variáveis.

Equações de Cauchy-Euler se enquadram em equações com coeficientes variáveis, uma vez que “O grau de cada coeficiente monomial coincide com a *ordem* de derivação” (ZILL; CULLEN, 2001, p.276), sendo ainda chamadas de equações equidimensionais. Mas ainda assim sua solução é análoga as equações com coeficientes constantes, sendo necessário solucionar uma equação auxiliar, e apresentando a solução final em potências de x , seno, cosseno e funções logaritmas (ZILL, 2016). E não como series infinitas, como é o caso das equações de Bessel e demais soluções para equações diferenciais de ordem superior.

São apresentadas na forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \quad (2.1.1)$$

Deve-se atentar ao fato de que em $x=0$ o primeiro termo da equação (2.1.1) é zero. Assim, para garantir que haja soluções únicas tal valor deve ser não nulo, $a_n(x) \neq 0$.

Utilizando uma equação homogênea de segunda ordem para demonstrar o método de resolução

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (2.1.2)$$

A solução buscada pode ser dada na forma $y = x^m$, e suas derivadas

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \quad (2.1.3)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2} \quad (2.1.4)$$

As quais, substituídas em (2.1.2) e já simplificando as potências

$$\begin{aligned} ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy &= am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m \Rightarrow \\ ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy &= (am(m-1) + bm + c)x^m \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Sendo necessária a resolução da equação auxiliar que pode se apresentar nas seguintes formas

$$am(m-1) + bm + c = 0 \quad (2.1.6)$$

$$am^2 + (b-a)m + c = 0 \quad (2.1.7)$$

As raízes das equações (2.1.6) ou (2.1.7) podem se apresentar de três formas: reais e distintas, repetidas ou complexas conjugadas. Se a equação (2.1.7) assumir raízes reais e distintas (m_1 e m_2), de acordo do com a forma assumida para as soluções de equações de Cauchy-Euler, a solução geral será do tipo

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \quad (2.1.8)$$

Já se forem raízes repetidas ($m_1 = m_2$) a equação (2.1.7) assumirá que

$$m = -\frac{(b-a)}{2a} \quad (2.1.9)$$

Como se tem umas das soluções $y_1 = x^m$, supõe-se a outra $y_2 = v x^m$. De forma que

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{dv}{dx} x^m + mv x^{m-1} \quad (2.1.10)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dx^2} x^m + 2mx^{m-1} \frac{dv}{dx} + (m-1)mv x^{m-2} \quad (2.1.11)$$

,que substituindo em (2.1.2)

$$\begin{aligned} ax^2 \left[\frac{d^2 v}{dx^2} x^m + 2mx^{m-1} \frac{dv}{dx} + (m-1)mv x^{m-2} \right] + bx \left[\frac{dv}{dx} x^m + mv x^{m-1} \right] + cv x^m &= 0 \Rightarrow \\ ax^{m+2} + 2amx^{m+1} \frac{dv}{dx} + am(m-1)x^m v + bx^{m+1} \frac{dv}{dx} + bmv x^m + cv x^m &= 0 \Rightarrow \\ ax^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + [2am + b]x \frac{dv}{dx} + [am(m-1) + bm + c]v &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Substituindo (2.1.6) e (2.1.9) em (2.1.12), obtém-se

$$ax^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + ax \frac{dv}{dx} = 0 \quad (2.1.13)$$

$$x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + x \frac{dv}{dx} = 0 \quad (2.1.14)$$

Tomando

$$\frac{dv}{dx} = u \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{du}{dx} \quad (2.1.15)$$

e substituindo em (2.1.14) é possível simplificar a

$$x \frac{du}{dx} + u = 0 \Rightarrow x du + u dx = 0 \quad (2.1.16)$$

Que é uma equação exata, podendo ser resolvida de acordo com tal método

$$f(x, y) = \int x \partial u \quad (2.1.17)$$

$$f(x, y) = xu + g(x), \quad (2.1.18)$$

fazendo a primeira derivada e igualando ao termo auxiliar a dx

$$\frac{df}{dx} = u + \frac{dg(x)}{dx} = u \quad (2.1.19)$$

De forma que

$$\frac{dg(x)}{dx} = 0 \Rightarrow g(x) = c_1 \quad (2.1.20)$$

Obtendo

$$f(x, y) = xu + c_1 \quad (2.1.21)$$

Para obter u , tome $f(x, y) = c_2$, então

$$xu + c_1 = c_2 \quad (2.1.22)$$

$$xu = c_3 \Rightarrow u = \frac{c_3}{x} \quad \therefore c_3 = c_2 - c_1 \quad (2.1.23)$$

Como foi tomado em (2.1.15), pode-se substituir (2.1.23) e obter que

$$v = \int u dx = \int \frac{c_3}{x} dx$$

$$v = c_3 \ln x + c_4 \quad (2.1.24)$$

Tomando v mais simples $v = \ln x$. Logo

$$y_2 = x^m \ln x \quad (2.1.25)$$

Sendo a solução geral expressa por

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x \quad (2.1.26)$$

No caso de raízes complexas da equação (2.1.7), é do tipo

$$m = \alpha \pm i\beta \quad (2.1.27)$$

e que as soluções seriam

$$y_1 = x^{\alpha+i\beta}; y_2 = x^{\alpha-i\beta} \quad (2.1.28)$$

De modo que podem ser ajustadas, manipulando-as com funções logaritmas. Que para uma das soluções, torna-se

$$y_1 = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha (e^{\ln x})^{i\beta} \Rightarrow y_1 = x^\alpha e^{i(\beta \ln x)} \quad (2.1.29)$$

Ainda, a exponencial pode ser colocada em termo das funções seno e cosseno, obtendo para as duas soluções

$$y_1 = x^\alpha [\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)] \quad (2.1.30)$$

$$y_2 = x^\alpha [\cos(\beta \ln x) - i \operatorname{sen}(\beta \ln x)] \quad (2.1.31)$$

Tomando $w = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{y_1 - y_2}{2i}$, tem-se

$$w = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad (2.1.32)$$

$$z = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x) \quad (2.1.33)$$

$$y = c_1 w + c_2 z$$

$$y = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)] \quad (2.1.34)$$

Que consiste na solução geral em casos de raízes complexas de equações de Cauchy-Euler.

2.2 EQUAÇÃO DE BESSEL

Equações de Bessel são assim denominadas em homenagem ao astrônomo Friedrich W. Bessel que estudou tais equações ao desenvolver seu trabalho sobre movimento planetário (ZILL; CULLEN, 2001). Contudo, essas equações são de amplo emprego nas áreas de física e engenharia. A equação de Bessel de ordem ν é dada pela equação (2.2.1), enquanto a equação modificada de Bessel é dada por (2.2.2). Ambas podem ser verificadas como configurações da equação (2.2.3), em torno do ponto singular $x_0=0$.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (2.2.1)$$

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) y = 0 \quad (2.2.2)$$

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) P(x) y' + Q(x) y = 0 \quad (2.2.3)$$

As soluções de Bessel serão determinadas em sua forma geral, de ordem ν , pela solução:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \quad (2.2.4)$$

Em que a função de primeiro tipo é apresentada por $J_\nu(x)$ e a de segundo por $Y_\nu(x)$

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! (n+\nu)!} \quad (2.2.5)$$

$$Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_\nu(x) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-n-1)! x^{2n-\nu}}{2^{2n-\nu} n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (S_n + S_{n+\nu}) x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! (n+\nu)!} \right] \quad (2.2.6)$$

Mas também se pode utilizar a função gama, $\Gamma(\nu)$ (2.2.7), que representa melhor se ν não for inteiro.

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt \quad (2.2.7)$$

Logo:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(n+\nu+1)} \quad (2.2.8)$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-\nu}}{2^{2n-\nu} n! \Gamma(n-\nu+1)} \quad (2.2.9)$$

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (2.2.10)$$

Em que, as equações acima apresentam os termos das soluções de Bessel em termos da função gama.

3 CIRCUITOS ELETRICOS

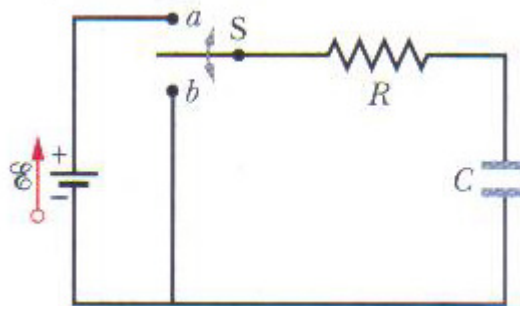
Circuitos elétricos são sistemas fechados formados por diferentes equipamentos (capacitor, gerador, indutor, resistência, etc.) que permitem o fluxo de corrente elétrica entre eles, proporcionando “um caminho para transferir *energia* de um local para outro” (YOUNG; FREEDMAN, 2009, p. 135). Logo, de acordo com os equipamentos contidos, o circuito possui diferentes denominações e características, no qual através das leis das malhas de Kirchhoff é possível relacioná-los e descrever o comportamento do conjunto. Uma vez que para averiguação de Kirchhoff é considerado um circuito com campo magnético nulo e assim estabelecer o somatório das quedas de tensão (NUSSENZVEIG, 1997).

Os circuitos são formados por diversos componentes, dentre os principais, tem-se o resistor (R), que impede a passagem livre de corrente; o capacitor (C) promove o acúmulo de carga elétrica através da capacitância que “é a medida da capacidade de armazenar energia de um dado capacitor” (YOUNG; FREEDMAN, 2009, p. 105) e o indutor (L), formado por espiras ao longo de um eixo que devido à formação de um campo magnético gera uma corrente em sentido contrário a do circuito e assim impede mudanças bruscas no fluxo elétrico (SANTOS, 2011). Ademais se tem a fonte de tensão, fonte de corrente, disjuntor, reostato, dentre outros elementos podendo compor um circuito.

Dentre os circuitos que possuem elementos além do resistor, têm-se os mais, simples, caracterizados como circuitos de primeira ordem. “Estes circuitos são denominados, respectivamente, circuito RC e RL, e apesar de sua simplicidade, têm inúmeras aplicações em eletrônica, comunicações e sistemas de controle...”(ALEXANDER; SADIKU, 2013, p.224) e são caracterizados por equações diferenciais.

3.1 CIRCUITO RC

O circuito RC é formado por um resistor e um capacitor ligados em série. O resistor tem a função de impedir o fluxo livre de carga ao conferir resistência a esta. Já o capacitor, ao conter energia em seu campo eletrostático, gera uma diferença de potencial entre os terminais das placas que pode, quando necessário, ser descarregado sobre o circuito, fazendo com que elementos como lâmpada de flash, pulsos de laser, dentre outros equipamentos funcionem (HALLIDAY; RESNICK; KRANE, 2012).

Figura 1: Circuito RC

Fonte: HALLIDAY; RESNICK (2009)

Em condições ideais, ignora-se a resistência interna da fonte de tensão, considerando que o valor fornecido por ela é transmitido integralmente ao circuito, isto é, um gerador ideal.

$$\mathcal{E} = V \quad (3.1.1)$$

Assim, pela lei das malhas de Kirchhoff, a soma das tensões sobre cada componente do circuito oferece a tensão total cedida pela fonte, logo pela figura 1, tem-se

$$\mathcal{E} = V_C + V_R \quad (3.1.2)$$

Mas como a corrente percorre todos os componentes do circuito desta, e que se tem um capacitor e um resistor, com equação de resistência descrita pela lei de ohm e definição de capacitância, respectivamente, $R = V_R / I$; $C = q / V_C$ Tem-se que:

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} + RI \quad (3.1.3)$$

Contudo, como o capacitor promove o acumulo de cargas, há variação das cargas (corrente), obtendo a equação geral, na forma diferencial do circuito RC.

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} R \quad (3.1.4)$$

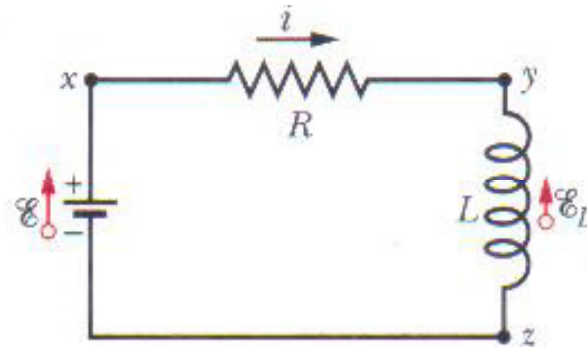
$$\mathcal{E} = \frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C} \quad (3.1.5)$$

Cuja solução é

$$q = \mathcal{E}C \left(1 - e^{-t/RC} \right) \quad (3.1.6)$$

3.2 CIRCUITO RL

Figura 2: Circuito RL



Fonte: HALLIDAY; RESNICK (2009)

Formado por uma resistência R e um indutor L , como mostra a figura 2, descreve um comportamento diferente ao circuito RC. Sendo através das conclusões obtidas por Faraday em seus experimentos (através de rotações de imãs e fios em torno um dos outros) que se chegou à conclusão que a variação do fluxo magnético que atravessa um circuito produz uma tensão, e esta por sua vez origina uma corrente. Assim, analisando o circuito RL, é possível verificar, que o que ocorre é uma auto-indução, isto é, há a passagem de corrente no circuito, mas quando esta varia promove variação do campo, logo do fluxo que promove uma tensão nos terminais do indutor.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.2.1)$$

Mas, como o fluxo magnético e a corrente são proporcionais, tem-se como constante de proporcionalidade, que origina a tensão, a indutância denotada por L , e que depende somente de características geométricas e das propriedades magnéticas. Logo $\Phi = Li$.

Assim a lei de Faraday para a um indutor pode ser descrita como

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} \quad (3.2.2)$$

Mas, de acordo com o sentido da corrente percorrendo o circuito, temos que

$$V_L = L \frac{di}{dt} \quad (3.2.3)$$

Assim, pela lei das malhas de Kirchhoff, a tensão total cedida ao circuito pode ser descrita como:

$$\mathcal{E} = V_L + V_R \quad (3.2.4)$$

$$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + iR \quad (3.2.5)$$

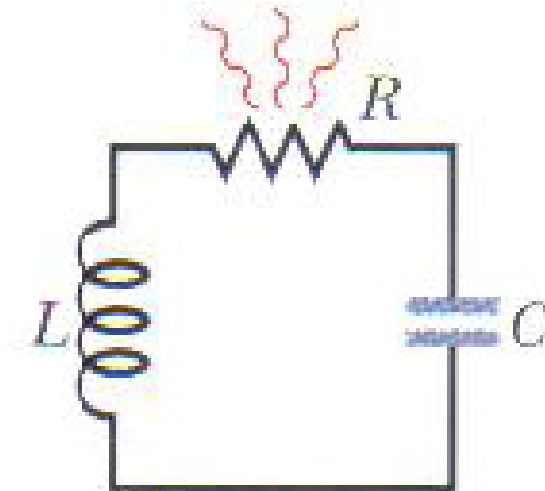
Que possui como solução

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-Rt/L} \right) \quad (3.2.6)$$

3.3 CIRCUITO RLC

Formado por um resistor de resistência R , indutor com indutância L e um capacitor de capacitância C , o comportamento de tal sistema é verificado através da figura 3, em que o capacitor é descarregado sobre os elementos do circuito em série.

Figura 3: Circuito RLC



Fonte: HALLIDAY; RESNICK (2009)

Aplicando a lei das malhas de Kirchhoff sobre o circuito, sabendo que se têm as tensões sobre o resistor, indutor e capacitor, respectivamente, tem-se a equação

$$-\frac{dq}{dt}R - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad (3.3.1)$$

Como a corrente i se refere à variação da carga elétrica no tempo dq/dt e dividindo todos os termos da equação acima pelo negativo da indutância ($-L$), a equação do circuito RLC pode ser descrita pela equação diferencial

$$\frac{dq^2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (3.3.2)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad , \quad (3.3.3)$$

Em que a equação (3.3.3) equivale a (3.3.2) multiplicada pela indutância (L) e em termos da corrente como variação da carga elétrica no tempo. E que a solução pode ser dada por

$$q = Qe^{-Rt/2L} \cos(\omega't + \phi) \quad \therefore \quad \omega' = \sqrt{\omega - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (3.3.4)$$

4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1. CIRCUITO RC COMO UMA EQUAÇÃO DE CAUCH-EULER

Segundo as leis de Kirchhoff para o circuito RC, a tensão é descrita como:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon \quad (4.1.1)$$

Adotando a resistência variável, como mostra a equação (4.1.2), temos que o circuito será descrito por (4.1.3)

$$R = a + bt \quad (4.1.2)$$

$$(a + bt) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon, \quad (4.1.3)$$

fazendo a substituição por x e derivando, pode-se redefinir a equação (4.1.3) pela equação (4.1.6).

$$x = a + bt \quad (4.1.4)$$

$$\frac{dq}{dt} = b \frac{dq}{dx} \quad \therefore \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (4.1.5)$$

$$xb \frac{dq}{dx} + \frac{1}{C} q = \varepsilon, \quad (4.1.6)$$

que é uma equação de Cauchy-Euler com $n=1$, então:

$$q = x^m \quad (4.1.7)$$

$$\frac{dq}{dx} = mx^{m-1} \quad (4.1.8)$$

De forma que, como não há variáveis de x após a igualdade em (4.1.6), o que a torna homogênea.

$$\begin{aligned} bmx^{m-1} + \frac{1}{C} x^m &= 0 \Rightarrow bmx^m + \frac{1}{C} x^m = 0 \Rightarrow \\ bm + \frac{1}{C} &= 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{bC} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Logo a solução geral para cargas no circuito RC é

$$q = c_0 x^{-1/bC} \Rightarrow q = c_0 (a + bt)^{-1/bC} \quad (4.1.10)$$

em que c_0 representa uma constante qualquer, que satisfaz as condições iniciais.

4.2 CIRCUITO RL COMO UMA EQUAÇÃO DE CAUCH-EULER

De forma análoga a equação (3.10), ao aplicar a lei de Kirchhoff em um circuito RL, obtemos a equação (4.2.1), que pode ser simplificada dividindo-a pelo produto da resistência e indutância

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \varepsilon \quad (4.2.1)$$

$$\frac{1}{R} \frac{di}{dt} + \frac{1}{L} i = \frac{\varepsilon}{RL} \quad (4.2.2)$$

Para modelagem do problema, diferencial, tem-se uma resistência variável no tempo

$$R = \frac{1}{(a + bt)}, \quad (4.2.3)$$

que em (4.2.2) dá ao circuito o seguinte comportamento

$$(a + bt) \frac{di}{dt} + \frac{1}{L} i = \frac{\varepsilon}{RL} (a + bt) \quad (4.2.4)$$

e fazendo

$$x = a + bt \quad (4.2.5)$$

$$\frac{dx}{dt} = b \quad (4.2.6)$$

E ainda,

$$\frac{di}{dt} = \frac{di}{dx} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = b \frac{di}{dx} \quad (4.2.7)$$

Que substituindo (4.2.5), (4.2.6) e (4.2.7) em (4.2.4), temos que

$$xb \frac{di}{dx} + \frac{i}{L} = x \frac{\varepsilon}{RL} \quad (4.2.8)$$

Para $\varepsilon = 0$, tem-se uma solução homogênea, dada por i_h . Obtendo uma equação de Cauchy-Euler homogênea, que para sua solução supõe-se

$$i_h = kx^m \quad (4.2.9)$$

$$\frac{di_h}{dx} = kmx^{m-1} \quad (4.2.10)$$

A equação (4.2.8) torna-se

$$kxbmx^{m-1} + \frac{kx^m}{L} = 0 \Rightarrow bmx^m + \frac{x^m}{L} = 0 \quad (4.2.11)$$

dividindo-a por kx^m , é possível simplificá-la

$$bm = -\frac{1}{L} \Rightarrow m = -\frac{1}{Lb} \quad (4.2.12)$$

Resultando em

$$i_h = x^{-\frac{1}{Lb}} \quad (4.2.13)$$

No caso de $\mathcal{E} \neq 0$ e constante, a solução é dada por

$$i = i_p + i_h \quad (4.2.14)$$

Para a solução particular i_p , resolve-se a equação (4.2.8) por variação de parâmetros, em que supomos uma solução linear, já que a função variável tem característica linear.

$$i_p = Ax + B \quad (4.2.15)$$

$$\frac{di_p}{dx} = A \quad (4.2.16)$$

E como i_p também é solução da equação (4.2.8), substituímos-a, bem como sua derivada.

$$\begin{aligned} xb \frac{di_p}{dx} + \frac{i_p}{L} &= \frac{x\mathcal{E}}{L} \Rightarrow xbA + \frac{Ax+B}{L} = \frac{x\mathcal{E}}{L} \Rightarrow \\ \frac{xbAL + Ax + B}{L} &= \frac{x\mathcal{E}}{L} \Rightarrow \\ xbAL + Ax + B &= x\mathcal{E} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Igualando os coeficientes, de acordo com sua ordem

$$\begin{aligned} (bl)Ax &= x\mathcal{E} \Rightarrow A = \frac{\mathcal{E}}{bl} \\ B &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

de forma que a solução particular pode ser dada por

$$i_p = \frac{\mathcal{E}}{bL} x \quad (4.2.19)$$

e retomando o valor de x e retomando a equação (4.2.14), a solução geral é dada por

$$i = k(a + bt)^{-1/Lb} + \frac{\mathcal{E}}{bL}(a + bt) \quad (4.2.20)$$

Que demonstra o comportamento da corrente elétrica em um circuito RL com resistência variável no tempo, verificada na equação (4.2.3). Sendo c_1 uma constante arbitrária.

4.3 CIRCUITO RLC COM RESISTÊNCIA VARIÁVEL COMO FUNÇÃO DE BESSEL

Sabendo que para o circuito RLC, a equação que o descreve é a (3.3.3), derivamos-a para observar o comportamento, de forma que obtém-se:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + i \frac{dR}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad (4.3.1)$$

Dividindo (4.3.1) pela indutância

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{1}{L} \frac{dR}{dt} \right) i = 0 \quad (4.3.2)$$

Já, para descrever um comportamento com resistência variável, utilizamos a resistência como descreve a equação (4.3.3).

$$R = \frac{a}{t} \quad (4.3.3)$$

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{a}{t^2}, \quad (4.3.4)$$

que substituindo em (4.3.2)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{L} \frac{a}{t} \frac{di}{dt} + \left[\frac{1}{LC} + \frac{1}{L} \left(-\frac{a}{t^2} \right) \right] i = 0 \quad (4.3.5)$$

$$t^2 \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{a}{L} t \frac{di}{dt} + \left(\frac{t^2}{LC} - \frac{a}{L} \right) i = 0 \quad (4.3.6)$$

Fazendo

$$x^2 = \frac{t^2}{LC} \Rightarrow x = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad (4.3.7)$$

usando a regra do produto, temos as seguintes relações a serem aplicadas.

$$\frac{di}{dt} = \frac{di}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (4.3.8)$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{d^2 i}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{di}{dx} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (4.3.9)$$

Utilizando o valor de x em (4.3.7), verificamos que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.3.10)$$

Logo, como a derivada segunda é nula, a expressão (4.3.9) poderá ser simplificada a

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right)^2 \frac{d^2 i}{dx^2} = \left(\frac{1}{LC} \right) \frac{d^2 i}{dx^2} \quad (4.3.11)$$

Voltando a equação (4.3.6), e substituindo os termos em função de x , obtém-se que

$$x^2 \frac{d^2 i}{dx^2} + \frac{ax}{L} \frac{di}{dx} + \left(x^2 - \frac{a}{L} \right) i = 0 \quad (4.3.12)$$

Em que as soluções são dadas por

$$J_{\sqrt{\frac{a}{L}}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+\sqrt{\frac{a}{L}}}}{n! \Gamma\left(n + \sqrt{\frac{a}{L}} + 1\right)} \quad (4.3.13)$$

$$J_{-\sqrt{\frac{a}{L}}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-\sqrt{\frac{a}{L}}}}{n! \Gamma\left(n - \sqrt{\frac{a}{L}} + 1\right)} \quad (4.3.14)$$

$$Y_{\sqrt{\frac{a}{L}}}(x) = \frac{J_{\sqrt{\frac{a}{L}}}(x) \cos\left(\pi \sqrt{\frac{a}{L}}\right) - J_{-\sqrt{\frac{a}{L}}}(x)}{\operatorname{sen}\left(\pi \sqrt{\frac{a}{L}}\right)} \quad (4.3.15)$$

Logo, para quaisquer valores a solução pode ser escrita como

$$i = c_2 J_{\sqrt{\frac{a}{L}}}(x) + c_3 Y_{\sqrt{\frac{a}{L}}}(x), \quad (4.3.16)$$

em que c_2 e c_3 são constantes quaisquer. Assim, a solução geral é

$$i = c_2 J_{\sqrt{\frac{a}{L}}}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + c_3 Y_{\sqrt{\frac{a}{L}}}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (4.3.17)$$

que é a solução para a corrente em função do tempo. Em que $Y_{\sqrt{\frac{a}{L}}}$ é a função de Bessel de segunda espécie ou funções de Neumann.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com isto, é possível verificar que só por meio de equações diferenciais especiais é possível solucionar determinados problemas, tanto aplicados a circuitos elétricos como a diversos outros fenômenos físicos, principalmente os que utilizam uma variável e suas derivadas para descrever determinado comportamento.

Neste trabalho, é singular o uso de resistências variáveis no tempo. Pois apesar de não fazer parte das características intrínsecas dos resistores, tais variações podem ocorrer ao se utilizar softwares ou elementos que promovam tais alterações, isto é, verifica-se condições externas ao circuito que podem ocorrer e promove-las. Sendo que, ao investigar como se dá tal variação, ela servirá de parâmetro para analisar qual influência terá em todo o circuito, podendo ser modelado por equação diferenciais.

Através disto é possível obter o comportamento do circuito RC com base na função linear através da aplicação da equação de Cauchy-Euler, mostrando que a atuação da carga, que terá um inverso da exponencial da função como resultado. Bem como o circuito RL, que com uma função linear inversa, pode ser solucionada pelo mesmo tipo de equação, mas com aplicação de métodos para obter a particularidade que se insere na solução geral.

Ainda, foi obtido o comportamento do circuito RLC com resistência de proporcionalidade inversa do tempo. Que neste circuito é identificado como uma equação de Bessel, após substituições de variáveis. Em que as funções de Bessel fornecem a corrente do circuito RLC em qualquer tempo.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O.. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

BASSANEZI, R. C. . **Equações Diferenciais Ordinárias**. Um curso introdutório, v. 1. [S.l]: UFABC, 2012.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

ÇENGEL, Yunus A.; PALM III, William J. . **Equações Diferenciais**. Porto Alegre: AMGH, 2014. 585 p.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos de física**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 3 v.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S.. **Física 3**. 5. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2012. 390 p. Colaboração de Paul Stanley.

KÍTOR, Glauber Luciano. **Circuito RC**. Disponível em:
<<https://www.infoescola.com/electronica/circuito-rc/>>. Acesso em: 01 maio 2017.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física básica**. São Paulo: Blucher, 1997. 3 v.

SANTOS, Kelly Vinente dos. **Fundamentos de Eletricidade**. Amazonas: Centro de Educação Tecnológica do Amazonas CETAM, 2011. 130 p. Disponível em:
<http://redeetec.mec.gov.br/images/stories/pdf/eixo_infor_comun/tec_man_sup/081112_fund_eletr.pdf>. Acesso em: 08 set. 2017.

YOUNG, Hugh D. FREEDMAN, Roger A. Freedman, **Física III: Eletromagnetismo**, 12a.ed. São Paulo: Pearson, 2009.

ZILL, Dennis G. e CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem**. Tradução da 9ª Edição Norte Americana, 2ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

ZILL, Dennis G.. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. Tradução da 10ª edição norte-americana.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R.. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. 1 v.