



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CURSO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

PABLO VINICIUS DA SILVA

O CÁLCULO NA ENGENHARIA: GUIA DE EXEMPLOS PRÁTICOS

CARAÚBAS

2022

PABLO VINICIUS DA SILVA

O CÁLCULO NA ENGENHARIA: GUIA DE EXEMPLOS PRÁTICOS

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Profa. Dra. Mariana de Brito Maia

CARAÚBAS

2022

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

D586c Da Silva, Pablo Vinicius .
O Cálculo na Engenharia: Guia de exemplos
práticos / Pablo Vinicius Da Silva. - 2022.
47 f. : il.

Orientadora: Mariana de Brito Maia.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2022.

1. Cálculo diferencial e integral. 2. Material
de Apoio. 3. Modelagem matemática. I. Maia,
Mariana de Brito, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Caraúbas
Bibliotecária: Dalvanira Brito Rodrigues
CRB: 15/700

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

PABLO VINICIUS DA SILVA

O CÁLCULO NA ENGENHARIA: GUIA DE EXEMPLOS PRÁTICOS

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 17 / 06 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

Mariana de Brito Maia

Assinado de forma digital por Mariana de Brito Maia
Dados: 2022.06.22 13:22:38 -03'00'

Profª. Dra. Mariana de Brito Maia (UFERSA)
Presidente



Documento assinado digitalmente

Gersica Valesca Lima de Freitas
Data: 22/06/2022 19:06:15-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Profª. Dra. Gersica Valesca Lima de Freitas (UFAL)
Membro Examinador


Prof. Dr. Rafael Barbosa da Silva (UFRPE)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por permitir que eu chegasse até aqui e encerrasse mais um ciclo da minha vida.

Agradeço aos meus pais, Maria Ana Nere e José Amaro por toda confiança e força, por confiar na minha capacidade e por todo apoio dado em toda minha vida e não há palavras que expressem toda minha gratidão por tamanho amor e apoio que recebi e recebo até hoje, inclusive amo vocês infinitamente.

Agradeço a toda minha família, pois cada um contribuiu para que eu chegasse aqui, em especial a minhas avós Francisca Ilza e “Toinha” que sempre me incentivaram a buscar meus sonhos, a minha Tia Ana Cléia que sempre me apoiou em minhas decisões e sempre me aceitou do jeito que eu sou, agradeço também a meu padrasto Francisco Neto por também cuidar de mim, muito obrigado por também ser uma figura paterna em minha vida, como também a minha madrastra Gilmária, a vocês o meu obrigado por todo carinho.

Agradeço a minha melhor amiga Hávila Almeida por todo o apoio, companheirismo, todo amor, todo carinho, por sempre acreditar em mim mesmo quando eu mesmo não acreditei, pelos livros indicados que tornaram minha vida melhor a cada leitura e também pelas brigas em que no final eu sempre estava errado, enfim a você todo meu amor.

Agradeço aos meus “ismões” Luiz Felipe, Ana Carla e Josi, por absolutamente tudo, por ajudarem a me tornar quem eu sou hoje, por sempre confiarem em mim mesmo quando eu mesmo não confiei, por sempre acreditarem no meu potencial, por todo o apoio nesses 4 anos de amizade que com certeza eu levo para a vida, pra mim são mais que amigos, são irmãos, a vocês todo o meu amor e gratidão.

Agradeço ao meu grupinho do ensino médio Ially, Mariana, Hian, Hugo e Cleyton, pois saiba que aprendi muito com vocês, em todos os momentos que passamos juntos, todos os momentos felizes com vocês, são amizades que eu levo pra vida, vocês são incríveis.

Agradeço também aos meus amigos que tive o prazer de conhecer aqui em Caraúbas, Letícia Benevides e Pedro Lucas por sempre estarem dispostos a ajudar em tudo que precisei, Letícia nunca vou esquecer pelas palavras de apoio e toda ajuda no dito 3º período, quando você pôs a mão na massa junto com a gente e ajudou na construção

da ponte de macarrão, a você a minha gratidão e amor, saiba que tenho muito carinho por você.

Agradeço a minha orientadora Mariana Maia, por me aguentar durante esses meses, por aguentar meus surtos com os prazos e por ter me dado a oportunidade de ser seu orientando, a ela toda a minha gratidão, saiba que a senhora é um grande exemplo pra mim, obrigado pelo seu brilhante método de ensino em todas as cinco disciplinas que tive a oportunidade de cursar com a senhora, obrigado pelo seu amor ao ensino, pois é notório o quanto a senhora ama o que faz e esse amor pela profissão é passado para nós que um dia fomos seus alunos. Enfim, obrigado.

Agradeço a Banca Examinadora por ter aceito o convite e por disponibilizar tempo para estar aqui, a vocês o meu Obrigado.

RESUMO

O Cálculo diferencial e integral, também chamado de cálculo infinitesimal, é um ramo muito importante da matemática advindo da álgebra e da geometria, criado e desenvolvido por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz. O mesmo teve grande papel no desenvolvimento das ciências exatas, sendo até hoje um dos grandes pilares da engenharia e da física, dito isso sabe-se que não há muitos materiais com aplicações do cálculo na engenharia para que professores da área possam utilizá-los, juntamente com a dificuldade de muitos estudantes de engenharia de entender os conceitos do cálculo pois eles, de início, parecem um pouco abstratos, o que causa muitas dificuldades diante o primeiro contato. Diante disso vamos a importância da criação desse material com as aplicações e da modelagem matemática na engenharia. O principal objetivo é criar um material de apoio para professores de cálculo diferencial e integral, contendo as aplicações para serem utilizadas ao longo do conteúdo com o intuito de facilitar a compreensão desses conceitos. Para isso, foi realizada uma análise e mapeamento bibliográfico no qual buscamos aplicações do cálculo à engenharia. O trabalho, conta ainda com um capítulo de conhecimentos preliminares ao qual estão expressos os conteúdos de cálculo utilizados nas aplicações, e por fim o presente trabalho cumpriu todos os objetivos elencados ao ser um material de apoio tanto para professores de cálculo que ensinam em cursos de engenharia, quanto para ajudar na escolha de qual engenharia seguir no segundo ciclo, mostrando as aplicações em cada uma das engenharias ofertadas pelo campus Caraúbas para que o discente veja em qual delas ele mais se encaixa.

Palavras-chave: Cálculo diferencial e integral. Material de Apoio. Modelagem matemática.

ABSTRACT

Differential and integral calculus, also called infinitesimal calculus, is a very important branch of mathematics arising from algebra and geometry, created and developed by Isaac Newton and Gottfried Wilhelm von Leibniz. The same had a great role in the development of exact sciences, being until today one of the great pillars of engineering and physics, that said it is known that there are not many materials with applications of calculus in engineering so that teachers in the area can use them, together with the difficulty of many engineering students to understand the concepts of calculus because they seem a little abstract at first, which creates many difficulties in the first contact. In view of this, we are going to the importance of creating this material with applications and mathematical modeling in engineering. The main objective is to create support material for teachers of differential and integral calculus, containing applications to be used throughout the content in order to facilitate the understanding of these concepts. For this, a bibliographic analysis and mapping was carried out in which we seek applications from calculus to engineering. The work also has a chapter on preliminary knowledge to which the contents of calculus used in the applications, and finally the present work fulfilled all the objectives listed by being a support material both for calculus teachers who teach in engineering courses, and to help in choosing which engineering in the second cycle, showing the applications in each of the engineering offered by the Caraúbas campus so that the student can see which one he fits best.

Keywords: Differential and integral calculus. Support material. Mathematical modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Retas Secantes Ligando P e Q.....	26
Figura 2 - Expressando matematicamente a inclinação da reta secante PQ.....	26
Figura 3 - Gráfico mostrando o método para encontrar a área abaixo da curva.....	34
Figura 4 - Demonstração de como são particionadas para as somas de Riemann.....	36
Figura 5 - Centro de gravidade de uma placa plana.....	42
Figura 6 - Atuação em outro ponto da placa	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de x próximos e maiores que 1 e o respectivo $f(x)$	17
Tabela 2 - Valores de x próximos e menores que 1 e respectivo $f(x)$	17
Tabela 3 - Derivadas das principais funções trigonométricas	30
Tabela 4 - Funções trigonométricas e suas antiderivadas	33

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	13
3. METODOLOGIA	16
4. PRELIMINARES	17
4.1 LIMITES	17
4.1.1 DEFINIÇÃO	17
4.1.2 TEOREMAS DE LIMITES DE FUNÇÕES.....	20
4.1.3 LIMITES LATERAIS	21
4.1.4 LIMITES INFINITOS	22
4.1.5 LIMITES NO INFINITO.....	24
4.1.6 LIMITES E CONTINUIDADE	25
4.2 DERIVADA E A DERIVAÇÃO	25
4.2.1 DEFINIÇÃO	25
4.2.2 DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR	28
4.2.3 VALOR FUNCIONAL MAXIMO E MÍNIMO.	28
4.2.4 TEOREMAS DA DERIVADA	29
4.2.5 DERIVADA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	30
4.2.6 REGRA DA CADEIA	31
4.3 INTEGRAÇÃO E A INTEGRAL DEFINIDA	31
4.3.1 ANTIDIFERENCIAÇÃO, A ATIDERIVADA E TEOREMAS	31
4.3.2 ANTIDIFERENCIAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	32
4.3.3 A INTEGRAL E O CÁLCULO DA ÁREA	33
4.3.4 A INTEGRAL DEFINIDA	35
4.4 TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO	38
4.4.1 PRIMEIRO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO ..	38
4.4.2 SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO ..	38
5. APLICAÇÕES DO CÁLCULO NA ENGENHARIA.....	39
5.1 CORRENTE ELÉTRICA E CARGA (ENGENHARIA ELÉTRICA)	39
5.2 VELOCIDADE (ENGENHARIA MECÂNICA)	39
5.3 ACELERAÇÃO (ENGENHARIA MECÂNICA)	40
5.4 FORÇA RESULTANTE SOBRE UMA PARTICULA (ENGENHARIA MECÂNICA)	41
5.5 CENTRO DE GRAVIDADE DE UM CORPO BIDIMENSIONAL (ENGENHARIA CIVIL E MECÂNICA)	42

5.6 LUCRO MAGINAL, RECEITA MARGINAL E CUSTO MARGINAL.....	44
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	46
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:.....	47

1. INTRODUÇÃO

O Cálculo diferencial e integral, também chamado de cálculo infinitesimal, é um ramo muito importante da matemática advindo da álgebra e da geometria, criado e desenvolvido por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz. O mesmo teve grande papel no desenvolvimento das ciências exatas, sendo até hoje um dos grandes pilares da engenharia e da física.

O curso Bacharelado interdisciplinar em ciência e tecnologia (BICT) foi criado com uma ideia nova de educação superior no país, de maneira a melhorar a qualidade do ensino como também permitir que mais pessoas tenham acesso a ele. Ao concluir o BICT, o discente tem a possibilidade de escolher uma engenharia a qual queira seguir, o que se chama de segundo ciclo, diante disso, observa-se a importância das disciplinas e suas aplicações durante a passagem pelo BICT.

Levando em consideração a importância da modelagem matemática aplicada no cálculo diferencial e integral à engenharia no curso de BICT, viu-se que há uma grande dificuldade para os professores de usar essas aplicações, já que é pequena a quantidade de livros de matemática que abordam aplicações nesse ramo.

Diante dessa dificuldade de se encontrar materiais contendo aplicações do cálculo na engenharia, surgiu a necessidade de criar um material de apoio para professores e alunos, contendo algumas aplicações para serem utilizadas ao ministrar as disciplinas de cálculo diferencial e integral, dessa forma, tendo como público alvo professores nessa área, estudantes de BICT e estudantes de engenharia no geral, o presente trabalho abordará os conteúdos estudados nas disciplinas de cálculo, aplicando-os a situações vistas por engenheiros em diferentes áreas de atuação, partindo do princípio que o curso Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia deve permitir uma ampla visão e conhecimento na área das ciências exatas. Além disso, esperamos que o material torne a compreensão do cálculo diferencial e integral mais clara, diante situações reais do cotidiano dos engenheiros, de forma a ajudar na escolha, por parte dos discentes, da engenharia no segundo ciclo.

No capítulo dois temos o referencial teórico, os principais autores abordados para fundamentar a pesquisa foram Bassanezi e Biembengut que defendem a modelagem matemática como instrumento de ensino. No capítulo três abordamos a metodologia da

pesquisa, mostrando como ela foi realizada. No capítulo quatro são apresentados os conceitos matemáticos que são importantes para as aplicações e como base foi utilizado o livro “O cálculo com geometria analítica” de Louis Leithold. Por fim, no capítulo cinco, foram abordadas as aplicações matemáticas na engenharia, utilizando como livros base os livros “Fundamentos da física” de David Halliday e Robert Resnick, vol.1 e 2, o livro “Mecânica vetorial para engenheiros” de Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston Jr., David F. Mazurek e Elliot R. Eisenberg e para a última aplicação foi utilizado o livro “Cálculo aplicado” de Ron Larson.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

O curso Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia (BICT) da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, foi criado no dia 03 de julho de 2008, através do CONSUNI nº 049/2008 (UFERSA, 2014), visando permitir que os ingressantes do curso possam ser formados através de dois ciclos, sendo o primeiro o BICT e o segundo o próprio curso de engenharia, cabendo ao próprio discente, diante dos conhecimentos adquiridos no primeiro ciclo, escolher qual engenharia seguir. Em consonância a isso, as aplicações e modelagens das disciplinas (principalmente da parte matemática) vistas no primeiro ciclo são importantes para facilitar a escolha do aluno diante o leque de opções proporcionadas a ele.

O Cálculo diferencial e integral foi inicialmente idealizado por Isaac Newton e Gottfried Leibniz de maneira independente. A motivação de Newton para descobrir o cálculo infinitesimal era explicar e fundamentar as suas leis do movimento, já Leibniz formulou o cálculo diferencial e integral com o intuito de atender aos cientistas e as demandas matemáticas da época. Os trabalhos de ambos passaram por muitas grandes mentes desde então, sendo até hoje um dos grandes pilares das ciências, principalmente para as engenharias.

O Cálculo segundo Pilling

(...)é a matemática dos movimentos e das variações. Onde há movimento ou crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração, o cálculo é a matemática a ser empregada. (PILLING, p. 1)

De acordo com Eves (2004, p. 417), “... com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou”, ele trata a invenção do cálculo como um plano superior, visto que mais adiante em seu texto ele expõe “... têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta.”, dito isso, sabe-se que ao adentrar na disciplina de cálculo I (CI), ela tem como premissa um conjunto de operações que são as bases para os conhecimentos futuros no curso, sendo elas os limites, as derivadas e integrais, este primeiro a base para as demais, pois as derivadas e integrais são definidas a partir de um limite, como é visto em CI ao apresentá-los.

Ao adentrar nos cursos de engenharia, o primeiro contato com o CI conhecendo os limites, as derivadas e as integrais, percebe-se a importância da bagagem do ensino médio, visto que com esses novos conceitos e novos elementos haja dificuldades caso o aluno não venha a possuir um bom conhecimento de matemática básica.

Os conceitos apresentados na matemática do ensino superior são muito abstratos e para a melhor compreensão requer uma sólida base matemática, dessa forma, mostrando a importância de novas maneiras de ministrar o CI de forma interativa facilitando o entendimento desses novos conceitos que de início parecem abstratos

Trazendo a fala da UNIVIÇOSA

O professor de Cálculo I tem importância imensa na hora de apresentar essa novidade ao aluno porque, dependendo da maneira de como esse novo conhecimento é passado, pode encantar ou assustar e fazer o estudante desistir do curso. (UNIVIÇOSA, 2015)

Diante disso, de acordo com o relatório escrito pelo setor pedagógico da UFERSA, Campus Caraúbas (UFERSA, 2019) ao qual levanta dados que mostram percentualmente a quantidade de alunos aprovados e reprovados nas disciplinas de cada período, nos períodos de 2017.1, 2018.2 e 2019.1, a percentagem de alunos reprovados na disciplina de cálculo I são de 70,7%, 59,3% e 47,5% respectivamente que foram os últimos períodos presenciais.

Esse dado pode ser explicado, se levarmos em consideração que o Cálculo I é o primeiro contato dos discentes, ao adentrar no curso, com uma matemática mais abstrata, além disso, ele depende muito dos conceitos e aprendizados da educação básica e, em muitos casos, há uma defasagem nos conhecimentos de matemática básica.

Logo, urge que novas maneiras de ensinar o cálculo sejam adotadas de forma a diminuir essa dificuldade. Portanto, é importante que o docente se aproprie de métodos interativos, como modelagem matemática dos conteúdos presentes na engenharia, com o intuito de despertar a curiosidade e a busca pelo conhecimento na área pelos futuros engenheiros.

A modelagem matemática, como descreve (BASSAZANEZI, 2009) é a arte que tem a capacidade de converter circunstâncias reais em casos matemáticos de uma maneira mais simples e usual, dessa forma, fazendo com que seja mais prática a compreensão dos conteúdos, sendo também empregadas em diversos campos de estudo como física, química e também nas engenharias.

Madruga e Biembengut (2016, p. 28) retratam também como:

Modelagem é o processo envolvido na feitura de um modelo. Modelo que pode auxiliar as pessoas a compreender dados, informações, a estimular novas ideias e a prover de uma visão estruturada e global que inclui relações abstratas de algum fenômeno, ente, ou um processo. O modelo capacita a pessoa observar e refletir sobre fenômenos complexos, e ainda, a comunicar as ideias a outras pessoas. (MADRUGA; BIEMBENGUT, 2016, p. 28).

Com isso, ainda segundo Bassanezi, a modelagem além de transformar os problemas da realidade em problemas matemáticos, também permite que a resolução seja através de interpretação destes na linguagem do mundo real. (BASSANEZI, 2002).

Conforme Biembengut (1997, p.11)

(...) a ausência de tópicos aplicados à área específica, nos livros de matemática, traz dificuldades àquele que ensina e àquele que deveria aprender, para uma melhor compreensão prática daquilo que está sendo exposto. (1997, p.11)

Com vistas à realidade do curso de BICT e pensando nas disciplinas de cálculo diferencial e integral ofertadas, a partir do exposto pelo autor temos a necessidade do uso da modelagem matemática como metodologia no decorrer do primeiro ciclo, com o objetivo de melhorar a compreensão dos conteúdos pelos discentes e também facilitando o repasse destes pelos docentes, desta forma, ter as aplicações referentes a situações reais da própria engenharia permitindo também uma visão clara do que esperar no segundo ciclo.

3. METODOLOGIA

Primeiramente, foi realizada uma pesquisa de caráter bibliográfico, fazendo um mapeamento, ou seja, uma busca de aplicações do cálculo na engenharia, como é descrito no tema do presente trabalho, também foram buscados artigos e livros que expressassem a importância da modelagem matemática no ensino do cálculo na engenharia com o intuito de referenciar e justificar o presente trabalho.

Foram analisadas diversas obras, com o intuito de dar suporte a pesquisa e sempre focando no uso da modelagem matemática, que é uma metodologia de ensino e aprendizagem onde são trabalhadas situações do cotidiano como base de contextualização para a posterior aplicação dos conteúdos matemáticos.

Dentre essas obras foram analisados livros didáticos e artigos acadêmicos voltados para essas aplicações e mediante essa análise foi realizado um compilado das aplicações mais importantes, juntamente com a modelagem do problema.

Nos materiais pesquisados foram obtidas aplicações nos livros de física, cálculo e de engenharia utilizados na graduação e dentre eles foram extraídas aplicações voltadas para as engenharias mecânica, civil e elétrica, visto que são as áreas ofertadas no campus Caraúbas. Dessa forma, foi concluída a criação do material de apoio com o intuito de facilitar o ensino e a aprendizagem do cálculo diferencial e integral utilizando a metodologia de modelagem matemática para engenheiros.

4. PRELIMINARES

Tomando como base o livro “O cálculo com geometria analítica” (LEITHOLD, 1994), vamos definir os conceitos preliminares de limites, derivadas e integrais, de forma a melhorar a compreensão das aplicações que serão apresentadas em seguida.

4.1 LIMITES

4.1.1 DEFINIÇÃO

Considere a função real f dada por:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

A função está definida para todo x real, exceto para $x = 1$. Vamos observar os valores da função quando tomamos valores de x muito próximos de 1, na tabela 1 estão expressos os valores de x próximos e maiores que 1 e os respectivos valores de $f(x)$.

Tabela 1 - Valores de x próximos e maiores que 1 e o respectivo $f(x)$

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
1,5	6
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002

Fonte: Leithold, 1994.

Tabela 2 - Valores de x próximos e menores que 1 e respectivo $f(x)$

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998

Fonte: Leithold, 1994.

Ao observar esses valores, pela tabela 1 à medida que os valores de x se aproximam de 1, por valores maiores que 1, os valores de $f(x)$ se aproximam 5. Já na tabela 2 quanto mais os valores de x se aproximam de 1, por valores menores que 1, os valores de $f(x)$, ainda se aproximam de 5. Esse exemplo é importante pois mesmo que a função não exista naquele ponto ela vai existir em pontos bem próximos a ele e ao tomar valores muito próximos de 1, os valores de $f(x)$ estarão também suficientemente próximo de 5, tanto quanto desejarmos. Podemos traduzir essa ideia de proximidade a partir do conceito de distância, dessa forma, podemos tornar o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e 5 tão pequena o quanto desejarmos, desde que o valor absoluto da diferença entre os valores de x e 1 seja suficientemente pequeno, ou seja, $|f(x) - 5|$ pode se tornar tão pequeno quanto desejarmos tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno, porém $f(x)$ nunca será 5, pois a função não existe em $x = 1$.

Para mensurar essas diferenças usaremos letras gregas, ϵ (épsilon) e δ (delta), dessa forma, por definição, para todo ϵ positivo existe um δ escolhido apropriadamente, tal que se $|x - 1| < \delta$ e $|x - 1| \neq 0$ então $|f(x) - 5|$ será menor que ϵ , deixando claro que o tamanho de δ depende ϵ . Pode-se escrever, dado um número positivo qualquer ϵ , podemos tornar $|f(x) - 5| < \epsilon$ tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno, isto é, existe um número δ positivo suficientemente pequeno, tal que

$$\text{Se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon.$$

Poderíamos prosseguir e atribuir a ϵ qualquer valor positivo, a fim de encontrar um valor adequado para δ , de tal forma que se $|x - 1|$ for menor do que δ e $x \neq 1$ (ou $|x - 1| > 0$), então $|f(x) - 5|$ será menor que ϵ . Agora, como para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - 1| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \epsilon$, logo, baseado nessa ideia podemos definir formalmente limite.

Seja f uma função real definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente no próprio número a . O limite de $f(x)$ quando x tende a a será L , escrito como:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{Se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon.$$

Dessa forma, voltando ao exemplo, teremos que:

Podemos fatorar a função e chegar em

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{(x - 1)}$$

Dessa forma, se $x \neq 1$, podemos dividir o numerador e o denominador por $(x - 1)$, tendo:

$$f(x) = 2x + 3$$

Dado um ϵ , queremos encontrar um δ adequado

Desse modo, queremos mostrar que:

$$\text{Se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon$$

Ou seja,

$$\text{Se } |x - 1| < \delta \text{ então } |(2x + 3) - 5| < \epsilon$$

Como $f(x) = 2x + 3$, temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| &= |(2x + 3) - 5| \\ &= |2x - 2| \\ &= 2|x - 1|. \end{aligned}$$

Queremos determinar um $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} &\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon \\ \Leftrightarrow &\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } 2|x - 1| < \epsilon \\ \Leftrightarrow &\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |x - 1| < \frac{1}{2}\epsilon \end{aligned}$$

Essa afirmativa indica que $\frac{1}{2}\epsilon$ é satisfatório. Então com essa escolha de δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} &0 < |x - 1| < \delta \\ \Rightarrow &2|x - 1| < 2\delta \\ \Rightarrow &|2x - 2| < 2\delta \\ \Rightarrow &|(2x + 3) - 5| < 2\delta \\ \Rightarrow &|f(x) - 5| < \epsilon, \text{ Pois } \delta = \frac{1}{2}\epsilon \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que

$$\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \frac{1}{2}\epsilon. \quad (1)$$

Assim, qualquer número menor que δ poderá ser usado no lugar de δ e ser o δ requerido.

Portanto, se $0 < \gamma < \delta$ sendo (1) Verdadeira, podemos afirmar que para todo número x que satisfaça essa desigualdade, satisfará também $0 < |x - 1| < \delta$

Pela tabela 1, percebe-se que a medida em que o x se aproxima de 1, o $f(x)$ se aproxima de 5, de modo que $0 < |x - 1| < 0,1$ então $|f(x) - 5| < 0,2$, ou seja, dado um $\epsilon = 0,2$ existe um $\delta = 0,1$, semelhantemente se eu tenho um

$0 < |x - 1| < 0,01$, terei um $|f(x) - 5| < 0,02$, dado um dado um $\epsilon = 0,02$ tomamos um $\delta = 0,01$, pois quanto mais pegarmos valores próximos de 1, o $f(x)$ assume valores próximos de 5.

Dessa forma, afirmamos que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é igual a 5 ou, em símbolos

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

Observa-se que nessa equação há o sinal de igualdade, porém $f(x)$ não assume o valor de 5 para nenhum valor de x , o sinal de igualdade é apropriado pois o primeiro membro é descrito como

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Mas é evidente que $f(x)$ possa se tornar tão próximo de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1 e essa propriedade da função f não depende de fato de f estar definida em $x = 1$. Esse valor nos permite distinguir entre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e o valor da função 1, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$, porém $f(1)$ não existe, consequentemente, queremos $0 < |x - 1|$, pois estamos interessados nos valores de x próximos de 1 e não necessariamente igual a 1.

4.1.2 TEOREMAS DE LIMITES DE FUNÇÕES

A seguir temos os principais teoremas que auxiliam na resolução de limites:

I) Se m e b forem constantes quaisquer,

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$$

II) Se c for uma constante, então qualquer número a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

III) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

IV) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

V) Se $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2, \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_n$, logo

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

VI) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

VII) Se $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2, \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_n$, logo

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)] = L_1 L_2 \dots L_n$$

VIII) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$$

IX) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ se } M \neq 0$$

X) Se n for um número inteiro positivo e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

XI) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - L] = 0$

XII) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ Se e somente se $\lim_{t \rightarrow 0} f(t + a) = L$

4.1.3 LIMITES LATERAIS

Seja f uma função que está definida em todos os números de algum intervalo aberto (a, c) . Então, **o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L** , e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Se para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que:

Se $0 < x - a < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Da mesma forma

Seja f uma função que está definida em todos os números de algum intervalo aberto (d, a) . Então, **o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L** , e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Se para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que:

$$\text{Se } 0 < a - x < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon.$$

O resultado a seguir é fundamental na solução de muitos limites:

I) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ Existe e será igual a L se e somente se:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Isto é, se os limites laterais existirem e forem iguais a L .

4.1.4 LIMITES INFINITOS

Seja f uma função real definida em todo intervalo aberto I contendo a , exceto possivelmente o próprio a . Quando x tende a a , $f(x)$ cresce indefinidamente, e escrevemos,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Se para qualquer número $N > 0$, existir um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) > N$.

“Ou seja, os valores de $f(x)$ crescem indefinidamente quando x tende a um número a , se $f(x)$ puder se tornar tão grande quanto desejarmos para todos os valores de x suficientemente próximos de a , mas não iguais a a ”.

De mesmo modo, seja f uma função definida em todo intervalo aberto I contendo a , exceto possivelmente o próprio a . Quando x tende a a , $f(x)$ decresce indefinidamente e escrevemos,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Se para qualquer número $N < 0$, existir um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) < N$.

A seguir temos resultados referentes a limites infinitos:

I) Se r for um número inteiro positivo qualquer, então

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{se } r \text{ for ímpar} \\ +\infty & \text{se } r \text{ for par} \end{cases}$

II) Se a for um número real qualquer e se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$,
onde c é uma constante não nula, então

i) Se $c > 0$ e se $f(x) \rightarrow 0$ por valores positivos de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

ii) Se $c > 0$ e se $f(x) \rightarrow 0$ por valores negativos de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

iii) Se $c < 0$ e se $f(x) \rightarrow 0$ por valores positivos de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

iv) Se $c < 0$ e se $f(x) \rightarrow 0$ por valores negativos de $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

III)

i) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde c é uma constante
qualquer então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

ii) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde c é uma constante
qualquer então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

IV) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, onde c é uma constante não-nula,
então

i) Se $c > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

ii) Se $c < 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$

Os teoremas também são válidos se “ $x \rightarrow a$ ” for substituído por “ $x \rightarrow a^+$ ” ou “ $x \rightarrow a^-$ ”

4.1.4.1 ASSINTOTAS VERTICAIS

Os limites infinitos são aplicados para encontrar assíntotas verticais de um gráfico, se elas existirem, de modo que dada uma função f , as assíntotas verticais são retas verticais que delimitam o gráfico, de modo que as assíntotas verticais são paralelas ao eixo y , dessa forma, formalmente temos:

A reta $x = a$ será uma assíntota vertical do gráfico da função f , se pelo menos uma das afirmativas for verdadeira:

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{iv)} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

4.1.5 LIMITES NO INFINITO

Seja f uma função definida em um intervalo $(a, +\infty)$ o limite de $f(x)$ quando x cresce indefinidamente é L , e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Se para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, existir um número $N > 0$ tal que se $x > N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$

E seja f uma função definida em um intervalo $(-\infty, a)$ o limite de $f(x)$ quando x cresce indefinidamente é L , escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Se para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, existir um número $N < 0$ tal que se $x < N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

A seguir um teorema que nos ajuda com limites no infinito:

I) Se r for um número inteiro positivo qualquer, então

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

4.1.5.1 ASSINTOTAS HORIZONTAIS

Os limites no infinito são aplicados para encontrar assíntotas horizontais de um gráfico, se elas existirem, de modo que dada uma função f , as assíntotas horizontais são retas horizontais paralelas ao eixo x , assim, formalmente temos:

A reta $y = b$ é denominada assíntota horizontal do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes afirmações for válida:

- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ e para um número N , se $x > N$, então $f(x) \neq b$
- ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ e para um número N , se $x < N$, então $f(x) \neq b$

4.1.6 LIMITES E CONTINUIDADE

Ao falar sobre limite, é importante mencionar as funções contínuas, já que essa é a classe mais importante das funções estudadas em cálculo, e a continuidade de uma função é dada pelas seguintes condições:

Para uma função $f(x)$ ser contínua em um número qualquer a :

- i) $f(a)$ deve existir,
- ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ deve existir e
- iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Caso uma ou mais de uma dessas condições sejam descumpridas para o número a , f é dita descontínua em a .

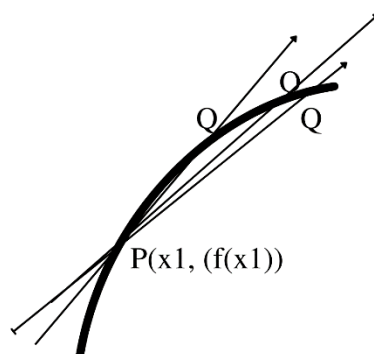
4.2 DERIVADA E A DERIVAÇÃO

4.2.1 DEFINIÇÃO

Vários problemas no cálculo usam como premissa a reta tangente ao gráfico de uma função f , em um ponto. A reta tangente é determinada por sua inclinação e pelo ponto de tangência, dito isso, a derivada nos dá a inclinação da reta tangente a curva, em determinado ponto. Sabendo disso, é importante definir a reta tangente, logo, considera-se uma função f ao qual esteja definida em um intervalo I e nesse intervalo esteja um ponto $P(x_1, f(x_1))$ e também seja contínua em x_1 , considera-se também outro ponto $Q(x_2,$

$f(x_2))$ de forma que ele também esteja no intervalo I e com isso sejam traçadas retas que ligam P e Q como é mostrado na figura 2 abaixo:

Figura 1- Retas Secantes Ligando P e Q



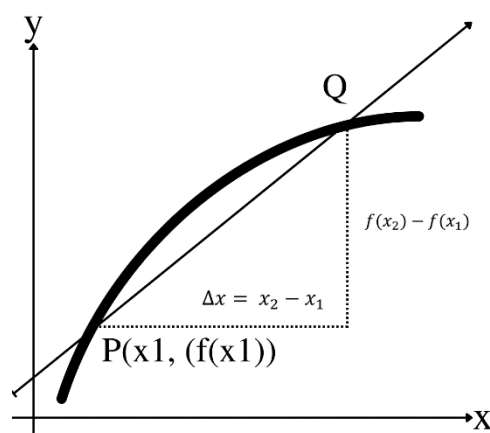
Fonte: Leithold, 1994 adaptado

Dizemos que qualquer reta que passe pela curva ligando dois pontos que estejam no mesmo intervalo é chamada de reta secante, sabendo disso podemos denotar a diferença entre as duas coordenadas de x , o x_1 e x_2 como:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Essa notação trata-se de uma variação na abscissa da função e é chamada de “incremento de x ”. Na figura 3 podemos visualizar a reta secante PQ que passa pelos pontos P e Q:

Figura 2 - Expressando matematicamente a inclinação da reta secante PQ



Fonte: Leithold, 1994 adaptado

Através do gráfico a inclinação da reta secante PQ pode ser obtida por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Considerando que a reta não seja vertical podemos descrever $x_2 = (x_1 + \Delta x)$, logo temos:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Tendo definido isso, torna-se o ponto P fixo e o ponto Q móvel, de forma que o ponto Q tende a se mover o mais próximo possível do ponto P, ou seja, a variação Δx irá tender a zero a medida que Q tende a se aproximar de P, dessa forma com a reta secante girando em torno do ponto P, haverá uma posição limite dessa reta, essa posição limite será definida como a reta tangente a f em P, ou seja, o limite da reta secante PQ quando temos Δx tendendo a 0, levando em consideração que esse limite existe e a existência desse limite com $x=x_1$ nos permite definir a inclinação da reta tangente a f em P como a derivada:

$$1) m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Considerando a existência desse limite a reta $x = x_1$ se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = +\infty \text{ ou } -\infty$$

E

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = +\infty \text{ ou } -\infty$$

Se nenhuma dessas condições forem verdadeiras, então não existirá reta tangente ao gráfico de f , no ponto $P(x_1, f(x_1))$.

Definido a reta tangente, podemos dizer que a derivada é a inclinação da reta tangente a curva em que o valor de x esteja em qualquer número do domínio de f , dizemos que a derivada é denotada como $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se esse limite existir.

Dessa forma, Sendo x_1 um determinado número no domínio de f , então

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Outras notações podem ser usadas para representar a derivada da função $y = f(x)$, como

$$\frac{dy}{dx} \text{ ou } y'$$

Chamando $f(x_1 + \Delta x) - f(x)$ de Δy

Substituindo o Δy na f' temos:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lembrando que $\frac{dy}{dx}$ não é um quociente, é apenas uma notação para derivada! Para melhor visualização podemos dizer que:

$$\frac{d}{dx}(y)$$

Lê-se como “a derivada de y em relação a x”.

4.2.2 DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Dada uma função f e ela seja derivável, então f' será chamada de derivada primeira de f . Também chamada de função derivada primeira, de mesmo modo se a derivada da função f' existir, denota-se f'' e é chamada de derivada segunda de f , também chamada de função derivada segunda, se f'' for derivável, tem-se a derivada terceira de f denota-se f''' , ou função derivada terceira. Dito isso, dada a existência da enésima derivada de f e n um número inteiro positivo maior do que 1, é a derivada primeira da derivada $(n - 1)$ ésima de f . Denotamos a derivada de f^{n-1} por $f^{(n)}$.

4.2.3 VALOR FUNCIONAL MÁXIMO E MÍNIMO.

- I) A função f terá um valor máximo relativo em c se existir um intervalo aberto contendo c , no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x nesse intervalo.

Semelhantemente a isso:

- II) A função f terá um valor mínimo relativo em c se existir um intervalo aberto contendo c , no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x nesse intervalo.

Dessa forma:

Se f tiver um máximo relativo ou um mínimo relativo em c , então dizemos que f tem um extremo relativo em c , logo temos o teorema:

- i) Se $f(x)$ foi definida para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b) e se f tiver um extremo relativo em c , onde $a < c < b$, então $f'(c) = 0$, se $f'(c)$ existir.
- III) Se c for um número do domínio da função f se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir, então c será chamado de número crítico de f .
- IV) A função f terá um valor **máximo absoluto** num intervalo, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor máximo absoluto de f no intervalo.
- V) A função f terá um valor **mínimo absoluto** num intervalo, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor mínimo absoluto de f no intervalo.
- VI) $f(c)$ será o valor máximo absoluto da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \geq f(x)$ para todo x no domínio de f .
- VII) $f(c)$ será o valor mínimo absoluto da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \leq f(x)$ para todo x no domínio de f .
- VIII) Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

4.2.4 TEOREMAS DA DERIVADA

Conhecido a derivada por definição, vamos conhecer os teoremas, visto que resolver derivada por definição não é uma das coisas mais simples, pensando nisso os matemáticos foram desenvolvendo teoremas de modo que tornasse mais fácil calcular derivada, logo:

- I) A derivada de uma constante seja igual a zero, ou seja:

$$\text{Se } f(x) = C$$

$$\text{Então } f'(x) = 0$$

II) Se $f(x) = x^n$ e n for um número inteiro positivo, então

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

III) A derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da derivada dessa função pela constante se ela existir, ou seja:

$$g(x) = c f(x)$$

$$g'(x) = c f'(x)$$

IV) Se uma função for igual a soma de outras duas funções, a derivada dessa primeira será igual a soma das derivadas se elas existirem, vale também para uma soma de um número finito de funções, mas todas as derivadas devem existir, ou seja:

$$\text{Se } h(x) = f(x) + g(x)$$

$$\text{Então } h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

V) A derivada de uma função que é igual ao produto de outras duas funções é:

$$\text{Se } f(x) = g(x)h(x)$$

$$\text{Então } f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

VI) Se uma função for igual ao quociente de outras duas funções, faz-se:

$$\text{Se } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$\text{Então } f'(x) = \frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

VII) Se:

$$f(x) = x^{-n}, \text{ com } x \text{ diferente de } 0$$

$$\text{Então } f'(x) = -nx^{-n-1}$$

4.2.5 DERIVADA DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As derivadas de funções trigonométricas foram definidas a partir das identidades trigonométricas, porém é importante conhecer algumas derivadas, dentre elas o do seno, cosseno e a da tangente:

Tabela 3 - Derivadas das principais funções trigonométricas

$f(x)$	$f'(x)$
$\text{sen}x$	$\text{cos}x$
$\text{cos}x$	$-\text{sen}x$
$\text{tg}x$	sec^2x

Fonte: Autoria própria, 2022

Conhecendo-as basta aplicar os teoremas do tópico 4.2.2 e será possível encontrar qualquer derivada trigonométrica.

4.2.6 REGRA DA CADEIA

Ao estudar matemática, desde o ensino médio se estuda as funções compostas, assim como as demais, elas também tem o próprio método de derivação, que foi definida como regra da cadeia dada uma função composta

$$f \circ g(x)$$

A derivada dessa função composta pela regra da cadeia se dá por:

$$f \circ g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Só que para ser possível a utilização desse método, algumas condições devem ser levadas em consideração

- i) g deve ser derivável em x
- ii) f deve ser derivável em $g(x)$

Com a satisfação dessas condições, a função composta $f \circ g$ será derivável em x .

4.3 INTEGRAÇÃO E A INTEGRAL DEFINIDA

4.3.1 ANTIDIFERENCIAÇÃO, A ATIDERIVADA E TEOREMAS

De início vamos falar a respeito da antidiferenciação, que é a operação inversa da diferenciação, de modo semelhante as operações inversas adição e subtração, como também a potenciação e a radiciação, assim falemos de antiderivada, o primeiro teorema diz que:

- I) Uma função F será chamada de antiderivada de f em um intervalo I , se $F'(x) = f(x)$ em x de intervalo I .

Notemos que

- II) Dadas duas funções h e f de modo que $h'(x) = f'(x)$ para todo x no intervalo I , haverá uma constante arbitrária C

$$h(x) = f(x) + C$$

- III) Tendo F com a antiderivada particular de f em um intervalo I , toda antiderivada de f nesse intervalo será da forma:

$$F(x) + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante}$$

Dessa forma, a antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma determinada função, escrevemos,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

IV) $\int dx = x + C$

- V) Se houver uma constante que está multiplicando uma função, a constante pode sair da antiderivada e continuar a antidiferenciação da função normalmente:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx = aF(x) + C$$

- VI) Dada duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, a antiderivada da soma de funções vai ser igual a soma das antiderivadas das funções, se elas estiverem definidas no mesmo intervalo

$$\begin{aligned} \int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \\ \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \end{aligned}$$

- VII) Semelhantemente aos teoremas V e VI, se houver constantes multiplicando duas funções definidas no mesmo intervalo, a constante sairá da antiderivada e haverá a soma das antiderivadas das funções

$$\begin{aligned} \int [a_1f_1(x) + a_2f_2(x)] dx = \\ a_1 \int f_1(x)dx + a_2 \int f_2(x)dx \end{aligned}$$

- VIII) Dada uma função $f(x)=x^n$, a antiderivada dessa função se dará de forma:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ para } n \neq -1$$

4.3.2 ANTIDIFERENCIAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A antiderivada das funções trigonométricas seguem o mesmo raciocínio que os teoremas acima citados para a derivada dessas funções, de modo que pela Tabela 3 tem-

se as derivadas, semelhantemente temos as antiderivadas na Tabela 4 que é a operação inversa a derivada

Tabela 4 - Funções trigonométricas e suas antiderivadas

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$\text{sen}x$	$-\text{cos}x + C$
$\text{cos}x$	$\text{sen}x + C$
Sec^2x	$\text{tg}x + C$
Cosec^2x	$-\text{cot}g x + C$
$\text{sec}x \text{tg}x$	$\text{Sec}x +$
$\text{cosec}x \text{cot}g x$	$-\text{cosec}x + C$

Fonte: Autoria própria, 2022

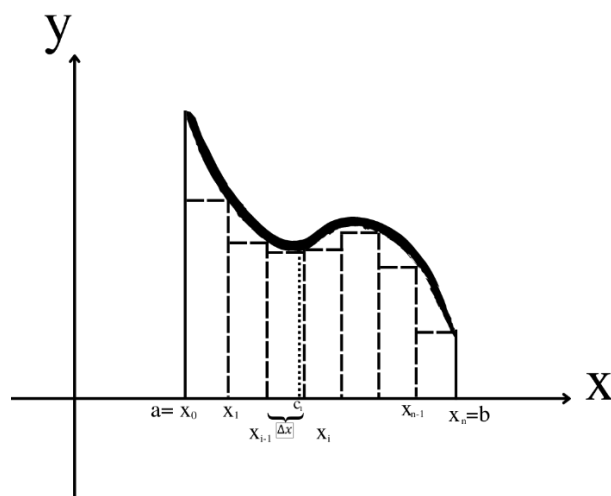
Dessa forma, utilizando as antiderivadas do quadro e conhecendo as identidades trigonométricas é possível calcular as antiderivadas das funções trigonométricas.

4.3.3 A INTEGRAL E O CÁLCULO DA ÁREA

Desde o ensino fundamental se estuda sobre área dos polígonos, de modo que as formulações que são apresentadas já são prontas e apenas para formas bem definidas, como círculo, triângulo, quadrado e entre outros e para formas mais distintas que não tenham formulações prontas, dividir a figura em formas conhecidas é um método de facilitar o cálculo dessa área, porém para figuras mais complexas como a área de uma região delimitada por uma curva qualquer, por exemplo, seria muito difícil chegar num valor próximo de sua área real utilizando as formulações de polígonos regulares, com isso podemos definir a integral definida pois falando grosseiramente a integral nada mais é que um limite de um somatório de n pedaços infinitesimais, ou seja, pedaços muito pequenos de modo que o somatório dessas n áreas dos n pedaços se aproxime da área de qualquer figura plana, ou seja a integral calcula a área da figura abaixo da curva.

Dada uma curva dada pelo gráfico de uma função $y=f(x)$, formando uma região delimitada pelo eixo x e as retas $x=a$ e $x=b$ de modo que f seja continua nesse intervalo $[a, b]$, queremos descobrir a área dessa região plana, o a região está expressa na figura 4.

Figura 3 - Gráfico mostrando o método para encontrar a área abaixo da curva



Fonte: Autoria própria, 2022

Para encontrar essa área faz-se semelhante como é para encontrar a área de um círculo, através de um limite de das áreas de polígonos regulares inscritos quando o número de lados cresce indefinidamente, dessa forma primeiro divide-se a região em n subintervalos, em uma forma conhecida como retângulo, dividindo esses n subintervalos de maneira igual e o chamaremos de Δx a base de cada retângulo, de forma que

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

E os extremos desses subintervalos sendo denotados por $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ onde $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$, $x_n = b$ de forma que $[x_{i-1}, x_i]$ é o i -ésimo subintervalo, como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ ela também é continua em todos os subintervalos, dessa forma considere no i -ésimo subintervalo seja C_i o valor mínimo absoluto de f no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, ao considerarmos n retângulos inscritos com cada subintervalo contendo um valor mínimo absoluto, o $f(c)$ de cada subintervalo será a altura dos nossos retângulos e o Δx o comprimento, dessa forma temos que a área da Figura 3 pode ser expressa por:

$$S_n = f(C_1)\Delta x + f(C_2)\Delta x + \dots + f(C_i)\Delta x + \dots + f(C_n)\Delta x$$

Ou expresso como somatório

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(C_i)\Delta x$$

Pela Figura 3 vemos que para encontrar um valor que se aproxime melhor da área dessa região podemos aumentar o número de subintervalos de maneira que aumente o número

retângulos inscritos e cubram uma maior área, dessa forma, sendo f contínua num intervalo $[a, b]$, se n crescer indefinidamente, os valores de S_n tendem a um limite, que é a definição da medida da área da região.

Assim, com n crescendo indefinidamente podemos expressar o valor da área como:

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(C_i) \Delta x$$

É possível também encontrar o valor da área através de retângulos circunscritos de forma que:

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta x$$

Onde $f(d_i)$ é o valor máximo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$

4.3.4 A INTEGRAL DEFINIDA

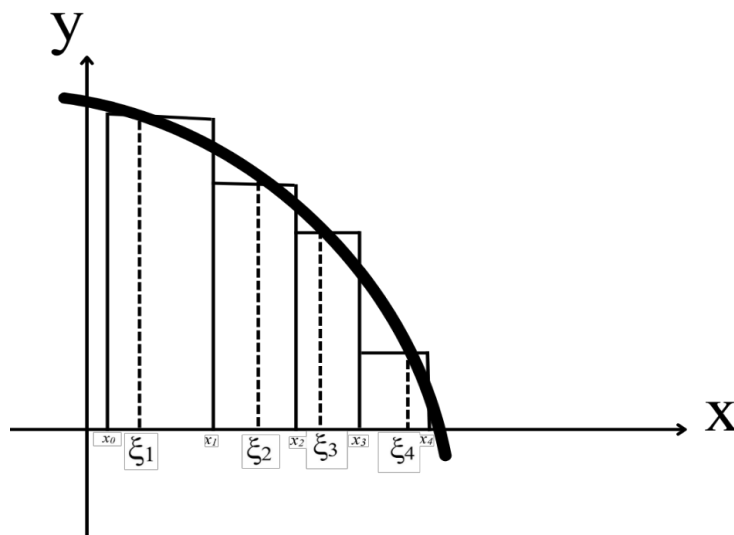
Para definir a integral definida, usa-se o mesmo princípio para o cálculo de área via limite, dada uma função em um intervalo fechado, será dividido também em n subintervalos, porém os intervalos não serão necessariamente equidistantes, ou seja, os retângulos não possuíram necessariamente a mesma base.

Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, dividia em n intervalos, de modo que $x_0 = a$, $x_n = b$ e $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ sejam os pontos intermediários mas para isso teremos que $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ como já descrito eles não serão necessariamente equidistantes e chama-se de $\Delta_1 x$ o comprimento do primeiro subintervalo de modo que $\Delta_1 x = x_1 - x_0$; do mesmo modo que $\Delta_2 x = x_2 - x_1$ sendo assim em todos os subintervalos, de forma que o i -ésimo subintervalo seja $\Delta_i x$ e descrito como $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, o conjunto de todos esses subintervalos denota-se **partição** do intervalo $[a, b]$ e utiliza-se Δ para representar essa partição e nessa partição que contém n subintervalos terá pelo menos um que será maior ou igual que os demais e esse subintervalo da partição é denominada **norma**, e expressa por $\|\Delta\|$. Conhecendo a norma e a partição, deve-se escolher um ponto ξ_i dentre os subintervalos, de modo que $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ e $f(\xi_i)$ seja a altura do retângulo no i -ésimo subintervalo, fazendo o mesmo para os n subintervalos, consideremos a soma do produto da partição pelo que chamamos de altura do retângulo, logo:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$$

Essa soma é denominada soma de Riemann

Figura 4 - Demonstração de como são particionadas para as somas de Riemann



Fonte: Autoria própria

Dessa forma, seja f a função da figura 4, e que essa função seja definida no intervalo $[a, b]$. Então, f será integrável em $[a, b]$ se existir um número L satisfazendo a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ que toda partição Δ para qual $\|\Delta\| < \delta$, com ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, temos:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - L \right|$$

Nessas condições teremos:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = L$$

Com isso, por definição sendo f definida no intervalo $[a, b]$, então **a integral definida** de f de a até b é:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = L$$

Dada a existência do limite, sendo o símbolo $\int$ chamado de sinal de integração.

Partindo para os principais teoremas temos que:

- I) Se a função for contínua no intervalo $[a, b]$ ela é integrável nesse intervalo.

- II) Dada uma região limitada por uma função $f(x)$, $x=a$ e $x=b$ sendo continua no intervalo $[a, b]$, a área dessa região será dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

- III) Se $a > b$,

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx \text{ se } \int_a^b f(x)dx \text{ existir.}$$

- IV) Se $f(a)$ existe

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- V) Se K for uma constante qualquer

$$\int_a^b Kdx = K(b - a)$$

- VI) Para K uma constante qualquer e $f(x)$ uma função integrável no intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b Kf(x)dx = K \int_a^b f(x)dx$$

- VII) Dada a soma de duas funções $f+g$, sendo ambas integráveis no intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- VIII) Se a função f for integrável nos intervalos fechados $[a, b]$, $[a, c]$ e $[c, b]$, temos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Com $a < c < b$.

- IX) Se f for integrável num intervalo fechado contendo os números a, b e c então:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

Não importando a ordem de a, b e c .

4.4 TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO

Ao formular o cálculo de maneira independente, Newton e Leibniz no século dezessete mostraram e provaram como o cálculo pode ser utilizado para encontrar e calcular a área de uma região que está sendo delimitada por uma curva ou um conjunto de curvas através da determinação de uma integral definida por antidiferenciação e para isso, foram utilizados os procedimentos chamados “Teoremas Fundamentais do cálculo”. Dessa forma, teremos:

4.4.1 PRIMEIRO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja x qualquer número em $[a, b]$. Se F for uma função definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Então,

$$F'(x) = f(x)$$

Se $x = a$; a derivada acima pode ser a derivada a direita e se $x = b$, a derivada pode ser a derivada a esquerda.

4.4.2 SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja g uma função tal que:

$$g'(x) = f(x)$$

Para todo x em $[a, b]$, então,

$$\int_a^b f(x) = g(b) - g(a)$$

Se $x = a$, a derivada $g'(x)$ pode ser uma derivada a direita, e se $x = b$, a derivada $g'(x)$ pode ser uma derivada a esquerda.

5. APLICAÇÕES DO CÁLCULO NA ENGENHARIA

Algumas aplicações são essenciais para os engenheiros, dentre elas a Força, aceleração, velocidade, carga, corrente, entre outras. Essas aplicações são base para quase todos os conteúdos vistos ao decorrer dos cursos, além de serem ponto de partida para outras mais específicas. Portanto, seguem algumas aplicações do cálculo referente aos diferentes ramos da engenharia:

5.1 CORRENTE ELÉTRICA E CARGA (ENGENHARIA ELÉTRICA)

(HALLIDAY, 2012) define corrente elétrica como “movimento das partículas carregadas”, porém, ele afirma também que apesar desse movimento, nem todas as partículas que passam, produzem essa corrente, visto que para que isso ocorra, é necessário um fluxo de cargas, por definição, a corrente é a taxa de variação das cargas pelo tempo (HALLIDAY, 2012), dessa forma, matematicamente falando, uma taxa de variação remetemos a derivada, logo, sendo i a corrente, q a carga e t o tempo temos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Com a existência desse limite, podemos definir a corrente como a derivada da carga em relação ao tempo:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Em consonância a isso, para encontrar a carga, aplico a volta, ou seja, se eu quero saber a função antes da derivação eu integro, dessa forma a carga pode ser definida como:

$$q = \int i dt$$

com i variando com o tempo, visto que a corrente varia com o tempo.

5.2 VELOCIDADE (ENGENHARIA MECÂNICA)

“A rapidez com o a qual um objeto está se movendo em um certo instante é a velocidade instantânea, ou só velocidade” (HALLIDAY, RESNICK, 2012), dessa forma,

a velocidade em um dado instante de tempo, pode ser obtida a partir de uma velocidade média que vai reduzindo o intervalo de tempo Δt até chegar próximo de 0, com isso, matematicamente falando, trata-se de um limite, tal que

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$$

Sendo v a velocidade, x a posição e t o tempo

Relembrando os conceitos de derivada Na seção 4.2 e a existência desse limite, podemos definir a velocidade como taxa de variação da posição em relação ao tempo, ou seja, a derivada da posição em relação ao tempo é a velocidade:

$$v = \frac{dx}{dt}. \text{ eq. 5.2}$$

5.3 ACELERAÇÃO (ENGENHARIA MECÂNICA)

Segundo Halliday e Resnick (2012) “Quando a velocidade de uma partícula varia, diz que essa partícula sofreu aceleração”, dessa forma, o corpo acelera em um intervalo de tempo Δt , temos que:

$$a_{med} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

tal que v_1 a velocidade inicial, v_2 a velocidade final, t_1 o tempo inicial, t_2 o tempo final e a_{med} a aceleração média.

Ainda segundo Halliday e Resnick (2012) “a aceleração de uma partícula em um dado instante é a taxa ao qual a velocidade está variando nesse instante”, em outras palavras, a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, remetemos a derivada:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \text{ eq.5.3}$$

Sabendo também que a posição é uma função do tempo $x(t)$, para encontrarmos a aceleração, podemos usar a derivada segunda, visto que:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Da mesma forma que a recíproca é verdadeira, temos:

$$v = \int a dt$$

5.4 FORÇA RESULTANTE SOBRE UMA PARTÍCULA (ENGENHARIA MECÂNICA)

Por definição, a força pelas leis de newton é definida como:

$$F_R = m\vec{a}$$

sendo F_R a força resultante sobre a partícula, m a massa (uma constante) e $\vec{a}$ já conhecida como aceleração. Mas, segundo ISAAC NEWTON

“A taxa de variação com o tempo do momento de uma partícula é igual a força resultante que atua sobre a partícula e tem a mesma orientação que a força resultante” (ISAAC NEWTON).

Ou seja, levando para conceitos matemáticos, a taxa de variação de uma propriedade, ou de uma função sobre outra definimos como a derivada, nesse caso a derivada do momento variando com o tempo é igual a força resultante que atua sobre aquela partícula.

Dessa forma a força, matematicamente falando, é definida como

$$F_R = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

e, $\vec{p}$ é o momento linear que fisicamente é definido a multiplicação da massa da partícula pela velocidade

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

tal que m seja a massa e V a velocidade que já foi definida na eq. 5.2 e dessa forma derivando a equação em relação ao tempo, sendo a massa uma constante, temos que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt},$$

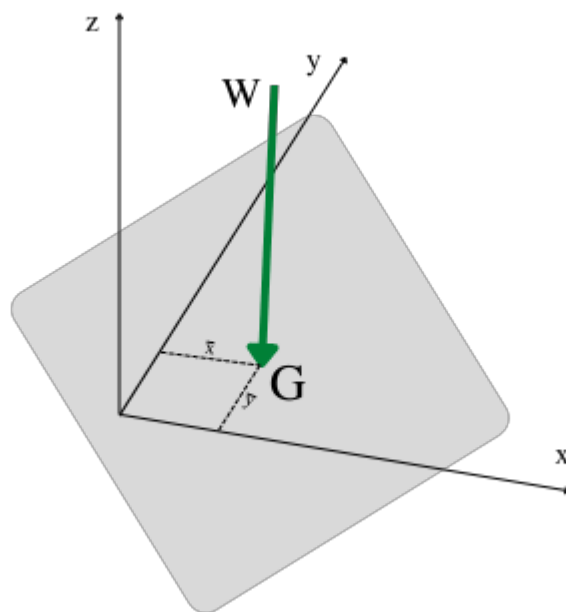
e de acordo com a eq. 5.3

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = F_R.$$

5.5 CENTRO DE GRAVIDADE DE UM CORPO BIDIMENSIONAL (ENGENHARIA CIVIL E MECÂNICA)

Imagine uma placa plana horizontal e finita, sendo orientada pelos eixos x e y e nela será aplicada uma força resultante W (força aplicada pela terra na placa, a força peso). As coordenadas onde essa força resultante está sendo aplicada na placa estão representadas por $\bar{x}$ e $\bar{y}$, como mostra a figura abaixo:

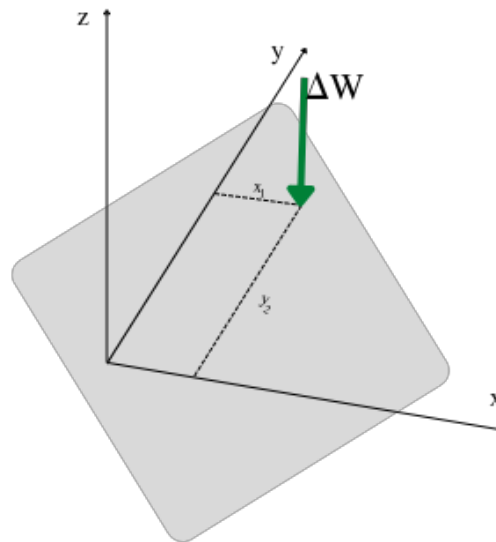
Figura 5 - Centro de gravidade de uma placa plana



Fonte: BEER et al., 2012 adaptado

Essa força W é o peso, desse modo ao dividirmos a placa em n elementos, todos esses n elementos sofrerão a atuação dessa força, visto que a força peso atua em todo o corpo, nesse caso em toda a placa. Assim, podemos dividir a placa em n pedaços com n atuações da força peso, o somatório dessas forças dará a força resultante W , e o ponto onde essa força W está atuando é o que chamamos centro de gravidade.

Figura 6 - Atuação em outro ponto da placa



Fonte: BEER et al., 2012 adaptado.

ΔW_2 é a atuação da força em outro ponto da placa e x_2 e y_2 são as coordenadas desse outro ponto, da mesma forma para qualquer n ponto da placa eu terei as atuações de W nele e as coordenadas dessa atuação.

Segundo (BEER et al., 2012)

“Para obter as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do ponto G no qual a resultante W deve ser aplicada, escrevemos que os momentos de W em relação aos eixos x e y são iguais às somas dos momentos correspondentes dos pesos elementares.” (BEER *et al.*, 2012)

Ou seja,

$$\sum M_x = \bar{x}W = \sum x_i \Delta W_i$$

$$\sum M_y = \bar{y}W = \sum y_i \Delta W_i.$$

Semelhante a isso, para encontrar o W , teremos o somatório dos ΔW na placa, logo:

$$\sum F_z = W = \Delta W_1 + \dots + \Delta W_i + \dots + \Delta W_n.$$

Assim, ao diminuir o tamanho dos n pedaços em pedaços menores e aumentando a sua quantidade, teremos n partes infinitesimais, dessa forma, teremos a integral como o limite da soma de pedaços infinitesimais, tal que

$$\Delta W = dW \text{ eq. 5.5}$$

de modo que são n pedaços aos quais ΔW está atuando, logo, sabendo que

$$\sum F_z = W = \Delta W_1 + \cdots + \Delta W_i + \cdots + \Delta W_n.$$

E sabendo que a eq. 5.5 é verdade, matematicamente falando, temos que:

$$W = \int dW.$$

De forma análoga, sabendo que:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= \bar{x}W = \sum_{i=1}^n x_i \Delta W_i \\ \sum M_y &= \bar{y}W = \sum_{i=1}^n y_i \Delta W_i \end{aligned}$$

fazendo a modelagem, podemos aplicar a integral, visto que a eq. 5.5 temos as coordenadas do centro de gravidade:

$$\begin{aligned} \bar{x}W &= \int x dW \\ \bar{y}W &= \int y dW \end{aligned}$$

5.6 LUCRO MAGINAL, RECEITA MARGINAL E CUSTO MARGINAL

A economia também é um dos grandes ramos estudados por engenheiros, visto que ela está presente em todos os cursos e praticamente em quase todas as situações que envolvem nosso cotidiano, tanto profissional quanto pessoal. Segundo Larson (2014):

“Os economistas referem-se a lucro marginal, receita marginal e custo marginal como taxas de variação do lucro, da receita e do custo em relação ao número x de unidades produzidas ou vendidas’. (LARSON, 2014)

De modo que tem-se a equação que relaciona essas quantidades

$$P = R - C,$$

sendo o P o lucro total do produto, R a receita total e C o custo total, de forma que quando se fala de uma quantidade marginal, nos referimos a derivada dela, sabendo que P, R e C são funções dependentes da quantidade x de unidades produzidas ou vendidas, por isso a derivada é realizada em relação a x, tal que

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$\frac{dP}{dx} = \textit{Lucro marginal}$$

$$\frac{dR}{dx} = \textit{Receita marginal}$$

$$\frac{dC}{dx} = \textit{Custo marginal}$$

Fala-se em marginal, pois o intuito é observar o comportamento da função em relação a uma determinada quantidade, dessa forma, derivando a função em relação a quantidade x tem-se as quantidades marginais referentes ao Lucro, Receita e Custo respectivamente.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando em consideração a importância da modelagem matemática aplicada no cálculo diferencial e integral à engenharia no curso de BICT, viu-se que há uma grande dificuldade para os professores de usar essas aplicações, já que é muito pequena a quantidade de livros de matemática que abordam aplicações nesse ramo.

Diante disso, o presente trabalho tem como objetivo geral a criação de um material de apoio para professores de cálculo diferencial e integral, contendo as aplicações para serem utilizadas ao longo do conteúdo e como objetivos específicos elencar aplicações matemáticas do cálculo diferencial e integral no ramo da engenharia, tornar a compreensão do cálculo diferencial e integral mais clara, diante situações reais do cotidiano dos engenheiros e ajudar na escolha dos discentes da engenharia no segundo ciclo, com base nas aplicações de diferentes áreas, desse modo, a pesquisa atingiu todos os objetivos traçados, visto que o material foi criado com aplicações para cada uma das engenharias ofertadas no campus Caraúbas, Elétrica, Civil e Mecânica, de maneira que possibilite que o discente veja como o cálculo é aplicado de maneira mais palpável e também sirva como material base para professores da área, contendo também o capítulo de preliminares com a apresentação do conteúdo utilizado nas aplicações, com isso cumprindo os objetivos a que se propunha. Os Instrumentos para coleta de dados (livros e artigos) serviram para mostrar que a engenharia e o cálculo andam lado a lado desde a formulação dos conceitos iniciais da física para engenharia. Por fim, em pesquisas futuras pode-se trazer mais aplicações em áreas diferentes, visto que nessa o foco principal eram as engenharias ofertadas no campus de Caraúbas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. S.P.: Contexto, 2002.
- BASSANEZI, R. C.. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3ª ed. 1ª reimp. São Paulo: Contexto, 2009.
- BEER, FERDINAND P.; MAZUREK, DAVID F.; EISENBERG, ELLIOT R.; JOHNSTON, E. RUSSELL. **Mecânica Vetorial para Engenheiros: ESTÁTICA**. 9. ed. [S. l.]: AMGH, 2012.
- BIEMBENGUT, M. S. **Qualidade de Ensino de Matemática na Engenharia: uma proposta metodológica e curricular**. Florianópolis: UFSC, 1997. Tese de Doutorado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, 1997.
- ENGENHARIA E A MATEMÁTICA, **Univiosa**, 2015. Disponível em < <https://www.univiosa.com.br/uninoticias/acervo/8353b3ef-588c-4afd-9d25-afdfa3102e88> > , Acesso em: 17, março de 2022.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos da Física: Eletromagnetismo**. 9. ed. [S. l.]: LTC, 2012. v. 3.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos da Física: Mecânica**. 9. ed. [S. l.]: LTC, 2012. v. 1.
- INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA. UFERSA, 2014.**
Disponível em: < <https://cet.ufersa.edu.br/apresentacao/> > Acesso em: 17, de fevereiro de 2022.
- LARSON, R. **Cálculo Aplicado: Curso Rápido**. 9. ed. [S. l.]: Cengage learning, 2014.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com geometria analítica**. 3. ed. [S. l.]: Harbra, 1994. 788 p. v. 1.
- MADRUGA, Z. E. F; BIEMBENGUT, M.S. **Modelagem & Aleg(o)rias: um enredo entre cultura e educação**. Editora Appris. Curitiba-PR. 2016.
- PILLING, S. **Cálculo Diferencial e Integral I: Introdução e Ementa**, Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU. São José dos Campos-SP. S.d.
- UFERSA (Caraúbas RN). Setor Pedagógico. Análise de Rendimentos BCT. **Análise de Rendimentos BCT**, [s. l.], 2019.