



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
CAMPUS CARAÚBAS
CURSO ENGENHARIA MECÂNICA

NAYANA DE FREITAS GADELHA

CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO UTILIZANDO LÓGICA FUZZY

CARAÚBAS – RN

2018

NAYANA DE FREITAS GADELHA

**CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO UTILIZANDO LÓGICA
FUZZY**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal Rural do Semiárido –
UFERSA, Campus Caraúbas para a obtenção do
título de Engenheira Mecânica.

Orientador:

Prof. Dr. Marcus Vinícius Silvério Costa –
UFERSA

CARAÚBAS – RN

2018

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

G124c Gadelha, Nayana de Freitas Gadelha.
CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO UTILIZANDO
LÓGICA FUZZY / Nayana de Freitas Gadelha Gadelha. -
2018.
74 f. : il.

Orientador: Marcus Vinícius Silvério Costa
Costa.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Engenharia
Mecânica, 2018.

1. Controle. 2. Pêndulo invertido. 3. Lógica
Fuzzy. 4. Root Locus. I. Costa, Marcus Vinícius
Silvério Costa , orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

NAYANA DE FREITAS GADELHA

CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO UTILIZANDO LÓGICA FUZZY

Trabalho de conclusão de curso apresentado à
Universidade Federal Rural do Semiárido –
UFERSA, Campus Caraúbas para a obtenção do
título de Engenheira Mecânica.

APROVADO EM: ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcus Vinícius Silvério Costa - UFERSA
Presidente

Prof. Dr. Dorgival Albertino da Silva Júnior - UFERSA
Primeiro Membro

Prof. Dr. Walber Medeiros Lima- UFERSA
Segundo Membro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, por todas as oportunidades e bênçãos recebidas durante a minha jornada acadêmica.

Agradeço a todos que contribuíram para a conclusão deste trabalho e em particular:

A minha família por sempre acreditarem em mim e por todos sacrifícios feitos para que eu continuasse os estudos.

Ao meu orientador Marcus Vinícius pela disposição em compartilhar ensinamentos no decorrer deste trabalho e principalmente pela confiança em mim depositada. Muito obrigada!

Ao Professor Dorgival Albertino por se mostrar sempre prestativo e interessado em me ajudar e por todas contribuições dadas a minha formação acadêmica.

Ao Professor Jackson Simões por também ter cedido a oportunidade de trabalharmos juntos um dia.

Ao Professor Walber Medeiros Lima por ter aceito o convite de participar de minha banca e avaliar este trabalho de conclusão de curso.

Aos meus amigos Gustavo, Ana Paula, Bruna, Thiago, Lucas, Kairo e Felipe por proporcionarem as melhores relíquias da minha vida e tornarem meus dias mais felizes. Espero manter o contato com todos!

RESUMO

O presente trabalho trata do estudo e controle do sistema pêndulo invertido utilizando lógica Fuzzy. Para esta finalidade foi realizada uma pesquisa, onde foram demonstrados conceitos básicos do sistema pêndulo invertido e discutido o modelo de controle Fuzzy, seu funcionamento e aplicabilidade. Para realizar o controle do sistema pêndulo invertido, obteve-se o modelo linear e não linear do pêndulo invertido, aplicou-se a modelagem em espaço de estados e o método de alocação de pólos no modelo linear. Posteriormente foi realizada adequação da lógica Fuzzy ao sistema, no qual os processos de Fuzzificação, inferência, base de regras e Defuzzificação estiveram presentes. A implementação gráfica no MATLAB foi utilizada para realizar a simulação em malha fechada do pêndulo invertido linear e não linear, objetivando analisar o comportamento do pêndulo invertido linear e não linear em malha fechada e comparar com o comportamento dos mesmos em malha aberta. Como resultado a lógica Fuzzy sanou os problemas de instabilidade do pêndulo invertido linear e não linear encontrados em malha aberta, demonstrando que o controle Fuzzy pode ser aplicado em sistemas não lineares, além dos lineares. A técnica de controle Root Locus também foi aplicada em ambos os modelos linear e não linear do sistema pêndulo invertido para demonstrar que o controle Fuzzy apresenta um desempenho melhor do que o controle realizado pelo método do Lugar Geométrico das Raízes.

PALAVRAS CHAVES: Controle, Pêndulo invertido, Lógica Fuzzy, Root Locus.

ABSTRACT

The present work deals with the study and control of the inverted pendulum system using Fuzzy logic. For this purpose a research was carried out, where basic concepts of the inverted pendulum system were demonstrated and the Fuzzy control model was discussed, its operation and applicability. In order to carry out the control of the inverted pendulum system, the linear and non-linear model of the inverted pendulum was obtained, state space modeling and the pole allocation method were applied in the linear model. Subsequently, Fuzzy logic was adapted to the system, in which the Fuzzification, Inference, Rule Base and Defuzzification processes were present. The graphical implementation in MATLAB was used to perform closed-loop simulation of the linear and non-linear inverted pendulum, where objective was to analyze the behavior of the inverted pendulum linear and non-linear closed loop and compare with the behavior of the same in open loop. As a result, Fuzzy logic solved the problems of instability of the linear and non-linear inverted pendulum found in open mesh, demonstrating that the Fuzzy control can be applied in non-linear systems, besides linear ones. The Root Locus control technique was also applied in both the linear and nonlinear models of the inverted pendulum system to demonstrate that the Fuzzy control performs better than the control performed by the Root Geometric Place method.

KEY WORDS: Control, Inverted pendulum, Fuzzy logic, Root Locus.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Pêndulo Simples.....	13
Figura 2. Pêndulo invertido	14
Figura 3. Diagrama de corpo livre do sistema pêndulo invertido.	17
Figura 4.Simulação da resposta ao impulso do modelo linear e não linear do pêndulo invertido em malha aberta.	24
Figura 5. Arquitetura básica de um controlador Fuzzy.	31
Figura 6. Funções de pertinência para variável estatura.	33
Figura 7.Conjuntos Fuzzy.	45
Figura 8 . Organização do sistema de controle Fuzzy.....	51
Figura 9. Superfície de Inferência Fuzzy.	52
Figura 10. Funções de pertinência.....	53
Figura 11. Controle Fuzzy aplicado no modelo linear e não linear.	55
Figura 12. LGR aplicado no modelo linear e não linear.	56
Figura 13. Comparativo entre LGR e Fuzzy no controle do sistema.	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Declaração de variáveis.....	44
--	----

LISTA DE SIGLAS

EDO- equações diferenciais ordinárias

GNU- Gnu's Not Unix

LGR- Lugar Geométrico das Raízes

MATLAB- Matrix Laboratory

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	9
1.1	OBJETIVO GERAL	10
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	10
1.3	PROPOSTA DE TRABALHO	11
1.4	JUSTIFICATIVA.....	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	13
2.1	PÊNDULO INVERTIDO	13
2.2	MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS	14
2.3	MODELO NÃO LINEAR DO PÊNDULO INVERTIDO	17
2.4	MODELO LINEARIZADO DO PÊNDULO INVERTIDO	18
2.5	ANÁLISE COMPARATIVA DOS MODELOS	22
2.6	MÉTODO DA RESPOSTA NO TEMPO.....	23
2.7	LUGAR GERAL DAS RAÍZES.....	24
2.8	CONSIDERAÇÕES SOBRE O ASSUNTO	27
3	TEORIA FUZZY.....	29
3.1	LÓGICA FUZZY	30
3.2	CONJUNÇÕES FUZZY	32
3.3	FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA FUZZY	33
3.4	DEFINIÇÕES FUZZY.....	34
3.5	REGRAS FUZZY	36
3.6	SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY	36
3.7	FUZZIFICAÇÃO	37
3.8	DEFUZZIFICAÇÃO.....	38
3.9	CONSIDERAÇÕES SOBRE O ASSUNTO	40
4	METODOLOGIA.....	41

4.1	MODELO NUMÉRICO NO ESPAÇO DE ESTADOS E MODELO NUMÉRICO NÃO LINEAR	41
4.2	DECLARAÇÃO DE VARIÁVEIS.....	43
4.3	UNIVERSO DE DISCURSO X VALORES LINGUÍSTICOS.....	44
4.4	FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA	45
4.5	REGRAS FUZZY APLICADAS AO PÊNDULO INVERTIDO.....	46
4.6	INFERÊNCIA FUZZY	47
4.7	MÉTODO DE DEFUZZIFICAÇÃO UTILIZADO.....	48
4.8	PROGRAMAÇÃO FUZZY	48
4.9	MÉTODO DE RUNGE KUTTA	48
4.10	CONTROLE LGR.....	49
4.11	SIMULAÇÃO FUZZY	50
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	52
5.1	RESULTADOS DA SIMULAÇÃO	52
5.2	MÉTODO DE ATIVAÇÃO POR FUNÇÃO E PERTINÊNCIA.....	53
5.3	CONTROLE FUZZY APLICADO AO SISTEMA LINEAR E NÃO LINEAR.....	54
5.4	CONTROLE LGR X CONTROLE FUZZY APLICADO AO MODELO LINEAR E NÃO LINEAR.....	56
6.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	58
	REFERÊNCIAS	60
	ANEXO	65

1 INTRODUÇÃO

O pêndulo invertido é um sistema muito difundido na área de automação e robótica, cujo modelo é útil para diversas aplicações da engenharia tais como: veículos de transporte humano, guindastes navais, estudos de robôs e ciência de controle, dentre outras. De acordo com Vendramini e Silva (2010), o pêndulo invertido possui características dinâmicas instáveis, possibilitando o estudo de diversas arquiteturas e tipos de controladores.

Além disso, Buzetti et al. (2012) apresentaram um estudo sobre o projeto e implementação do sistema de controle de um pêndulo invertido da Quanser, utilizando a análise de estabilidade através do método do lugar das raízes e concluíram que o sistema pêndulo invertido é uma planta alvo interessante para aplicações de técnicas de controle em virtude da presença de polo e zero com parte real positiva (sistemas de fase não-mínima).

Segundo Dorf e Bishop (2009), o lugar das raízes da equação característica de malha aberta em um plano complexo está diretamente relacionado a estabilidade relativa e o desempenho de um sistema de controle em malha fechada. Ou seja, a característica básica da resposta transitória de um sistema de malha fechada está intimamente relacionada à localização das raízes da equação característica de malha aberta.

No tocante ao controle, o método por Lógica Fuzzy é baseado em informações qualitativas sobre a operação do sistema. Logo, não é necessário utilizar modelagem no sistema a ser controlado, simplificando o caminho para a solução, já que o pêndulo invertido é um sistema dinâmico complexo. Duarte Filho et al. (2013) citam que a lógica Fuzzy possui a finalidade de modelar processos multivariáveis, além de processos não lineares, sem a necessidade de todas as informações da planta alvo. Segundo Silva (2009) a escolha do controlador Fuzzy para atuar no pêndulo invertido se dá devido a capacidade do mesmo de tratar vários objetivos, mesmo com solicitações conflitantes, de forma se obter um bom compromisso na engenharia de controle.

Burns (2001) aplicou a modelagem no espaço de estados no modelo linear do sistema pêndulo invertido que é um sistema indefinidamente dinâmico e complexo, tornando-se um objeto de estudo da Teoria de Controle, tendo o seu comportamento comparado com outros mecanismos de dinâmica semelhante. Posteriormente utilizou o controlador Fuzzy como solução para o problema de instabilidade do mesmo.

No presente trabalho será analisado o modelo não linear do sistema pêndulo invertido proposto por Burns (2001), no qual será aplicado a técnica de controle Fuzzy. Na análise, são considerados os conceitos de linearização, análise e projeto do controle do modelo no espaço

de estados através de um ganho de realimentação de estados. Em seguida, é apresentado o conceito de lógica nebulosa ou Fuzzy, cuja a estratégia considera o método de ativação por funções e pertinência (*Mebership Functions*), permitindo a aplicação da lógica de controle tanto para sistemas linearizados como para sistemas não lineares.

Portanto, o estudo proposto visa analisar o modelo linear do pêndulo invertido através do projeto do controle no espaço de estados e aplicação do controle Fuzzy, e posteriormente aplicar o controle por lógica Fuzzy para o modelo não linear, realizando em seguida análises comparativas entre ambos os modelos controlados pelo ganho no espaço de estado e por logica nebulosa.

1.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolver uma aplicação Fuzzy capaz de controlar o pêndulo invertido tanto na sua forma linear como no seu modelo não linear e realizar uma análise comparativa levando em consideração as aplicações existentes em literatura como a aplicação do controle pelo método do lugar geométrico das raízes (LGR) no espaço de estados.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar conceitos acerca do pêndulo invertido e da Teoria de Controle;
- Adequar o modelo matemático do pêndulo invertido utilizando o software MATLAB;
- Realizar a adequação das variáveis do processo de controle do pêndulo invertido a Lógica Fuzzy;
- Gerar gráficos do desempenho do controlador Fuzzy aplicado no modelo linear e não linear do pêndulo invertido.
- Realizar análise de simulação da aplicação Fuzzy no MATLAB considerando o modelo não linear.
- Aplicar a técnica de controle LGR ao modelo linear e não linear do pêndulo invertido e comparar com os resultados do controlador Fuzzy.

1.3 PROPOSTA DE TRABALHO

Este trabalho propõe uma aplicação de controle de posição do pêndulo invertido não linear utilizando-se dos conceitos de lógica Fuzzy. Devido a característica da lógica Fuzzy de trabalhar com conceitos nebulosos por meio das funções de pertinência, este conceito não requer o conhecimento matemático preciso do modelo, permitindo a sua aplicação no controle do pêndulo, inclusive na sua modelagem não linear. Além disso, é proposto um conjunto de análises por meio de simulação utilizando o software MATLAB, cujo script do código é compatível com aplicação de *software* livre como o GNU/Octave. Na simulação são realizadas comparações com o modelo linear e não linear, apresentando análises de perturbação e de estabilidade no tempo, e aplicação da técnica de controle LGR, mostrando a eficácia do controle Fuzzy para pêndulo invertido na sua condição mais realista e menos linearizada em relação a aplicações existentes em literatura como controle LGR.

1.4 JUSTIFICATIVA

O pêndulo invertido apresenta uma dinâmica de equilíbrio instável, cujas características podem ser comparadas com alguns problemas de engenharia, como: controle da posição de um foguete na fase de lançamento, controle de um braço robótico, controle da postura de uma pessoa, dentre outros. Logo, o pêndulo invertido consiste em um objeto de estudo e referência da Teoria de Controle, devido a sua dinâmica complexa e não linear, cujo modelo é utilizado para avaliar a eficiência das diferentes estratégias de controle.

O estudo deste modelo permite que profissionais da engenharia e afins possam resolver um conjunto de problemas reais, visando sempre o estudo e análise da melhor estratégia que alcance os melhores resultados e que seja eficaz na sua implementação, tanto por métodos de simulação como por aplicações que exijam aplicação experimental.

Realizar o controle do pêndulo invertido sem a necessidade de modelagem e obter um tempo de resposta eficiente são requisitos na escolha do controlador a ser usado. Dentro deste perfil, a lógica Fuzzy é uma solução viável, pois de acordo com Silva (2009), sistemas de controle baseados em métodos possibilísticos são recomendados no controle de problemas não lineares, como é o caso do pêndulo invertido. Segundo Modesti et al. (2013) a escolha do controlador Fuzzy aplicado em sistemas não lineares como o pêndulo invertido se mostra

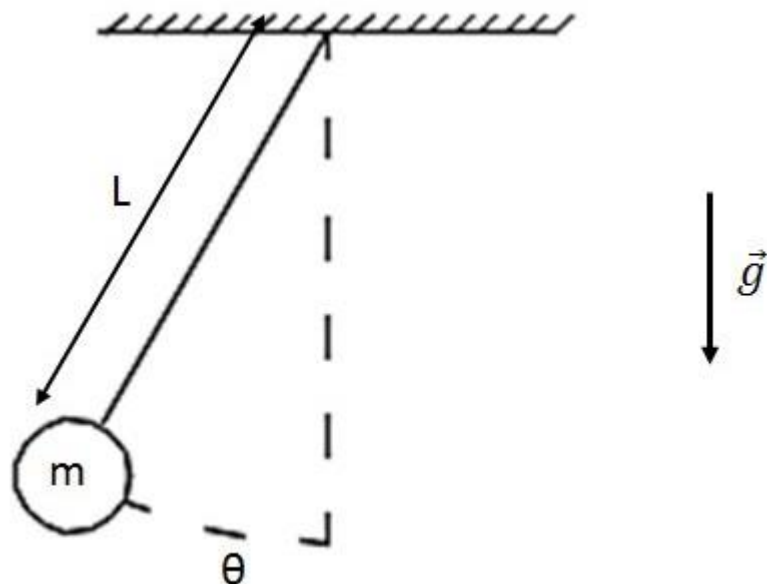
vantajosa, pois o mesmo apresenta a possibilidade de utilizar variáveis linguísticas ao invés de modelagem.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 PÊNDULO INVERTIDO

Segundo Ribeiro (2007) um pêndulo simples ideal consiste em uma partícula suspensa por um fio inextensível e de massa desprezível, ilustrado na Figura 1, onde o mesmo quando afastado de sua posição de equilíbrio e solto, oscila em um plano vertical sob a ação da gravidade, logo o movimento é periódico e oscilatório.

Figura 1. Pêndulo Simples



Fonte: Autoria própria.

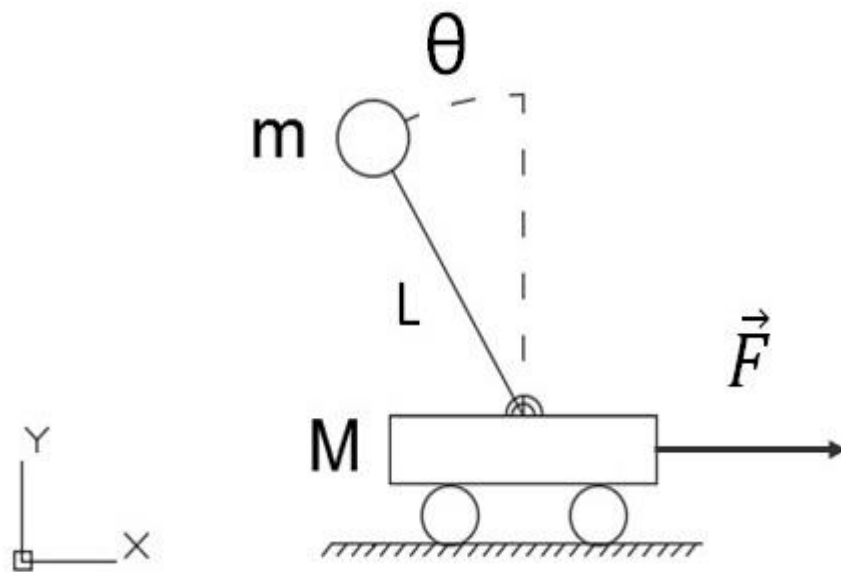
Existem diversos pêndulos, dentre os mais conhecidos estão: pêndulos de torção, pêndulos cônicos, pêndulos de Foucault, pêndulos de Karter e pêndulos invertidos. Este último de acordo com Modesti et al. (2013), é um sistema que apresenta características instáveis, além da não linearidade.

Devido a isso, segundo Duarte Filho et al. (2013), exercer controle sobre o pêndulo invertido seria uma forma de exemplificar as dificuldades práticas relacionadas com aplicações de sistemas de controle no mundo real. Sua grande oposição ao equilíbrio, suas características complexas na dinâmica linear podem ser comparadas e aproximadas a problemas de

engenharia, como: controle da posição de um foguete na fase de lançamento, controle de um braço robótico, controle da postura de uma pessoa, dentre outros.

O pêndulo invertido ilustrado na Figura 2, é um sistema muito difundido na área de automação e robótica, cujo modelo é útil para diversas aplicações da engenharia tais como: veículos de transporte humano, guindastes navais, estudos de robôs e ciência de controle, dentre outras.

Figura 2. Pêndulo invertido



Fonte: Autoria própria.

No entanto, para analisar e controlar sistemas complexos como o pêndulo invertido é necessário obter modelos matemáticos quantitativos. Logo, é importante analisar as relações entre as variáveis do sistema em prol de obter a representação do modelo matemático e os métodos de solução do sistema.

2.2 MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS

De acordo com Ogata (2003), a teoria de controle moderno tem como base o conceito de estado, onde o mesmo quando aplicado ao sistema dinâmico se define como o menor conjunto de variáveis, tais que o conhecimento dessas variáveis em $t = t_0$, juntamente com o conhecimento de entrada em $t \geq t_0$, determina o comportamento do sistema dinâmico para qualquer instante $t \geq t_0$.

Essas variáveis de estado que compõem o conjunto de variáveis de estado são o que determina o estado de um sistema dinâmico, ou seja, se n variáveis são necessárias para descrever o comportamento de um sistema, então o conjunto de variáveis de estado é composto por essas n variáveis. É importante frisar que essas n variáveis de estado podem ser consideradas como os n componentes de um vetor x assim, passando-se a chamar de vetores de estado (OGATA, 2003).

O conceito de espaço de estados conhecido na literatura do controle linear pode ser representado através de três variáveis presentes na modelagem de sistemas dinâmicos, o qual consiste nas: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. Logo, um sistema dinâmico deve ter elementos armazenadores de energia no tempo. Em um sistema de controle no tempo contínuo, os integradores são dispositivos de memória, cujas saídas podem ser consideradas como variáveis que definem o estado interno do sistema dinâmico, ou seja, as saídas dos integradores podem ser escolhidas como variáveis de estado (OGATA, 2003).

Segundo Ogata (2003), supondo um sistema com r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ e m saídas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$, definindo as n saídas dos integradores como variáveis de estado: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, o sistema poderá ser escrito como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}\tag{1}$$

As saídas do sistema podem ser dadas por:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}\tag{2}$$

Definindo-se:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

Logo, as equações (1) e (2) tornam-se:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (3)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (4)$$

Onde a equação (3) é a equação de estado e a equação (4) é a equação de saída. Se as funções f e/ou g envolverem o tempo, então o sistema será variante no tempo. Se a equação de estado e a equação de saída forem linearizadas em torno de um ponto de operação teremos:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (5)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (6)$$

Onde $A(t)$ é a matriz de estado, $B(t)$ de matriz de entrada, $C(t)$ de matriz de saída e $D(t)$ de matriz de transmissão direta. Mas se as funções f e/ou g não envolverem o tempo, então o sistema será invariante no tempo e as equações (5) e (6) serão simplificadas para seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7)$$

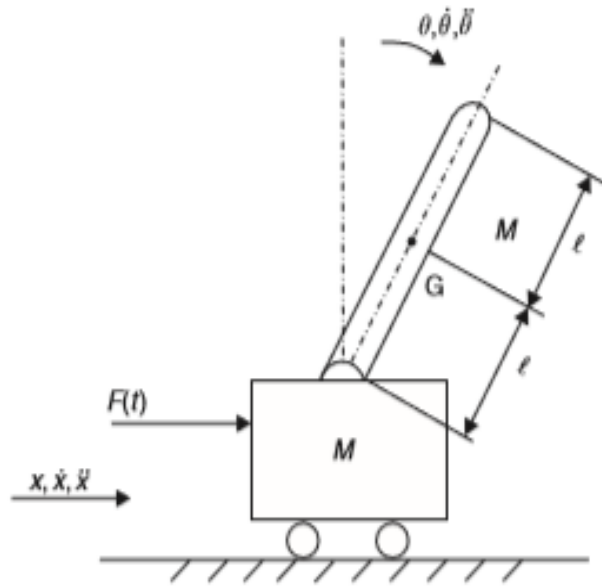
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (8)$$

Onde a equação (7) é a equação de estado de um sistema invariante no tempo e a equação (8) é a equação de saída para o mesmo sistema.

2.3 MODELO NÃO LINEAR DO PÊNDULO INVERTIDO

De acordo com Burns (2001) é possível descrever as equações de movimento do pêndulo invertido a partir do diagrama de corpo livre do sistema, ilustrado na Figura 3.

Figura 3. Diagrama de corpo livre do sistema pêndulo invertido.



Fonte: Burns, 2001.

Onde $x(t) \in \mathcal{R}^4$ será definido como o vetor de estados, no qual as variáveis serão o deslocamento do carrinho x , a velocidade do carrinho $\dot{x}$, a aceleração do carrinho $\ddot{x}$, o deslocamento angular da haste θ , a velocidade angular da haste $\dot{\theta}$ e a aceleração angular da haste $\ddot{\theta}$. Já o vetor de saídas de interesse será definido como $y(t) \in \mathcal{R}^2$ através dos parâmetros θ e $\dot{\theta}$ e o sinal de controle será definido como $u(t) \in \mathcal{R}$ (TABORDA, 2014).

Ogata (2010) cita que o movimento de rotação da haste do pêndulo em torno de seu centro de gravidade é dado por:

$$I \frac{d^2}{dt^2} \theta = F_V l \sin \theta - F_H l \cos \theta \quad (9)$$

Onde F_V será a força vertical e F_H a força horizontal, l será o comprimento da haste e I o momento de inércia da haste em relação ao seu centro de gravidade.

Logo, movimento horizontal e vertical da haste, em relação ao seu centro de gravidade serão dados por:

$$F_H = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \quad (10)$$

$$F_V = mg + m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \quad (11)$$

Segundo Burns (2001), já com relação a força responsável pelo o deslocamento do carrinho, tem-se que:

$$F_D = F - F_H \quad (12)$$

$$\text{Onde } F_D = M \frac{d^2}{dt^2} (x) \quad (13)$$

Logo,

$$M \frac{d^2}{dt^2} (x) = F - m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \quad (14)$$

2.4 MODELO LINEARIZADO DO PÊNDULO INVERTIDO

Analisando as equações (9), (10), (11) e (14) observa-se alguns termos não lineares como: $\sin \theta$ e $\cos \theta$, onde a linearização é fundamental, pois geralmente os controladores que utilizam de técnicas de controle lineares não admitem equações não lineares. Segundo Taborda (2014) para realizar linearização do sistema determina-se um ponto de equilíbrio, esse ponto será onde o ângulo θ seja uma grandeza pequena, ou seja, aproximadamente igual a zero, pois a haste do pêndulo invertido estará em sua posição totalmente vertical.

Realizando-se as respectivas considerações: $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, a partir da equação (9) tem-se que:

$$I \frac{d^2}{dt^2} \theta = F_V l \theta - F_H l \quad (15)$$

Logo, a força horizontal e vertical da haste, em relação ao seu centro de gravidade e a força responsável pelo deslocamento do carrinho serão dadas por:

$$F_H = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l\theta) \quad (16)$$

$$F_V = mg + m \frac{d^2}{dt^2} (l) \quad (17)$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} (x) = F - m \frac{d^2}{dt^2} (x + l\theta) \quad (18)$$

Substituindo $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ por $\ddot{\theta}$ e $\frac{d^2x}{dt^2}$ por $\ddot{x}$ tem-se que:

$$I\ddot{\theta} = F_V l\theta - F_H l \quad (19)$$

$$F_H = m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) \quad (20)$$

$$F_v = mg \quad (21)$$

$$M\ddot{x} = F - m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) \quad (22)$$

Da equação (22) tem-se a primeira equação de estados:

$$\ddot{x} = \frac{F - ml\ddot{\theta}}{M + m} \quad (23)$$

Substituindo as equações (20) e (21) na equação (19) e considerando que o momento de inércia de uma haste uniforme seja $\frac{1ml^2}{3}$, obtém-se a segunda equação de estados que é dada pela equação (25).

$$\frac{1ml^2}{3} \ddot{\theta} = mgl\theta - m(\ddot{x} + l\ddot{\theta})l \quad (24)$$

Logo,

$$\ddot{\theta} = \frac{g\theta - \frac{F}{M+m}}{l(\frac{4}{3} \frac{m}{M+m})} \quad (25)$$

Definindo-se as variáveis de estado como: $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x$, e $x_4 = \dot{x}$, onde, θ , e considerando que as saídas do sistema são a posição angular da haste e a velocidade angular da haste, tem-se que:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad [26]$$

Separando-se as variáveis a partir das equações de estados (23) e (25), e modelando-se o sistema em termos de equações vetoriais-matriciais a partir do respectivo modelo abaixo, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = A_{4 \times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + B_{4 \times 1} u \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C_{2 \times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} u \quad (29)$$

Considerando a variável de controle $u=F$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ a_{21}x_1 \\ x_4 \\ a_{41}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2F \\ 0 \\ b_4F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ a_{21}x_1 + b_2F \\ x_4 \\ a_{41}x_1 + b_4F \end{bmatrix} \quad (30)$$

Logo,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (31)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + b_2F \quad (32)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (33)$$

$$\dot{x}_4 = a_{41}x_1 + b_4F \quad (34)$$

Substituindo $\dot{x}_2$ por $\ddot{\theta}$ na equação (32), $\dot{x}_4$ por $\ddot{x}$ na equação (34) e x_1 por θ em ambas as equações tem-se que:

$$\ddot{\theta} = a_{21}\theta + b_2F \quad (35)$$

$$\ddot{x} = a_{41}\theta + b_4F \quad (36)$$

Logo evidenciando θ e F da equação (25) :

$$\ddot{\theta} = \frac{3g(m+M)}{l\{4(m+M)-3m\}}\theta + \frac{-3}{l\{4(m+M)-3m\}}F \quad (37)$$

Substituindo a equação (25) na equação (23) e evidenciando θ e F :

$$\ddot{x} = \frac{-3gm}{4(m+M)-3m}\theta + \left(\frac{1}{(M+m)}\right)\left\{1 + \frac{3m}{4(m+M)-3m}\right\}F \quad (38)$$

A representação em espaço de estados da forma matricial das equações (31), (32), (33) e (34) será:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(m+M)}{l\{4(m+M)-3m\}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-3gm}{4(m+M)-3m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-3}{l\{4(m+M)-3m\}} \\ 0 \\ \left(\frac{1}{(M+m)}\right)\left\{1 + \frac{3m}{4(m+M)-3m}\right\} \end{bmatrix} u \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Logo, sendo u o sinal de controle da força F e executando-se a técnica de controle, serão utilizadas as respectivas matrizes de estados A e B :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3g(m+M)}{l\{4(m+M)-3m\}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-3gm}{4(m+M)-3m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-3}{l\{4(m+M)-3m\}} \\ 0 \\ \left(\frac{1}{(M+m)}\right)\left\{1 + \frac{3m}{4(m+M)-3m}\right\} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad (41)$$

2.5 ANÁLISE COMPARATIVA DOS MODELOS

Santos (2007) cita que um modelo linear é a forma mais comum de representar um sistema devido a sua simplicidade, restringindo-se, no entanto, a um caso particular dos sistemas reais que geralmente são não-lineares. Ainda de acordo com Santos (2007), considera-se um sistema não linear quando o mesmo satisfaz o princípio da superposição dos efeitos. Este último baseia-se na ideia de que a resposta produzida pela aplicação da combinação linear de duas ou mais excitações diferentes é igual à combinação linear das respostas individuais a cada uma das excitações.

Pearson (2003) afirma que os modelos não lineares conseguem reproduzir fielmente o processo real de uma determinada situação quando se faz necessário. Embora o mesmo seja mais complexo que o modelo linear, ele permite a análise de algumas características como oscilações e bifurcações de um determinado sistema.

Segundo Santos (2007), embora a aplicação de controle de um modelo não linear seja mais adequada para realizar aproximações mais realísticas de um dado processo não linear, sacrifica-se a simplicidade associada às técnicas lineares a fim de alcançar um desempenho elevado.

Serra e Santos (2014) citam que a lógica Fuzzy é adequada para realizar a aproximação de uma larga classe de sistemas não lineares, ou seja, a mesma propõe uma metodologia para controle de sistemas dinâmicos não lineares. Essa lógica apresenta maior precisão nas implementações computacionais além da flexibilidade para incorporar em sua estrutura formulações matemáticas complexas, como é o caso de modelos não lineares.

O projeto do controlador Fuzzy para sistemas linear e não linear pode ser obtido através do modelo Fuzzy. Esse modelo se dará através de uma planta não linear, onde a modelagem baseada em dados experimentais de entrada e saída ou as leis físicas que regem o comportamento dinâmico da planta serão os fins para obter o modelo Fuzzy (SERRA E SANTOS, 2014).

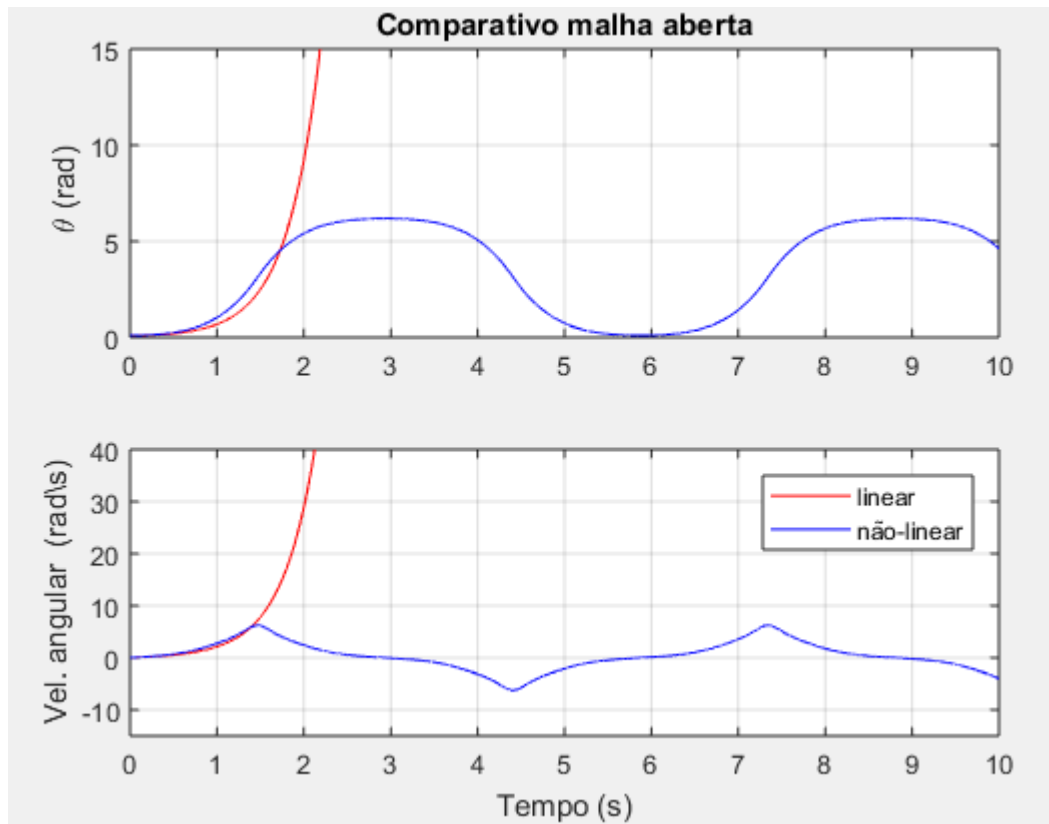
2.6 MÉTODO DA RESPOSTA NO TEMPO

Segundo Costa et al. (2014) para um sistema em que se utiliza controle, local de raízes ou resposta em frequência é necessário considerar apenas o controle da posição do pêndulo, ou seja, se o sistema pêndulo invertido possuir um carro móvel acoplado, a posição do carro não será considerada, pois esses métodos se aplicam somente em sistemas com única entrada e única saída.

A resposta transitória de um sistema a entradas previamente conhecidas é fundamental para o estudo da teoria de controle e projetos de controle. O impulso atua como uma perturbação em faixa ampla no domínio de frequência, assim justificando a importância de se obter a resposta do pêndulo invertido ao impulso (Teixeira et al., 2006).

De acordo com Burns (2001) os resultados de simulação para resposta ao impulso do modelo linear e não linear do pêndulo invertido em malha aberta pode ser obtido através do MATLAB, conforme ilustrado na Figura 4. Como esperado, o comportamento do pêndulo invertido em malha aberta para ambos os modelos foi instável.

Figura 4. Simulação da resposta ao impulso do modelo linear e não linear do pêndulo invertido em malha aberta.



Fonte: Autoria própria, 2018.

Ao observar a Figura 4 nota-se que o ângulo da haste e a velocidade angular da haste apresentaram instabilidade no modelo não linear. Já no linear o ângulo da haste e a velocidade angular se comportaram de forma crescente, dessa forma é imprescindível o uso de uma técnica de controle para estabilizar o sistema linear e não linear do pêndulo invertido. O controlador nebuloso Fuzzy poderá suprir as não linearidades e manter o bom desempenho do sistema em situações desejadas.

2.7 LUGAR GERAL DAS RAÍZES

De acordo com Nise (2002) o método do lugar das raízes objetiva a estabilidade e uma resposta transitória adequada por parte do sistema. Buzetti et al. (2012) citam que esse método visa estudar graficamente a evolução das raízes da malha fechada de uma equação, dados os pólos e zeros da malha aberta, isso quando o ganho K é variado continuamente de zero ao infinito.

Segundo Silva (2013) o lugar das raízes inicia-se nos pólos de malha aberta, quando o ganho é zero, e termina nos zeros de malha aberta ou no infinito, quando o ganho tende ao infinito. Logo, existe a possibilidade de verificação de ganho para estabilização do sistema e qual o valor desse ganho.

De acordo com Ogata (2010) controladores por realimentação de estados podem ser projetados pela simples alocação dos pólos do sistema em malha fechada em locais pré-determinados do plano complexo s , no qual as transformadas de Laplace são graficamente representadas, logo a localização dos pólos corresponde aos autovalores do sistema e definem características importantes da sua resposta temporal.

De acordo com Moore (1976) uma técnica de controle por realimentação de estados considera a lei de controle demonstrada na equação (42), no qual a mesma representa uma realimentação de controle negativa e estática para os estados do sistema considerado que é o pêndulo invertido.

$$u(t) = -Kx(t), K \in R^{m \times 1} \quad (42)$$

Considerando a equação (7) que é a equação de estado de um sistema invariante no tempo e a equação (8) que é a equação de saída para o mesmo sistema e substituindo na equação de controle (42) será obtido o sistema em malha fechada conforme mostra as equações (43) e (44).

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (43)$$

$$y(t) = (C - DK)x(t) \quad (44)$$

É importante frisar que o sistema dado pelas equações (43) e (44) é linear e sua estabilidade será definida pelos autovalores da matriz $(A-BK)$. Logo, para um sistema controlável e estabilizável, o ganho de realimentação K poderá ser escolhido de forma que os autovalores de $(A-BK)$ estejam posicionados no plano complexo conforme a performance desejada para o sistema controlado.

Ogata (2010) afirma que os pólos do sistema em malha fechada, representado pelo pelas equações (43) e (44), são dados pelo cálculo dos autovalores da matriz $(A-BK)$, conforme mostra a equação (45), em que s representa o operador complexo de Laplace e $\det$ é o determinante e I é a matriz identidade.

$$\det[sI - (A - BK)] = \det[sI - A + BK] = 0 \quad (45)$$

Logo os autovalores de $(A-BK)$ são dados pelas raízes da equação (45), onde o objetivo de alocação de pólos é a determinação do vetor de ganho K para posicionar os pólos do sistema de malha fechada em posições que satisfaçam as condições de projeto. Aplicando esse objetivo na planta de Burns (2001) e considerando os respectivos valores para os parâmetros da sua planta, tem-se que:

$$l=1 \text{ m}, M=1 \text{ kg}, m=0.5 \text{ kg e } g=9.81 \text{ m/s}^2$$

Logo,

$$a_{21} = 9.81, a_{41} = -3.27, b_2 = -0.667 \text{ e } b_4 = 0.889$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.27 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.667 \\ 0 \\ 0.889 \end{bmatrix}$$

E os polos desejados de malha fechada são $s = -2 \pm j2$ e $s = -2 \pm j4$. Portanto, a equação característica desejada do sistema é dada por (46).

$$(s + 2 + 2j)(s + 2 - 2j)(s + 4 + 4j)(s + 4 - 4j)$$

$$s^4 + 12s^3 + 72s^2 + 192s + 256 = 0 \quad (46)$$

Aplicando a equação (45), tem-se que:

$$\det \left[\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -9.81 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 3.27 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.667 \\ 0 \\ 0.889 \end{bmatrix} \times [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4] \right] =$$

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -9.81 - 0,667k_1 & s - 0,667k_2 & -0,667k_3 & -0,667k_4 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 3.27 + 0,889k_1 & 0,889k_2 & 0,889k_3 & s + 0,889k_4 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Aplicando determinante de Laplace em (47), tem-se que:

$$s^4 + (0,889k_4 - 0,667k_2)s^3 + (0,889k_3 - 9,81 - 0,667k_1)s^2 + (-9,81 \times 0,889 + 0,667 \times 3,27)k_4 \times s + (-9,81 \times 0,889 + 3,27 \times 0,667)k_3 = s^4 + 12s^3 + 725^2 + 1925 + 256$$

Logo,

$$(-9,81 \times 0,889 + 3,27 \times 0,667)k_3 = 256$$

$$(-9,81 \times 0,889 + 0,667 \times 3,27)k_4 = 192$$

$$(0,889k_3 - 0,667k_1 - 9,81) = 72$$

$$(0,889k_4 - 0,667k_2) = 12$$

O ganho K será:

$$K = [-174.83 \quad -57.12 \quad -39.14 \quad -29.36] \quad (48)$$

Desta forma fica evidente que para cada escolha de pólos é obtido um valor diferente de ganho K , justificando a importância de realizar a alocação de pólos.

2.8 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ASSUNTO

Segundo Correia (2016) é comum equações diferenciais ordinárias (EDO) descreverem um sistema dinâmico, onde a transformada de Laplace transforma essas equações em um modelo descrito na representação em frequência, deixando de ser representação temporal. Essa representação em frequência é baseada em uma relação entre a entrada e a saída de um sistema, no entanto nem sempre essa relação é suficiente para descrever o processo de um sistema dinâmico, sendo necessário conhecer outros elementos internos que estão relacionados a acumuladores de energia.

Para representar tais elementos internos utiliza-se variáveis que são chamadas de estados e que ajudam a explicar o comportamento dinâmico de um sistema. Friedland (2005)

cita que conhecendo-se a condição inicial dos estados é possível perceber como o sistema progride, descobrindo assim sua solução.

De acordo com Paula (2014) a modelagem matemática do pêndulo invertido geralmente é flexível, ou seja, o engenheiro de controle tem a opção de escolher as variáveis armazenadoras de energia a serem controladas, além de considerar ou desprezar alguns fatores físicos do sistema.

Correia (2016) afirma que é fundamental conhecer os estados de um modelo, pois a maioria das técnicas de projeto de controle são baseadas na realimentação de estados. Geralmente a forma de realimentação não influencia na lei de controle. Esta lei é obtida a partir da alocação de pólos, e em malha fechada esses pólos são posicionados no plano complexo em prol de atender as exigências de projeto inicialmente conhecidas.

De acordo com a posição dos pólos é possível calcular a matriz de ganho de realimentação, no entanto esse posicionamento de pólos não garante que será obtida a otimização da solução, ou seja, o sinal de controle $u(t)$ e o estado do sistema $x(t)$ nem sempre são otimizados, mesmo sendo atendidas as exigências de projeto inicialmente conhecidas (CORREA, 2016).

A não linearidade do pêndulo invertido e sua instabilidade em malha aberta faz-se com que o controle do pêndulo invertido seja um assunto clássico no que se refere ao controle de sistemas. Uma abordagem da modelagem não-linear que tem sido desenvolvida para o controle do sistema pêndulo invertido é a modelagem Fuzzy. Para Duarte Filho et al. (2013), a abordagem é uma simplificação do processo real de controle do sistema.

3 TEORIA FUZZY

O levantamento de variáveis de estados e o agrupamento dessas variáveis em equações que são inseridas no MATLAB para simular e obter gráficos em prol de analisar o desempenho de um determinado sistema às perturbações inerentes a planta em estudo, não são suficientes para o controle da planta, ou seja, é necessário adotar sistemas de controle inteligentes, que na resposta a múltiplas entradas se adaptem, de acordo com os erros registrados. Dentre eles pode-se citar o sistema de controle inteligente Fuzzy que possui a habilidade de responder a determinadas entradas no sistema de forma a solucionar os erros, mesmo que estes sejam diferentes dos previstos.

A lógica Fuzzy foi iniciada por Jan Lukasiewicz, na década de 20. Este último desenvolveu e introduziu conjuntos com grau de pertinência que combinados com os princípios da lógica clássica originou em uma fundamentação teórica para que em 1960 Lofti Asker Zadeh chegasse a ser o primeiro autor de uma publicação sobre lógica Fuzzy (RIGNEL ET AL., 2011). No entanto, a aplicação da lógica Fuzzy em problemas de controle só ocorreu em 1973 através de Mamdani, onde o mesmo propôs um controlador embasado em um método que utiliza para o processo de decisão de regras do tipo “SE A ENTÃO B”, nas quais tanto o antecedente quanto o consequente são valores de variáveis linguísticas, expressos por meio de conjuntos Fuzzy (ANDRADE E JACQUES, 2008).

Segundo Bauchspiess (2008) a teoria do conjunto Fuzzy teve sua primeira aplicação de sucesso em controle, onde Mamdani a utilizou para projetar um controlador Fuzzy, onde a mesma se distingue da lógica clássica através da não adesão da proposição lógica que possui dois extremos: o completamente verdadeiro ou o completamente falso. Na lógica Fuzzy uma proposição pode assumir um número de valores infinito de pertinência que varia de zero a um, ou seja, parcialmente falso ou parcialmente verdadeiro, onde o valor zero irá representar a pertinência não completa e o valor um irá representar a pertinência completa.

Andrade e Jaques (2008) afirmam que existem dois grandes grupos de controladores Fuzzy, onde o proposto por Mamdani são baseados nas funções de implicação Fuzzy e em operadores de composição para a definição da saída Fuzzy do controlador. Já o proposto por Takagi e Sugeno dispensam a definição de funções de implicação e operadores para a inferência, ou seja, o controlador Fuzzy de Takagi e Sugeno é uma simplificação do controlador Fuzzy de Mamdani, onde o consequente de cada regra é definido como uma função das variáveis linguísticas de entrada.

Andrade e Jacques (2008) citam que os controladores Fuzzy propostos por Mamdani e Takagi e Sugeno passaram por diversos aprimoramentos e hoje são utilizados como solução para diversos problemas de controle, estando disponíveis em pacote computacional, com vários recursos que permitem a implementação de seus componentes. Para realizar a implementação de seus componentes se faz necessário ter conhecimentos teóricos acerca de cada solução possível e da influência de cada escolha sobre a resposta do controlador e a eficiência do controle por ele produzido.

3.1 LÓGICA FUZZY

De acordo com Cavalcanti et al. (2012), a lógica Fuzzy é baseada no grau de verdade de “0” a “1”, o que faz a mesma trabalhar com possibilidade de condição verdadeira, parcialmente falsa e falsa, essa lógica nebulosa também pode ser definida como a lógica que suporta os modos de raciocínio que são aproximados ao invés de exatos, já que a mesma possui habilidade de inferir conclusões baseadas em informações incompletas. Duarte et al. (2013) citam que ao invés de se obter um modelo para o processo e posteriormente projetar um controlador com desempenho razoável, estes sistemas se propõem a modelar diretamente como o ser humano controlaria este processo, sendo essa a principal característica da lógica Fuzzy.

Segundo Cavalcante et al. (2012), devido a capacidade de inferir conclusões a lógica Fuzzy vem sendo aplicada em diversas áreas como: Sistemas especialistas, computação com palavras, raciocínio aproximado, linguagem natural, identificação e controle de processos, robótica, modelamento de sistemas parcialmente abertos, reconhecimento de padrões e processos de tomada de decisão, dentre outras.

Duarte et al. (2013) afirmam que com a necessidade de se obter uma representação para as informações incompletas ou imprecisas surgiu os subconjuntos Fuzzy de forma a impedir passagens entre duas classes de elementos, e ao mesmo tempo permitir que os elementos possam pertencer parcialmente a cada uma das classes.

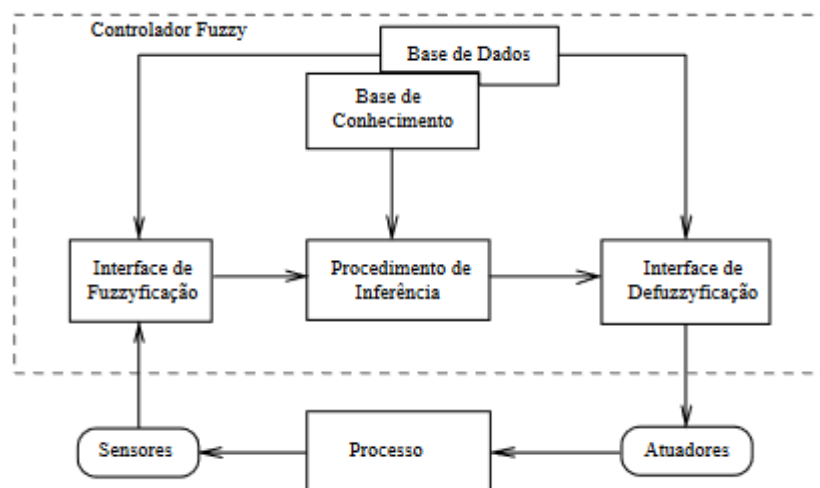
Logo, se considerarmos U como uma coleção de objetos denominados genericamente por $\{u\}$, onde U é chamado de universo de discurso no qual o mesmo é contínuo ou discreto, e ainda que um conjunto Fuzzy A nesse universo de discurso U é definido por uma função de pertinência μ_A que assume valores em um intervalo $[0: 1]$, tem-se que:

$$\mu_A : U \rightarrow [0:1] \quad (49)$$

Desta forma, o conjunto suporte de um conjunto Fuzzy A é o subconjunto dos pontos u de U tal que $\mu_A(u) > 0$. Um conjunto Fuzzy cujo conjunto suporte é um único ponto de U com $\mu_A = 1$ é chamado de um conjunto unitário Fuzzy.

Para Duarte et al. (2013) o controle Fuzzy permite generalizar e inferir dentro do universo de inferência ou discurso de cada variável a ser controlada. Assim a estrutura de um processo controlado por um controlador Fuzzy é ilustrado na figura 5, onde seus componentes básicos são: a interface de Fuzzyficação, a base de conhecimento, a base de dados, o procedimento de inferência e a interface de Defuzzyficação (GOMIDE E GUDWIN,1994).

Figura 5. Arquitetura básica de um controlador Fuzzy.



Fonte: Gomide e Gudwin, 1994.

Onde a Fuzzyficação toma os valores das variáveis de entrada para realizar a Fuzzyficação dos mesmos. A base de conhecimento consiste de uma base de regras e a base de dados armazena as definições necessárias. Já o procedimento de inferência processa os dados Fuzzy de entrada, junto com as regras, de modo a inferir as ações de controle Fuzzy, e a interface de Defuzzyficação transforma as ações de controle Fuzzy inferidas em ações de controle não-Fuzzy.

3.2 CONJUNÇÕES FUZZY

De acordo com Tanscheit (2004), um conjunto Fuzzy A em um universo X é definido pela respectiva função de pertinência:

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1] \quad (50)$$

E é representado por um conjunto de pares ordenados:

$$A = \{\mu_A(x)/x\} \quad x \in X \quad (51)$$

Onde, μ_A irá indicar o quanto x é compatível com o conjunto A . É importante frisar que um determinado elemento pode pertencer a mais de um conjunto Fuzzy, com diferentes graus de pertinência.

Segundo Tanscheit (2004) existe um conjunto suporte de um conjunto Fuzzy, onde A será o conjunto de elementos no universo X para os quais $\mu_A(x) > 0$. O conjunto unitário Fuzzy tem o suporte em um único ponto x' com $\mu_A(x') = 1$. Logo, um conjunto Fuzzy também pode ser considerado como o mapeamento do conjunto suporte no intervalo $[0,1]$, implicando em uma representação para o conjunto Fuzzy através da sua função de pertinência.

Os conjuntos Fuzzy se dividem em universos contínuos ou discretos. Quando o universo X for discreto e finito, o conjunto Fuzzy A será representado por um vetor contendo os graus de pertinência no conjunto A dos elementos correspondentes de X . Quando o universo X for contínuo, emprega-se a seguinte notação:

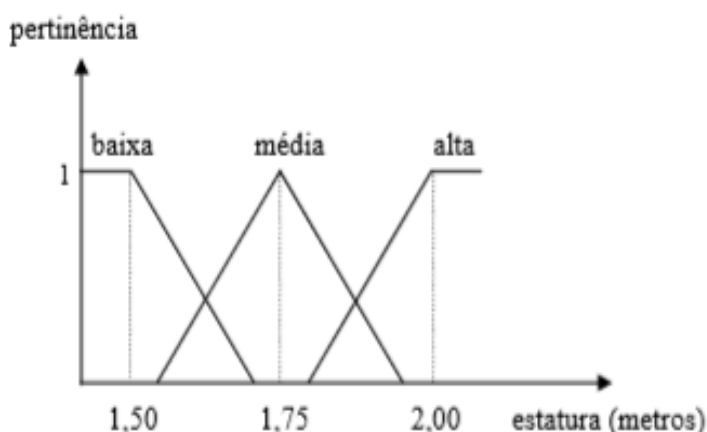
$$\int_X \mu_A(x)/x \quad (52)$$

Tanscheit (2004) cita que os nomes dos conjuntos Fuzzy podem ser dados através de valores de uma variável linguística, ou seja, se a temperatura é uma variável linguística os valores da mesma podem ser: baixa, média, e alta e eles serão descritos por intermédio de conjuntos Fuzzy, representados por funções de pertinência. Assim, os valores de uma variável linguística podem ser sentenças em uma linguagem especificada, construídas a partir de termos primários, conectivos lógicos, modificadores e delimitadores.

3.3 FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA FUZZY

A função de pertinência afirma o quanto é possível um elemento x pertencer a um conjunto A , ou seja, através do grau de pertinência representado por intervalos. Conforme ilustra a Figura 5, é possível saber o quanto um determinado elemento pertence a um dado conjunto.

Figura 6. Funções de pertinência para variável estatura.



Fonte: Tanscheit, 2004.

Seguindo a linha de raciocínio citada no último parágrafo do tópico anterior observa-se que na Figura 5 a estatura é a variável linguística e os termos (baixa, média, alta) são os valores da variável linguística. De acordo com a Figura 5 estaturas de até 1,5 metros apresentam grau de pertinência igual a 1 no conjunto A ; Já a estatura de 1,75 metros é "completamente compatível" com o conjunto B , ao passo que estaturas acima de 1,8 metros apresentam grau de pertinência diferente de zero em C . Pessoas com estatura acima de 2 metros são definidas como altas.

De acordo com Biondi Neto et al. (2006) a função de pertinência (*membership*) de um conjunto Fuzzy representa as propriedades semânticas do conceito. Existem diversas funções de pertinências dentre as principais: linear; S; curva Z; pi; gaussiana; trapezoidal e triangular.

- A função de pertinência linear é uma das mais simples, representadas em forma decrescente ou crescente;
- A função de pertinência S se caracteriza pela equação quadrática;

- Curva Z é complemento do formato S de dois parâmetros, ou seja, $Z(x, a, b) = 1 - S(x, a, b)$;
- Formato PI é a junção das curvas S e Z;
- A função de pertinência gaussiana tem uma distribuição normal, a mesma tende a zero para valores muito maiores ou muito menores do que a média;
- A função de pertinência trapezoidal apresenta um rápido processamento e presença de descontinuidades. A mesma se dá em um formato de trapézio;
- A função triangular é semelhante a trapezoidal, mais não apresenta descontinuidade entre a mudança do crescimento da função. A mesma se dá em um formato triangular.

3.4 DEFINIÇÕES FUZZY

Tanscheit (2004) afirma que existem uma série de definições Fuzzy, onde as mais relevantes são:

Um conjunto Fuzzy A em X é vazio se sua função de pertinência é igual a zero sobre todo X :

$$A = \emptyset \text{ se e somente se } \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X \quad (53)$$

O complemento A' de um conjunto Fuzzy A é normalmente dado por:

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X \quad (54)$$

Dois conjuntos Fuzzy A e B em X são iguais se suas funções de pertinência forem iguais sobre todo X :

$$A = B \text{ se e somente se } \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X \quad (55)$$

Um conjunto Fuzzy A é um subconjunto de B se sua função de pertinência for menor ou igual à de B sobre todo X :

$$A \subset B \text{ se } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X \quad (56)$$

A união dos conjuntos A e B denotada por $A \cup B$ contém todos os elementos que pertencem a A ou a B . Fazendo-se uso dos operadores minimum (*min* ou $\wedge$) e maximum (*max* ou $\vee$), a função característica do conjunto resultante (união) pode ser representada da seguinte forma:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad \forall x \in X \quad (57)$$

Fazendo o mesmo para interseção dos conjuntos A e B tem-se que:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad \forall x \in X \quad (58)$$

É importante observar que:

$$\mu_{A \cap B}(x) = 1 \text{ se } x \in A \text{ e } x \in B \quad (59)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = 0 \text{ se } x \notin A \text{ e } x \notin B \quad (60)$$

A mesma analogia é válida para união dos conjuntos A e B . Para união Fuzzy utiliza-se a soma algébrica e para interseção Fuzzy o produto algébrico. Com o objetivo de generalização definiu-se operadores de base axiomática, ou seja, baseados nos preceitos de norma triangular (norma-t) e co-norma triangular (conorma-t ou norma-s) (TANSCHKEIT, 2004).

Logo, uma norma-t é uma operação binária dada por: $*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, onde $\forall x, y, z, w \in [0,1]$. Já a conorma-t é uma operação binária dada por: $\oplus$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, onde $\forall x, y, z, w \in [0,1]$. Ambas as normas satisfazem as respectivas propriedades: comutatividade, associatividade, monotonicidade e condições de contorno.

3.5 REGRAS FUZZY

De acordo com Tanscheit (2004) para que o controlador Fuzzy apresente um bom desempenho é preciso que regras consistentes sejam impostas na estratégia de controle. Segundo Belucci (2010) um sistema baseado em regras Fuzzy busca respostas para um determinado problema, ou seja, ele tenta produzir saídas (respostas) para cada entrada (problema).

Se a entrada e a saída forem representadas por condição e ação respectivamente, o controlador Fuzzy reproduzirá a estratégia de um controlador humano, considerando que as ações humanas são execuções de tarefas que seguem uma sequência de ordem linguística representadas por um conjunto de regras. Tanscheit (2004) afirma que as regras são fornecidas em forma de sentenças linguísticas, as mesmas são providas de um especialista ou através de métodos de extração de dados numéricos.

Segundo Ortega (2001) cada regra Fuzzy é composta por uma parte antecedente (Se) e uma parte consequente (Então), resultando em uma estrutura:

$$Se \{antecedentes\} \text{ Então } \{consequentes\}. \quad (61)$$

Onde, os antecedentes descrevem uma condição, enquanto os consequentes descrevem uma conclusão ou uma ação que pode ser esboçada quando as condições se verificam. Em outras palavras os antecedentes descrevem uma condição elástica, ou seja, uma condição que pode ser parcialmente satisfeita, enquanto os consequentes descrevem uma condição rígida.

Ortega (2001) afirma que os antecedentes definem a região de variáveis de entrada e os consequentes a região de variáveis de saída do sistema em estudo. Todas as regras são consideradas em um mesmo tempo e posteriormente obtém-se uma resposta que pode ser um valor numérico ou um conjunto Fuzzy, dependendo do consequente utilizado.

3.6 SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Segundo Souza (2010) o processo de inferência Fuzzy permite que cada proposição Fuzzy seja traduzida matematicamente por meio das técnicas da lógica Fuzzy, ou seja, na inferência Fuzzy a base de regras é modelada matematicamente por uma relação Fuzzy a partir dos conjuntos Fuzzy do sistema e da lógica Fuzzy a ser adotada. Nesse processo também será

fornecido a saída (controle) Fuzzy a ser adotada pelo controlador, a partir de cada entrada Fuzzy.

Souza (2010) afirma que a inferência Fuzzy de Mamdani tem como proposta uma relação Fuzzy binária M entre x e u para modelar matematicamente a base de regras. Esse método tem como base a regra de composição de inferência max-min. Logo, se as regras são modeladas por uma relação Fuzzy R a partir dos conjuntos Fuzzy, tem-se que a função de pertinência de R será dada por:

$$\varphi_R(x, y) = \max_{1 \leq i \leq r} (\varphi_{Ri}(x, u)) \quad (62)$$

Onde Ri é relação Fuzzy obtida a partir da regra i , no qual a função de pertinência será dada por φ_{Ri} . Os valores x e u representam, respectivamente, o estado e o controle. A inferência, que representa o controle B para um estado A , é dada por uma regra de composição de inferência $B = R(A)$, cuja função de pertinência é dada pela equação (63).

$$\varphi_M(x, u) = \max_{1 \leq i \leq r} (\varphi_{Ri}(x, u)) = \max_{1 \leq i \leq r} [\varphi_{Aj}(x) \wedge \varphi_{Bj}(u)] \quad (63)$$

Assim, a relação Fuzzy M é o subconjunto Fuzzy de $X \times U$. Observa-se que em cada regra Rj a condicional é modelada pela aplicação mínimo e para o conceito lógico $\min = \wedge$.

Para Tanscheit (2004) o sistema de inferência Fuzzy, considera entradas não-Fuzzy, ou precisas que são resultantes de medições ou observações. Logo, é necessário efetuar-se um mapeamento destes dados precisos para os conjuntos Fuzzy (de entrada) relevantes, o que é realizado no estágio de Fuzzificação.

3.7 FUZZIFICAÇÃO

A Fuzzificação tem o objetivo de realizar a determinação de um sistema Fuzzy, esse processo é realizado para cada variável de entrada, onde valores crisp de entrada são traduzidos em conceitos linguísticos, representados por conjuntos Fuzzy. Segundo Driankovi et al. (1966) a Fuzzificação é uma função que garante certo grau de imprecisão a um valor numérico, assim mapeando o valor físico de uma variável de um processo em universo normalizado de discurso,

garantindo a compatibilidade da entrada do processo com a representação Fuzzy adotada na base de regras.

De acordo com Silva (2013) a Fuzzificação possui a habilidade de transformar os valores de entrada em graus de pertinência, assim gerando uma interpretação da entrada. Em outras palavras a Fuzzificação realiza a transformação de valores discretos ou conjunto de lógica clássica em um conjunto Fuzzy.

As funções de pertinência são elementos fundamentais no processo de Fuzzificação, onde as mesmas atribuem valores de pertinência Fuzzy para valores discretos de uma variável. De acordo com Bezerra (2009) as funções de pertinência são definidas com base nos respectivos métodos.

- Avaliação e dedução subjetivas: os conjuntos Fuzzy são determinados através de procedimentos de cognição simples ou sofisticados, isso quando se deseja modelar a percepção e o conhecimento das pessoas. Em outras palavras as pessoas desenham ou especificam curvas de pertinência diferentes que sejam adequadas ao problema em questão.
- Formas ad Hoc: nesse método as operações reais de controle Fuzzy são derivadas de um pequeno conjunto de tipos de curvas, como exemplo pode-se citar os conjuntos Fuzzy triangulares. Logo é preciso somente realizar a escolha do valor central e a inclinação das retas dos lados dos conjuntos Fuzzy.
- Conversão de frequências ou probabilidades: nesse método as informações de histogramas de frequência e curvas de probabilidades são utilizadas na construção de funções de pertinência.
- Mensuração Física: os graus de pertinência não são medidos diretamente, no entanto muitas aplicações da lógica Fuzzy são mensurações físicas.

3.8 DEFUZZIFICAÇÃO

De acordo com Souza (2010) a cada entrada Fuzzy, o processo de inferência produz uma saída Fuzzy que indica o controle a ser adotado, onde a entrada é uma condição imprecisa e a saída é imprecisa (no caso de processo de inferência de Mamdani) ou precisa na forma de função matemática (no caso do processo de inferência de Takashi-Sugeno), com isso o processo de Defuzzificação entra no objetivo de transformar a saída em um número real, ou seja, a

Defuzzificação age no intuito de representar um conjunto de inferência Fuzzy, que possui variáveis linguísticas, em um conjunto de valores reais, que será o sinal de saída de controle.

Para Burns (2001) a Defuzzificação é o procedimento para mapeamento a partir de um conjunto de sinais de controle difusos inferidos contido dentro de uma janela de saída difusa para um sinal de controle não Fuzzy, onde o método do centro de área é a técnica de Defuzzificação mais bem conhecida, que em termos linguísticos pode ser expressa como:

$$SINAL\ DE\ CONTROLE = \frac{SOMA\ DOS\ PRIMEIROS\ MOMENTOS\ DA\ ÁREA}{SOMA\ DAS\ ÁREAS} \quad (64)$$

Logo, a equação (64) que também é conhecida como saída pelo método do centroide ou centro de massa, pode ser expressa em um sistema contínuo como:

$$u(t) = \frac{\int u\mu(u)du}{\int \mu(u)du} \quad (65)$$

Ou alternativamente pode ser expressa em um sistema discreto como:

$$u(kT) = \frac{\sum_{i=1}^n u_i\mu(u_i)}{\sum_{i=1}^n \mu(u_i)} \quad (66)$$

Onde, a equação (66) consiste em realizar o somatório da variável multiplicado pelo grau de pertinência da variável que é dividido pelo somatório do grau de pertinência. Segundo Tanscheit (2004) existem vários métodos de Defuzzificação na literatura, onde os dois mais empregados são o centro de gravidade que também é conhecido como método do centro de área, e a média dos máximos.

O método do centro da gravidade funciona da seguinte forma: a saída precisa é obtida tomando-se a média entre os dois elementos extremos no universo que correspondem aos maiores valores da função de pertinência do consequente. No método da média dos máximos a saída é o valor no universo que divide a área sob a curva da função de pertinência em duas partes iguais.

3.9 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ASSUNTO

Boa parte dos trabalhos de controle dinâmico utilizam-se de funções de transferência com controle aplicado, considerando um modelo de segunda ordem e linear, no entanto, a maioria dos sistemas dinâmicos são não lineares necessitando-se de técnicas de controle que possa reparar esse problema, nesse contexto a lógica nebulosa vem sendo bastante aplicada.

Segundo Rignel et al. (2011) atualmente diversos problemas podem ser solucionados com a lógica nebulosa, pois a mesma permite que variáveis não admitam valores precisos, como 0 ou 1, possibilitando que elas tenham graus de pertinência. Outra característica fundamental da lógica Fuzzy é a capacidade de construir regras, facilitando a modelagem dos problemas e diminuindo a complexidade dos mesmos.

Tanscheit (2004) afirma que essas regras junto da forma e quantidade de conjuntos aplicados a cada variável define o desempenho de um sistema de inferência Fuzzy. No entanto, existem outros fatores que contribuem para o desempenho do sistema de inferência Fuzzy como: processo de Defuzzificação, escolha do operador de implicação.

A lógica Fuzzy é muito útil quando aplicada a plantas não lineares, onde gráficos de resposta simulados em malha fechada, para sistemas não lineares, demonstram adequação da lógica Fuzzy em tratamento de problemas não-lineares (FILHO ET AL.,2002). É importante frisar que a Lógica Fuzzy quando associada com outro artifício de inteligência artificial como: redes neurais, poderia apresentar ganhos significativos em termos de desempenho do sistema em malha fechada.

Gomide e Gudwin (1994) citam que a lógica Fuzzy tem diversas aplicações, dentre elas: controle de processos industriais, geladeiras (Sharp), ar condicionado (Mitsubishi), câmeras de vídeo (Canon, Panasonic), máquinas de lavar roupa (Sanyo), fornos de micro-ondas (Sanyo), aspiradores de pó, transmissões automáticas (Nissan, Lexus), injeção eletrônica, suspensão ativa, freios antibloqueantes, controle de grupo de elevadores (Hitachi, Toshiba), veículos auto-guiados, robôs móveis (Nasa, IBM), controle de motores (Hitachi), ventilação de túneis urbanos (Toshiba), controle de tráfego urbano, controle de parada e partida de trens de metrô (Sendai, Tokio).

4 METODOLOGIA

Será realizada a implementação de um sistema de controle Fuzzy para o pêndulo invertido por intermédio de simulações no *software* MATLAB, com base em estudo bibliográfico abordado na pesquisa, modelagem do sistema pêndulo invertido em espaço de estados, método de alocação de pólos, simulação dos modelos linear e não linear do pêndulo invertido em malha fechada e aplicação dos conceitos de Fuzzy. A metodologia utilizada neste trabalho consiste na comparação entre os modelos linearizados e não linearizados em malha aberta e fechada, onde a mesma é constituída por duas etapas: a primeira etapa está ligada a programação Fuzzy e aplicação da técnica de controle LGR e a segunda é uma análise técnica através da implementação do controle Fuzzy e do controle LGR na interface gráfica do modelo linear e não linear do pêndulo invertido em malha fechada.

4.1 MODELO NUMÉRICO NO ESPAÇO DE ESTADOS E MODELO NUMÉRICO NÃO LINEAR

Para controlar um sistema é necessário representar o comportamento do mesmo através de equações. No entanto, alguns modelos matemáticos podem ser complexos a ponto de ser conveniente descrever o comportamento de um determinado sistema através de regras que são aplicadas em lógicas.

Mas, para aplicar essas regras se faz necessário obter os modelos numéricos linear e não linear do sistema em estudo. Assim, substituindo os valores de a_{21} , a_{41} , b_2 e b_4 nas matrizes de estados dadas pela relação (41), obtém-se o modelo numérico linearizado no espaço de estados do pêndulo invertido, conforme mostra a relação (67).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.27 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.667 \\ 0 \\ 0.889 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D=0 \quad (67)$$

Já o modelo numérico não linear do pêndulo invertido pode ser dado através das equações (9), (10), (11), (12), (13) e (14), onde essas equações serão manuseadas a fim de isolar $\ddot{x}$ e $\ddot{\theta}$. Para obter $\ddot{x}$, tem-se que:

$$M \frac{d^2}{dt^2}(x) = F - m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta)$$

$$\ddot{x}(M + m) = F - ml \frac{d^2}{dt^2}(\sin \theta) \quad (68)$$

Aplicando a regra da cadeia e a regra do produto para derivar o lado esquerdo da equação (68), tem-se que:

$$\ddot{x} = \frac{F + ml(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta)}{M + m} \quad (69)$$

Substituindo os valores de m , l , M e g na equação (69), tem-se que:

$$\ddot{x} = \frac{-F + 0,5(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta)}{1,5} \quad (70)$$

Para obter $\ddot{\theta}$, tem-se que:

$$\frac{I d^2}{dt^2} \theta = F_V l \sin \theta - F_H l \cos \theta$$

$$F_H = m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta)$$

$$F_V = mg + m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta)$$

$$I = \frac{1ml^2}{3}$$

Logo,

$$\frac{1ml^2}{3} \ddot{\theta} = \left(mg + m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) \right) l \sin \theta - \left(m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin \theta) \right) l \cos \theta \quad (71)$$

Aplicando a regra da cadeia e a regra do produto para derivar o lado esquerdo da equação (71), tem-se que:

$$\ddot{\theta}ml^2 \times \left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = mgl\sin\theta - m\ddot{x}l\cos\theta \quad (72)$$

Substituindo a equação (70) na equação (72) e considerando que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, tem-se que:

$$\frac{4}{3}l\ddot{\theta} = g\sin\theta - \left[\frac{F+ml(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta)}{M+m}\right]\cos\theta$$

Logo,

$$\ddot{\theta} = \frac{g\sin\theta + \cos\theta \left[\frac{-F - ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{M+m}\right]}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{m\cos^2\theta}{M+m}\right)} \quad (73)$$

Substituindo os valores de m , l , M e g na equação (73), tem-se que:

$$\ddot{\theta} = \frac{9,81\sin\theta + \cos\theta \left[\frac{-F - 0,5\dot{\theta}^2\sin\theta}{1,5}\right]}{1 \times \left(\frac{4}{3} - \frac{0,5\cos^2\theta}{1,5}\right)} \quad (74)$$

4.2 DECLARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Segundo Morais et al. (2005) o projeto de controle Fuzzy é baseado em métodos empíricos e consiste em uma aproximação metódica para tentativa e erro, onde o processo segue as seguintes etapas: declaração de variáveis de entrada e saída, definição de regras, Defuzzificação e ajustes finais em prol de atender as especificações do projeto.

As variáveis declaradas são mostradas na tabela 1, onde a força a variável de controle, assim justificando o fato de ser escolhida como variável de entrada, já o ângulo da haste e a velocidade angular da haste podem ser controlados, sendo assim consideradas variáveis de saída.

Tabela 1. Declaração de variáveis.

Variáveis	Descrição das variáveis
Entrada	Força
Saídas	Ângulo da haste
	Velocidade angular

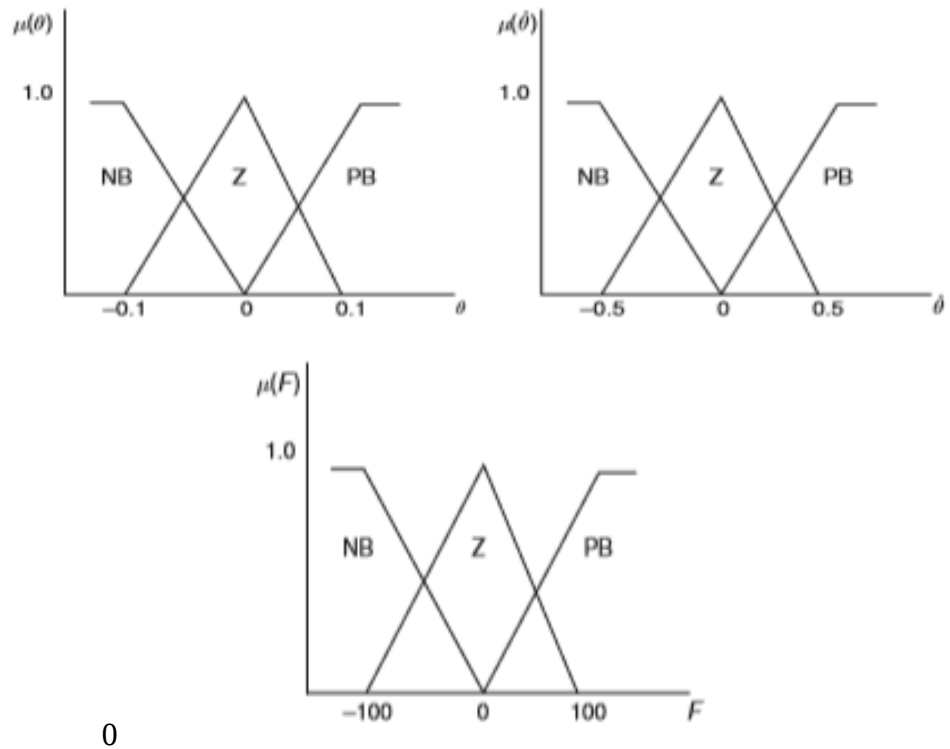
Fonte: Autoria própria, 2018.

Segundo Duarte et al. (2013) após as definições das variáveis para o projeto controle Fuzzy define-se o universo de discurso e o número de valores linguísticos necessários, onde cada valor linguístico deve ser definido pela sua função de pertinência, pois um número muito grande desses implicaria em um número maior de regras.

4.3 UNIVERSO DE DISCURSO X VALORES LINGUÍSTICOS

O universo de discurso é simplesmente o range da variável caracterizada por valores ao longo do eixo x , logo o universo do discurso será dado por θ , $\dot{\theta}$, e F . Seguindo a proposta de Burns (2001), o número de valores linguísticos está relacionado ao número de conjuntos linguísticos, que será três para cada variável de estado e três para F , conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 7. Conjuntos Fuzzy.



Fonte: Burns, 2001.

Cada variável linguística significa respectivamente:

NB= grande negativo

Z= sobre zero

PB= grande positivo

4.4 FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA

A função de pertinência irá informar a possibilidade um elemento x pertencer a um conjunto A , ou seja, através do grau de pertinência representado pelo os intervalos da Figura 6 é possível saber o quanto um determinado elemento pertence a um dado conjunto. Burns (2001) definiu três funções de pertinência, uma triangular e duas trapezoidais, para cada variável de entrada e saída, conforme mostra a Figura 7, visando abranger as variações do sistema.

Para realizar a classificação de um elemento com relação ao seu conjunto será considerado os graus de pertinência para cada variável (entrada e saída) com variação entre 0 e

1. Os elementos dos conjuntos Fuzzy para θ , $\dot{\theta}$ e F terão seus valores respectivamente entre: -0.15 e 0.15 , -0.7 e 0.7 , -150 e 150 . Os valores associados a máxima pertinência e mínima pertinência para cada variável linguística segue abaixo.

Para θ :

$$NB = [-0.15 \quad -0.15 \quad -0.1 \quad 0]$$

$$ZT = [-0.1 \quad 0 \quad 0.1]$$

$$PB = [0 \quad 0.1 \quad 0.15 \quad 0.15]$$

Para $\dot{\theta}$:

$$NB = [-1 \quad -1 \quad -0.5 \quad 0]$$

$$ZT = [-0.5 \quad 0 \quad 0.5]$$

$$PB = [0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1]$$

Para F :

$$NB = [-150 \quad -150 \quad -100 \quad 0]$$

$$ZT = [-100 \quad 0 \quad 100]$$

$$PB = [0 \quad 100 \quad 150 \quad 150]$$

Para função de pertinência triangular a máxima pertinência se assumirá no coeficiente " b " e para função de pertinência trapezoidal a máxima pertinência se assumirá entre os coeficientes " b e c ".

4.5 REGRAS FUZZY APLICADAS AO PÊNDULO INVERTIDO

Para realizar a definição de regras Fuzzy para o controle do pêndulo invertido, utilizou-se conhecimento heurístico de experimentos de balanço e a base de regras de tipo Mamdani, proposta por Johnson e Picon (1995), conforme mostra abaixo.

1- Se θ é PB e $\dot{\theta}$ é PB, então F é PB;

2- Se θ é PB e $\dot{\theta}$ é Z, então F é PB;

3- Se θ é PB e $\dot{\theta}$ é NB, então F é Z;

- 4- Se θ é Z e $\dot{\theta}$ é PB, então F é PB;
- 5- Se θ é Z e $\dot{\theta}$ é Z, então F é Z;
- 6- Se θ é PB e $\dot{\theta}$ é NB, então F é NB;
- 7- Se θ é NB e $\dot{\theta}$ é PB, então F é Z;
- 8- Se θ é NB e $\dot{\theta}$ é Z, então F é NB;
- 9- Se θ é NB e $\dot{\theta}$ é NB, então F é NB;
- 10- Se θ é PB, então F é PB;
- 11- Se θ é NB, então F é NB.

Onde, de acordo com Burns (2001) a base de regra poderia ser estendida até 22 regras por uma configuração adicional de 11 regras, isso se daria realizando a substituição de θ com x e de $\dot{\theta}$ com $\dot{x}$, essa ação implicaria em um ajuste mais fino por parte do controle e certamente em um resultado mais completo.

4.6 INFERÊNCIA FUZZY

Aplicando o conceito de inferência Fuzzy na base de regras Fuzzy para o pêndulo invertido, proposta por Burns (2001), tem-se as respectivas funções de pertinência:

$$\mu_{PB}(u) = \max[\mu_{PB}(\dot{\theta}), \min(\mu_{PB}(\theta), \mu_{PB}(\dot{\theta})), \min(\mu_{PB}(\theta), \mu_Z(\dot{\theta})), \min(\mu_Z(\theta), \mu_{PB}(\dot{\theta}))]$$

$$\mu_{NB}(u) = \max[\mu_{NB}(\dot{\theta}), \min(\mu_Z(\theta), \mu_{NB}(\dot{\theta})), \min(\mu_{NB}(\theta), \mu_Z(\dot{\theta})), \min(\mu_{NB}(\theta), \mu_{NB}(\dot{\theta}))]$$

$$\mu_Z(u) = \max[\min(\mu_{PB}(\theta), \mu_{NB}(\dot{\theta})), \min(\mu_Z(\theta), \mu_Z(\dot{\theta})), \min(\mu_{NB}(\theta), \mu_{PB}(\dot{\theta}))]$$

Onde, o $\max$ tem a função de soma e o $\min$ tem a função de produto, e $\mu_{PB}(u)$, $\mu_{NB}(u)$ e $\mu_Z(u)$ serão os subconjuntos Fuzzy dados pelas funções de pertinência acima.

4.7 MÉTODO DE DEFUZZIFICAÇÃO UTILIZADO

Neste trabalho será utilizado o método do centro das áreas que também é conhecido como método do centro da gravidade, para realizar a análise de Defuzzificação do sinal de controle. A Defuzzificação se dará através da razão entre o somatório da junção das regras multiplicadas pelo grau de pertinência da variável de entrada e o somatório da junção das regras, ou seja:

$$u(t) = \frac{\sum \max(R) \times u}{\sum \max(R)} \quad (75)$$

4.8 PROGRAMAÇÃO FUZZY

Será utilizado conceitos e equações importantes sobre a modelagem em espaço de estados, alocação de pólos e lógica Fuzzy abordados no referencial teórico deste trabalho para implementar a lógica Fuzzy aplicada ao sistema pêndulo invertido linear e não linear no *software* MATLAB. A lógica Fuzzy será implementada de acordo com a proposta de Burns (2001) para o pêndulo invertido linear, com o objetivo de demonstrar que é possível solucionar as não linearidades do pêndulo invertido não linear com a lógica Fuzzy. A técnica de controle LGR também será aplicada em ambos os modelos, a partir da implementação do modelo numérico de ganho K.

Algumas informações são fundamentais para realizar implementação do código de controle, como: condição inicial de controle das variáveis de estados, que para θ é de 0.1 rad e para $\dot{\theta}$, x , $\dot{x}$ são 0. O intervalo de tempo para obter a resposta de comportamento do sistema será de 0 a 2 segundos. Essas informações são dadas por Burns (2001).

4.9 MÉTODO DE RUNGE KUTTA

O método de Runge Kutta é bastante utilizado como alternativa para resolução de equação diferenciais de segunda e quarta ordem. Este método numérico é ideal para solucionar problemas de valor inicial. A sua aplicação se dá a partir de uma condição inicial, sendo possível conhecer os demais pontos da solução. O método numérico Runge-Kutta, assim como outros

métodos numéricos, pode ser implementado de maneira simples em programas computacionais, diminuindo a complexidade de resolução de equações de um sistema.

De acordo com Rocha (2016) a fórmula de Runge Kutta é basicamente uma equação ponderada da média de valores de $f(t, x)$ em pontos diferentes no intervalo $t_n \leq t \leq t_n + 1$, na qual a mesma é dada pela equação (76).

$$x_{n+1} = x_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right) \quad (76)$$

Em que,

$$k_{n1} = f(t_n, x_n)$$

$$k_{n2} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right)$$

$$k_{n3} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right)$$

$$k_{n4} = f(t_n + h, x_n + hk_{n3})$$

A soma dos K pode ser considerada como um coeficiente angular médio, onde k_{n1} é o coeficiente angular no extremo esquerdo do intervalo, k_{n2} é o coeficiente angular no ponto médio, k_{n3} é a segunda aproximação do coeficiente angular no ponto médio e k_{n4} é o coeficiente angular no extremo direito do intervalo.

O método de Runge Kutta será utilizado neste trabalho para resolver equações diferenciais de quarta ordem que não possuem solução analítica no modelo não linear do sistema pêndulo invertido.

4.10 CONTROLE LGR

De acordo com Ogata (2010) o projeto de controle pelo método do lugar geométrico das raízes é baseado em redesenhar o lugar das raízes do sistema através da adição de pólos e zeros da função de transferência de malha aberta, assim forçando um novo lugar das raízes a passar pelos pólos e zeros de malha fechada desejados no plano complexo s . Em outras palavras, o método do lugar das raízes consiste na suposição de que todo sistema de malha fechada tem um par de polos dominantes.

O método do lugar das raízes indica os efeitos dos ajustes de parâmetros (pólos adicionais), onde a adição de pólos a função de transferência de malha aberta tem o efeito de deslocar o lugar das raízes para direita, deixando o sistema mais instável. Já a adição de zero a função de transferência de malha aberta tem o efeito de deslocar as raízes para esquerda assim aumentando a estabilidade do sistema (OGATA, 2010).

O controle LGR atua pelo método de tentativa e erro afim de satisfazer as especificações de desempenho, logo o mesmo irá levantar a localização dos pólos de um sistema em malha fechada em função da variação de um parâmetro do ganho K . Assim, é possível observar a movimentação dos pólos em malha fechada à medida que um parâmetro do ganho K varia.

No presente trabalho será construído um gráfico para o sistema pêndulo invertido (modelo linear e não linear) a partir do conhecimento dos polos e zeros do sistema em malha aberta. Tomando o ganho K como parâmetro, o LGR será o conjunto dos pontos no plano complexo s que correspondem aos polos do sistema em malha fechada.

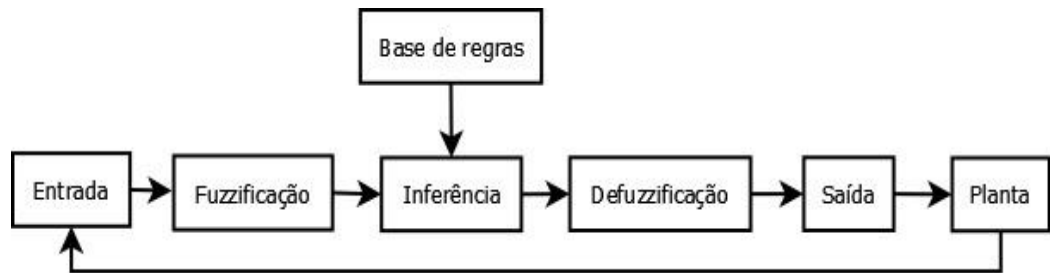
4.11 SIMULAÇÃO FUZZY

As etapas para realizar a simulação da lógica Fuzzy aplicada ao pêndulo invertido linear e não linear em malha fechada, foram respectivamente:

- 1- Declaração de variáveis;
- 2- Implementação do modelo numérico linear e não linear;
- 3- Implementação do modelo de alocação de pólos;
- 4- Implementação do método de Runge Kutta;
- 5- Implementação das regras e da superfície de inferência;
- 6- Implementação das funções de pertinência;
- 7- Defuzzificação;
- 8- Implementação da interface gráfica.

Segue abaixo o método proposto para realizar a simulação Fuzzy em forma de blocos, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8 . Organização do sistema de controle Fuzzy.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 8, observa-se que após a entrada dos valores numéricos ocorre a Fuzzificação que é a transformação dos valores numéricos em valores Fuzzy, por parte do controlador Fuzzy. Em seguida, o processo de inferência se inicia através da base de conhecimento, tomando as devidas decisões e as devolvendo para o sistema na mesma linguagem Fuzzy. Posteriormente o processo converte as decisões tomadas no processo de inferência em informações para o formato analógico, sendo disponibilizada à saída do controlador para que seja efetuada a mudança de estado no processo controlado.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

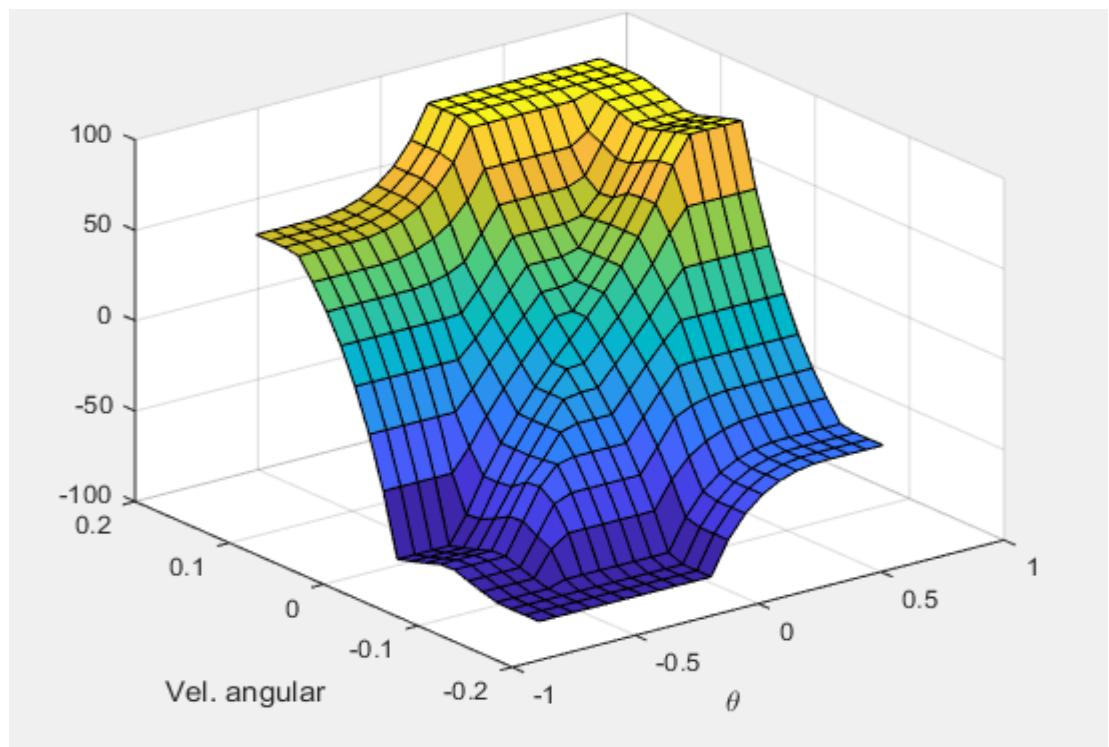
Conforme mostrado no tópico do lugar geral das raízes o ganho de realimentação de estados de acordo com os pólos desejados é dado por:

$$K = [-174.83 \quad -57.12 \quad -39.14 \quad -29.36]$$

Onde para cada pólo desejado o ganho K será diferente.

É possível obter a representação da função algébrica não linear entre as variáveis de entrada (força) e as variáveis de saída (theta e velocidade angular) através da superfície de Inferência Fuzzy, onde para este controlador de onze regras aplicadas ao pêndulo invertido, se portou da seguinte forma:

Figura 9. Superfície de Inferência Fuzzy.



Fonte: Autoria própria.

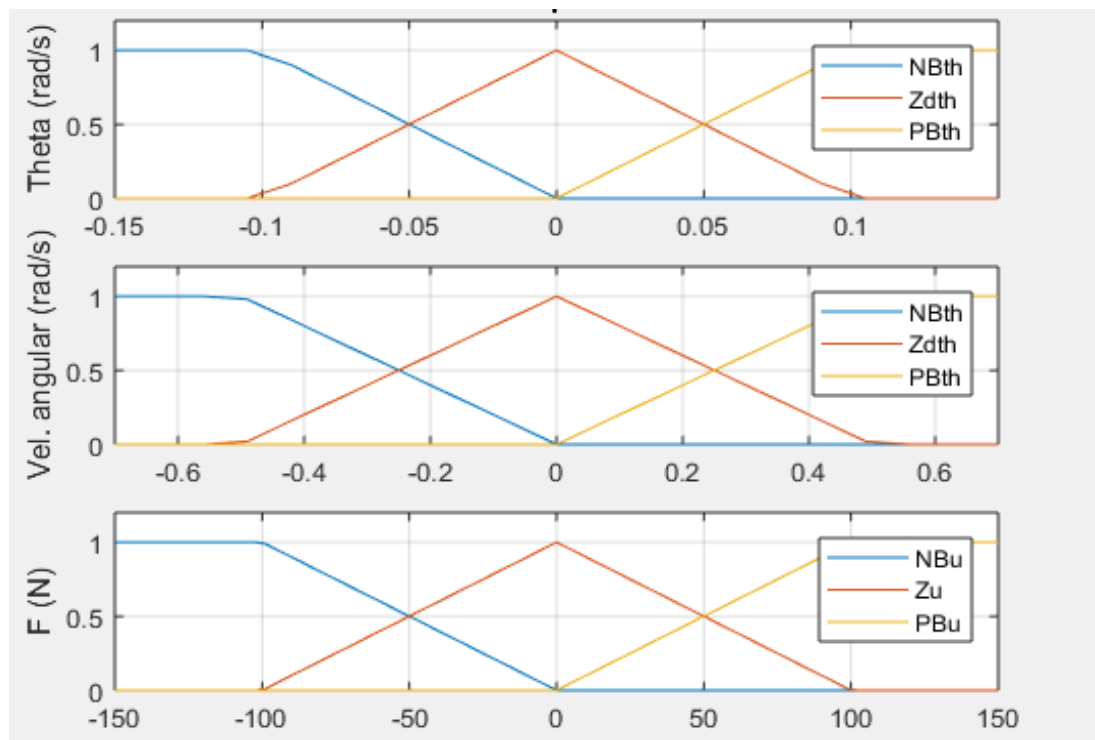
Na Figura 9, têm-se a superfície de inferência que é gerada com base nas funções de pertinência e criação de regras. O sistema Fuzzy realiza o mapeamento entradas/saída, cujo gráfico 3D é a superfície gerada pelas operações lógicas de inferência. Consequentemente, a *Surface Viewer* permite verificar todas as relações entre entrada e saída.

Para a variável de entrada (força) os valores de domínio na superfície de inferência ficaram entre $[-150 \ 150]$, para as variáveis de saída (theta e velocidade angular) ficaram respectivamente entre: $[-0.15 \ 0.15]$ e $[-0.7 \ 0.7]$, onde os intervalos de valores para cada variável foram: 0.015 para θ , 0.07 para $\dot{\theta}$ e 3 para F .

5.2 MÉTODO DE ATIVAÇÃO POR FUNÇÃO E PERTINÊNCIA

Utilizando a estratégia *Mebership Functions* tem-se as respectivas funções de pertinência e conjuntos Fuzzy para cada variável (entrada e saída), conforme mostra a figura 10.

Figura 10. Funções de pertinência.



Fonte: Autoria própria, 2018.

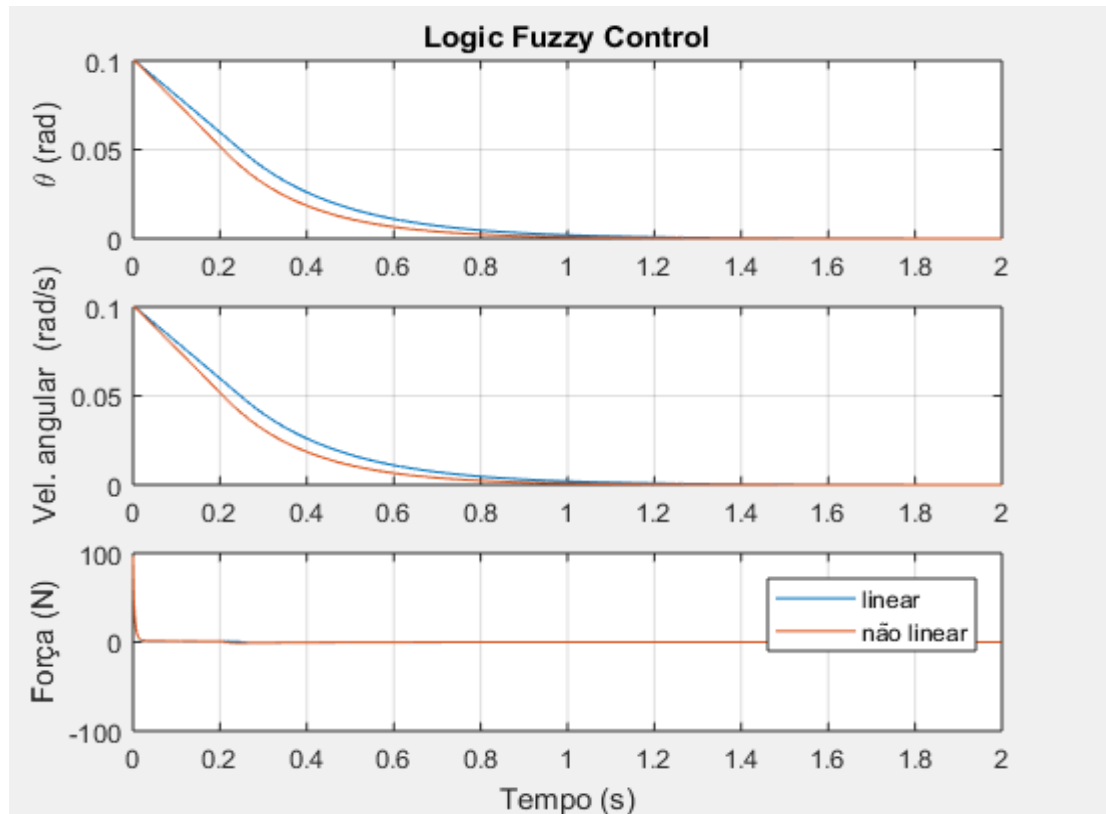
De acordo com a Figura 10, cada variável (entrada e saída) possui funções de pertinência em formato trapezoidal e triangular, sendo o seu eixo y formado por valores de graus de pertinência e o seu eixo x formado por valores das variáveis linguísticas (theta, velocidade angular e Força). Os valores negativos das variáveis linguísticas estão situados no conjunto dos valores negativos *NB*, enquanto os valores positivos estão situados no conjunto positivo *PB*. O conjunto *ZD* corresponde ao valor zero e valores diferentes de zero.

Observa-se que quando theta atingir o valor de -0.15 o seu grau de pertinência será igual a 1, o que significa que esse valor pertence completamente ao conjunto *NB* e possui grau máximo de pertinência, ao passo de que se o valor atingido for de -0.05 o grau de pertinência será igual a 0.5, o que significa que este valor pertence parcialmente ao conjunto *NB* e parcialmente ao conjunto *ZD*. O mesmo raciocínio vale para as demais variáveis linguísticas.

5.3 CONTROLE FUZZY APLICADO AO SISTEMA LINEAR E NÃO LINEAR

Aplicando a lógica Fuzzy no controle do modelo linear e não linear do sistema pêndulo invertido, tem-se que a estabilidade em ambos os modelos foi atingida, conforme ilustrado na Figura 11. O comportamento de cada variável linguística diante do controle executado atendeu as expectativas de resultados esperados.

Figura 11. Controle Fuzzy aplicado no modelo linear e não linear.



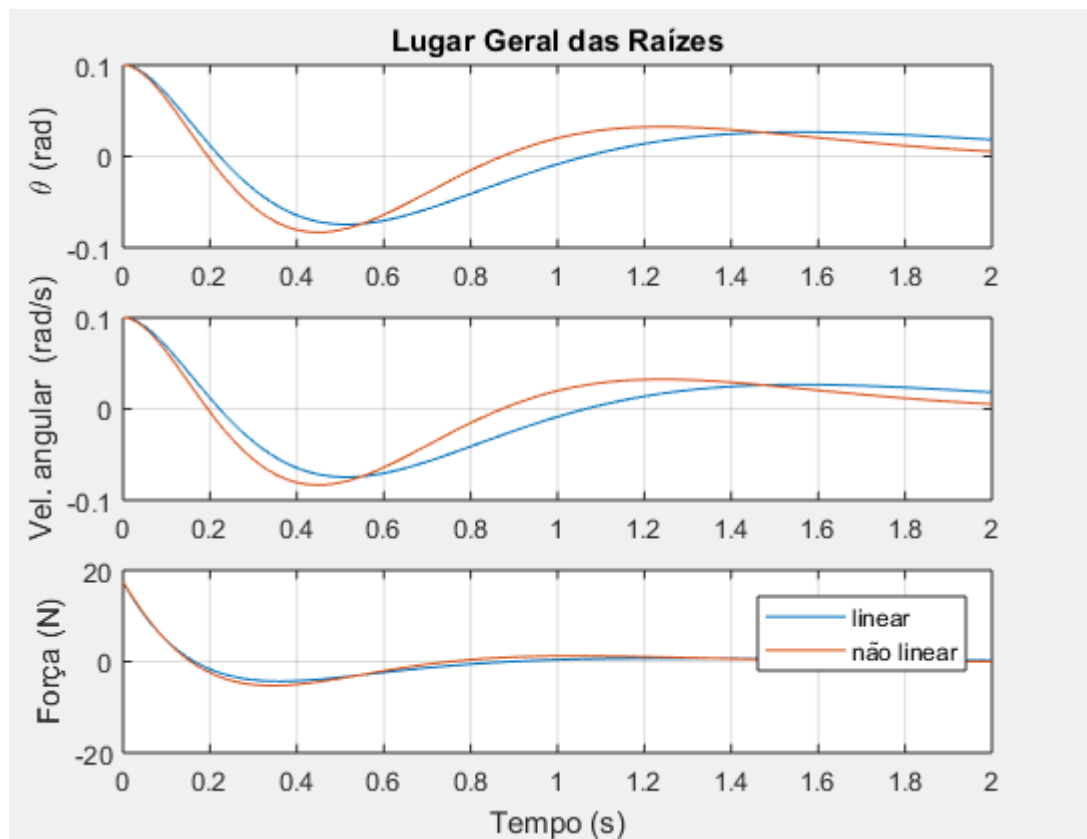
Fonte: Autoria própria, 2018.

Nota-se que em malha aberta, conforme ilustra a Figura 4, o ângulo da haste e a velocidade angular da haste apresentaram instabilidade no modelo não linear, já no linear o ângulo da haste e a velocidade angular da haste se comportaram de forma crescente, esses problemas foram sanados pelo controle Fuzzy em malha fechada, onde o ângulo da haste e a velocidade angular da mesma obtiveram um resultado semelhante de estabilidade em ambos os modelos. A variável linguística força foi a que apresentou resultado de estabilidade mais satisfatório, o que garante manter o pêndulo invertido em sua posição única vertical, já que que a mesma é a nossa variável de controle.

5.4 CONTROLE LGR X CONTROLE FUZZY APLICADO AO MODELO LINEAR E NÃO LINEAR

A partir da implementação do modelo de alocação de pólos foi possível aplicar a técnica de controle LGR, onde os resultados de estabilidade foram satisfatórios para os modelos linear e não linear do pêndulo invertido, conforme ilustra a Figura 12. No entanto, as oscilações estiveram presentes e o tempo de assentamento das curvas foi relativamente menor em relação ao controle Fuzzy.

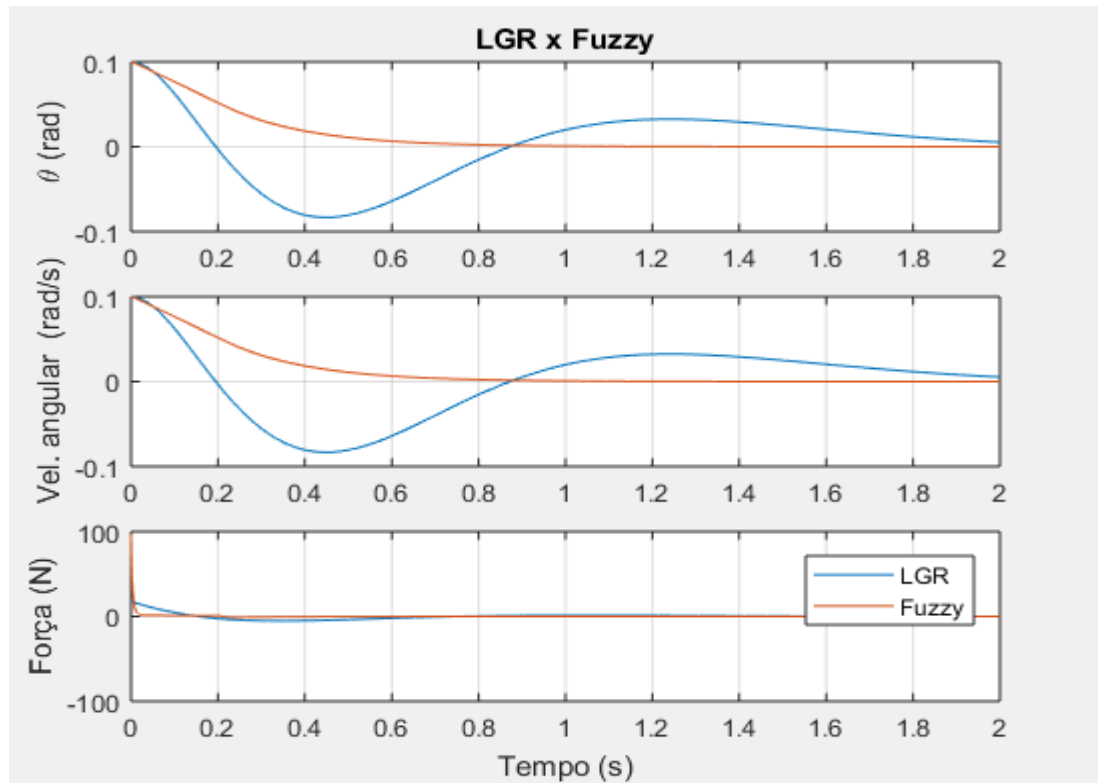
Figura 12. LGR aplicado no modelo linear e não linear.



Fonte: Autoria própria, 2018.

O desempenho do controle Fuzzy no modelo não linear do pêndulo invertido foi melhor do que o desempenho do controle LGR, conforme mostra a Figura 13.

Figura 13. Comparativo entre LGR e Fuzzy no controle do sistema.



Fonte: Autoria própria, 2018.

Através da Figura 13 é possível visualizar que o controle Fuzzy em relação ao controle LGR obteve resultados melhores de estabilidade para o modelo não linear do pêndulo invertido, com menos oscilações, assentamento de curva mais rápido, descrevendo uma trajetória unidimensional e mantendo o pêndulo equilibrado na posição vertical.

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O pêndulo invertido é um sistema dinâmico comumente utilizado na avaliação de novas estruturas de controle, isso ocorre devido ao fato do mesmo não possuir controle, sendo instável, assim realizar o controle do pêndulo invertido é uma forma de aproximar os resultados para aplicações reais.

Todos os testes de simulações foram realizados utilizando a formulação matemática da dinâmica de comportamento do pêndulo invertido, bem como a base de regras Fuzzy e suas funções de pertinência. A proposta do trabalho foi cumprida e através dos resultados obtidos ficou evidente que o controlador Fuzzy é eficaz no controle da posição da base e do ângulo da haste do pêndulo invertido linear e não linear, proporcionando flexibilidade na aplicação do modelo não linear, visto que a modelagem em espaço de estados não foi necessária.

O MATLAB foi uma ferramenta fundamental para aplicação da lógica Fuzzy e implementação da interface gráfica, onde as simulações foram essenciais para indicar o potencial da Lógica Fuzzy aplicada ao sistema não linear, mostrando que as não linearidades do sistema foram sanadas, logo as simulações do controle do pêndulo invertido apresentaram resultados satisfatórios que garantem uma boa operação do controle e fornecem boas expectativas de funcionamento para uma futura aplicação em um sistema real.

O controlador Fuzzy apresenta uma vantagem em relação aos demais controladores, como LGR, que é a de ter uma abordagem mais intuitiva, ou seja, baseada em variáveis e regras linguísticas, assim suportando os modos de raciocínio que são aproximados ao invés de exatos. Assim, a lógica Fuzzy acaba sendo um artifício de redução da complexidade de um determinado projeto e implementação, tornando-se solução para problemas de controle até então intratáveis por técnicas clássicas.

Para trabalhos futuros recomenda-se testar outras geometrias que não sejam trapezoidais e nem triangulares nas funções de pertinência da lógica Fuzzy, assim como aumentar o número de regras proposta por Burns (2001), o implicaria em um controle mais fino e preciso.

Outra forma de validar a eficácia do controle Fuzzy seria implementar outras técnicas de controle moderno já existentes na literatura, no pêndulo invertido como: método das Inequações Matriciais Lineares (LMI) e o método do Regulador Linear-Quadrático (LQR), e posteriormente realizar um comparativo entre ambas as técnicas e a lógica Fuzzy.

Uma proposta interessante seria a de confrontar os dados das simulações propostas acima com dados de testes reais para comprovar o desempenho da lógica Fuzzy, assim executar

a construção de um pêndulo invertido seria de grande valia para contribuir com esse trabalho, e o estudo de sistemas de controle.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Michelle; JACQUES, Maria Alice Prudêncio. **Estudo comparativo de controladores de Mamdani e Sugeno para controle de tráfego em interseções isoladas.** Transportes, Brasília, v. 16, n. 2, p.24-31, dez. 2008.

BAUCHSPIESS, A. **Introdução aos Sistemas Inteligentes Aplicações em Engenharia de Redes Neurais Artificiais, Lógica Fuzzy e Sistemas Neuro-Fuzzy.** Engenharia Elétrica da Universidade de Brasília. Disponível em <[HTTP://www.ene.unb.br/adolfo/Isi](http://www.ene.unb.br/adolfo/Isi)>. Março, 2008. Acesso em 08 de março de 2018.

BELLUCCI, Danilo Peixoto. **Sistemas baseados em regras Fuzzy e aplicações.** 2009. 70 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática Aplicada, Matemática, Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo, 2009.

BEZERRA, S. T. M. **Sistemas Fuzzy para controle piezométrico de sistemas de distribuição de água visando a economia de água e energia.** 2009. Tese (Doutorado-Engenharia mecânica) -PPGEM/UFPB, João Pessoa, PB, Brasil, 2009.

BIONDI NETO, Luiz et al. **Minicurso de sistema especialista nebuloso.** In: XXXVIII Simpósio Brasileiro de pesquisa operacional, 38., 2006, Goiânia. v. 1, p. 1 - 36.

BURNS, R.S. **Advanced Control Engineering.** Tradução dos autores. 1a ed. Woburn, MA, EUA: Butterworth-Heinemann, 2001.

BUZETTI, Ariel S. et al. **Projeto e implementação do sistema de controle de um pêndulo invertido utilizando o método do lugar das raízes.** Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2012., São Paulo, p.1-7, 2012.

CAVALCANTI, José Homero Feitosa et al. **Lógica Fuzzy aplicada às engenharias.** João Pessoa :Câmara do Livro, 2012. 151 p.

CORREIA, Wilkley Bezerra. **Contribuições ao estudo de sistemas SISO e MIMO com atraso de transporte**. 2016. 182 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Elétrica, Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

COSTA, André Pereira da; SILVA, Samuel Alves da; LIRA, Valnir Vasconcelos. **Simulações de sistemas de controle de pêndulo simples e invertido em malhas aberta e fechada**. Revista Principia: Divulgação científica e tecnológica do IFPB, João Pessoa, v.25, p.1-6, dez.2014.

DRIANKOV, Dimiter; HELLENDORRN, Hans; REINFRANK, Michael. **An Introduction to Fuzzy Control**. New-York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996. 316 p.

DORF, R.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle moderno**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.752 p.

DUARTE FILHO, Moisés et al. **Controle Fuzzy para Posicionamento de um Pêndulo Invertido**. 2013. Disponível em: <<https://www.aedb.br/seget/arquivos/artigos13/37318399.pdf>>. Acesso em: 03 dez. 2017.

FILHO, Fernando de Melo Luna; GOSMANN, Hugo Leonardo; BAUCHSPIESS, Adolfo. **Controle Fuzzy para sistema de nível de líquidos**. In: Congresso Brasileiro de Automática, 14., 2002, Natal.

FRIEDLAND, B. **Control System Design**. [S.l.]: Dover Publications, 2005.

GOMIDE, Fernando Antônio Campos; GUDWIN, Ricardo Ribeiro. **Modelagem, controle, sistemas e lógica Fuzzy**. Revista SBA: Controle & Automação, Campinas - SP, v. 4, n. 3, p.1-19, 01 out. 1994.

JOHNSON, J.; PICTON, P. **Designing Intelligent Machines**, Vol. 2, Concepts in artificial intelligence, Butherworth-Heineman (in association with the open university), Oxford, UK, 1995.

MODESTI, Cesar Umberto; SANTOS, David Luna; SANTOS, João Claudio; SILVA, Thiago Henrique Marques. **Sistema com pêndulo invertido utilizando lógica Fuzzy**. 2013. 175 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia de Controle e Automação Industrial., Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Paulista, São Paulo, 2013. Disponível em: <http://www.academia.edu/10711437/Pendulo_Invertido_com_Lógica_Fuzzy>. Acesso em: 03 dez. 2017.

MOORE, B. **On the Flexibility Offered by State Feedback in Multivariable Systems Beyond Closed Loop Eigenvalue Assignment**. IEEE Transactions on Automatic Control, v. 21, n. 5, p. 689–692, 1976.

MORAIS, Marcelo Henrique Essado; MURALIKRISHNA, Amita; BRAVO, Ricardo; GUIMARAES, Lamartine Nogueira Frutuoso. **Um Controlador Nebuloso Aplicado ao Problema do Pêndulo Invertido**. In: XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2005, São Paulo.

NISE, N. **Engenharia de sistemas de controle**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. 693 p.

Ogata, K., (2003). **Engenharia de Controle Moderno**. Pearson, 4a ed. São Paulo.

Ogata, K., (2010). **Engenharia de Controle Moderno**. Pearson, 5a ed. São Paulo.

ORTEGA, Neli Regina Siqueira. **Aplicação da Teoria de Conjuntos Fuzzy a Problemas da Biomedicina**. 2001. 166 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciências, Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

PAULA, Adriano Rodrigues de. **Modelagem e controle do pêndulo invertido sobre duas rodas**. 2014. 62 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Elétrica, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

PEARSON, R.K. “**Selecting Nonlinear Model Structures for Computer Control**”, Journal of Process Control, vol. 13, n. 1, p. 1-26, 2003.

RIBEIRO, Ricardo. **Implementação de um sistema de controle de um pêndulo invertido**. 2007. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2007. Disponível em: <<https://saturno.unifei.edu.br/bim/0030714.pdf>>. Acesso em: 03 dez. 2017.

RIGNEL, D. G. de S. et al. **Uma introdução a Lógica Fuzzy**. Revista Eletrônica de Sistemas de Informação e Gestão Tecnológica, v. 1, n. 1, p. 17-28, 2011.

ROCHA, Alex Fraga. **Integração associativa em métodos Runge-Kutta**. 2016. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Física, Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

SANTOS, José Eli Santos dos. **Controle preditivo não-linear para sistemas de Hammerstein**. 2007. 156 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Elétrica, Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

SERRA, Ginalber L. O.; SANTOS, Rafael J. M. **Metodologia de controle não linear quadrático contínuo multiobjetivo no espaço de estados**. Revista Innover, Maranhão, v. 1, n. 3, p.1-15, out. 2014.

SILVA, Edilson Alfredo da. **Construção, Modelagem e Controle de um Pêndulo Invertido com CLP e Software SCADA**. 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira - Unesp, Ilha Solteira - SP, 2013.

SILVA, Milton Medeiros da. **Controle de posição de uma plataforma plana para captação de radiação solar**. 2013. 64 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ciências de Engenharia Elétrica e Computação, Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

SILVA, Mozzer Antônio de Oliveira. **Estudo de técnicas de controle aplicada ao sistema pêndulo invertido**. 2009. 58 f. Monografia (Especialização) - Curso de Engenharia de Controle e Automação, Escola de Minas – UFOP, Ouro Preto, 2009. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/128408771/mozzer-estudo-de-tecnicas-de-controle-aplicada-ao-sistema-pendulo>>. Acesso em: 03 dez. 2017.

SOUZA, Osmar Nascimento. **Introdução à Teoria dos Conjuntos Fuzzy**. 2010. Disponível em: < <http://www.ime.unicamp.br/~valle/PDFfiles/osmar10.pdf>>. Acesso em: 24 fev. 2018.

TABORDA, Renan Augusto. **Análise de desempenho de controladores aplicados ao sistema pêndulo invertido**. 2014. 58 f. TCC (Graduação) - Curso de Bacharel em Engenharia Eletrônica, Engenharia Eletrônica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2014.

TANSCHKEIT, R. **Sistemas Fuzzy**. Rio de Janeiro: Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio, 2004.

TAVARES, M. A.; SANTOS, R. B.; NETO, C. M.; LOPES, V. J. **Controle de um Pêndulo Invertido utilizando o Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno**. 16º Simpósio de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Uberlândia/MG. 2006.

TEIXEIRA, Frederico Santos; SODRÉ, José Luís de Freitas; RANGEL JUNIOR, Marcos. **O sistema dinâmico pêndulo invertido: modelagem e projeto de controladores por simulação computacional**. 2006. 68 f. Monografia (Especialização) - Curso de Superior de Tecnologia em Automação Industrial., Engenharia Elétrica, Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, Campos dos Goytacazes, 2006.

VENDRAMINI, Gabriel; SILVA, Paulo Sérgio. **Controle de um pêndulo invertido sobre uma plataforma móvel utilizando PID E MFAC (Model-Free Adaptive Control)**. 2010. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/264886672_controle_de_um_pendulo_invertido_sobre_uma_plataforma_movel_utilizando_pid_e_mfac_model-free_adaptive_control>. acesso em: 03 dez. 2017.

ANEXO

Programação lógica em texto estruturado para a simulação do pêndulo invertido linear e não linear em malha aberta e simulação da aplicação da lógica Fuzzy e LGR aplicada ao pêndulo invertido linear e não linear em malha fechada.

```
% EXEMPLO PENDULO INVERTIDO - BURNS - ADVANCED CONTROL ENGINEERING
close all, clear all, clc

l=1;
M=1;
m=0.5;
g=9.8;

ts=0.001;

% x=[0.1 0 0 0]';
% u=0;
t=0:ts:2;
A=zeros(4);
A(1,2)=1;A(3,4)=1;
A(2,1)=3*g*(M+m)/(1*(4*(M+m)-3*m));
A(4,1)=-3*g*m/((4*(M+m)-3*m));

B=zeros(4,1);
B(2)=-3/(1*(4*(M+m)-3*m));
B(4)=(1/(M+m))*(1+(3*m/(4*(M+m)-3*m)));
% Ganho de realimentação K
K=[-174.83 -57.12 -39.14 -29.36];

% Criação das Regras e da superficie de inferencia
th_=-0.15:((0.15+0.15)/20):0.15;
th_dot=-0.7:((1.4)/20):0.7;
u_=-150:(300)/100:150;

% Funções de pertinencia - theta
NBth=trapmf(th_,[-0.15 -0.15 -0.1 0]);
Zth=trimf(th_,[-0.1 0 0.1]);
PBth=trapmf(th_,[0 0.1 0.15 0.15]);

% Funções de pertinencia - dtheta
NBdth=trapmf(th_dot,[-1 -1 -0.5 0]);
Zdth=trimf(th_dot,[-0.5 0 0.5]);
PBdth=trapmf(th_dot,[0 0.5 1 1]);

% Funções de pertinencia - F
NBu=trapmf(u_,[-150 -150 -100 0]);
Zu=trimf(u_,[-100 0 100]);
PBu=trapmf(u_,[0 100 150 150]);

figure(1)
subplot(311)
plot(th_,NBth,th_,Zth,th_,PBth)
```

```

axis([th_(1) th_(end) 0 1.2])
grid
ylabel('\theta (rad\s)')
legend('NBth', 'Zdth', 'PBth')
title('Membership Functions')

subplot(312)
plot(th_dot, NBdth, th_dot, Zdth, th_dot, PBdth)
grid
legend('NBth', 'Zdth', 'PBth')
ylabel('Angle rate (rad\s)')
axis([th_dot(1) th_dot(end) 0 1.2])

subplot(313)
plot(u_, NBu, u_, Zu, u_, PBu)
grid
ylabel('F (N)')
legend('NBu', 'Zu', 'PBu')
axis([u_(1) u_(end) 0 1.2])

t_=0:ts:10;
x0=[0.1 0 0 0]'; u=0;
k=1; x=x0;
for k=1:length(t_)-1

    u(k)=0;

%      Metodo de Runge kutta
k1=A*(x(:,k)*ts)+B*u(k);
k2=A*(x(:,k)+ts*0.5*k1)+B*u(k);
k3=A*(x(:,k)+ts*0.5*k2)+B*u(k);
k4=A*(x(:,k)+ts*k3)+B*u(k);
x(:,k+1)=x(:,k)+(ts/6)*(k1+2*(k2+k3)+k4);

end
xlin=x;

k=1; x=x0;
for k=1:length(t_)-1

    u(k)=0;

%      Metodo de Runge kutta
k1=pendulo_n_linear(x(:,k),u(k),m,M,l,g);
k2=pendulo_n_linear((x(:,k)+ts*0.5*k1),u(k),m,M,l,g);
k3=pendulo_n_linear((x(:,k)+ts*0.5*k2),u(k),m,M,l,g);
k4=pendulo_n_linear((x(:,k)+ts*k3),u(k),m,M,l,g);
x(:,k+1)=x(:,k)+(ts/6)*(k1+2*(k2+k3)+k4);

end
xnlin=x;

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(t_,xlin(1,:), 'r', t_,xnlin(1,:), 'b')
grid

```

```

ylabel(' \Theta (rad)')
% legend('linear', 'não-linear')
axis([0 t_(end) 0 15]);
title('Comparativo malha aberta')

subplot(2,1,2)
plot(t_,xlin(2,:), 'r', t_,xnlin(2,:), 'b')
grid
xlabel('Tempo (s)'),
ylabel('Vel. angular (rad/s)')
legend('linear', 'não-linear')
axis([0 t_(end) -15 40]);

% FUNÇÕES DE PERTINENCIA
for i=1:length(th_), for j=1:length(th_dot)
% Funções de pertinencia - theta
NBth=trapmf(th_(i), [-0.15 -0.15 -0.1 0]);
Zth=trimf(th_(i), [-0.1 0 0.1]);
PBth=trapmf(th_(i), [0 0.1 0.15 0.15]);

% Funções de pertinencia - dtheta
NBdth=trapmf(th_dot(j), [-1 -1 -0.5 0]);
Zdth=trimf(th_dot(j), [-0.5 0 0.5]);
PBdth=trapmf(th_dot(j), [0 0.5 1 1]);

% Funções de pertinencia - F
NBu=trapmf(u_, [-150 -150 -100 0]);
Zu=trimf(u_, [-100 0 100]);
PBu=trapmf(u_, [0 100 150 150]);

% BASE DE REGRAS modificado
R(1,:)=min(min(PBth, PBdth), PBu);
R(2,:)=min(min(PBth, Zdth), PBu);
R(3,:)=min(min(PBth, NBdth), Zu);
R(4,:)=min(min(Zth, PBdth), PBu);
R(5,:)=min(min(Zth, Zdth), Zu);
R(6,:)=min(min(Zth, NBdth), NBu);
R(7,:)=min(min(NBth, PBdth), Zu);
R(8,:)=min(min(NBth, Zdth), NBu);
R(9,:)=min(min(NBth, NBdth), NBu);
R(10,:)=min(PBdth, PBu);
R(11,:)=min(NBdth, NBu);

% DEFUZZIFICAÇÃO
u1=sum(max(R) .*u_)/sum(max(R));
uu(i,j)=u1;
end, end

[xgrid,ygrid]=meshgrid(th_,th_dot);
figure(3), surf(ygrid,xgrid,uu),
title('Superfície de Inferência Fuzzy')
xlabel('\theta')
ylabel('Vel. angular')

x=[0.1 0 0 0]';

```

```

u=0; k=1;
for k=1:length(t)-1

    u(k)=-K*x(:,k);

    % Metodo de Runge kutta
    k1=A*(x(:,k)*ts)+B*u(k);
    k2=A*(x(:,k)+ts*0.5*k1)+B*u(k);
    k3=A*(x(:,k)+ts*0.5*k2)+B*u(k);
    k4=A*(x(:,k)+ts*k3)+B*u(k);
    x(:,k+1)=x(:,k)+(ts/6)*(k1+2*(k2+k3)+k4);
end
xlin_lgr=x; ulin_lgr=u;

x=[0.1 0 0 0]';
u=0; k=1;
for k=1:length(t)-1

    u(k)=-K*x(:,k);
    % Metodo de Runge kutta
    k1=pendulo_n_linear(x(:,k),u(k),m,M,l,g);
    k2=pendulo_n_linear((x(:,k)+ts*0.5*k1),u(k),m,M,l,g);
    k3=pendulo_n_linear((x(:,k)+ts*0.5*k2),u(k),m,M,l,g);
    k4=pendulo_n_linear((x(:,k)+ts*k3),u(k),m,M,l,g);
    x(:,k+1)=x(:,k)+(ts/6)*(k1+2*(k2+k3)+k4);

end
xnlin_lgr=x;unlin_lgr=u;

x=[0.1 0 0 0]';
u=0; k=1;
for k=1:length(t)-1

    % Funções de pertinencia - theta
    NBth=trapmf(x(1,k),[-0.15 -0.15 -0.1 0]);
    Zth=trimf(x(1,k),[-0.1 0 0.1]);
    PBth=trapmf(x(1,k),[0 0.1 0.15 0.15]);

    % Funções de pertinencia - dtheta
    NBdth=trapmf(x(2,k),[-1 -1 -0.5 0]);
    Zdth=trimf(x(2,k),[-0.5 0 0.5]);
    PBdth=trapmf(x(2,k),[0 0.5 1 1]);

    % Funções de pertinencia - F
    NBu=trapmf(u_,[-150 -150 -100 0]);
    Zu=trimf(u_,[-100 0 100]);
    PBu=trapmf(u_,[0 100 150 150]);

    % BASE DE REGRAS modificado
    R(1,:)=min(min(PBth,PBdth),PBu);
    R(2,:)=min(min(PBth,Zdth),PBu);
    R(3,:)=min(min(PBth,NBdth),Zu);

```

```

R(4,:) = min(min(Zth, PBdth), PBu);
R(5,:) = min(min(Zth, Zdth), Zu);
R(6,:) = min(min(Zth, NBdth), NBu);
R(7,:) = min(min(NBth, PBdth), Zu);
R(8,:) = min(min(NBth, Zdth), NBu);
R(9,:) = min(min(NBth, NBdth), NBu);
R(10,:) = min(PBdth, PBu);
R(11,:) = min(NBdth, NBu);

% % DEFUZZIFICAÇÃO
u(k) = sum(max(R) .* u_) / sum(max(R));

%      Metodo de Runge kutta
k1 = A*(x(:,k)*ts) + B*u(k);
k2 = A*(x(:,k) + ts*0.5*k1) + B*u(k);
k3 = A*(x(:,k) + ts*0.5*k2) + B*u(k);
k4 = A*(x(:,k) + ts*k3) + B*u(k);
x(:,k+1) = x(:,k) + (ts/6) * (k1 + 2*(k2+k3) + k4);
end
xlin_fuzzy = x; ulin_fuzzy = u;

x = [0.1 0 0 0]';
u = 0; k = 1;
for k = 1:length(t)-1

%      Funções de pertinencia - theta
NBth = trapmf(x(1,k), [-0.15 -0.15 -0.1 0]);
Zth = trimf(x(1,k), [-0.1 0 0.1]);
PBth = trapmf(x(1,k), [0 0.1 0.15 0.15]);

%      Funções de pertinencia - dtheta
NBdth = trapmf(x(2,k), [-1 -1 -0.5 0]);
Zdth = trimf(x(2,k), [-0.5 0 0.5]);
PBdth = trapmf(x(2,k), [0 0.5 1 1]);

%      Funções de pertinencia - F
NBu = trapmf(u_, [-150 -150 -100 0]);
Zu = trimf(u_, [-100 0 100]);
PBu = trapmf(u_, [0 100 150 150]);

% BASE DE REGRAS modificado
R(1,:) = min(min(PBth, PBdth), PBu);
R(2,:) = min(min(PBth, Zdth), PBu);
R(3,:) = min(min(PBth, NBdth), Zu);
R(4,:) = min(min(Zth, PBdth), PBu);
R(5,:) = min(min(Zth, Zdth), Zu);
R(6,:) = min(min(Zth, NBdth), NBu);
R(7,:) = min(min(NBth, PBdth), Zu);
R(8,:) = min(min(NBth, Zdth), NBu);
R(9,:) = min(min(NBth, NBdth), NBu);
R(10,:) = min(PBdth, PBu);
R(11,:) = min(NBdth, NBu);

% % DEFUZZIFICAÇÃO
u(k) = sum(max(R) .* u_) / sum(max(R));

```

```

% %      Metodo de Runge kutta
k1=pendulo_n_linear(x(:,k),u(k),m,M,l,g);
k2=pendulo_n_linear((x(:,k)+ts*0.5*k1),u(k),m,M,l,g);
k3=pendulo_n_linear((x(:,k)+ts*0.5*k2),u(k),m,M,l,g);
k4=pendulo_n_linear((x(:,k)+ts*k3),u(k),m,M,l,g);
x(:,k+1)=x(:,k)+(ts/6)*(k1+2*(k2+k3)+k4);

end
xnlin_fuzzy=x;unlin_fuzzy=u;

figure(4)
subplot(311)
plot(t,xlin_lgr(1,:),t,xnlin_lgr(1,:))
grid

ylabel('\theta (rad)')
title('Lugar Geral das Raízes')

subplot(312)
plot(t,xlin_lgr(1,:),t,xnlin_lgr(1,:))
grid
ylabel('Vel. angular (rad\s)')

subplot(313)
plot(t(1:end-1),ulin_lgr,t(1:end-1),unlin_lgr)
grid
xlabel('Tempo (s)'),
ylabel('Força (N)')
legend('linear','não linear')

figure(5)
subplot(311)
plot(t,xlin_fuzzy(1,:),t,xnlin_fuzzy(1,:))
grid
ylabel('\theta (rad)')
title('Logic Fuzzy Control')

subplot(312)
plot(t,xlin_fuzzy(1,:),t,xnlin_fuzzy(1,:))
grid
ylabel('Vel. angular (rad\s)')

subplot(313)
plot(t(1:end-1),ulin_fuzzy,t(1:end-1),unlin_fuzzy)
grid
xlabel('Tempo (s)'),
ylabel('Força (N)')
legend('linear','não linear')

figure(6)
subplot(311)
plot(t,xnlin_lgr(1,:),t,xnlin_fuzzy(1,:))
grid
ylabel('\theta (rad)')
title('LGR x Fuzzy')

```

```

subplot(312)
plot(t,xnlin_lgr(1,:),t,xnlin_fuzzy(1,:))
grid
ylabel('Vel. angular (rad/s)')

subplot(313)
plot(t(1:end-1),unlin_lgr,t(1:end-1),unlin_fuzzy)
grid
xlabel('Tempo (s)'),
ylabel('Força (N)')
legend('LGR','Fuzzy')

% Comparativo dos indices de desempenho
Jllgr=0.5*trace(xlin_lgr*xlin_lgr')+ulin_lgr*ulin_lgr'
Jnllgr=0.5*trace(xnlin_lgr*xnlin_lgr')+unlin_lgr*unlin_lgr'
Jlfuzzy=0.5*trace(xlin_fuzzy*xlin_fuzzy')+ulin_fuzzy*ulin_fuzzy'
Jnfuzzy=0.5*trace(xnlin_fuzzy*xnlin_fuzzy')+unlin_fuzzy*unlin_fuzzy'

```