



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CLÁUDIO GABRIEL VENCESLAU VALE

**CONTROLE SD- $\mathcal{H}_2$ APLICADO AO PÊNDULO DE FURUTA E CONVERSOR
BOOST**

MOSSORÓ-RN

2026

CLÁUDIO GABRIEL VENCESLAU VALE

**CONTROLE SD- $\mathcal{H}_2$ APLICADO AO PÊNDULO DE FURUTA E CONVERSOR
BOOST**

Dissertação apresentada ao Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius Silvério Costa

Coorientadora: Prof. Dra. Rosana Cibely Batista Rego

MOSSORÓ-RN

2026

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

V149c Vale, Cláudio Gabriel Venceslau.
Controle SD-H2 aplicado ao pêndulo de Furuta e
conversor boost / Cláudio Gabriel Venceslau Vale.
- 2026.
55 f. : il.

Orientador: Marcus Vinícius Silvério Costa.
Coorientadora: Rosana Cibely Batista Rego.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em
Engenharia Elétrica, 2026.

1. Controle em Tempo Amostrado. 2.
Desigualdades Matriciais Lineares Diferenciais.
3. Pêndulo de Furuta. 4. Conversor Boost. 5.
Controlador H2. I. Costa, Marcus Vinícius
Silvério, orient. II. Rego, Rosana Cibely
Batista, co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

CLÁUDIO GABRIEL VENCESLAU VALE

CONTROLE SD- $\mathcal{H}_2$ APLICADO AO PÊNDULO DE FURUTA E CONVERSOR BOOST

Dissertação apresentada ao Mestrado Acadêmico em Engenharia Elétrica do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Controle e Automação.

Aprovada em: 30 de Janeiro de 2026

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **MARCUS VINICIUS SILVERIO COSTA**
Data: 25/02/2026 15:41:22-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Marcus Vinícius Silvério
Costa (Orientador)

Universidade Federal Rural do Semi-Árido
(UFERSA)

Documento assinado digitalmente
 **VICTOR DE PAULA BRANDAO AGUIAR**
Data: 25/02/2026 20:53:26-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Victor de Paula Brandão Aguiar
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
(UFERSA)

Documento assinado digitalmente
 **ROSANA CIBELY BATISTA REGO**
Data: 26/02/2026 12:15:56-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dra. Rosana Cibely Batista
Rego (Coorientadora)

Universidade Federal Rural do Semi-Arido
(UFERSA)

Documento assinado digitalmente
 **RENE DESCARTES OLIMPIO PEREIRA**
Data: 25/02/2026 20:31:47-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. René Descartes Olimpio Pereira
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
(UFERSA)

Documento assinado digitalmente
 **FABRICIO GONZALEZ NOGUEIRA**
Data: 26/02/2026 17:31:28-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Fabricio Gonzalez Nogueira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha família, pelo amor, apoio e compreensão em cada etapa desta caminhada. Em especial, agradeço por acreditarem em mim nos momentos mais difíceis, por incentivarem minha dedicação aos estudos e por serem a base que me sustentou até aqui.

Agradeço ao orientador Prof. Dr. Marcus Vinicius Silvério Costa pelo apoio fundamental, cuja condução, paciência e confiança foram decisivas para que este trabalho se tornasse possível.

Agradeço ao Prof. Dr. René Descartes Olimpio Pereira, pela parceria acadêmica e pelas contribuições constantes ao meu desenvolvimento como pesquisador.

Agradeço à banca examinadora pela presença e dedicação na avaliação deste trabalho, contribuindo para o seu aprimoramento.

Agradeço à coordenação do curso, em especial ao prof. Dr Isaac Barros Tavares da Silva pelo suporte e pela atenção às demandas acadêmicas.

Por fim, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e ao PPGEE-UFERSA, que foram indispensáveis para a realização desta pesquisa, bem como pelo incentivo à produção científica e ao desenvolvimento da pós-graduação no país.

“O sonho é que leva a gente para frente. Se a gente for seguir a razão, fica aquietado, acomodado.”

(Ariano Suassuna)

RESUMO

Este trabalho propõe a aplicação de controladores Sampled-Data $\mathcal{H}_2$ (SD- $\mathcal{H}_2$) baseados em Desigualdades Matriciais Lineares Diferenciais (*Differential Linear Matrix Inequalities*, DLMIs) à diferentes modelos de acordo com suas especificidades. A estratégia visa garantir desempenho robusto frente a perturbações e incertezas politópicas, considerando as características dinâmicas e os efeitos da discretização do sistema. A abordagem aplicada ao controle do pendulo de Furuta envolve a análise de robustez, a variação paramétrica e rejeição a perturbações de cargas dentro de um modelo com 2 graus de liberdade, através da variação da massa aplicada à haste e de perturbações. A validação ocorreu por meio da comparação com o Regulador Quadrático Linear Discreto (*Linear Quadratic Regulator*, LQR). A segunda Abordagem incorporou uma ação integral ao método sample data $\mathcal{H}_2$, aplicado a um conversor boost com Célula de comutação de 3 estados (*3-State Switching Cell*, 3SSC), comparando robustez e eficiência frente a uma estratégia de Controle Preditivo de Modelo Robusto Comutado (*Switched Robust Model Predictive Control*, SR-MPC) proposta por Alves *et al.* (2022). Por meio da análise das respostas temporais e dos índices de desempenho. Os resultados demonstram que a proposta é eficaz em assegurar estabilidade e robustez do sistema de malha fechada frente às incertezas. Além disso, os controladores propostos apresentaram desempenho superior aos *benchmarks*, reforçando sua aplicabilidade em sistemas dinâmicos não-lineares. Os critérios de convergência do método proposto permanecem como uma limitação que merece investigação futura.

Palavras-chave: Controle em Tempo Amostrado. Desigualdades Matriciais Lineares Diferenciais. Pêndulo de Furuta. Conversor Boost. Controlador $\mathcal{H}_2$.

ABSTRACT

This work proposes the application of Sampled-Data $\mathcal{H}_2$ (SD- $\mathcal{H}_2$) controllers based on Differential Linear Matrix Inequalities (DLMI) to different models according to their specificities. The strategy aims to guarantee robust performance against disturbances and polytopic uncertainties, considering the dynamic characteristics and the effects of system discretization. The approach applied to the control of the Furuta pendulum involves the analysis of robustness, parametric variation, and disturbance rejection of loads within a model with 2 degrees of freedom, through the variation of the mass applied to the rod and disturbances. Validation was performed by comparison with the Discrete Linear Quadratic Regulator (LQR). The second approach incorporated an integral action to the sample data method $\mathcal{H}_2$, applied to a boost converter with a 3-State Switching Cell (3SSC), comparing robustness and efficiency against a Switched Robust Model Predictive Control (SR-MPC) strategy proposed by Alves *et al.* (2022). Through the analysis of temporal responses and performance indices. The results demonstrate that the proposal is effective in ensuring stability and robustness of the closed-loop system against uncertainties. In addition, the proposed controllers showed superior performance to the *benchmarks*, reinforcing their applicability in non-linear dynamic systems. The convergence criteria of the proposed method remain a limitation that deserves further investigation.

Keywords: Sample-Time Control. Linear Differential Matrix Inequalities. Furuta Pendulum. Boost Converter. $\mathcal{H}_2$ Controller.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – gráfico das funções $\phi_i(t)$ deslocadas em amostras	21
Figura 2 – Autovalor mínimo para vários subintervalos	22
Figura 3 – Diagrama de blocos de controle <i>Sampled Data</i> (GEROMEL, 2023).	23
Figura 4 – Modelo físico do pêndulo de Furuta da <i>Wheeltec Technologies</i>	40
Figura 5 – Conversor boost com célula de comutação de três estados (ALVES <i>et al.</i> , 2022).	42
Figura 6 – Diagrama de blocos do conversor Boost com ação integral	43
Figura 7 – Resposta no tempo Pêndulo de Furuta	48
Figura 8 – Corrente no indutor e tensão no capacitor	49
Figura 9 – Resposta no tempo conversor boost	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do sistema físico	41
Tabela 2 – Parâmetros do Conversor Boost(ALVES <i>et al.</i> , 2022).	43
Tabela 3 – Variação de g_2^2 em função de n_ϕ	47
Tabela 4 – Índices de desempenho do exemplo do Pendulo de Furuta.	47
Tabela 5 – Índices de desempenho do exemplo do conversor Boost	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Estado da arte	12
1.2	Objetivo geral	14
1.3	Objetivos específicos	14
1.4	Contribuições	14
1.5	Resumo dos Capítulos	15
2	SISTEMAS DE CONTROLE BASEADOS EM SD	16
2.1	Definição de DLMI	16
2.1.1	Solução numérica das DLMIs	20
2.2	Abordagem <i>Sampled Data</i>	22
2.2.1	Análise de estabilidade	24
2.3	Norma $\mathcal{H}_2$	25
2.3.1	Caso contínuo	27
2.3.2	Caso discreto	28
2.3.3	Unificação da abordagens contínuas e discretas da norma $\mathcal{H}_2$	30
2.4	Minimização $\mathcal{H}_2$ via DLMIs	31
2.4.1	Equações em espaço de estados aumentados	31
3	METODOLOGIA DE MODELAGEM	36
3.1	controle SD-$\mathcal{H}_2$	36
3.2	Modelo do Pendulo de Furuta	39
3.3	Modelo do Conversor boost	41
4	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO E ANÁLISE	45
4.1	Índices de Desempenho	45
4.2	Pendulo de Furuta	46
4.3	Conversor boost	48
5	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

Um dos principais desafios da Engenharia de Controle é lidar com sistemas não lineares e instáveis, principalmente quando se busca desempenho e robustez em condições reais de operação. Já que o bom dimensionamento do projeto de controladores depende de modelos capazes de representar adequadamente a dinâmica da planta. Além disso, requisitos típicos de aplicações reais como a presença de ruídos de medição, limitações de atuadores e a obtenção de variáveis do sistema por amostragem, que podem estar sujeitos a incertezas paramétricas e variações de carga que introduzem efeitos adicionais que distorcem a dinâmica observada.

1.1 Estado da arte

Um exemplo clássico desse tipo de sistema é o Pêndulo de Furuta operando em sua posição invertida, uma planta amplamente reconhecida na literatura e utilizada em bancadas experimentais para validação de controladores avançados (FURUTA *et al.*, 1992). Esse modelo apresenta elevada complexidade quando submetido à presença de incertezas paramétricas e atrasos oriundos de controladores digitais, o que o torna um excelente *benchmark* para o desenvolvimento de técnicas de controle robusto.

Diante dessas características, diversas estratégias de controle foram aplicadas ao Pêndulo de Furuta nos últimos anos, abrangendo abordagens tanto em tempo contínuo quanto discreto, como observado em Chołodowicz e Orłowski (2020), Zhang e Dixon (2021), Pujol-Vazquez *et al.* (2020), Vizi e Stépán (2021), Pham *et al.* (2024). Entre essas metodologias, destacam-se controladores baseados em Lógica Fuzzy (PHAM *et al.*, 2024) e controladores robustos $\mathcal{H}_\infty$ formulados por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs), como apresentado em Pujol-Vazquez *et al.* (2020). Todos esses métodos apresentaram desempenho satisfatório quando submetidos à presença de incertezas e perturbações.

Outro tipo de modelo muito utilizado é o conversor Boost já que de acordo com Kahani *et al.* (2022), Yadav *et al.* (2023), Kharrat *et al.* (2022), Mansour *et al.* (2021) ele é amplamente utilizado em sistemas de energia renovável, particularmente no rastreamento do ponto de máxima potência (MPPT), devido à sua capacidade de elevar a tensão em circuitos eletrônicos de potência (LOUREIRO *et al.*, 2021). No entanto, seu controle permanece desafiador devido à dinâmica inerente dos sistemas fotovoltaicos (FKIRIN *et al.*, 2025), saturação do ciclo de trabalho, comportamento de fase não mínima e atrasos de transporte (SILVA *et al.*, 2021).

Abordagens recentes integraram o controle digital usando realimentação de dados amostrados, aproveitando modelos de espaço de estado médios e critérios de desempenho quadráticos. Esses métodos se baseiam em formulações baseadas em LMIs para garantir a estabilidade em malha fechada. Como demonstrado em Alves *et al.* (2022), a análise usando elipsoides invariantes e validação baseada em simulação confirma a viabilidade de tais técnicas para regular a tensão de saída de conversores Boost.

Nesse contexto, o avanço dos sistemas embarcados tem impulsionado o desenvolvimento de controladores robustos de tempo amostrado (*Sampled-Data Control*), principalmente dada a necessidade de conciliar o comportamento contínuo da planta com as restrições discretas do controlador digital (ALVES *et al.*, 2024; DREEF; DONKERS, 2021). Segundo Behrouz *et al.* (2021) e Li e Ma (2023), o uso do critério $\mathcal{H}_2$ tem se mostrado adequado para minimizar a resposta do sistema frente a perturbações externas, contribuindo para maior desempenho e robustez.

Abordagens híbridas que conciliam características contínuas e discretas é um tema amplamente abordado na literatura nas ultimas décadas, vide livros como Ichikawa e Katayama (2001) e mais recentemente Goebel *et al.* (2009). Estas são frequentemente implementados como propostas para o projeto de controladores $\mathcal{H}_2$ otimizados, como em Dreef e Donkers (2021).

Porém, de um modo geral as técnicas clássicas de controle para sistemas de dados amostrados utilizam retentores de ordem zero (*zero Order Hold* - ZOH) no sistema de tempo contínuo, que geram matrizes de transição tipicamente exponenciais. Isso dificulta o tratamento de incertezas paramétricas por meio de otimização convexa, devido à sua não linearidade. O uso de DLMI's permite a criação de controladores de realimentação de saída $\mathcal{H}_2$ ótimos para uma planta linear, invariante em tempo contínuo, com medições amostradas e ruidosas. Isso fornece uma solução via LMI, que permite a inclusão de incertezas paramétricas em um conjunto convexo (GEROMEL, 2023).

Diante disso, o uso de LMIs e suas extensões, como as Desigualdades Matriciais Lineares Diferenciais (DLMI's), tem se consolidado na literatura como uma ferramenta eficiente para garantir estabilidade e desempenho robusto (GEROMEL, 2023). Veja Geromel *et al.* (2019), que propõe uma solução para controladores de realimentação de saída $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ ótimos. Em Geromel (2021), DLMI's são usadas em um sistema de controle preditivo baseado em modelo (MPC) para resolver sistemas de controle de dados amostrados com medições de estado com-

pleto. Além disso, validações consistentes dessas técnicas em plantas não lineares, como tanques acoplados, confirmam o potencial da metodologia quando implementada em sistemas mais complexos (ESMAEILI; BAŞÇI, 2021).

1.2 Objetivo geral

Partindo dessa premissa, o presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um controlador *Sampled-Data* $\mathcal{H}_2$ (SD- $\mathcal{H}_2$) via DLMIs, aplicado a plantas como pêndulo de Furuta e conversor Boost 3SSC.

1.3 Objetivos específicos

- Garantir desempenho robusto frente a perturbações e incertezas, considerando as particularidades do sistema e os efeitos da discretização no tempo.
- Comparar o controle SD- $\mathcal{H}_2$ a um Regulador Quadrático Linear Discreto (LQR) e a uma estratégia de Controle Preditivo de Modelo Robusto Comutado (SR-MPC) proposto por Alves *et al.* (2022), aplicados respectivamente aos modelos do pendulo de Furuta e do conversor Boost 3SSC.
- Validar o desempenho do controlador por meio da análise de resposta temporal e dos índices de desempenho ISE, IAE, ITSE e ITAE.

1.4 Contribuições

O desenvolvimento deste estudo apresenta as seguintes contribuições.

- o método *Sampled-Data* $\mathcal{H}_2$ (SD- $\mathcal{H}_2$) por realimentação de estados de Geromel (2023) aplicado no controle do modelo de um pendulo de Furuta, com variação de carga e aplicação de distúrbios.
- a abordagem *Sampled-Data* mencionada com ação integral, considerando o modelo aumentado de Costa *et al.* (2017), foi aplicada ao controle de um modelo de conversor boost utilizando uma abordagem politópica de Vale *et al.* (2025)

1.5 Resumo dos Capítulos

A Dissertação esta dividida da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Apresenta o tema proposto, contextualizando sua importância acadêmica e científica, bem como sua relevância através de citações de diversos trabalhos publicados, além de mostrar as contribuições, os objetivos deste estudo e de que forma ele esta estruturado no artigo.
- **Capítulo 2:** Aborda o os fundamentos teóricos das Inequações Matriciais Lineares Diferenciais (DLMI), sistemas *Sampled Data* e otimização da norma $\mathcal{H}_2$ para a síntese do controlador por realimentação de estados.
- **Capítulo 3:** Apresenta o método de controle utilizado e define as características de cada uma das plantas controladas.
- **Capítulo 4:** Verifica a eficiência da técnica proposta através de simulações numéricas, além de trazer uma análise comparativa do resultados obtidos com os do *benchmark*.
- **Capítulo 5:** Discute a respeito dos resultados obtidos até então, além de fornecer sugestões de melhorias e continuidade da pesquisa que podem ser realizadas em trabalhos futuros.

2 SISTEMAS DE CONTROLE BASEADOS EM SD

Neste capítulo, explanam-se os conceitos, características e definições matemáticas relativas as Desigualdades Matriciais Lineares Diferenciais (*Differential Linear Matrix Inequalities* – DLMI) dos trabalhos de Geromel (2023) e Geromel *et al.* (2019). Bem como, conceitos relativos a sistemas de dados amostrados (*Sampled Data*) e otimização de desempenho $\mathcal{H}_2$ para o projeto do procedimento proposto, usado nos exemplos de aplicação.

2.1 Definição de DLMI

Visando introduzir a abordagem via DLMI, será abordada a aplicação do conceito clássico das Inequações matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities*–LMI) como fundamentação que precede o conceito mencionado anteriormente. A vantagem desta metodologia é que o conjunto definido por esse tipo de equação é convexo e, uma vez obtida solução factível, permite sua utilização em diversas aplicações de controle como estabilidade de sistemas lineares, síntese de controladores, controle robusto (para lidar com incertezas), desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$, alocação de polos, observadores, filtros, etc (GEROMEL, 2021).

Muitas destas aplicações são resolvidas em problemas que envolvem a minimização de um custo linear sujeito a LMIs, e são solucionadas de forma eficiente e confiável por IDE/Solvers numéricos que utilizam programação semidefinida ou convexa em MATLAB, tais como LMILAB (GAHINET *et al.*, 1995), YALMIP/SeDuMi (LOFBERG, 2004; STURM, 1999). Em Python, convém destacar os IDE/Solver CVXPY (DIAMOND; BOYD, 2016; AGRAWAL *et al.*, 2018) e seus solvers associados, incluindo o solver CVXOPT (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

Inicia-se usando as funções de Lyapunov quadrática continua V expressa em (2.1), que pode ser escrita exatamente como uma LMI, já que a matriz de Lyapunov P é simétrica e definida positiva, além de ser linear em P .

$$V(x) = x^\top P x, \quad \dot{V}(x) = \dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x} = x^\top (A^\top P + P A) x. \quad (2.1)$$

Esse tipo de equação possui propriedades muito relevantes em controle, dado que a existência de um $V(x)$ positivo e $\dot{V}(x)$ negativo para um determinado sistema LTI implica que, além dos estados desse sistema não poderem escapar das suas curvas de nível, eles também conver-

gem de forma assintótica para a origem.

A definição previa desses conceitos é fundamental no entendimento das características das DLMI's explicitadas mais adiante, visto que elas podem ser entendidas como uma generalização de LMI's, já que são resolvidas numericamente como uma combinação delas, além de serem utilizadas em funções de Lyapunov nos problemas de controle.

As desigualdades Matriciais lineares diferenciais (DLMI's) serão dispostas como problemas da seguinte forma:

$$\mathcal{L}(\dot{P}(t), P(t)) \prec 0, \quad t \in [0, h]. \quad (2.2)$$

Onde $\mathcal{L}$ em (2.2) é um mapeamento linear, que expressa a DLMI como uma inequação linear que contem uma função com valores matriciais simétricos $P(t)$ e sua derivada $\dot{P}(t)$, e esta definida no intervalo de um período de amostragem h . Em (2.3) é mostrada sua condição de contorno.

$$\mathcal{H}(P(0), P(h)) \prec 0. \quad (2.3)$$

Onde $\mathcal{H}$ também representa um mapeamento linear que depende dos pontos extremos de $P(t)$ dentro do período de amostragem. Diferente de (2.2) esta inequação não é uma DLMI pois não contem uma derivada em sua expressão.

Como primeiro e mais recorrente exemplo do uso de DLMI, a inequação da forma (2.2) será representada como a derivada diferencial de Lyapunov (2.4). É importante notar sua semelhança com (2.1), visto que é a mesma derivada, mas formulada para o caso em que P também varia com o tempo.

$$\dot{P}(t) + A'P(t) + P(t)A + \bar{Q} = 0, \quad t \in [0, h]. \quad (2.4)$$

Outra importante observação é o fato de que (2.4) possui uma matriz $\bar{Q}$ definida positiva, cuja utilidade é manter a propriedade de (2.2), tornando a derivada de Lyapunov igual a $-\bar{Q}$ e, portanto menor que 0, além de transformar a desigualdade em uma igualdade. Permitindo assim resolver a equação diferencial para obter $P(t)$ em (2.5).

$$P(t) = e^{-A^\top(t-\tau)} P(\tau) e^{-A(t-\tau)} - \int_{\tau}^t e^{-A^\top(t-\xi)} \bar{Q} e^{-A(t-\xi)} d\xi. \quad (2.5)$$

Substituindo τ por h em (2.5) e realizando algumas manipulações algébricas chega-se em (2.6)

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{-A^\top(t-h)} P_h e^{-A(t-h)} - \int_h^t e^{-A^\top(t-\xi)} \bar{Q} e^{-A(t-\xi)} d\xi \\ &= e^{A^\top(h-t)} P_h e^{A(h-t)} + \int_0^{h-t} e^{A^\top \xi} \bar{Q} e^{A\xi} d\xi \\ &> e^{A^\top(h-t)} P_h e^{A(h-t)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nota-se que na ultima expressão de (2.6) $P(t)$ em qualquer instante entre 0 e h majora uma função de P_h . Isso acontece porque a expressão contendo a integral sempre será positiva dado que $\bar{Q} > 0$. Ao impor $t = 0$, obtemos uma expressão das condições de contorno no formato de (2.3), expressa abaixo:

$$P_0 > e^{A^\top h} P_h e^{Ah}. \quad (2.7)$$

Esse tipo de expressão, para além de estabelecer uma condição de contorno, é necessária para restringir os valores das variáveis encontradas e estabelecer uma solução única. Também é capaz de garantir que, para um determinado P_h positivo, todos os valores de $P(t)$ no intervalo $[0, h)$ também serão positivos.

Essa mesma condição de Positividade não se mantêm se determinarmos um $P_0 > 0$ em vez de P_h , visto que a solução da EDO desenvolvida em (2.6) resultaria em (2.8).

$$P(t) = e^{A^\top(-t)} P_0 e^{A(-t)} - \int_0^t e^{-A^\top \xi} \bar{Q} e^{-A\xi} d\xi. \quad (2.8)$$

Com isso, tem-se que o termo que acompanha a integral, agora subtrai a expressão e como este é sempre positivo, haverá uma faixa de valores de $P(t)$ que poderão ser negativos, mesmo se eu estabelecer um $P_0 > 0$. A solução para garantir um caso 'dual', em que também é possível escolher uma condição inicial, é tratada a seguir.

Ao utilizar a forma adjunta de (2.4) que propaga a dinâmica em um fluxo inverso ao natural (2.9), torna-se viável estabelecer um $P_0 > 0$ que garanta a positividade estrita de $P(t)$ no intervalo de uma amostra. Tal como mostrado em (2.10).

$$-\dot{P}(t) + AP(t) + P(t)A^\top + \bar{Q} = 0, \quad t \in [0, h). \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
P(t) &= e^{At} P_0 e^{A^\top t} + \int_0^t e^{A(t-\xi)} \bar{Q} e^{A^\top(t-\xi)} d\xi \\
&= e^{At} P_0 e^{A^\top t} + \int_0^t e^{A\xi} \bar{Q} e^{A^\top \xi} d\xi \\
&> e^{At} P_0 e^{A^\top t}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dessa forma, obtêm-se uma nova condição de contorno a partir de (2.10) ao substituir o tempo t por h .

Esse tipo de estrutura também pode ser empregada utilizando a matriz inversa $S(t) = P(t)^{-1}$, ao multiplicar a equação (2.4) por $P(t)^{-1}$, resultando em (2.12).

$$\dot{S}(t) = \frac{d(P(t)^{-1})}{dt} = -P(t)^{-1} \dot{P}(t) P(t)^{-1}. \tag{2.11}$$

$$-\dot{S}(t) + AS(t) + S(t)A^\top + S(t)\bar{Q}S(t) = 0, \quad t \in [0, h]. \tag{2.12}$$

Portanto, vale ressaltar que a proposição $S(t) = P(t)^{-1}$ preserva as características de positividade e simetria de $P(t)$, no entanto a equação (2.12) só deve ser utilizada para o caso de $P_h > 0$ definido. Em caso de estabelecido o $P_0 > 0$ deve-se deduzi-la a partir de (2.9), resultando em uma expressão semelhante a (2.12), mas com a ausência de sinal negativo na derivada.

As equações de Lyapunov a partir de $S(t)$ foram demonstrados acima, devido a sua utilidade na construção de DLMI's que minimizam normas como a $\mathcal{H}_2$ detalhadas em capítulos posteriores. A inequação diferencial de Lyapunov usadas daqui em diante manterá a variável Q pela sua importância como peso, custo ou dissipação, mas também pelo fato desse termo está presente em muitas estratégias de controle como a $\mathcal{H}_2$ modelado como um bloco que envolve a saída de desempenho.

Com isso, ao adicionarmos o Q a nova DLMI terá a forma (2.4), porém será uma inequação. Ao passo que (GEROMEL, 2021) irá provar as mesmas propriedades de contorno vistas anteriormente, mas utilizando uma variável auxiliar $W(t)$ para torná-las equações diferenciais. Chegando as mesmas conclusões.

2.1.1 Solução numérica das DLMIs

Para se obter a solução numérica da parte diferencial da DLMi, faz-se o uso de métodos de aproximação numérica tais como o *Piecewise* e a aproximação por factibilidade do avanço de Euler (GEROMEL, 2023). O conjunto solução é restrito ao período de tempo de amostragem, o qual é dividido em subamostras de base $n_\phi = 2^N$, sendo N a resolução de bits de subamostras.

A resolução do método numérico consiste em modelar $P(t)$ como um somatório de 2^N divisões de um intervalo de amostragem $[0, h)$ e escreve-lo como produto de funções contínuas de valor escalar $\phi_i(t)$ por matrizes simétricas X_i . Como apresentado em (2.13).

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n_\phi} X_i \phi_i(t). \quad (2.13)$$

O primeiro método consiste no *Piecewise*, no qual as incógnitas a serem obtidas para a determinação de $P(t)$ são os valores das matrizes X_i , cujo esforço computacional dependerá do numero de subintervalos n_ϕ escolhidos.

A função contínua $\phi(t)$ que apresenta a forma mais simples de lidar com DLMIs é a linear por partes. Definida em (2.14).

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\eta}, & |t| \leq \eta, \\ 0, & |t| > \eta. \end{cases} \quad (2.14)$$

Em que η é o tempo de um intervalo de uma amostra entre n_ϕ outras, expresso por $\eta = \frac{h}{n_\phi}$. A função (2.14) representa graficamente um triangulo centrado na origem, com altura 1 e vértices em $-\eta$ e η .

Para cada valor de i em (2.13), teremos $\phi_i(t) = \phi(t - i\eta)$, cuja função é deslocar a equação de modo que haja uma sobreposição entre os triângulos, como ilustrado na Figura 1.

Apenas como forma de Visualização, a Figura 1 apresenta apenas a representação de ϕ_i e ϕ_{i+1} , no entanto, haverá n_ϕ funções como essa pareadas do mesmo modo durante todo o intervalo de 0 a h . É importante salientar que, em cada instante de tempo, somente duas funções estão ativas, e elas se sobrepõem de modo a realizar uma interpolação linear entre elas.

Ao aplicar a função (2.14) em (2.13) para o intervalo $[i\eta, (i+1)\eta)$, obtém-se (2.15).

$$P(t) = X_i + \frac{X_{i+1} - X_i}{\eta} (t - i\eta). \quad (2.15)$$

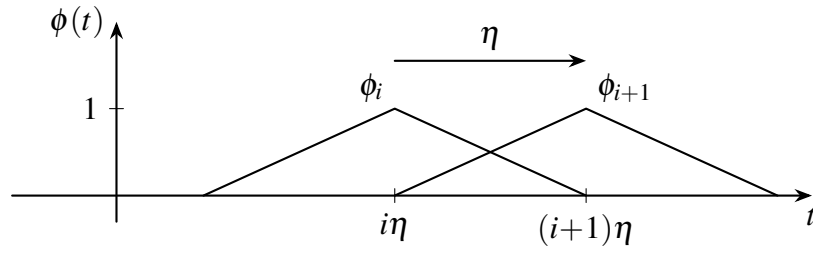


Figura 1 – grafico das funções $\phi_i(t)$ deslocadas em amostras

Que consiste na segunda abordagem do método *Piecewise*. Esse mesmo comportamento de (2.15) se repete a cada iteração $i = 0, 1, \dots, n_\phi - 1$.

O segundo método para obter a solução da DLMI é a factibilidade por avanço de Euler, em que o artifício utilizado para garantir as restrições da forma (2.2) usando o mínimo de LMIs possíveis está presente em (2.16) e (2.17).

$$\mathcal{L}(\dot{P}(t), P(t))|_{t=t_i} = \mathcal{L}\left(\frac{X_{i+1} - X_i}{\eta}, X_i\right) < 0. \quad (2.16)$$

$$\mathcal{L}(\dot{P}(t), P(t))|_{t=t_{i+1}} = \mathcal{L}\left(\frac{X_{i+1} - X_i}{\eta}, X_{i+1}\right) < 0. \quad (2.17)$$

Nota-se que a derivada de Lyapunov apresentada em (2.16) e (2.17), nada mais é que a expressão de (2.15) derivada em relação ao tempo. No entanto, a representação de $P(t)$ é apenas X_i e X_{i+1} respectivamente e não a equação completa de (2.15). Isso é viável dada a suficiência de provar a negatividade da derivada de Lyapunov apenas nos nós de cada iteração onde o conjunto $[\phi_i, \phi_{i+1}] = [(1, 0), (0, 1)]$. Logo, todos os valores de $P(t)$ intermediários entre estes estarão entre os 2 pontos, já que formam uma combinação convexa entre eles. Cada uma dessas LMIs devem ser satisfeitas para todo o conjunto $i = 0, 1, \dots, n_\phi - 1$ totalizando $2n_\phi$ LMIs mais 1, imposta pela condição de contorno (2.18).

$$H(X_0, X_{n_\phi}) < 0. \quad (2.18)$$

Diferente das LMIs em (2.16) e (2.17) que estão presentes para cada uma das iterações, a condição (2.18) depende apenas do primeiro e ultimo X durante o período de amostragem h .

Com o intuito de que haja uma melhor visualização do comportamento das DLMIs em um sistema, segue-se o exemplo ilustrado na Figura 2 do estudo de Geromel (2023). O exemplo consiste em um problema de otimização de uma desigualdade diferencial de Riccati para determinar uma função matricial $P(t)$.

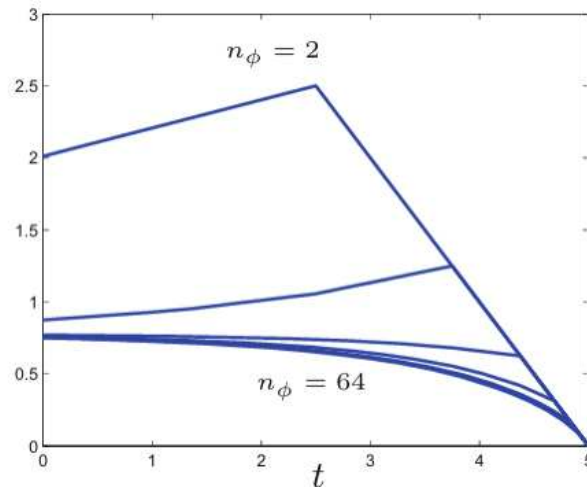


Figura 2 – Autovalor mínimo para vários subintervalos

A Figura 2 mostra a evolução temporal dos menores autovalores de $P(t)$ do conjunto solução do exemplo referido para diferentes números de amostras η . A partir disso, destacam-se duas propriedades importantes: A primeira é que o aumento n_ϕ gera estimativas cada vez mais próximas do comportamento ótimo do sistema; a segunda é que os valores obtidos são sempre limitantes superiores da função objetivo do problema que, neste caso, consiste em minimizar o traço de P_0 , garantindo um maior conservadorismo para um problema com resultado subótimo e que o sistema será robusto às limitações empregadas no sistema de controle.

Por fim, apesar de $P(t)$ ser uma função contínua, esta não é diferenciável em todos os pontos. Portanto, surge a necessidade de garantir a negatividade da derivada de $P(t)$ como em (2.16) e (2.17) $2n_\phi$. Assim, o mesmo nó pode ter suas restrições garantidas a direita e a esquerda a partir de intervalos diferentes.

2.2 Abordagem *Sampled Data*

Os sistemas *Sampled Data* visam modelar a planta considerando o projeto contínuo e discreto de forma simultânea, obtendo o controlador discreto por definição. Este é diferente da abordagem clássica, em que o projeto requer uma etapa de discretização de alguma forma para

implementação digital.

Seguem as expressões por espaço de estados de um sistema *Sampled Data*.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew_c(t) \\ y[k] &= C_y x[k] + E_y w_d[k] \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t).\end{aligned}\tag{2.19}$$

A estrutura de (2.19) incluem as matrizes de abordagem contínua, A, B, C_z, D_z , bem como a abordagem discreta C_y, E_y . O modelo inclui ainda perturbações contínuas e discretas w_c e w_d , típicas de sistemas reais que envolvem variáveis contínuas e discretas na planta e até mesmo no controle.

A dinâmica de comportamento dessas variáveis pode ser melhor visualizada na figura 3. Que representa um diagrama de blocos do sistema *Sampled Data*, onde S corresponde a planta, (h) o amostrador com retentor de ordem zero (*Zero Order Hold – ZOH*) e C_h o controlador.

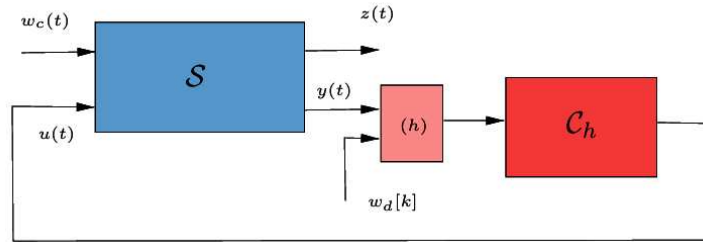


Figura 3 – Diagrama de blocos de controle *Sampled Data* (GEROMEL, 2023).

Nessa dinâmica $Y[k]$ corresponde aos estados medidos em tempos discretos cujos resultados são corrompidos pelo ruído dos sensores w_d , $z(t)$ é a saída de desempenho e $u(t)$ o sinal de controle, definido em (2.20).

$$u(t) = u[k] = v[k] + E_u w_d[k], \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.\tag{2.20}$$

Onde $v[k]$ recebe as medições $Y[k]$ sintetizadas pelo controlador C_h . Em controles por realimentação de estados, esse sinal torna-se $v[k] = L \cdot Y[k]$, sendo L o ganho de realimentação de estados.

Ressalta-se que a matriz $w_d[k]$ empregada em $u[k]$ e $Y[k]$ é a mesma, apesar de representarem perturbações exógenas diferentes. Isso é viável devido as matrizes E_y e E_u presentes em

(2.19) e (2.20) respectivamente, que selecionam dentro de $w_d[k]$ apenas a perturbação pertinente a variável que o acompanha.

2.2.1 Análise de estabilidade

Devido a peculiaridade de apresentarem características contínuas e discretas, os sistemas *Sampled Data* utilizam em seu processo de estabilização funções de Lyapunov contínuas e discretas. Usar estes dois tipos de modelo de forma separada tornaria um problema a otimização de síntese como $\mathcal{H}_2$ utilizando ferramentas padrão como LMIs. Usando a abordagem de Lyapunov diferencial, é possível converter matrizes de Lyapunov contínuas para seu equivalente discreto como demonstrado a seguir.

Dado o sistema em espaço de estados e a solução de sua equação diferencial em (2.21).

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) = e^{At}x(0). \quad (2.21)$$

Considerando uma função contínua de Lyapunov $v(t) = x^\top Px$ e sua derivada $\dot{v}(t)$ expressa em (2.22).

$$\dot{v}(t) = x^\top(t)(A^\top P + PA)x(t) = -x^\top(t)Qx(t). \quad (2.22)$$

É possível obter o equivalente discreto de (2.22), apenas integrando $\dot{v}(t)$ para um período de amostragem, conforme posto em (2.23)

$$\begin{aligned} \int_0^h \dot{v}(t) dt &= v(x(h)) - v(x(0)) = - \int_0^h x^\top(t) Q x(t) dt \\ &= x^\top(h) P x(h) - x^\top(0) P x(0) = - \int_0^h x^\top(t) Q x(t) dt \\ &= e^{A^\top h} P e^{Ah} - P = - \int_0^h e^{A^\top t} Q e^{At} dt. \end{aligned} \quad (2.23)$$

O ultimo trecho de (2.23) é obtido ao substituir $x(t)$ por (2.21), com isso o termo $x(0)$ é cancelado por estar presente em ambos os lados da equação.

Isso implica que: Para uma derivada de Lyapunov contínua $A^\top P + PA = -Q$ existe uma correspondente discreta $A_d^\top S A_d - S = -W$ em que $A_d = e^{Ah}$ e $W = \int_0^h e^{A^\top t} Q e^{At} dt$. Tal que $S = P > 0$. O que faz sentido, pois para que A seja Hurwitz estável (autovalores menores que

zero), $A_d = e^{Ah}$ torna-se necessariamente Schur estável (autovalores menores que um) para qualquer valor de h .

No entanto, não é possível afirmar o contrario, dado que para determinados valores de h a derivada discreta de Lyapunov produz equivalente continuo cujos autovalores não são negativos.

Essas proposições são fundamentais, pois corroboram com a principal contribuição do uso de DLMI em controle que é a capacidade de lidar com incertezas paramétricas.

A principal razão é que projetos de controladores com sistemas sample data que não utilizem DLMI, transformam as variáveis continuas em seus equivalentes discretos para formar LMIs, já que isso transforma o problema híbrido em um problema finito-dimensional e algébrico. Como demonstrado na seção 2.3.3.

Isso faz com que, ao aplicar incertezas através de variações lineares de parâmetros em matrizes de estados como A e B , resulte em variações não lineares em seus equivalentes discretos via (ZOH) A_d e B_d posto que $A_d = e^{Ah}$ e $B_d = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau$. O que torna o domínio não convexo, perdendo a estrutura politópica necessária para LMIs robustas padrão.

As DLMI por trabalharem diretamente com as matrizes de estado continuo, preservam a linearidade em relação a incertezas paramétricas permitindo tratar a robustez de forma convexa.

2.3 Norma $\mathcal{H}_2$

Primeiramente é necessário estabelecer como se dá o processo de dedução da norma $\mathcal{H}_2$ em sistemas sample data, sem o uso de DLMI, visto que as normas via DLMI são provadas a partir das soluções já estabelecidas pelo método tradicional.

O ponto de partida para isso consiste em provar que, para um sistema continuo em espaço de estados (2.24) e (2.25), existe um sistema análogo em tempo discreto, cuja energia das suas saídas são equivalentes, ou seja: $\|z\|_2^2 = \|z_d\|_2^2$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (2.24)$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_z u(t). \quad (2.25)$$

Ao solucionar a equação diferencial (2.24) no intervalo de um período de amostragem $[t_k, t_{k+1})$, obtêm-se (2.26).

$$x(t) = e^{A(t-t_k)}x(t_k) + u[k] \int_0^{t-t_k} e^{A\xi} B d\xi. \quad (2.26)$$

Sendo $u(t)$ constante dentro de um período de amostragem e, portanto, permanece fora da integral, o tempo $t = t_{k+1}$ e $x(t_k) = x[k]$. Substituindo (2.26) na expressão da saída (2.25), tem-se:

$$z(t) = C_z e^{A(t-t_k)} x[k] + \left(C_z \int_0^{t-t_k} e^{A\xi} B d\xi + D_z \right) u[k]. \quad (2.27)$$

É possível reorganizar (2.27) em função de matrizes de estado aumentados onde a saída $z(t)$ estaria em função de uma só matriz $[x[k] \ u[k]]^T$. Para isso utiliza-se as expressões em (2.28).

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} C_z & D_z \end{bmatrix}, \quad e^{Fh} = \begin{bmatrix} e^{Ah} & \int_0^h e^{A\tau} B d\tau \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Com isso (2.27) pode ser reescrito a partir de (2.28), resultando em (2.29).

$$z(t) = G e^{F(t-t_k)} \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

O próximo passo consiste em expressar uma porção da norma ao quadrado da saída contínua compreendida em um único intervalo de amostragem (2.30), utilizando para isso as manipulações matemáticas feitas anteriormente.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} z^\top(t) z(t) dt = \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix}^\top \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F^\top(t-t_k)} G^\top G e^{F(t-t_k)} dt \right) \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

O ponto crucial desta dedução é impor uma condição para as Matrizes de saída discretas C_d e D_d que torne as normas da saídas contínuas e discretas identificas, conforme indicado em (2.31).

$$G_d = \begin{bmatrix} C_d & D_d \end{bmatrix}, \quad G_d^\top G_d = \int_0^h e^{F^\top t} G^\top G e^{Ft} dt \succeq 0. \quad (2.31)$$

Essas proposições tornam o lado direito de (2.30) correspondente a $z_d^\top[k]z_d[k]$. Por fim, a equivalência das normas ao quadrado das saídas contínuas e discretas para todo tempo t esta definida em (2.32).

$$\|z\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} z^\top(t) z(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} z_d^\top[k] z_d[k] = \|z_d\|_2^2. \quad (2.32)$$

Esta equivalência é crucial, na conversão da norma contínua em discreta necessária em procedimentos posteriores.

2.3.1 Caso contínuo

Para expressar a Norma $\mathcal{H}_2$ em um sistema sample data será necessário dividir sua dinâmica em contínua e discreta. A equação de estados completa esta definida em (2.19). Ao tratar esse sistema como malha aberta e isolar apenas os seus termos contínuos obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Ew_c(t), \\ z(t) &= C_z x(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Sendo a norma $\mathcal{H}_2$ a energia total liberada nas saídas do sistema em resposta a impulsos em sua entrada, que pode ser expressa em função de sua função de transferência $H_c(s)$ ou pela resposta ao impulso de suas saídas $h_i(t)$.

$$\|H_c(s)\|_2^2 = \sum_{i=1}^r \|h_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^r \int_0^\infty h_i^\top(t) h_i(t) dt. \quad (2.34)$$

Para uma condição inicial $x(0) = 0$ a saída $z(t) = Cx(t)$ sujeita a um impulso do tipo delta de dirac $\delta(t)$ no iesimo canal e_i , aplicado a entrada exógena w_c , segue-se que:

$$\begin{aligned} h_i(t) &= C_z x(t) = C_z e^{At} x(0) + C_z \int_0^t e^{A(t-\tau)} E w_c(\tau) d\tau \\ &= C_z \int_0^t e^{A(t-\tau)} E e_i \delta(\tau) d\tau = C_z e^{At} E e_i. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dado que integrar a função delta de dirac equivale a preservar os termos que a acompanham no ponto em que o delta esta concentrado. É possível deduzir a partir do resultado de (2.35) que definir uma condição inicial $x(0) = E e_i$, e $w_c(t) = 0$ produz a mesma resposta final.

Essas manipulações promovem a vantagem de não trabalhar apenas com funções usuais eliminando o delta de dirac. Abaixo é explicitado o desenvolvimento de (2.34) com os resultados de (2.35).

$$\|H_c(s)\|_2^2 = \sum_{i=1}^r \int_0^\infty e_i^\top E^\top e^{A^\top t} C_z^\top C_z e^{At} E e_i dt = \text{tr} \left(\int_0^\infty E^\top e^{A^\top t} C_z^\top C_z e^{At} E dt \right). \quad (2.36)$$

Em (2.36) o termo e_i que representa a i -ésima coluna da matriz identidade, é simplificado com o somatório tornando-se o traço dessa matriz. Este resultado pode ser utilizado para definir condições necessárias a determinação da norma $\mathcal{H}_2$, cujo desenvolvido foi demonstrado em (2.37).

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^\infty e^{A^\top t} C_z^\top C_z e^{At} dt, \\ \frac{d}{dt} \left(e^{A^\top t} C_z^\top C_z e^{At} \right) &= A^\top e^{A^\top t} C_z^\top C_z e^{At} + e^{A^\top t} C_z^\top C_z e^{At} A, \\ \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(e^{A^\top t} C_z^\top C_z e^{At} \right) dt &= A^\top \int_0^\infty e^{A^\top t} C_z^\top C_z e^{At} dt + \left(\int_0^\infty e^{A^\top t} C_z^\top C_z e^{At} dt \right) A, \\ \left[e^{A^\top t} C_z^\top C_z e^{At} \right]_0^\infty &= A^\top \Omega + \Omega A, \\ -C_z^\top C_z &= A^\top \Omega + \Omega A. \end{aligned} \quad (2.37)$$

A partir de (2.37), é possível converter o problema em LMIs mais função objetivo, para que ao minimizar P em (2.38) ele se aproxime o máximo possível da igualdade estabelecida em (2.37).

$$\|H_c(s)\|_2^2 = \inf_{P>0} \left\{ \text{tr}(E^\top P E) : A^\top P + P A < -C^\top C \right\}. \quad (2.38)$$

2.3.2 Caso discreto

Agora, será estabelecida as condições necessárias a norma $\mathcal{H}_2$ referente a dinâmica discreta do sistema sample data, exibido abaixo.

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_d x[k] + E_d w_d[k], \\ z[k] &= C_d x[k] + D_d w_d[k]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

De modo análogo a dinâmica continua todo o processo de construção da norma é o mesmo, exceto pelas nuances características do tempo discreto, como a presença de somatórios no lugar de integrais.

$$\|H_d(\zeta)\|_2^2 = \sum_{i=1}^r \|h_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} h_i^\top[k] h_i[k]. \quad (2.40)$$

No processo de obtenção da função da resposta ao impulso na saída discreta $h_i[k]$, a variável δ é um impulso unitário que ocorre em $k = 0$ tornando a matriz D_d presente apenas no instante inicial. Tal como exemplificado em (2.41).

$$\begin{aligned} h_i[0] &= z[0] = C_d x[0] + D_d e_i \delta[0] = D_d e_i. \\ x[1] &= A_d x[0] + E_d e_i \delta[0] = E_d e_i, \\ h_i[1] &= z[1] = C_d x[1] + D_d e_i \delta[1] = C_d (E_d e_i). \\ x[2] &= A_d x[1] + E_d e_i \delta[1] = A_d (E_d e_i), \\ h_i[2] &= z[2] = C_d x[2] + D_d e_i \delta[2] = C_d (A_d E_d e_i). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Portanto, a função que descreve o comportamento de $h_i[k]$ sujeito a qualquer valor de k é (2.42).

$$h_i[k] = \begin{cases} D_d e_i, & k = 0, \\ C_d A_d^{k-1} E_d e_i, & k \geq 1. \end{cases} \quad (2.42)$$

Tal como ocorreu no caso contínuo, a representação da norma $\mathcal{H}_2$ em (2.43) é avaliada em termos do traço das equações de $h_i[k]$.

$$\begin{aligned} \|H_d(\zeta)\|_2^2 &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^{\infty} e_i^\top E_d^\top (A_d^\top)^{k-1} C_d^\top C_d A_d^{k-1} E_d e_i + e_i^\top D_d^\top D_d e_i \right) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{k=0}^{\infty} E_d^\top (A_d^\top)^k C_d^\top C_d A_d^k E_d + D_d^\top D_d \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Para a resolução da norma via LMIs é aplicada a derivada de Lyapunov discreta, cuja equação esta desenvolvida em (2.44).

$$\begin{aligned}
\bar{Q} &= \sum_{k=0}^{\infty} (A_d^\top)^k C_d^\top C_d A_d^k, \\
A_d^\top \bar{Q} A_d - \bar{Q} &= A_d^\top \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A_d^\top)^k C_d^\top C_d A_d^k \right) A_d - \sum_{k=0}^{\infty} (A_d^\top)^k C_d^\top C_d A_d^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (A_d^\top)^{k+1} C_d^\top C_d A_d^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} (A_d^\top)^k C_d^\top C_d A_d^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (A_d^\top)^k C_d^\top C_d A_d^k - \sum_{k=0}^{\infty} (A_d^\top)^k C_d^\top C_d A_d^k \\
&= - (A_d^\top)^0 C_d^\top C_d A_d^0 = -C_d^\top C_d.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

A função objetivo sujeita a inequação linear resultante, esta definida abaixo:

$$\|H_d(\zeta)\|_2^2 = \inf_{P>0} \left\{ \text{tr}(E_d^\top P E_d + D_d^\top D_d) : A_d^\top P A_d - P < -C_d^\top C_d \right\}. \tag{2.45}$$

2.3.3 Unificação da abordagens contínuas e discretas da norma $\mathcal{H}_2$

Após estabelecido os meios de obtenção das normas para o caso contínuo e Discreto, O índice de desempenho $\mathcal{H}_2$ do sample data consiste no somatório da contribuição de cada perturbação exógena w_c e w_d atuante no processo.

$$e_2^2 = \|H_c(s)\|_2^2 + \|H_d(\zeta)\|_2^2. \tag{2.46}$$

Objetivando unir as contribuições contínuas e discretas de (2.46). A função de Lyapunov continua obtida em (2.38) será substituída por uma equivalente discreta. O que fará a norma $\mathcal{H}_2$ presente em (2.47) também ser convertida.

$$\|C_z(sI - A)^{-1} E\|_2^2 = \text{tr}(E^\top P E) = \|C_{zd}(\zeta I - A_d)^{-1} E\|_2^2. \tag{2.47}$$

Com isso, o problema de minimização final sujeito a restrições pode ser simplificado a expressão (2.48).

$$e_2^2 = \inf_{P>0} \left\{ \text{tr}(E^\top P E) + \text{tr}(B_d^\top P B_d) : A_d^\top P A_d - P < -C_{zd}^\top C_{zd} \right\} + \text{tr}(D_{zd}^\top D_{zd}). \tag{2.48}$$

2.4 Minimização $\mathcal{H}_2$ via DLMI

Esta seção aborda o processo de minimização do processo de otimização *Sampled-Data* $\mathcal{H}_2$ (SD- $\mathcal{H}_2$) tanto considerando a realimentação de estados clássica como ao modelo aumentado com base na abordagem por ação integral.

2.4.1 Equações em espaço de estados aumentados

Um passo fundamental no entendimento de métodos de controle com DLMI está no aprendizado das equações de estados aumentadas compostas por (2.49), (2.50) e (2.51), cuja principal característica é que o sinal de controle $u(t)$, também é tratado como um estado, contido na equação $\psi(t) = [x(t) ; u(t)]$.

$$\dot{\psi}(t) = F \psi(t) + J_c w_c(t). \quad (2.49)$$

$$z(t) = G \psi(t). \quad (2.50)$$

$$\psi(t_k) = H \psi(t_k^-) + J_d w_d[k]. \quad (2.51)$$

Para um sistema em malha aberta cujo sinal de controle é a entrada exógena $w_d[k]$ as matrizes constantes dessas equações de estado estão definidas em (2.52)

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} C_z & D_z \end{bmatrix}, \quad J_c = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_d = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Ao desenvolver a expressão (2.49) em (2.53), nota-se que a derivada do sinal de controle obtida foi zero, Em razão de $u(t) = u[k]$ ser constante para o intervalo de uma amostra. característica comum do uso de sample data para tratar sistemas com DLMI.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} w_c(t). \implies \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\mu(t) + Ew_c(t), \\ \dot{\mu}(t) = 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

A seguir é mostrado o desenvolvimento de (2.50) que denota as mesmas características de um sistema em espaço de estados comum.

$$z(t) = G\psi(t) = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} = Cx(t) + D\mu(t). \quad (2.54)$$

No entanto, em (2.55), que caracteriza a equação de salto vista em (2.51), apresenta aspectos ainda não observados em equações de estados anteriores. Isso decorre do fato de que a expressão da derivada dos estados (2.49), já não é o suficiente para explicar por completo a dinâmica do sistema, considerando que o sinal de controle foi incluído como estado. Portanto é necessária uma expressão que explicita o instante em que o sinal de controle é alterado.

$$\begin{bmatrix} x(t_k) \\ \mu(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_k^-) \\ \mu(t_k^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w_d[k]. \implies \begin{cases} x(t_k) = x(t_k^-), \\ \mu(t_k) = w_d[k]. \end{cases} \quad (2.55)$$

O termo tk^- presente em (2.55) corresponde ao instante imediatamente anterior ao início do período de amostragem, indicando que os estados x não se modificam, ao passo que u recebe um novo valor que se manterá até a próxima amostra.

É válido salientar que, em controles de malha fechada, como por realimentação de estados, os ganhos L seriam aderidos as matrizes H e J_d para que u recebesse um novo ganho a cada amostra.

Com o entendimento da dinâmica dos estados aumentados no sample data. A próxima etapa etapa consiste em aplicá-lo nas equações de Lyapunov.

$$V = \psi^\top P(t) \psi = \begin{bmatrix} x^\top & \mu^\top \end{bmatrix} P(t) \begin{bmatrix} x \\ \mu \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{x\mu} \\ P_{\mu x} & P_{\mu\mu} \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

A matriz de Lyapunov $P(t)$ precisa ter uma dimensão compatível com os estados e controles de tal forma que ao efetuar o produto entre ela e os estados aumentados, determinadas células da matriz, receberão os estados, outras o controle e outras o acoplamento entre estados e controle.

Esta mesma matriz $P(t)$ esta indicada em (2.57) estabelecida para um tempo $t = 0$ e acompanhada de seus complementos de Schur.

$$P_0 = \begin{bmatrix} X_0 & V_0 \\ V_0^\top & \hat{X}_0 \end{bmatrix} \succ 0 \iff \begin{cases} X_0 \succ 0, \\ \hat{X}_0 - V_0^\top X_0^{-1} V_0 \succ 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{X}_0 \succ 0, \\ X_0 - V_0 \hat{X}_0^{-1} V_0^\top \succ 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

Através do que está posto em (2.57) é possível concluir que a solução menos restrita que torna os autovalores de P_0 positivos, ocorre quando $V_0 = 0$, uma vez que qualquer valor positivo para X_0 e $\hat{X}_0$ satisfaz esse requisito. Isso será útil em deduções futuras que utilizará métodos de eliminação de variável para remover V_0 .

Agora, vamos tratar dos requisitos para criação da norma $\mathcal{H}_2$ com LMIs, iniciando pela derivada de Lyapunov (2.58). Que possui aspecto semelhante a (2.38), porem aplicada a matrizes de estados aumentados e com termo diferencial.

$$\dot{P}(t) + F^\top P(t) + P(t)F + G^\top G \prec 0, \quad t \in [0, h]. \quad (2.58)$$

A desigualdade (2.58) garante o decaimento em tempo contínuo entre amostras. No entanto é necessário que a energia do sistema também decaia entre os saltos de uma amostra e outra. Com esse intuito (2.59) é estabelecida.

$$\begin{cases} \psi(t_k) = H \psi(t_k^-), & P_h > H^\top P_0 H \\ \psi(t_k^-)^\top P_h \psi(t_k^-) > \psi(t_k^-)^\top H^\top P_0 H \psi(t_k^-) = \psi(t_k)^\top P_0 \psi(t_k), \\ V(t_k^-) > V(t_k). \end{cases} \quad (2.59)$$

Na primeira linha de (2.59) esta contida a equação de salto semelhante a (2.51), porem sem entradas exógenas, pois estas não são necessárias para a análise de estabilidade. Na mesma linha está $P_h > H^\top P_0 H$, cuja inequação não foi deduzida de uma expressão anterior mas é uma imposição necessária para garantir que a energia armazenada V antes do salto seja maior que no começo do próximo salto, tal como deduzido nas linhas posteriores.

Com esses pressupostos estabelecidos, o objetivo torna-se provar que é possível chegar a mesma função objetivo estabelecida em (2.48), usando DLMIs. Para isso utiliza-se (2.60) que esta baseado no mesmo principio já visto anteriormente em (2.6).

$$P_0 > e^{F^\top h} P_h e^{Fh} + \int_0^h e^{F^\top t} G^\top G e^{Ft} dt. \quad (2.60)$$

Baseando-se na equivalência apresentada em (2.31), substitui-se a integral presente em (2.60) por $G_d^\top G_d$. De mesmo modo, altera-se P_h por $H^\top P_0 H$, resultando em (2.61)

$$\begin{aligned}
P_0 &> e^{F^\top h} H^\top P_0 H e^{Fh} + G_d^\top G_d \\
&= \begin{bmatrix} A_d^\top & 0 \\ B_d^\top & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 & V_0 \\ V_0^\top & \hat{X}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_z^\top \\ D_z^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z & D_z \end{bmatrix}. \\
&= \begin{bmatrix} A_d^\top \\ B_d^\top \end{bmatrix} X_0 \begin{bmatrix} A_d & B_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{zd}^\top \\ D_{zd}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{zd} & D_{zd} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

O desenvolvimento de (2.61) por meio de manipulações algébricas e complementos de Schur resulta em (2.62).

$$\begin{bmatrix} X_0 & V_0 & A_d^\top & C_z^\top \\ V_0^\top & \hat{X}_0 & B_d^\top & D_z^\top \\ A_d & B_d & X_0^{-1} & 0 \\ C_z & D_z & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0. \tag{2.62}$$

Verifica-se que a submatriz principal 2x2 de (2.62) equivale a matriz P_0 . Como já discutido em (2.57), a solução menos restritiva que mantém P_0 definido positivo é retirar V_0 . O método de eliminação consiste em remover a segunda linha e coluna de (2.62) formando a matriz (2.63) e posteriormente a primeira linha e coluna gerando (2.64).

$$\begin{bmatrix} X_0 & A_d^\top & C_z^\top \\ A_d & X_0^{-1} & 0 \\ C_z & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0 \iff \begin{bmatrix} X_0 & A_d^\top \\ A_d & X_0^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_z^\top \\ 0 \end{bmatrix} I^{-1} \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} \succ 0 \iff A_d^\top X_0 A_d - X_0 \prec -C_z^\top C_z. \tag{2.63}$$

A inequação decorrente do complemento de schur da matriz (2.63) é a função de Lyapunov discreta da norma $\mathcal{H}_2$ em (2.48).

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_0 & B_d^\top & D_z^\top \\ B_d & X_0^{-1} & 0 \\ D_z & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0 \iff \begin{bmatrix} \hat{X}_0 & B_d^\top \\ B_d & X_0^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_z^\top \\ 0 \end{bmatrix} I^{-1} \begin{bmatrix} D_z & 0 \end{bmatrix} \succ 0 \iff \hat{X}_0 \succ B_d^\top X_0 B_d + D_z^\top D_z. \tag{2.64}$$

Com a derivada de Lyapunov já encontrada a partir da Matriz anterior resta apenas reproduzir a função objetivo. Cumprindo isso pela determinação de um majorante da norma em (2.65) obtido utilizando as inequações $P_h > H P_0 H$ e $\hat{X}_0 \succ B_d^\top X_0 B_d + D_z^\top D_z$, obtida de (2.64).

Apesar de (2.65) ser um majorante para a verdadeira norma, ao definimos as inequações mencionadas arbitrariamente próximas da igualdade, no limite teríamos uma estimativa que tende ao valor exato.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(J_c^\top P_h J_c\right) + \operatorname{tr}\left(J_d^\top P_0 J_d\right) &> \operatorname{tr}\left(J_c^\top H^\top P_0 H J_c\right) + \operatorname{tr}\left(J_d^\top P_0 J_d\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(E^\top X_0 E\right) + \operatorname{tr}\left(\hat{X}_0\right) \\
&> \operatorname{tr}\left(E^\top X_0 E\right) + \operatorname{tr}\left(B_d^\top X_0 B_d + D_{zd}^\top D_{zd}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} E^\top \\ B_d^\top \end{bmatrix} X_0 \begin{bmatrix} E & B_d \end{bmatrix}\right) + \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ D_{zd}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & D_{zd} \end{bmatrix}\right) \\
&\geq \|H_{sd}(\zeta)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

3 METODOLOGIA DE MODELAGEM

Este capítulo apresenta o desenvolvimento teórico da estratégia de controle utilizada a partir dos conceitos de sample data e DLMI abordados anteriormente, bem como os modelos de pendulo de futura e conversor Boost 3SSC cuja estratégia de controle será aplicada.

3.1 controle SD- $\mathcal{H}_2$

A abordagem proposta será desenvolvida a partir do sistema Sampled Data com controle por realimentação de estados, expresso em (3.1).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew_c(t), & x(0) = 0, \\ z(t) = C_z x(t) + D_z u(t), \\ u(t) = Lx[k] + (E_u + LE_y)w_d[k], & t \in [t_k, t_{k+1}), \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.1)$$

O controle Sample Data em sistemas com DLMI possui a maioria de suas matrizes semelhantes ao da malha aberta apenas com alterações nos parâmetros H e J_d (3.2), responsáveis por integrar a equação de salto.

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & 0 \end{bmatrix}, \quad J_d = \begin{bmatrix} 0 \\ E_u + LE_y \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

As condições gerais para viabilidade e otimização da norma $\mathcal{H}_2$ em sistemas Sample data DLMI, cuja dedução foi demonstrada na seção anterior, são mostradas a seguir.

A inequação (3.3) é a única que possui um componente diferencial $\dot{P}(t)$ dentre essas condições e portanto a única DLMI a ser resolvida. Ela consiste meramente no complemento de schur de (2.58) para adquirir o formato de matriz.

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(t) + F^\top P(t) + P(t)F & G^\top \\ G & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad t \in [0, h). \quad (3.3)$$

Diferente da expressão anterior. O critério (3.4) constitui um problema de implementação, dado que H possui ganho de realimentação de estados L a ser determinado, gerando um produto de variáveis dentro da expressão desfazendo a linearidade.

$$P_h \succ 0, \quad P_h \succ H^\top P_0 H. \quad (3.4)$$

Em (3.5) ocorre o mesmo problema devido a presença do L dentro do vetor J_d . No entanto para este trabalho assume-se $E_y = 0$ implicando em ausencia de entradas exógenas como ruídos nos sensores que medem os estados.

$$\alpha_{2,\text{rob}}^2 = \inf_{P(\cdot)} \left\{ \text{tr} \left(J_c^\top P_h J_c \right) + \text{tr} \left(J_d^\top P_0 J_d \right) : (3.3), (3.4) \right\}. \quad (3.5)$$

Diante das circunstancias apresentada serão abordadas duas maneiras de extinguir as não linearidades em (3.4) e tornar o problema convexo.

Em ambos os métodos será necessário recorrer a substituição $P(t) = Q(t)^{-1}$. Felizmente, para o caso da derivada diferencial de Lyapunov, essa equação já foi resolvida em (2.12). Dada a similaridade desta, com a condição de Lyapunov que usada atualmente, ao realizar as devidas substituições e aplicar o complemento de Schur, obtêm-se (3.6).

$$\begin{bmatrix} -\dot{Q}(t) + Q(t)F^\top + FQ(t) & Q(t)G^\top \\ \star & -I \end{bmatrix} \prec 0, \quad t \in [0, h]. \quad (3.6)$$

Substituindo P nas condições de contorno, tem-se:

$$P_h \succ H^\top P_0 H = I_x \left(\begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^\top Q_0^{-1} \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} \right) I_x^\top, \quad I_x = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Para lidar com o termo dentro dos parenteses em (3.7), foi criada uma variável auxiliar W que majora essa expressão.

$$W^{-1} \succ \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^\top Q_0^{-1} \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.7), multiplicando ambos os lados de cada termo por Q_h e aplicando o complemento de Schur, obteve se a LMI resultante (3.9).

$$\begin{aligned}
Q_h^{-1} \succ I_x W^{-1} I_x^\top &\implies Q_h - Q_h I_x W^{-1} I_x^\top Q_h \succ 0 \\
&\iff \begin{bmatrix} Q_h & Q_h I_x \\ I_x^\top Q_h & W \end{bmatrix} \succ 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Contudo, ainda resta lidar com a expressão criada em (3.8). Isso é feito aplicando complemento de Schur seguido de uma transformação por congruência, conforme (3.10).

$$\begin{aligned}
W^{-1} - \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^\top Q_0^{-1} \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} \succ 0 &\iff \begin{bmatrix} W^{-1} & \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^\top \\ \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} & Q_0 \end{bmatrix} \succ 0 \\
\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{-1} & \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^\top \\ \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} & Q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W & W \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix}^\top \\ \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} W & Q_0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Após o desenvolvimento matemático efetuado em (3.10), ainda resta o produto entre W e L na matriz resultante, cuja solução é a criação de outra variável impondo $K = LW$. Com isso, obtêm-se todas as condições de desempenho $\mathcal{H}_2$ provenientes do primeiro método, apresentadas em (3.11) e (3.12).

$$\begin{bmatrix} Q_h & Q_h \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \\ \star & W \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} W & WK^\top \\ \star & Q_0 \end{bmatrix} \succ 0. \tag{3.11}$$

$$\rho_2^2 = \inf_{Q(\cdot), W, K} \left\{ \text{tr} \left(J_c^\top Q_h^{-1} J_c \right) + \text{tr} \left(J_d^\top Q_0^{-1} J_d \right) : (3.6), (3.11) \right\}. \tag{3.12}$$

O ganho de realimentação é então recuperado impondo $L = KW^{-1}$. Contudo, apesar de ser possível chegar no valor ótimo do desempenho $\mathcal{H}_2$ com esse método, ele tem como desvantagem um maior numero de variáveis e uma condição de contorno relativamente complexa. O que justifica a utilização preferencial do segundo método, demonstrado a seguir.

A partir da condição de contorno (3.13), desenvolve-se a expressão do lado direito que está entre as matrizes I_x .

$$P_h \succ H^\top P_0 H = I_x \begin{bmatrix} I & L^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 & V_0 \\ V_0^\top & \hat{X}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ L \end{bmatrix} I_x^\top. \quad (3.13)$$

Após manipulações algébricas é possível chegar na matriz (3.14). Semelhante ao que foi discutido em (2.57), dentre todos os valores possíveis de L que mantenha a positividade da matriz, a solução menos restrita é $L = -\hat{X}_0^{-1} V_0^\top$ tornando a diagonal secundária da matriz igual a zero.

$$\begin{bmatrix} X_0 - V_0 \hat{X}_0^{-1} V_0^\top & (L + \hat{X}_0^{-1} V_0^\top)^\top \\ L + \hat{X}_0^{-1} V_0^\top & \hat{X}_0^{-1} \end{bmatrix} \succ 0, \quad X_0 - V_0 \hat{X}_0^{-1} V_0^\top + 0 \cdot \hat{X}_0^{-1} \cdot 0 = X_0 - V_0 \hat{X}_0^{-1} V_0^\top. \quad (3.14)$$

Conclui-se, portanto que (3.15) é o menor valor possível para a condição de contorno e que por ventura corresponde ao inverso do primeiro elemento da matriz P_0^{-1} .

$$\begin{aligned} P_h &\succ H^\top P_0 H \\ &= I_x \left(X_0 - V_0 \hat{X}_0^{-1} V_0^\top \right) I_x^\top \\ &= I_x \left(I_x^\top P_0^{-1} I_x \right)^{-1} I_x^\top. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Substituindo $P(t) = Q(t)^{-1}$ e aplicando complemento de Schur chega-se a expressão final para a condição de contorno linearizada (3.16). Desse modo, é possível formar a função objetivo para o problema de otimização sujeito as restrições (3.17).

$$Q_0 \succ 0, \quad I_x^\top (Q_0 - Q_h) I_x \succ 0. \quad (3.16)$$

$$\rho_{2\text{rob}}^2 = \inf_{Q(\cdot)} \left\{ \text{tr} \left(J_c^\top Q_h^{-1} J_c \right) + \text{tr} \left(J_d^\top Q_0^{-1} J_d \right) : (3.6), (3.16) \right\}. \quad (3.17)$$

3.2 Modelo do Pendulo de Furuta

O modelo utilizado para análise e comparação do método proposto com o controlador LQR foi o pêndulo de Furuta (FURUTA *et al.*, 1992) da WheelTec Technologies, ilustrado na Figura 4, cujas matrizes no espaço de estados são dadas por (3.18) e (3.19).



Figura 4 – Modelo físico do pêndulo de Furuta da *Wheeltec Technologies*.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{21} \\ 0 \\ B_{41} \end{bmatrix} u. \quad (3.18)$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} A_{22} &= \frac{K_m K_e (J + ml^2)}{Q_{eq} R}, & A_{23} &= \frac{m^2 l^2 r g}{Q_{eq}}, & A_{42} &= -\frac{m r l K_m K_e}{Q_{eq} R}, \\ A_{43} &= \frac{m g l (I + m r^2)}{Q_{eq}}, & B_{21} &= \frac{K_m (J + m^2)}{Q_{eq} R}, & B_{41} &= \frac{m r l K_m}{Q_{eq} R}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Onde o vetor de estado $x = [\theta \quad \dot{\theta} \quad \alpha \quad \dot{\alpha}]'$ representa os ângulos e velocidades angulares do eixo de rotação vertical e horizontal do pêndulo, respectivamente. J é o momento de inércia do pêndulo, I é o momento de inércia da haste, com ambos em função da massa do pêndulo. Q_{eq} é a quantidade de energia equivalente, que depende de vários parâmetros, conforme mostrado nas equações (3.21), (3.22) e (3.23).

$$J = \frac{1}{3}m \left[\left(\frac{0,135}{2} \right)^2 + (0,018)^2 \right]. \quad (3.21)$$

$$I = \frac{1}{3}m \left[\left(\frac{0,135}{2} \right)^2 + (0,018)^2 \right] + m \left(\frac{0,135}{2} \right)^2. \quad (3.22)$$

$$Q_{eq} = IJ + Iml^2 + Jmr^2. \quad (3.23)$$

Já os valores utilizados em cada um dos parâmetros constantes do modelo são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do sistema físico

Descrição (símbolo)	Valor
Comprimento da haste vertical (l)	0,135 m
Aceleração da gravidade (g)	9,8 m/s ²
Resistência do motor CC (R)	4,286 Ω
Comprimento da haste horizontal (r)	0,156 m
Coef. de inércia mecânica do motor (K_m)	0,1797 N·m/A
Coef. da força eletromotriz - FEM (K_e)	0,2087 V·s/rad

A partir deste modelo, obtêm-se a resposta no tempo do controle da planta, onde, no decorrer da simulação, é aplicado um degrau no valor da massa da haste do pendulo (m), bem como impulsos contínuos e discretos nos canais de perturbação exógenas w_c e w_d do sistema.

Portanto, a estratégia de controle utilizada consiste na aplicação de (3.17) em uma abordagem politópica, cujos vértices correspondem ao modelo da planta nas massas. permitindo obter um ganho de realimentação capaz de controlar a planta adequadamente mesmo com a mudança da massa, além de reduzir a resposta ao impulso proveniente da otimização da norma $\mathcal{H}_2$.

3.3 Modelo do Conversor boost

O conversor boost 3SSC também foi utilizado como modelo com o intuito de comparar a eficiência entre o controlador proposto e o SR-MPC de Alves *et al.* (2022), utilizando a mesma

planta adotada no artigo e mostrada na Figura 5.

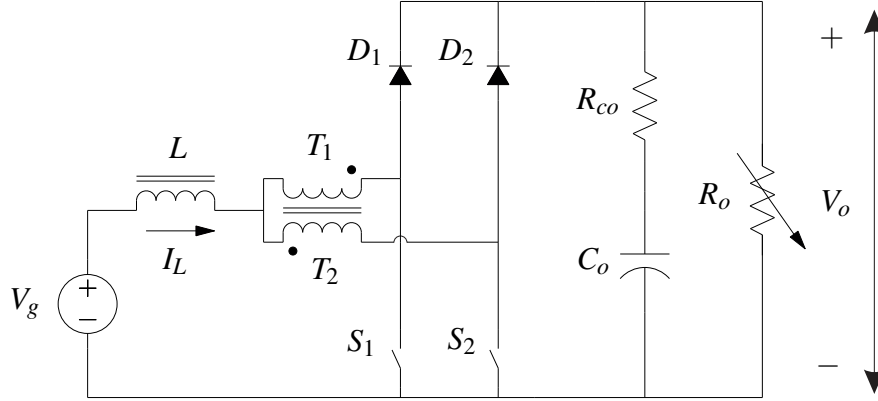


Figura 5 – Conversor boost com célula de comutação de três estados (ALVES *et al.*, 2022).

Considerando o modelo de espaço de estados em tempo discreto dado por $x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k]$ e $y[k] = C_d x[k] + D_d u[k]$ para a implementação dada pelo *benchmark* (ALVES *et al.*, 2022). Já as matrizes contínuas A , B , C e D para o conversor Boost operando em Modo de Condução Contínua (CCM) (MIDDLEBROOK; CUK, 1976; REGO *et al.*, 2018) são definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_L + (1-D_{cycle})(R_{co} \parallel R_o)}{L} & -\frac{(1-D_{cycle})R_o}{L(R_{co} + R_o)} \\ \frac{(1-D_{cycle})R_o}{C_o(R_{co} + R_o)} & -\frac{1}{C_o(R_{co} + R_o)} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{R_{co}}{L} \cdot \frac{(1-D_{cycle})R_o + R_{co}}{R_{co} + R_o} \\ -\frac{R_o}{C_o(R_{co} + R_o)} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

$$C = \left[(1-D_{cycle})(R_{co} \parallel R_o) \cdot \frac{R_o}{R_{co} + R_o} \right]. \quad (3.26)$$

$$D = -V_g \cdot \frac{R_{co} \parallel R_o}{R'}. \quad (3.27)$$

Onde $R' = (1-D_{cycle})^2 R_o + D_{cycle}(1-D_{cycle})(R_{co} \parallel R_o)$ e $R_{co} \parallel R_o = \frac{R_{co} \cdot R_o}{R_{co} + R_o}$.

Os estados do sistema são definidos como $x = [i_L \ v_c]^T$, representando a corrente do indutor (L) e a tensão do capacitor de saída (C_o), respectivamente. A variável D_{cycle} denota o ciclo de trabalho, u é a entrada de controle e V_o é a tensão de saída a ser controlada. Um esquema detalhado do conversor Boost e os parâmetros de entrada adotados podem ser encontrados em

(BASCOPé; BARBI, 2000; COSTA *et al.*, 2017). A Tabela 2 apresenta os parâmetros de implementação do modelo do conversor boost do *benchmark*.

Tabela 2 – Parâmetros do Conversor Boost(ALVES *et al.*, 2022).

Parâmetros	Valores
Tensão de Entrada (V_g)	26 – 36 [V]
Tensão de Saída (V_o)	48 [V]
Ciclo de Trabalho (D_{cycle})	0,25 – 0,46
Frequência de chaveamento (f_s)	22 [kHz]
Indutor de Filtro (L)	36 [μH]
Resistência Indutiva (R_L)	0 [Ω]
Capacitor de saída (C_o)	4.400 [μF]
Resistência série (R_{co})	26,7 [$\mu \Omega$]
Carga (R_o)	2,034 – 6,06 [Ω]
Potência de saída	380 – 1.000 [W]
Passo de amostragem	1 [ms]

A Figura 6 mostra o diagrama de blocos da planta em malha fechada sob controle por amostragem com realimentação integral. Este esquema ilustra a estrutura de realimentação utilizada na simulação, destacando a interação entre o modelo do conversor Boost, a ação integral sobre o erro de rastreamento e o controlador $SD-\mathcal{H}_2$ implementado por meio de ganhos fixos obtidos através da formulação DLMI.

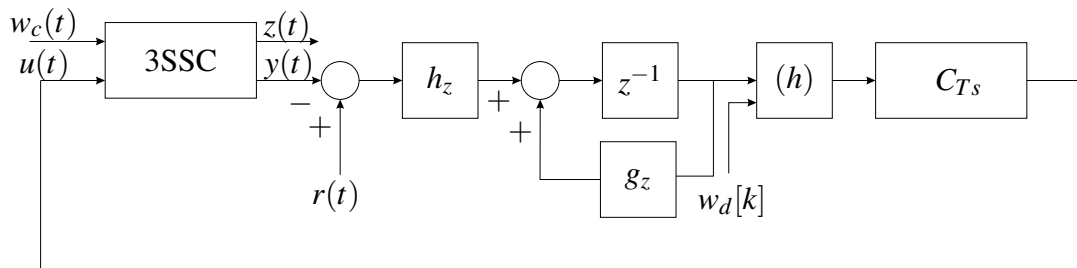


Figura 6 – Diagrama de blocos do conversor Boost com ação integral

Onde h_z e g_z são ganhos que atuam sobre o erro de rastreamento e sobre o sinal integral, respectivamente, C_{Ts} é o controlador projetado e (h) é o período de amostragem.

Para incorporar a ação integral no modelo politópico, o sistema é aumentado com as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}\bar{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -hC_i & g \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i & -hD_{ci} \end{bmatrix}^T, \\ \bar{C}_i &= \begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_c = \begin{bmatrix} E_c \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

$$F_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} \bar{C}_i & D_i \end{bmatrix}.\tag{3.29}$$

Com base na estrutura mostrada na Figura 6, o controlador $SD\text{-}\mathcal{H}_2$ foi projetado utilizando Desigualdades Matriciais Lineares Diferenciais (DLMI), de acordo com o Teorema 4.3 de (GEROMEL, 2023). O sistema consiste em quatro subsistemas derivados do metodo de discretização, ZOH equivalente do conversor Boost sob diferentes condições de operação, com tensões de entrada $V_g \in \{26V, 36V\}$ e potências de saída $P_o \in \{380W, 1000W\}$, formando uma estrutura politópica comutada (ALVES *et al.*, 2022).

4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO E ANÁLISE

Este capítulo apresenta uma análise comparativa entre os controladores $SD\mathcal{H}_2$ propostos para cada uma das plantas e seu respectivo *benchmark*. Apresentando para cada uma delas, um comparativo da resposta no tempo dos estados e do sinal de controle, bem como a comparação dos índices de desempenho ISE, IAE, ITSE e ITAE para cada um deles. A primeira seção abordará os índices de desempenho que serão utilizados nas 2 plantas. A segunda seção irá tratar dos resultados relativos ao controle do pendulo de Furuta e a terceira abordará o controle do conversor boost.

4.1 Índices de Desempenho

Para que a estimação da eficiência de um tipo de controle em relação a outro não fique alheio a uma análise qualitativa dos gráficos que representam o comportamento do sistema, foram utilizados os principais índices de desempenho encontrados na literatura, a fim de avaliar de forma quantitativa o modelo proposto. São eles: a integral do erro absoluto (IAE), a integral do erro ao quadrado (ISE), a integral do erro absoluto ponderado no tempo (ITAE) e a integral do erro ao quadrado ponderado no tempo (ITSE), cujas equações estão representadas respectivamente em (4.1) a (4.4) (ASTROM; HAGGLUND, 2006).

$$IAE = \int_{t_0}^{t_f} |e(t)| dt. \quad (4.1)$$

$$ISE = \int_{t_0}^{t_f} e^2(t) dt. \quad (4.2)$$

$$ITAE = \int_{t_0}^{t_f} t |e(t)| dt. \quad (4.3)$$

$$ITSE = \int_{t_0}^{t_f} t e^2(t) dt. \quad (4.4)$$

Os índices mencionados permitem realizar comparações visando observar quais as melhores estratégias de controle no que diz respeito a desempenho na resposta ao tempo.

Além destes foi utilizado o índice de variação total do sinal de controle (Total Variation, TV), com o intuito de mensurar os esforços de controle dos atuadores na comparação entre o

método proposto e seu respectivo benchmark. A representação deste índice em tempo contínuo esta expressa em (4.5).

$$TV(u) = \int_0^T \left| \frac{du(t)}{dt} \right| dt. \quad (4.5)$$

4.2 Pendulo de Furuta

Utilizando o modelo e proposta abordados na sessão 3.2. Realiza-se a simulação da resposta no tempo utilizando as seguintes considerações:

Os estados iniciais considerados foram $x(0) = [0 \ 0 \ 0,1745 \ 0]'$, cujo valor $0,1745 \text{ rad} \approx 10^\circ$. Considerou-se ainda que a massa da haste do pendulo está sujeita a uma carga de valor igual tal que $m = [\underline{m}, \bar{m}] = [0.14, 0.28]$. Na primeira metade da simulação, o pêndulo opera com a massa natural da haste; na segunda metade, é inserida uma carga de valor igual ao da haste, totalizando o dobro da massa do componente da planta.

Acrescenta-se ainda que, no instante $t = 2s$ (metade do processo), é aplicado um impulso unitário em $w_c = w_d = 1$ com os objetivos de simular o distúrbio causado pelo acoplamento da carga e testar a capacidade de rejeição do distúrbio, aperfeiçoada pela otimização da norma $\mathcal{H}_2$.

Para as demais condições de projeto, adotam-se $E = B_2$, $E_u = 1$, $E_y = 0$, $C_y = [1 \ 1 \ 1 \ 1]'$, $C_z = C$, $D_z = D$, sendo B_2 A Matriz B no ponto de operação em que $m = 0,28[\text{Kg}]$. O tempo de amostragem utilizado foi $h = 0,02$.

O solver usado para a simulação do controlador proposto foi o LMILab (GAHINET *et al.*,), mas também pode ser usado o Yalmip/SeDuMi (LOFBERG, 2004) utilizando como solver o LMILab ou SeDuMi como resolvidores.

Para o critério de otimização do LMILab, considerou-se a tolerância ($TOL = 1 \cdot 10^{-5}$) e número máximo de interações de 800. O número de subamostras para a análise comparativa é de 32 subamostras. Contudo, analisou-se o resultado para uma sequência de 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64 subamostras, sendo as subamostra 1 ineficaz no LMILab. A Tabela 3 apresenta a variação das funções objetivo em que o termo em X indica que o procedimento foi ineficaz.

A Tabela 3 mostra a redução bem sucedida do índice $\mathcal{H}_2$ com o aumento de n_ϕ em quase todas as subamostras. A função objetivo diminui até $n_\phi = 32$ e obtém o valor de $g_2^2 = 0,7209$ para $n_\phi = 64$, sendo $n_\phi = 1$ ineficaz. O ganho SD- $\mathcal{H}_2$ de realimentação de estados adotado foi $L = [-45,6319 \ -11,5323 \ 98,7651 \ 8,8382]$.

Tabela 3 – Variação de g_2^2 em função de n_ϕ .

n_ϕ	1	2	4	8	16	32	64
g_2^2	X	2,6291	0,0969	0,0225	0,0100	0,0233	0,7209

Para o projeto do controlador LQR discreto, considerou-se o ponto de operação com $m = 0,140[Kg]$ o tempo de amostragem $h = 0,02s$ e as matrizes de ponderação $Q_r = diag(50, 25, 50, 10)$ e $R_r = 1$. Com o vetor de ganho LQR dado por:

$$K_r = [-1,6349 \quad -1,7563 \quad 26,8000 \quad 2,3682]. \quad (4.6)$$

A implementação considerou um modelo discreto, cujas matrizes A e B (3.18) variam com aproximação por um Segurador de Ordem Zero (*Zero Order Hold*) Equivalente de acordo com o valor de m , ilustrado no terceiro gráfico da Figura 7, a cada passo k discreto.

A figura 7 indica que os ângulos do pêndulo utilizando o LQR tiveram uma estabilização inicial mais lenta, comparada ao controlador proposto, além disso, no instante de alteração de massa e aplicação de impulso o SD- $\mathcal{H}_2$ apresentou uma maior capacidade de rejeição de distúrbio e menor tempo de estabilização atestando a sua eficiência.

Já o sinal de controle $u[k]$ apresentou maior amplitude e variação no controlador proposto durante a estabilização inicial; no entanto, no momento em que a massa variou, obteve-se uma amplitude muito maior no sinal de controle LQR para se adequar ao ajuste do novo ponto de operação.

Esses resultados se refletem nos valores dos índices de desempenho apresentados na Tabela 4, onde o controlador proposto demonstrou menores valores em todos os índices associados a eficiência dos estados da planta, apesar da variação do sinal de controle TV ter sido maior no SD- $\mathcal{H}_2$, devido o esforço de controle na estabilização inicial do pendulo.

Tabela 4 – Índices de desempenho do exemplo do Pendulo de Furuta.

Controle	IAE	ISE	ITAE	ITSE	TV
SD- $\mathcal{H}_2$	0,0319	0,0034	0,0069	0,0004	82,8715
LQR	0,3669	0,0478	0,5761	0,0603	60,0596

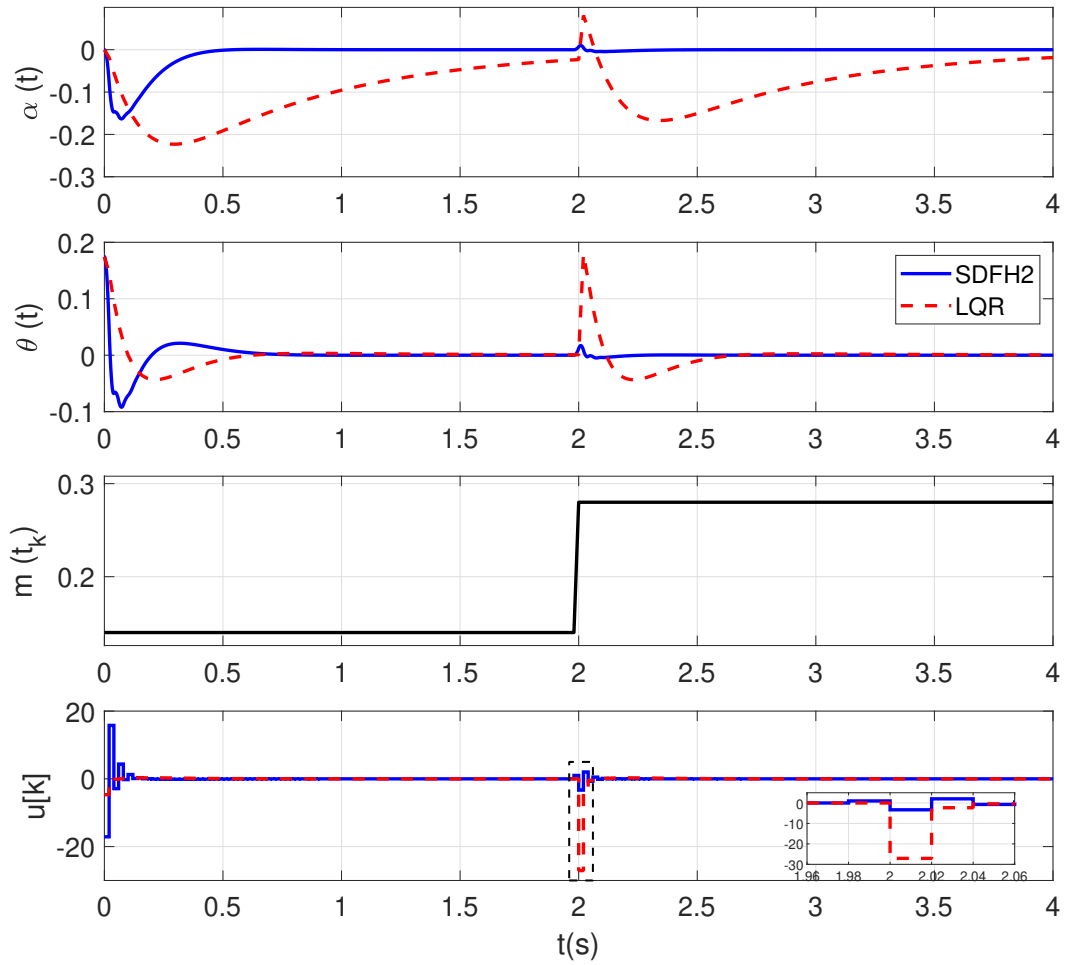


Figura 7 – Resposta no tempo Pêndulo de Furuta

4.3 Conversor boost

Com base nas ideias propostas na sessão 3.3. O modelo politópico com ação integral proposto, usado na simulação possui as seguintes características:

O integrador foi introduzido por meio de um servomecanismo com $(g, h) = (1, 5)$, resultando em um modelo aumentado com três estados. O problema de otimização foi resolvido considerando um período de amostragem de $T_s = 1$ ms, subdividido em $N = 5 \rightarrow \eta = \frac{h}{2^{n_\phi}}$ intervalos de $\eta = 0,0002$ s. A matriz de entrada E foi modelada como a média dos quatro subsistemas.

A simulação mostrou convergência após 600 iterações, resultando no índice de desempenho ótimo $\mathcal{J}_{\mathcal{H}_2}^2 = 4,1452 \times 10^6$.

O ganho de realimentação de estados foi $K = [-0,0007 \quad 0,0026 \quad 0,0059]$, onde os dois primeiros coeficientes correspondem à corrente do indutor e à tensão do capacitor, e o terceiro

ao estado do integrador. A entrada de controle é implementada com saturação em $u_{\max} = 0,5$ para simular os limites de um controlador real e estabelecer a mesma condição que Alves *et al.* (2022) usou como referência.

A Figura 8 mostra os estados do sistema (corrente do indutor i_L e tensão do capacitor v_C) para os 2 controladores, mostrando picos de correntes semelhantes, mas um pouco maiores por parte do controle proposto, e picos de tensão menores com o método SD- $\mathcal{H}_2$.

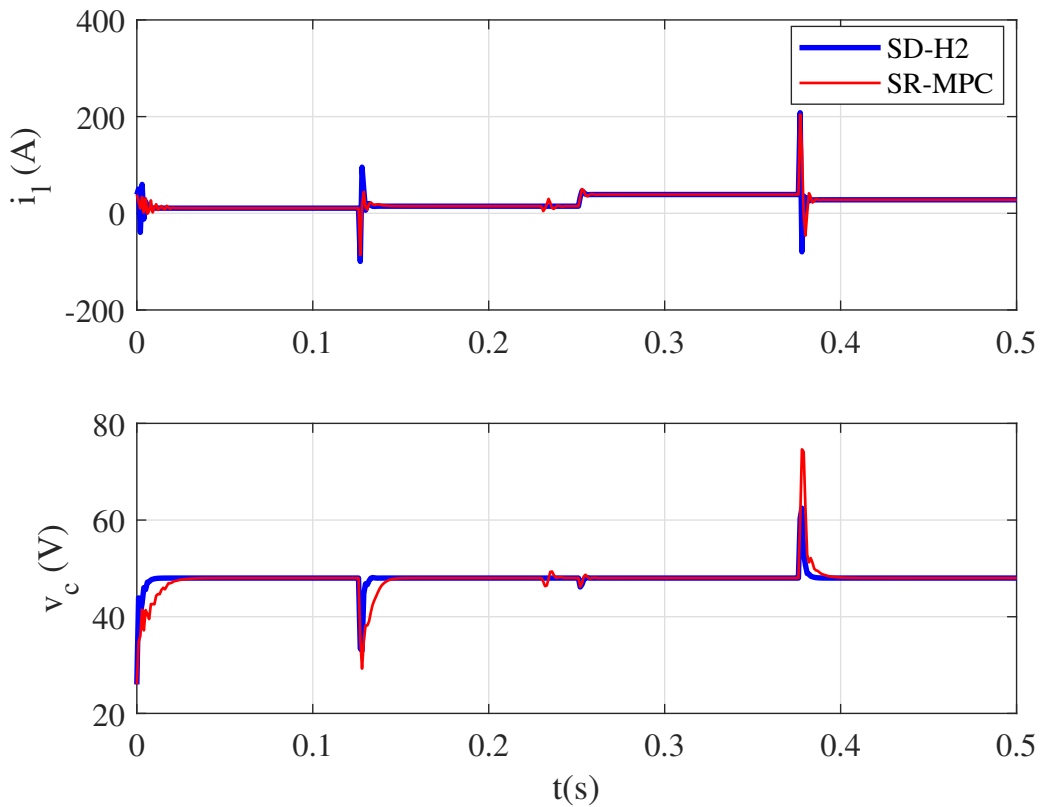


Figura 8 – Corrente no indutor e tensão no capacitor

A Figura 9 mostra uma análise comparativa das tensões de saída obtidas pelo método proposto e pelo SR-MPC apresentado em (ALVES *et al.*, 2022). É possível observar que o SD-H2, em azul, apresenta uma resposta melhor quando comparado ao SR-MPC, em vermelho, o que reforça a eficácia do método apresentado em relação ao benchmark. Os Gráficos 2 e 3 da Figura 9 ilustra os pontos em que ocorre variações na tensão de entrada V_g e na potência de carga P_o utilizadas para emular perturbações do mundo real. Apesar dessas variações, o controlador SD- $\mathcal{H}_2$ manteve um desempenho robusto em todos os cenários testados.

No quarto gráfico da Figura 9 há um comparativo do sinal de controle $u(k)$ para os 2 controladores, já convertido no ciclo de trabalho do acionamento das chaves de comutação

(Duty Cycle). Como observado, o sinal de controle permanece dentro dos limites impostos e exibe transições suaves consistentes com a comutação do subsistema.

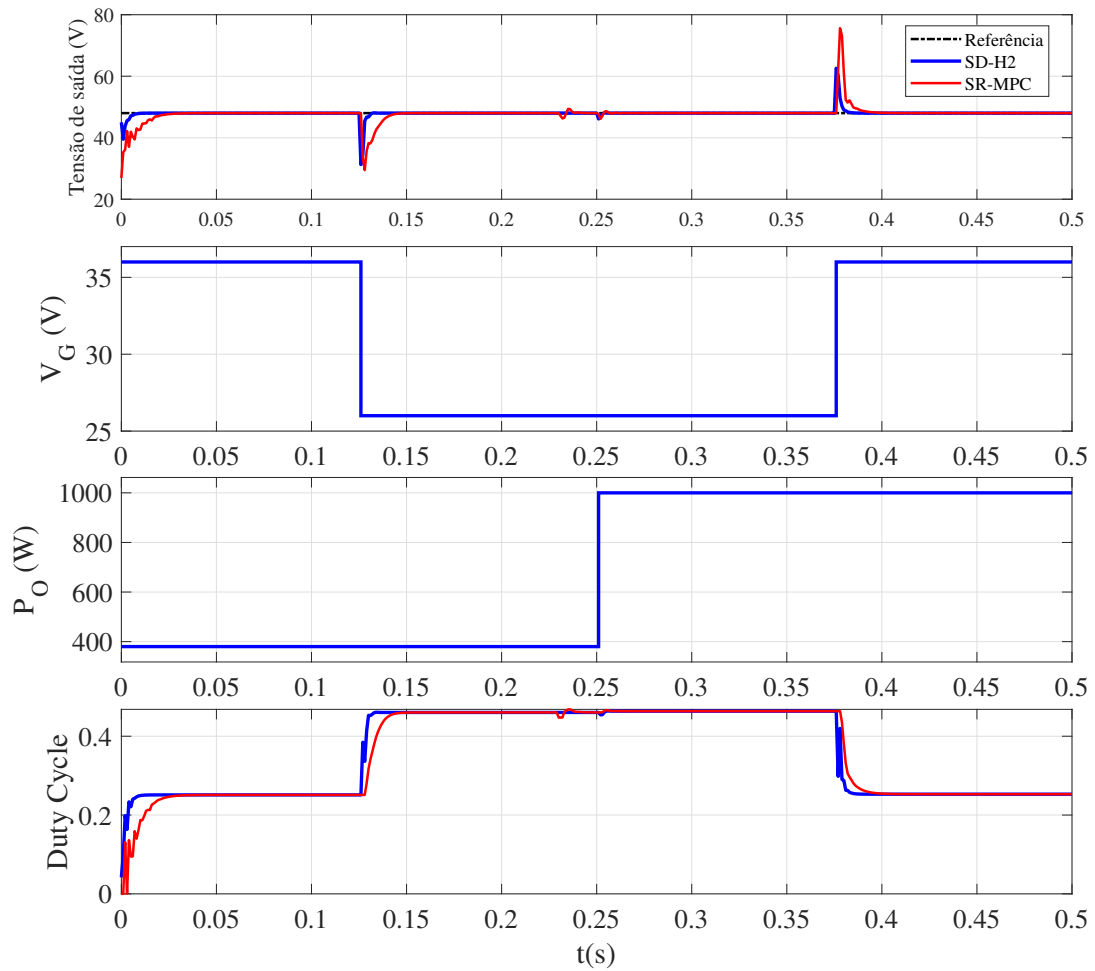


Figura 9 – Resposta no tempo conversor boost

Esses resultados também se refletem nos índices de desempenho apresentados na Tabela 5, onde o controlador proposto demonstrou valores inferiores em todos os índices, dado que o $SD-\mathcal{H}_2$ não só teve picos de tensão de saída menores como retornou mais rapidamente a tensão de referência durante os períodos de variação de parâmetros. Comprovando sua eficiência em comparação ao SR-MPC.

Tabela 5 – Índices de desempenho do exemplo do conversor Boost

Controle	IAE	ISE	ITAE	ITSE	TV
$SD-\mathcal{H}_2$	0,0977	0,9809	0,0194	0,2102	1.0834
SR-MPC	0,3397	3,9446	0,0580	0,8452	1.1084

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi realizado o controle por realimentação de estados de sistemas *sampled data* pela otimização do índice $\mathcal{H}_\infty$ utilizando inequações Matriciais Lineares Diferenciais. O método proposto foi aplicado no modelo do pendulo de Furuta, com variação de carga e aplicação de distúrbios. Também foi realizado o controle de um conversor Boost utilizando uma abordagem politópica do modelo proposto, combinado com a aplicação de uma ação integral.

Cada uma das plantas controladas teve seu desempenho garantido, apresentando maior eficiência frente a seus respectivos modelos de *Benchmark*. Onde apresentaram melhores respostas no tempo para os seus estados, atestados por meio de análises de gráficos e avaliação de diversos índices de desempenho.

Os resultados obtidos mostraram que a abordagem proposta se estabelece como uma técnica eficiente, capaz de lidar com a dinâmica continua dos modelos das plantas e a natureza discretizada dos sistemas digitais. Apresentando robustez a distúrbios e interferências e a capacidade de lidar com incertezas de parâmetros.

Porém, é necessário ressaltar que a abordagem *Sample-Data* proposta por (GEROMEL, 2023) utilizando o LMILab, requer cuidados de projeto, pois o aumento do numero de subamostras, gera uma elevação significativa no numero de LMIs que causam mais dificuldade ao solver em encontrar soluções cada vez mais próximas do valor ótimo quando esse limite se mantêm marginalmente próximo. Tal como visto na Tabela 3 onde não foi possível obter uma otimização maior do índice para $n_\phi = 64$.

Para trabalhos futuros, propõe-se integrar outras abordagens a esse modelo, como D-Estabilidade DLMI, abordagem Fuzzy-DLMI e sistemas com atraso de transporte.

REFERÊNCIAS

- AGRAWAL, A.; VERSCHUEREN, R.; DIAMOND, S.; BOYD, S. A rewriting system for convex optimization problems. **Journal of Control and Decision**, v. 5, n. 1, p. 42–60, 2018.
- ALVES, R. M.; FIORAVANTI, A. R.; SOUZA, M. Robust state feedback sampled-data control of uncertain linear systems. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, 2024.
- ALVES, R. R.; CARVALHO, L.; COSTA, M. V.; REIS, F. E. Sr-mpc via lmi approach applied to 3ssc boost converter voltage control. In: **Congresso Brasileiro de Automática-CBA**. [S.l.: s.n.], 2022. v. 3, n. 1.
- ASTROM, K. J.; HAGGLUND, T. **Advanced PID Control**. Research Triangle Park: ISA, 2006.
- BASCOPÉ, G.; BARBI, I. Generation of a family of non-isolated dc-dc pwm converters using new three-state switching cells. **2000 IEEE 31st Annual Power Electronics Specialists Conference. Conference Proceedings (Cat. No.00CH37018)**, v. 2, p. 858–863 vol.2, 2000.
- BEHROUZ, H.; MOHAMMADZAMAN, I.; MOHAMMADI, A. Robust static output feedback h_2/h_∞ control synthesis with pole placement constraints: An lmi approach. **International Journal of Control, Automation and Systems**, 2021.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex Optimization**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004. ISBN 9780521833783.
- CHOŁODOWICZ, E.; ORŁOWSKI, P. Minimax optimization of a fractional-order controller for the furuta pendulum uncertain system with an output disturbance. In: **International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)**. [S.l.: s.n.], 2020.
- COSTA, M.; REIS, F.; CAMPOS, J.; NOGUEIRA, F.; ALMEIDA, O. Robust mpc-lmi controller applied to three state switching cell boost converter. **Eletrônica de Potência**, v. 22, n. 1, p. 81–90, 2017.
- DIAMOND, S.; BOYD, S. CVXPY: A Python-embedded modeling language for convex optimization. **Journal of Machine Learning Research**, v. 17, n. 83, p. 1–5, 2016.
- DREEF, H. J.; DONKERS, M. C. F. h_∞ and h_2 optimal sampled-data controller synthesis: A hybrid systems approach with mixed discrete/continuous specifications. **Automatica**, 2021.
- ESMAEILI, J. S.; BAŞÇI, A. Design and implementation of lmi-based h_2 control for vertical nonlinear coupled-tank system. **International Journal of System Dynamics Applications (IJSDA)**, 2021.
- FKIRIN, M.; GOWALY, Z. M.; ELSHEIKH, E. A. Dynamic controller design for maximum power point tracking control for solar energy systems. **Technologies (2227-7080)**, v. 13, n. 2, 2025.
- FURUTA, K.; YAMAKITA, M.; KOBAYASHI, S. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering**, SAGE Publications, v. 206, n. 4, p. 263–269, nov. 1992. ISSN 2041-3041. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1243/PIME_PROC_1992_206_341_02>.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. **LMI Control Toolbox for Use with MATLAB: User's Guide**. Version 1. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.

GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A.; CHILALI, M. The lmi control toolbox. In: **Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control**. IEEE. (CDC-94, v. 3), p. 2038–2041. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/CDC.1994.411440>>.

GEROMEL, J. C. Sampled-data model predictive control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 67, n. 5, p. 2466–2472, 2021.

GEROMEL, J. C. **Differential Linear Matrix Inequalities: In Sampled-Data Systems Filtering and Control**. Springer Nature Switzerland, 2023. ISBN 9783031297540. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-29754-0>>.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P.; BOLZERN, P. Differential linear matrix inequality in optimal sampled-data control. **Automatica**, Elsevier BV, v. 100, p. 289–298, fev. 2019. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2018.11.021>>.

GOEBEL, R.; SANFELICE, R. G.; TEEL, A. R. Hybrid dynamical systems. **IEEE control systems magazine**, IEEE, v. 29, n. 2, p. 28–93, 2009.

ICHIKAWA, A.; KATAYAMA, H. **Linear time varying systems and sampled-data systems**. [S.l.]: Springer, 2001.

KAHANI, R.; JAMIL, M.; IQBAL, M. T. Direct model reference adaptive control of a boost converter for voltage regulation in microgrids. **Energies**, v. 15, n. 14, 2022. ISSN 1996-1073. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1996-1073/15/14/5080>>.

KHARRAT, M.; ABDERRAHIM, S.; ALLOUCHE, M. Robust h2-optimal ts fuzzy controller design for a wind energy conversion system. **Advances in Materials Science and Engineering**, Wiley Online Library, v. 2022, n. 1, p. 5428109, 2022.

LI, Y.; MA, D. Robust sampled-data pid controller design for regulation control of nonlinear systems with output delay. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, 2023.

LOFBERG, J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 284–289.

LOUREIRO, P. H. da S.; FAISTEL, T. M.; TOEBE, A.; LUZ, P. C.; ANDRADE, A. M. Conversor boost com células a capacitor chaveado e indutor acoplado. **Eletrônica de Potência**, v. 26, n. 3, p. 279–289, 2021.

MANSOUR, A. M.; ARAFA, O. M.; MAREI, M. I.; ABDELSALAM, I.; AZIZ, G. A. A.; SATTAR, A. A. Hardware-in-the-loop testing of seamless interactions of multi-purpose grid-tied pv inverter based on sft-pll control strategy. **IEEE Access**, v. 9, p. 123465–123483, 2021.

MIDDLEBROOK, R. D.; CUK, S. A general unified approach to modelling switching-converter power stages. In: **1976 IEEE Power Electronics Specialists Conference**. IEEE, 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/pesc.1976.7072895>>.

PHAM, D.-B.; DAO, Q.-T.; BUI, N.-T.; NGUYEN, T.-V.-A. Robust-optimal control of rotary inverted pendulum through fuzzy descriptor-based techniques. **Scientific Reports**, v. 14, 2024.

PUJOL-VAZQUEZ, G.; MOBAYEN, S.; ACHO, L. Robust control design to the furuta system under time delay measurement feedback and exogenous-based perturbation. **Mathematics**, v. 8, n. 12, p. 2131, 2020.

REGO, R. C. B.; COSTA, M. V. S.; REIS, F. E. U.; BASCOPÉ, R. P. T. Análise e simulação do controlador mpc-aw-lmi aplicado ao conversor ccte operando em condições de saturação no sinal de controle. In: **XXII Congresso Brasileiro de Automática**. [S.l.: s.n.], 2018.

SILVA, D. A. M. d.; COSTA, E. d. S.; NASCIMENTO, A. C. d.; ARAÚJO, R. d. B. Estudo comparativo dos controladores preditivos gmv e gpc aplicados ao conversor boost. **SEPOC 2021**, Brasil, 2021.

STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Informa UK Limited, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, jan. 1999. ISSN 1029-4937. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/10556789908805766>>.

VALE, C. G. V.; ALVES, R. R.; COSTA, M. V.; PEREIRA, R. D.; AGUIAR, V. de P.; REGO, R. C.; FILHO, O. C. da S. Sd - $\mathcal{H}_2$ controller via dlmi applied to a boost converter with integral action. In: IEEE. **2025 Brazilian Power Electronics Conference (COBEP)**. [S.l.], 2025. p. 1–5.

VIZI, M. B.; STÉPÁN, G. Stability of the furuta pendulum with delayed digital controller. In: **IFAC-PapersOnLine**. [S.l.: s.n.], 2021.

YADAV, I.; SACHAN, S.; MAURYA, S. K.; DEB, S. Effective battery charging system using step voltage and step duty size-based mppt controller for solar pv system. **Energy Reports**, v. 10, p. 744–755, 2023. ISSN 2352-4847.

ZHANG, L.; DIXON, R. Robust nonminimal state feedback control for a furuta pendulum with parametric modeling errors. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, 2021.