



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
BACHARELADO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

DALISON EMANUEL DA SILVA VIEIRA

A TRANSFORMADA DE LAPLACE APLICADA A CIRCUITOS ELÉTRICOS

MOSSORÓ

2024

DALISON EMANUEL DA SILVA VIEIRA

A TRANSFORMADA DE LAPLACE APLICADA A CIRCUITOS ELÉTRICOS

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Profa. Dra. Kelyane Barboza de Abreu

MOSSORÓ

2024

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

V656t Vieira, Dalison Emanuel .
A transformada de Laplace aplicada a circuitos
elétricos / Dalison Emanuel Vieira. - 2024.
54 f. : il.

Orientador: Kelyane Abreu.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2024.

1. Equações diferenciais. 2. transformada de
Laplace. 3. Circuitos elétricos. I. Abreu,
Kelyane, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Caraúbas
Bibliotecária: Dalvanira Brito Rodrigues
CRB: 15/700

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

DALISON EMANUEL DA SILVA VIEIRA

A TRANSFORMADA DE LAPLACE APLICADA NA ENGENHARIA ELÉTRICA

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 16/10/2024

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Kelyane Barboza de Abreu (UFERSA)
Presidente

Prof. Dr. Antonival Lopes do Nascimento Filho (UFERSA)
Membro Examinador

Profa. Dra. Dayane Santos de Lira (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe por estar sempre ao meu lado e ao meu pai pelo apoio.

Agradeço a minha orientadora por ter tirado do seu tempo para me ajudar, ensinar, ter paciência e me alertar sobre meus erros em todo desenvolvimento da pesquisa, agradeço por ter sido uma ótima orientadora.

Agradeço a Banca Examinadora por tirar do seu tempo e disponibilidade para avaliar e contribuir com a pesquisa com as suas observações.

RESUMO

Para a análise de circuitos elétricos, existem diversas abordagens. Uma dessas é a utilização de equações diferenciais (ED), as quais permitem a análise matemática de vários sistemas. No entanto, o método abordado neste trabalho é a Transformada de Laplace, que traz vantagens na forma de analisar e calcular um circuito elétrico. Isso se deve ao fato de que ela possibilita a conversão de uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência, além de permitir o caminho inverso. A pesquisa permitiu reunir algumas das propriedades da Transformada de Laplace, além de conceitos básicos sobre circuitos elétricos e os componentes que os compõem. O resultado obtido comprovou a eficácia do método a partir de exemplos, demonstrando sua aplicação prática.

Palavras-chave: Equações diferenciais, transformada de Laplace, Circuitos elétricos.

ABSTRACT

For electrical circuit analysis, there are several approaches. One of them is the use of differential equations (DEs), which allow the mathematical analysis of various systems. However, the method addressed in this work is the Laplace Transform, which brings advantages in analyzing and calculating an electrical circuit. This is due to the fact that it enables the conversion of a function from the time domain to the frequency domain, as well as allowing the reverse process. The research gathered some properties of the Laplace Transform, as well as basic concepts about electrical circuits and their components. The result obtained proved the effectiveness of the method through examples, demonstrating its practical application.

Keywords: Differential equations, Laplace Transform, Electrical circuits.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	–	Pierre Simon Laplace	10
Figura 2	–	Gráfico da função	33
Figura 3	–	Resistor	41
Figura 4	–	Capacitor.....	42
Figura 5	–	Indutor	42
Figura 6	–	Circuito RC	43
Figura 7	–	Circuito RL.....	44
Figura 8	–	Circuito RLC.....	45
Figura 9	–	Exemplo de circuito RC.....	46
Figura 10	–	Exemplo de circuito RL.....	47
Figura 11	–	Exemplo de circuito RLC.....	51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	14
2.1	Definições básicas	14
2.2	Equações diferenciais lineares de ordem superior	16
2.3	Equações lineares com coeficientes constantes.....	21
2.4	Alguns métodos de resolução de equações diferenciais	22
3	A TRANSFORMADA DE LAPLACE	25
3.1	A Transformada de Laplace e sua transformada inversa	25
3.2	Teoremas da translação e derivada de uma transformada	30
3.2.1	Função degrau unitário	31
3.3	Transformada de Laplace das derivadas	34
4	CIRCUITOS ELÉTRICOS.....	38
4.1	Definição e tipos de circuitos	38
4.1.1	Circuitos LC, RC e LRC	42
4.2	Aplicação das transformadas de Laplace na resolução de circuitos elétricos	44
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
6	REFERÊNCIAS	53

1. INTRODUÇÃO

Pierre-Simon Laplace foi um francês que viveu de 1749 a 1827. Ele nasceu na Normandia, na pequena cidade de Beaumont-em-Auge, na França. Laplace cresceu em uma família humilde, com seu pai trabalhando como agricultor, mas desde cedo demonstrou grande habilidade para a matemática.

Figura 1: Pierre Simon Laplace



Fonte: BBC.com.uk

Sua carreira começou como aluno em Beaumont e, ao longo dos anos, ele progrediu até se tornar professor assistente na escola local. Posteriormente, Laplace teve a oportunidade de se destacar na capital francesa, Paris, quando seu artigo sobre os fundamentos da mecânica clássica chamou a atenção de d'Alembert, que escreveu uma carta de recomendação para a escola militar em Paris. Segundo Eves,

Quando Laplace, ainda bastante jovem, chegou a Paris à procura de um lugar no magistério, submeteu as cartas de recomendação que levava, escritas por pessoas importantes, ad'Alembert. Como esse expediente não surtisse nenhum efeito, ele escreveu uma carta a d'Alembert, onde expôs brilhantemente os princípios gerais da mecânica. Foi o quanto bastou e d'Alembert lhe respondeu: “Senhor, como percebeu, quase não dei atenção às suas cartas de recomendação. Elas, porém, não eram necessárias; o senhor soube se apresentar muito melhor”. Poucos dias depois, Laplace era designado professor de matemática da Escola Militar de Paris. (Eves, p 486, 2011)

Durante um período de 17 anos, ele produziu suas obras mais significativas no campo da astronomia, demonstrando a estabilidade de corpos planetários e investigando inclinações planetárias. Essas contribuições desencadearam uma série de ideias notáveis e avanços inovadores. Laplace também escreveu numerosos artigos, abrangendo desde o cálculo integral até as diferenças finitas, passando por problemas complexos na astronomia. Essas contribuições consolidaram sua posição e elevaram seu nome como um dos principais cientistas do seu tempo.

Laplace teve um impacto em profundos campos diversos, incluindo física, estatística e astronomia. Segundo Andreotti,

No começo de 1810, Laplace voltou sua atenção para a probabilidade, tomando como tópico fundamental a teoria dos erros (...) é neste período que Laplace desenvolve um método de solução integral para equações diferenciais: a Transformada de Laplace, cuja teoria, aliás, o consagrou na área de cálculo devido à praticidade oferecida na resolução de equações diferenciais. (Andreotti, 2023)

Apesar de carregar o nome Laplace, existem muitas especulações sobre quem foi de fato o criador da transformada de Laplace. Segundo Deakin (1981, apud Tonidandel e Araújo, 2012),

...sua história é uma verdadeira saga de quase 200 anos, recheada de inovações empolgantes, disputas e mal-entendidos, que remonta aos primeiros trabalhos do matemático suíço *Leonhard Euler* (1707-1783) em 1737 e *Laplace* em 1774, passando por nomes como *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) e o conterrâneo de *Laplace*, *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857), já no século XIX.

Dentro das engenharias, a transformada de Laplace é bastante utilizada na resolução de sistemas lineares invariantes no tempo, tais como circuitos elétricos, osciladores harmônicos e sistemas mecânicos. Sua grande vantagem é possibilitar a resolução de equações diferenciais por meios de equações polinomiais, onde as derivações e integrações transformam-se em multiplicações e divisões. O método da transformada de Laplace dentro do nosso contexto, costuma transformar as equações diferenciais no domínio do tempo (t) em equações algébricas no domínio da frequência (s).

Segundo ZILL & CULLEN (2001), a Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ para $t \geq 0$ é definida por

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

desde que a integral convirja. Quando a integral imprópria converge, o resultado é uma função de s , denotada por $F(s)$.

A dificuldade em resolver problemas complexos em sistemas elétricos, nos quais atuam forças de descontinuidade em circuitos, é um desafio comum. Muitas vezes, os sistemas elétricos estão em constante evolução devido às flutuações na demanda de energia, à adição ou

remoção de cargas e até mesmo às falhas em componentes do sistema, que podem resultar em curtos-circuitos devido a respostas transitórias.

Considere o exemplo (Boyce, Diprima, Maede, p.386, 2020) que representa a carga em um capacitor em um circuito elétrico simples em que a voltagem é um pulso unitário para $5 \leq t \leq 20$:

$$2y'' + y' + 2y = g(t),$$

em que

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 5 \\ 1, & 5 \leq t < 20 \\ 0, & t \geq 20 \end{cases}$$

com condições iniciais $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Podemos fazer a seguinte pergunta: Existe algum método de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) que minimize as dificuldades causadas em problemas envolvendo sistemas elétricos sujeitos a forças externas descontínuas e impulsos, como no caso acima?

Existem vários métodos para encontrarmos soluções para equações diferenciais ordinárias lineares. Alguns mais específicos, outros mais gerais, alguns mais práticos, outros com passos e detalhes. Para responder ao nosso problema anterior, considere a equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(t), \tag{1}$$

em que p, q, g são funções (contínuas) em um intervalo dado I .

O método dos coeficientes a determinar é uma técnica utilizada para encontrar uma solução particular de uma equação diferencial ordinária não homogênea. Ele é aplicável a equações lineares de qualquer ordem e afirma que a solução geral da equação diferencial (1) é da forma

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + Y(t)$$

onde y_1, y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada e Y é alguma solução particular da equação não homogênea. No entanto, esse método apesar de eficaz ele parte da hipótese de $g(t)$ ser uma função contínua, além de precisar pertencer a um grupo específico de funções (polinomiais, exponenciais e seno ou cosseno). Um segundo

método de resolução de equações diferenciais lineares é o método de variação de parâmetros. Esse método é mais geral que o anterior, mas ainda exige que a função $g(t)$ seja contínua. Ambos os métodos se estendem para equações diferenciais de ordem n .

Sendo assim, paramos no impasse da descontinuidade e nesse caso, o método mais interessante é o método da transformada de Laplace. Além de otimizar os passos, uma vez que não precisamos encontrar separadamente a solução geral - solução homogênea + solução particular – esse método também é válido onde $g(t)$ não é necessariamente uma função contínua, como é o caso do exemplo apresentado na seção anterior, cuja função $g(t)$ não é uma função contínua. Além disso, o método da Transformada de Laplace traz vantagens também na simplificação de circuitos elétricos. Isso se deve ao fato de que ela possibilita a conversão de uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência, além de permitir o caminho inverso.

O objetivo geral do nosso trabalho será descrever o método de transformação de Laplace na resolução de equações diferenciais ordinárias que modelam os circuitos elétricos. Os objetivos específicos foram pensados da seguinte forma: Definir a transformada de Laplace e suas propriedades; descrever o método de transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares ordinárias; definir os tipos de circuitos elétricos e seus principais componentes; aplicar o método de transformada de Laplace na resolução de problemas envolvendo circuitos elétricos.

Realizaremos no nosso trabalho uma revisão bibliográfica, com o objetivo de analisar de forma crítica fontes já existentes, como livros e artigos, que tratam do tema em questão. Como base para a nossa pesquisa escolhemos dois livros clássicos no estudo das equações diferenciais, [3] e [8]. Para a parte que estuda a teoria de circuitos elétricos consideramos analisar os livros [1] e [4]. Acreditamos que a revisão bibliográfica será de grande importância para contribuição no acervo bibliográfico, uma vez que sempre podemos falar sobre o mesmo tema com uma abordagem diferente, além de fortalecer parte do conhecimento adquirido ao longo do curso.

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Neste capítulo iremos apresentar as equações diferenciais ordinárias, suas propriedades e principais teoremas. As principais referências utilizadas neste capítulo foram os livros do Zill & Cullen, (2001) e Boyce; DiPrima & Meade (2020).

2.1 Definições básicas

Segundo ZILL & CULLEN (2001), uma EDO é uma expressão matemática que contém derivadas de uma função desconhecida em relação a uma ou mais variáveis independentes. Uma equação diferencial descreve a ligação entre uma função que queremos encontrar e suas derivadas, indicando como a função se transforma quando as variáveis independentes sofrem mudanças. Essas EDOS são essenciais em vários campos da ciência e da engenharia, já que possibilitam a representação de diversos fenômenos naturais e processos em constante mudança, dessa forma, uma equação diferencial é uma poderosa ferramenta que auxilia na compreensão e previsão do funcionamento de sistemas complexos, com base nas informações disponíveis sobre as variações que ocorrem.

As equações diferenciais podem ser classificadas de três maneiras distintas: por ordem, por tipo ou por linearidade.

Classificação por tipo

Esta classificação distingue as equações diferenciais de acordo com a natureza das derivadas envolvidas. Uma equação é designada como equação diferencial ordinária (EDO) quando envolve exclusivamente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente. Por outro lado, se a equação envolve derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes, ela é denominada equação diferencial parcial (EDP).

Exemplo 2.1 (ZILL & CULLEN, 2001)

Observe as seguintes EDO's:

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1$$

$$(y - x)dx + 4xdy = 0$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Exemplo 2.2 (ZILL & CULLEN, 2001)

Observe as seguintes EDP's:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Classificação pela ordem

A derivada de maior ordem na equação vai determinar a ordem da EDO, se é de primeira, segunda, terceira, e assim por diante e à medida que a ordem vai aumentando o seu grau de complexidade também aumenta, ou seja, a partir da ordem, pode-se determinar a quantidade de informação necessária para descrever de forma completa o comportamento do sistema representado pela equação.

Exemplos 2.3 (ZILL & CULLEN, 2001)

- a) No primeiro exemplo se olharmos a derivada de maior ordem de y que é (y'') teremos que a equação é denominada como de segunda ordem.

$$(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$$

- b) Nesse exemplo podemos observar que a sua derivada de maior ordem é $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ então ela pode ser denominada como uma equação de terceira ordem

$$x \frac{d^3y}{dx^3} - 2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$$

A classificação das equações diferenciais quanto à linearidade divide-se em duas categorias: lineares e não lineares. Em equações lineares, a função desconhecida e suas derivadas aparecem de maneira linear, o que implica que produtos e potências devem ser iguais,

envolvendo exclusivamente a função desconhecida ou suas derivadas. Por outro lado, em equações não lineares, a função desconhecida ou suas derivadas surgem de forma não linear, podendo incluir produtos e potências de diferentes valores. Para ser uma equação linear existem duas propriedades a serem observadas:

- a variável dependente y e todas as suas derivadas são de primeiro grau, isto é a potência de cada termo envolvendo y é um;
- cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

Exemplo 2.4 (ZILL & CULLEN, 2001)

a) A equação

$$x^3 y^{(4)} - x^2 y''' + 4xy' - 3y = 0$$

é linear pois toda potência de (y) tem potência igual a 1 e as derivadas dependem apenas do x que aparecem para multiplicar o y

b) A equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = \text{sen } y$$

não é linear pelo motivo de que do $\text{sen } y$ não é uma função que depende de x ou dependa de uma constante.

Qualquer função f definida em algum intervalo I , que quando substituída na equação diferencial reduz a equação a uma identidade, é chamada de *solução* para equação no intervalo

2.2 Equações diferenciais lineares de ordem superior

Uma equação é de ordem superior quando a derivada de uma função for de ordem maior do que um. Para entendermos melhor essa parte, vamos definir o problema de valor inicial (PVI).

Para uma equação diferencial n -ésima ordem o problema.

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

sujeita a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Em que $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ são constantes arbitrárias é chamado de um *Problema de Valor Inicial*. Os valores específicos $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ são chamadas de *condições iniciais*. Procuramos uma solução em algum intervalo, I contendo x_0 .

Uma equação diferencial linear de segunda ordem, quando acompanhada de condições iniciais, pode determinar uma solução única, conforme garantido pelo Teorema de Existência e Unicidade, enunciado a seguir. As condições iniciais não apenas permitem a determinação da solução, mas também asseguram sua unicidade, o que é essencial para a confiabilidade dos modelos matemáticos em diversas áreas de aplicação.

No caso das equações lineares de segunda ordem nós temos o seguinte PVI:

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

O Teorema de Existência e Unicidade é fundamental no estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Ele demonstra que, ao respeitar certas condições, a equação diferencial possui uma solução única. Este teorema é crucial porque assegura que os modelos matemáticos descritos por equações diferenciais produzem resultados consistentes e previsíveis, garantindo a confiabilidade das previsões e análises baseadas nesses modelos.

Teorema 2.1 (Existência de única solução) Sejam $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ e $g(x)$ contínuas em um intervalo I com $a_n(x) \neq 0$ para todo x neste intervalo. Se $x = x_0$ é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o problema de valor inicial (1).

Exemplo 2.5 (ZILL & CULLEN, 2001)

A equação

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0, \quad y'(1) = 0, y''(1) = 0$$

possui a solução trivial $y = 0$. Como a equação é de terceira ordem e linear com coeficientes constantes, segue-se que todas as condições do Teorema de existência e unicidade são satisfeitas. Logo $y = 0$ é a única solução em qualquer intervalo contendo $x = 1$.

Para obter as soluções para as equações lineares existe algumas condições e princípios.

Definimos as *equações homogêneas* como aquelas cujos termos independentes são iguais a zero, ou seja, uma equação é chamada de homogênea quando

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

onde $g(x) = 0$. Quando $g(x) \neq 0$ é denominada como *não homogênea*.

Exemplo 2.6 (ZILL & CULLEN, 2001)

Observe a equação abaixo:

$$2y'' + 3y' - 5y = 0$$

Pelas condições já vistas essa é uma equação diferencial linear de segunda ordem e homogênea.

Veremos adiante o Teorema do Princípio da Superposição que afirma que a soma de duas ou mais soluções para uma equação linear homogênea também é uma solução.

Teorema 2.2 (Princípio da Superposição - ZILL & CULLEN, 2001) Sejam $y_1, y_2, \dots, y_k$ soluções para a equação diferencial linear de n -ésima ordem homogênea em um intervalo I . Então, a combinação linear.

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x),$$

em que os $c_i, i = 1, 2, \dots, k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

Como consequência do Princípio da superposição, obtemos que múltiplos de solução para equações diferenciais lineares também serão soluções.

Exemplo 2.7 (ZILL & CULLEN, 2001)

As funções

$$y_1 = x^2 \text{ e } y_2 = x^2 \ln x$$

São ambas soluções para a equação homogênea de terceira ordem

$$x^3 y''' - 2xy' + 4y = 0$$

no intervalo $(0, \infty)$. Pelo princípio da superposição a combinação linear

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

é também uma solução para equação no intervalo.

O nosso objetivo é construir um conjunto de soluções linearmente independentes para uma equação diferencial linear. Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é

linearmente dependente em um intervalo I se existem constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ não todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x no intervalo. Caso contrário, o conjunto será chamado *linearmente independente*. O próximo teorema mostra uma condição suficiente para a independência linear de n funções em um intervalo.

Teorema 2.3 (Critério para independência linear de funções - ZILL & CULLEN, 2001)

Suponha que $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sejam diferenciáveis pelo menos $n - 1$ vezes. Se o determinante

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I , então as funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ serão linearmente independentes do intervalo.

O determinante acima é chamado de *Wronskiano* das funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ e nesse sentido, podemos enunciar um novo teorema olhando para um conjunto de soluções para uma equação diferencial linear.

Teorema 2.4 (Critério para independência linear de soluções - ZILL & CULLEN, 2001)

Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluções para equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I . Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se, e somente se, $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ para todo x no intervalo.

O teorema acima assegura que a independência linear das soluções constitui a solução geral de uma equação diferencial linear de ordem n . Se encontrarmos n soluções $y_1, \dots, y_n$ que sejam linearmente independentes, a solução geral da equação

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0 \quad (2)$$

será a combinação linear dessas soluções.

Em situações práticas, as condições iniciais determinam valores específicos para as constantes $(c_1, c_2, \dots, c_n)$. A independência linear das soluções garante que essas constantes possam ser ajustadas de forma única para atender a quaisquer condições iniciais dadas, permitindo que a solução geral seja completamente adaptada ao problema em questão.

Um *conjunto fundamental de soluções* qualquer $y_1, y_2, \dots, y_n$ de n soluções linearmente independentes para equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I é chamado de conjunto fundamental de soluções no intervalo.

Teorema 2.5 (ZILL & CULLEN, 2001) Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n -ésima de ordem em um intervalo I . Então, toda solução $Y(x)$ para (2) é uma combinação linear das n soluções $y_1, y_2, \dots, y_n$, ou seja, podemos encontrar as constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$, tais que

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

Teorema 2.4 (Existência de um conjunto fundamental - ZILL & CULLEN, 2001) Existe um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I .

Uma vez que qualquer solução para (2) é dada por uma combinação linear de funções de um conjunto fundamental de soluções, estamos prontos para definir a solução geral de uma equação homogênea. Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n$, soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I . A *solução geral* para a equação no intervalo é definida por

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

em que os $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ são constantes arbitrárias.

Exemplo 2.8 (ZILL & CULLEN, 2001) Considere a equação de segunda ordem $y'' - 9y = 0$ na qual podemos observar que ela possui duas soluções

$$y_1 = e^{3x} \text{ e } y_2 = e^{-3x}.$$

Uma vez que

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

para todo valor de x, y_1, y_2 onde por serem linearmente independente, ou seja, se o valor de x pertence a esse intervalo $(-\infty, \infty)$ então y_1, y_2 formam um conjunto fundamental de soluções. A solução geral para a equação diferencial no intervalo é

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

É possível generalizar essa teoria para o caso de equações diferenciais lineares não-homogêneas.

2.3 Equações lineares com coeficientes constantes

Equações lineares de coeficientes constantes são um tipo específico de equações diferenciais em que os coeficientes que multiplicam as derivadas da função desconhecida são constantes, ou seja, não variam com a variável independente. Isso significa que os coeficientes permanecem fixos, independentemente do valor da variável independente. Uma vez que a equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0,$$

com a constante, possui solução exponencial $y = c_1 e^{-ax}$, é natural determinar se soluções exponenciais existem em $(-\infty, \infty)$ para equações de ordem maior como

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (3)$$

onde $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ são coeficientes constantes.

Todas as soluções para (3) são compostas por funções exponenciais ou podem ser constituídas a partir de uma função exponencial. Considerando a equação de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (4)$$

e supondo $y = e^{mx}$, onde o m é uma constante solução de (4), temos $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$ e substituindo na equação acima, obtemos

$$m^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \text{ ou } e^{mx}(am^2 + bm + c = 0).$$

Uma vez que e^{mx} nunca se anula para os valores reais de x então só existe uma forma dessa função exponencial satisfazer a equação diferencial, será escolhendo m de tal forma que ela seja raiz da equação quadrática, chamada equação característica, que é dada por:

$$am^2 + bm + c = 0$$

A partir das raízes da equação auxiliar, existem três possíveis casos, na qual cada uma demonstra um tipo específico de solução, e esses casos como será mostrado na tabela trata-se de raízes distintas $m_1 \neq m_2$, raízes iguais $m_1 = m_2$ e raízes complexas conjugadas $m = \alpha \pm i\beta$

$ay'' + by' + cy = 0$	Soluções
Raízes distintas m_1, m_2	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
Raízes iguais $m_1 = m_2$	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_1 x}$
Raízes complexas $m = \alpha \pm i\beta$	$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$

Observe abaixo um exemplo cujas raízes da equação auxiliar são distintas e reais.

Exemplo 2.9 (ZILL & CULLEN, 2001)

Dada a equação

$$2y'' - 5y' - 3y = 0,$$

sua equação auxiliar será dada por $2m^2 - 5m - 3 = 0$ cujas raízes são $m_1 = -\frac{1}{2}$ e $m_2 = 3$.

Nesse caso, a solução da equação diferencial será

$$y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{3x}.$$

2.4 Alguns métodos de resolução de equações diferenciais

Um dos métodos para encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear não-homogênea, chama-se *método de coeficientes indeterminados*, seguimos um processo estruturado. O primeiro passo é determinar a solução complementar y_c , que resolve a equação homogênea associada (onde o termo não-homogêneo é zero). Em seguida, encontramos uma solução particular y_p da equação não-homogênea. A solução geral da equação diferencial não-homogênea é então dada pela soma da solução complementar e da solução particular, ou seja:

$$y = y_c + y_p$$

Essa combinação garante que todas as possíveis soluções do sistema sejam capturadas, levando em consideração tanto a estrutura da equação homogênea quanto o termo não-homogêneo. É importante ressaltar que y_c e y_p são funções linearmente independentes.

Esse método é muito útil quando estamos lidando com equações diferenciais lineares

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

onde $g(x)$ é uma combinação linear de funções do tipo

$$k \text{ (constante)}, x^n, x^n e^{\alpha x}, x^n e^{\alpha x} \cos(\beta x) \text{ e } x^n e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Vejamos um exemplo, cuja parte não homogênea é uma função exponencial.

Exemplo 2.10 (ZILL & CULLEN, 2001) Encontre a solução particular para

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^x.$$

Sabemos que a derivação e^x não produz novas funções. Logo, procedendo como antes, podemos simplesmente supor a solução particular da forma

$$y_p = Ae^x$$

Mas, neste caso, a substituição dessa expressão na equação diferencial conduz a afirmação contraditória

$$0 = 8e^x$$

Neste caso, a escolha de y_p foi equivocada. Ao analisarmos a função complementar

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$$

observamos que nossa escolha Ae^x já se encontra presente em y_c . Isso significa que e^x é uma solução para a equação diferencial homogênea associada, e um múltiplo Ae^x quando substituído na equação diferencial necessariamente anula essa identicamente.

Então tome $y_p = Axe^x$. Usando

$$y_p' = Axe^x + Ae^x \text{ e } y_p'' = Axe^x + 2Ae^x \text{ temos}$$

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = Axe^x + 2Ae^x - 5Axe^x - 5Ae^x + 4Axe^x = 8e^x \text{ ou } -3Ae^x = 8e^x$$

desta última equação vemos que o valor de A é agora determinado por $A = -8/3$

Portanto,

$$y_p = -\frac{8}{3}xe^x$$

É a solução encontrada.

Um outro método utilizando para obtermos solução de equações lineares não-homogêneas é o método de *variação dos parâmetros*. É um método versátil que pode ser aplicado a qualquer equação diferencial linear, independentemente da ordem ou da forma do termo não homogêneo. Este método é especialmente valioso em situações onde o método dos coeficientes indeterminados não é aplicável, oferecendo uma alternativa eficaz para encontrar soluções particulares (para detalhes ver [3] e [8]). De maneira geral, tanto o método de coeficientes a determinar, quanto o método de variação de parâmetros apresentam limitações. O primeiro, apesar de eficaz ele parte da hipótese de $g(x)$ ser uma função contínua, além de precisar pertencer a um grupo específico de funções (polinomiais, exponenciais e seno ou cosseno). O segundo método de resolução de equações diferenciais lineares, método de variação de parâmetros é mais geral que o anterior, mas ainda exige que a função $g(x)$ seja contínua. Ambos os métodos se estendem para equações diferenciais de ordem superior.

Sendo assim, paramos no impasse da descontinuidade e nesse caso, o método mais interessante é o método da transformada de Laplace. Além de otimizar os passos, uma vez que não precisamos encontrar separadamente a solução geral - solução homogênea + solução particular – esse método também é válido onde $g(x)$ não é necessariamente uma função contínua.

3. A TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace é uma ferramenta matemática extremamente valiosa, especialmente na resolução de equações diferenciais lineares que definem condições iniciais no domínio do tempo. Usando tabelas de transformação, equações diferenciais complexas podem ser convertidas em equações algébricas, simplificando bastante o processo de cálculo. Este capítulo apresentará a Transformada de Laplace, definições e propriedades gerais, bem como seus principais teoremas. Adicionalmente, discutiremos teoremas relacionados à transformada de Laplace aplicada a circuitos elétricos, que ajudarão a resolver equações nesta área específica. As principais referências utilizadas neste capítulo foram os livros do Zill & Cullen, (2001) e Boyce; DiPrima & Meade (2020).

3.1 A Transformada de Laplace e sua transformada inversa

No cálculo diferencial e integral observamos que tanto o operador derivação quanto integração transformam uma função em outra. Por exemplo, considerando $f(x) = x^2$, uma função quadrática, sua derivada será $f'(x) = 2x$, uma função linear. Se a integração for indefinida usando o mesmo exemplo $f(x) = x^2$ seu resultado é $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$, ou seja, uma família de cúbicas. Por outro lado, se considerarmos a integral definida, teríamos como resultado uma constante, onde será utilizado os limites de 0 e 4, para exemplificar, $\int_0^4 x^2 dx = 16$. Uma grande vantagem da derivação e integração é a sua linearidade. Essa afirmação se traduz nas seguintes expressões:

1. $\frac{d}{dx}[af(x) + \beta g(x)] = \alpha \frac{d}{dx}f(x) + \beta \frac{d}{dx}g(x)$
2. $\int[af(x) + \beta g(x)]dx = a \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$
3. $\int_a^b[af(x) + \beta g(x)]dx = a \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

onde existem as derivadas e integrais e α e β são constantes.

Se $f(x, y)$ for uma função de duas variáveis, então uma integral definida por f em relação a uma das suas variáveis, ou seja, se integramos em relação a x e deixando o y como fixo podemos definir a função dependendo apenas de y , então acabamos definindo uma função na outra variável. Por exemplo, temos que

$$\int_1^2 2xy^2 dx = 3y^2$$

onde o y foi considerado como uma constante em relação a x . Assim, a integral definida por

$$\int_a^b K(s, t)f(t)dt$$

transforma uma função $f(t)$ em uma função na variável s . O nosso objetivo é estudar transformadas integrais desse último tipo, onde tem o intervalo de integração é $(0, \infty)$.

Se $f(t)$ estiver definida para $t \geq 0$, então a integral impropria

$$\int_a^{+\infty} K(s, t)f(t)dt$$

é definida por um limite

$$\int_a^{+\infty} K(s, t)f(t)dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b K(s, t)f(t)dt .$$

Quando o limite de uma integral existe, podemos considerar que ela é convergente, o que significa que o seu valor é finito e pode ser determinado dentro de um intervalo específico. Nesse caso, a integral tem uma solução definida. Por outro lado, quando esse limite da integral não existe, é classificado como divergente o que diz que a integral não possui um valor finito, e por causa disso não pode ser calculado da mesma maneira, e esse limite só irá existir em alguns casos particulares de s . A escolha de $k(s, t) = e^{-st}$ faz com que uma transformada integral de grande importância surja.

Definição 3.1 (Transformada de Laplace) Seja f uma função definida por $t \geq 0$, então a integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

é chamada de transformada de Laplace da função $f(t)$, desde que a integral convirja. Quando a integral imprópria converge, o resultado é uma função de s , $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Usaremos as letras maiúsculas para se referir a Transformada de Laplace e letra minúscula para a função a ser transformada. Por exemplo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s), \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

Exemplo 3.2 (ZILL & CULLEN, 2001) Calcule $\mathcal{L}\{1\}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(1)dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Esse resultado é certo desde que $s > 0$, já que seu expoente $-sb$ é negativo e $e^{-sb} \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow \infty$, quando $s < 0$, a integral não existe.

Exemplo 3.3 (ZILL & CULLEN, 2001) Utilizando a definição da Transformada de Laplace, calcule $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-3t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-3t} dt \\ \mathcal{L}\{e^{-3t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-(s+3)t} dt \\ &= \left. \frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s+3}, \quad s > -3\end{aligned}$$

Esse resultado se dá pelo fato de que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+3)t} = 0$ para $s+3 > 0$ ou $s > -3$.

Dada duas funções, $f(t)$, $g(t)$, definidas para $t \geq 0$, e α, β constantes, vamos verificar que a Transformada de Laplace é uma transformação linear. De fato, segue do fato da integral ser um operador linear,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s)\end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}\{\alpha f(t)\} = \alpha F(s)$ e $\mathcal{L}\{\beta g(t)\} = \beta G(s)$. Assim,

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Uma pergunta que poderíamos nos fazer é se toda função admite uma Transformada de Laplace. Por exemplo, existe a Transformada de $\mathcal{L}\{1/t\}$ e $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$? Veremos adiante um resultado que nos dá condições suficientes para a existência dessas duas funções da

Transformada de Laplace. Antes veremos duas definições importantes para compreendermos melhor este resultado.

A função f é continua por partes em $(0, \infty)$ se em qualquer intervalo de $0 \leq a \leq t \leq b$, existir um número finito de descontinuidade, e sua descontinuidade é de limites laterais. Resumidamente a função não pode crescer muito rápido pois a integral não vai funcionar e a integral precisa convergir, ou seja, a integral ter resultados finitos para alguns números de s . Por outro lado, dizemos que uma função é de ordem exponencial se existem números $c, M > 0$ e $T > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \text{ para todo } t > T.$$

Teorema 3.1 (Condições suficientes para a existência de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ - ZILL & CULLEN, 2001) Seja $f(t)$ uma função continua por partes no intervalo $(0, \infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$ então, sua Transformada de Laplace existe para todo $s > c$.

Teorema 3.2 (Transformada de Laplace de funções elementares)

$$\text{a) } \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\text{b) } \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{c) } \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\text{d) } \mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$$

$$\text{e) } \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$

$$\text{f) } \mathcal{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2-k^2}$$

$$\text{g) } \mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$$

$$\text{h) } t^n e^{at} = \left\{ \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \right\}$$

Dado o operador Transformada de Laplace, será que existe um operador inverso? Veremos que sim, que este operador é uma maneira de reconstruir a função original, ou seja podemos considerar $F(s)$ como uma Transformada de Laplace de uma função $f(t)$, expressa matematicamente $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Neste caso, a função original $f(t)$ é conhecida como *Transformada de Laplace inversa* de $F(s)$. Ou seja

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

De maneira análoga ao teorema anterior, considere o seguinte teorema:

Teorema 3.3 (Transformada de Laplace inversa de funções elementares)

- a) $1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$
- b) $t^n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$
- c) $\{e^{at}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$
- d) $\{\text{sen } kt\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}$
- e) $\{\cos kt\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}$
- f) $\{\sinh kt\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\}$
- g) $\{\cosh kt\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}$
- h) $t^n e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\}$

A Transformada de Laplace inversa também é uma transformada linear, isto é, para constantes α e β

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Em que F e G são as transformadas de algumas funções f e g .

Exemplo 3.4 (ZILL & CULLEN, 2001) Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$

Se observamos a letra (b) do teorema acima vemos que devemos ter $n = 4$ para o s ser elevado 5. Assim, multiplicando e dividindo por $4!$, obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24} t^4$$

Exemplo 3.5 (ZILL & CULLEN, 2001) Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\}$

Nesse exemplo não é possível aplicar diretamente o teorema. A fração pode ser reescrita como uma soma de duas frações

$$\frac{3s+5}{s^2+7} = \frac{3s}{s^2+7} + \frac{5}{s^2+7}.$$

Pela linearidade da transformada inversa e pelo teorema observando as letras (e) e (d) e resolvendo separadamente, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+7}\right\} + \frac{5}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+7}\right\} = \\ &= 3\cos\sqrt{7}t + \frac{5}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}t.\end{aligned}$$

A Transformada de Laplace inversa de uma função $F(s)$ pode não ser única.

3.2 Teoremas da translação e derivada de uma transformada

Nem sempre será possível usar a definição da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

de forma direta. Neste caso, utilizaremos algumas ferramentas para facilitar o cálculo da transformada.

Teorema 3.4 (Primeiro Teorema da Translação - ZILL & CULLEN, 2001) Se a é um número real, então

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

em que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Exemplo 3.6 (ZILL & CULLEN, 2001) Calcule utilizando o primeiro teorema de translação a transformada $\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$.

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\} = \mathcal{L}\{\cos 4t\}_{s \rightarrow s+2}$$

Como $a = -2$ então $s - a = s - 2 = s + 2$

$$= \frac{s}{s^2 + 16} \Big|_{s \rightarrow s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 16}.$$

Teorema 3.5 (Forma inversa do Primeiro Teorema de Translação - ZILL & CULLEN, 2001) A forma inversa do teorema anterior pode ser escrita

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$$

onde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$

Esse teorema é o inverso do anterior, na qual iremos partir do domínio da frequência e retornar ao domínio do tempo. Nesse contexto, graças à linearidade e à capacidade de converter equações diferenciais no tempo em equações algébricas no domínio da frequência, a solução do problema se torna mais simples.

Exemplo 3.7 (ZILL & CULLEN, 2001) Calcule $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+6s+11} \right\}$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+3)^2+2} \right\} \\
 & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3-3}{(s+3)^2+2} \right\} \\
 & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{(s+3)^2+2} - \frac{3}{(s+3)^2+2} \right\} \\
 & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+3}{(s+3)^2+2} \right\} - 3\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+3)^2+2} \right\} \\
 & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+2} \right\}_{x \rightarrow s+3} - \frac{3}{\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{s^2+2} \right\}_{x \rightarrow s+3} \\
 & = e^{-3t} \cos \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-3t} \sin \sqrt{2}t
 \end{aligned}$$

3.2.1 Função degrau unitário

A função degrau unitário é uma função matemática frequentemente utilizada em modelos de problemas com comando de "ligar" ou "desligar" muito comum na engenharia elétrica. Ela define uma mudança abrupta de valor em um determinado tempo, representando situações em que uma variável passa de um estado para outro. Um exemplo é uma força externa agindo sobre um sistema mecânico ou uma voltagem impressa em um circuito que pode ser desligada após um período de tempo.

Definição 3.2 (Função degrau unitário) A função $u(t-a)$ é definida por

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}.$$

Note que a função degrau está definida somente para $t \geq 0$, o que não é um problema no nosso caso, uma vez que a Transformada de Laplace está definida somente neste intervalo.

A função degrau unitário pode ser utilizada para reescrever funções definidas por partes de uma forma compacta. Por exemplo, a função $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases}$$

pode ser escrita como

$$f(t) = g(t) - g(t)u(t - a) + h(t)u(t - a)$$

Exemplo 3.8 (ZILL & CULLEN, 2001) A voltagem em um circuito é dada por

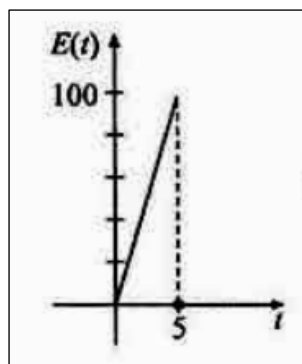
$$E(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5. \end{cases}$$

Esboce o gráfico de $E(t)$ e expresse $E(t)$ em termos de funções degrau unitário.

O gráfico dessa função definida por partes está representado abaixo. Agora podemos reescrever da forma por partes para a forma compactada com $g(t) = 20t$ e $h(t) = 0$, desse modo, obtemos

$$E(t) = 20t - 20tu(t - 5)$$

Figura 2: gráfico da função



Fonte: Zill & Cullen, 2001

O próximo teorema, conhecido como o Segundo Teorema da Translação, demonstra que, quando $F(s)$ é multiplicado por uma função exponencial adequada, a transformada inversa desse produto resulta em uma função transladada.

Teorema 3.6 (Segundo Teorema da Translação - ZILL & CULLEN, 2001) Se a for uma constante positiva, então

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

em que $f(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Como caso particular do teorema anterior, temos a transformada da função unitária quando $a = 0$ e $f = 1$. Na qual é dada por

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}.$$

Além, a referência [1] faz uma releitura do primeiro teorema de translação utilizando a função degrau. Para os autores,

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)u(t)\} = F(s+a).$$

Utilizaremos esse resultando em um dos nossos exemplos no capítulo 4.

Exemplo 3.9 (ZILL & CULLEN, 2001) Calcule $\mathcal{L}\{f(t-2)^2u(t-2)\}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-2)^2u(t-2)\} &= e^{2s}\mathcal{L}\{t^3\} \\ &= e^{-2s}\frac{3!}{s^4} \\ &= \frac{6}{s^4}e^{-2s}\end{aligned}$$

Assim como no primeiro teorema, esse também tem sua forma inversa.

Teorema 3.7 (Forma inversa do Segundo Teorema da Translação - ZILL & CULLEN, 2001)

$$f(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$$

em que $a > 0$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Exemplo 3.10 (ZILL & CULLEN, 2001) Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\}$

Verificamos que $a = \frac{\pi}{2}$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \frac{1}{3}\sin 3t$, logo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\} &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}_{t \rightarrow t-\pi/2} u\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\sin 3\left(t-\frac{\pi}{2}\right) u\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\cos 3t u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Teorema 3.8 (Derivada de transformadas - ZILL & CULLEN, 2001) Para $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

em que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Esse teorema relaciona a transformada de Laplace de uma função com sua transformada da derivada no domínio do tempo em termos algébricos no domínio de s .

Exemplo 3.11 (ZILL & CULLEN, 2001) Calcule $\mathcal{L}\{(te^{3t})\}$.

$$\mathcal{L}\{(te^{3t})\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-3} \right) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

3.3 Transformada de Laplace das derivadas

O maior objetivo desse trabalho é utilizar a Transformada de Laplace para resolver certos tipos de equações diferenciais. O teorema a seguir nos apresenta o cálculo da transformada quando estamos trabalhando com derivadas de funções.

Teorema 3.9 (Transformada de uma derivada - ZILL & CULLEN, 2001) Se $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ forem contínuas em $(0, \infty)$, de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $(0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

em que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Em particular, se $n = 1$ e $n = 2$, temos

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

e

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Como $\mathcal{L}\{y^n(t)\}$, $n > 1$ depende diretamente da função $y(t)$ e de suas derivadas $n - 1$ no ponto $t = 0$ e esses termos são cruciais, pois incorporam as condições iniciais diretamente

na equação transformada, facilitando a análise e a solução do problema. Como visto, para problemas lineares de valor inicial, a transformada de Laplace é eficaz para resolvê-las, uma vez que ela transforma uma equação diferencial em uma equação algébrica na função transformada $Y(s)$. Considere a equação diferencial linear não homogênea

$$a_n y^n(t) + a_{n-1} y^{n-1} \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

em que $a_i, i = 0, \dots, n$ e $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ são constantes. Pela propriedade de linearidade da transformada de Laplace, podemos escrever,

$$a_n \mathcal{L}\{y^n\} + a_{n-1} \mathcal{L}\{y^{n-1}\} + \dots + a_1 \mathcal{L}\{y'\} + a_0 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

E pelo teorema 3.9, temos

$$a_n [s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1} [s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \dots$$

$$+ a_0 Y(s) = G(s)$$

Ou

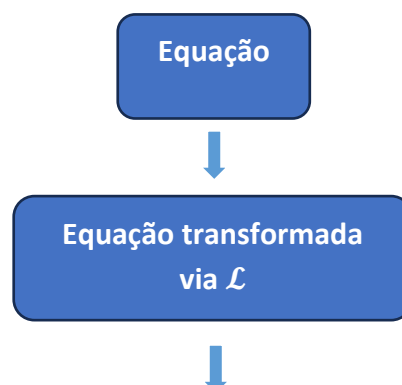
$$[a_n s^n + a_n - 1 s^{n-1} + \dots + a_0] Y(s)$$

$$= a_n [s^{n-1} y_0 + \dots + y_0^{(n-1)}] + a_{n-1} [s^{n-2} y_0 + \dots + y_0^{(2)}] + \dots G(s)$$

em que $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Explicitando $Y(s)$ na última equação. Encontramos $y(t)$ através da transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}.$$

O método de Transformada de Laplace pode ser compreendido da seguinte forma:



Resolvemos a equação transformada por meio de manipulação algébrica $F(s)$



Voltamos para a solução da equação original via $\mathcal{L}^{-1}$

Exemplo 3.12 (ZILL & CULLEN, 2001) Resolva $\frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}$, $y(0) = 1$.

O primeiro passo é resolver a transformada de cada membro da equação diferencial dada

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\}.$$

Então $\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$ e $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$.

Resolvendo

$$sY(s) - 1 - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}.$$

Obtemos

$$\frac{s-1}{(s-2)(s-3)}.$$

E usando frações parciais a expressão acima pode ser escrita como

$$\frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}.$$

Agora vamos multiplicar ambos os lados pelo seu denominador em comum $(s-2)(s-3)$,

$$s-1 = A(s-3) = B(s-2).$$

Multiplicando os termos e depois agrupando temos

$$s-1 = (A+B)s - (3A+2B)$$

Igualando os termos constantes e igualando a s

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=-1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações temos

$$A = -1$$

$$B = 2$$

o que implica $s-1 = A(s-3) + B(s-2)$.

Fazendo $s = 2$ e $s = 3$ na última equação concluímos $A = -1$ e $B = 2$, respectivamente, consequentemente

$$Y(s) = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}.$$

Então

$$y(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}.$$

Usando a Transformada inversa $\{e^{at}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$ obtemos

$$y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}.$$

Exemplo 3.13 (ZILL & CULLEN, 2001) Resolva

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$$

Temos:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\}$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) = y(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^2}$$

Usando as condições iniciais e simplificando, temos

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) = 2s - 6 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s-3)^2 Y(s) = 2(s-3) + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

Assim.

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}.$$

E usando o primeiro teorema da translação

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^2}\right\}\bigg|_{s \rightarrow s-3} t^4 t^{3t}$$

Então

$$y(t) = 2e^{3t} + \frac{1}{12}t^4 e^{3t}.$$

4. CIRCUITOS ELÉTRICOS

Após compreendermos a aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais ordinárias, propomos, na próxima seção, a introdução de alguns conceitos fundamentais da teoria de circuitos elétricos. Nosso objetivo é aplicar esse método à equações diferenciais que modelam o comportamento de circuitos elétricos. As principais referências utilizadas neste capítulo foram os livros [1] e [4].

4.1 Definição e tipos de circuitos

Segundo Alexander e Sadiku (2013), um circuito elétrico é “uma interconexão de elementos elétricos.” De maneira geral, ele é definido como um caminho fechado através do qual a corrente elétrica circula. Ele é composto por uma fonte de tensão, medida em volts (V), que representa a energia necessária para deslocar uma carga elétrica, ou seja, o trabalho realizado. Dessa forma, a tensão pode ser interpretada como a diferença de potencial entre dois pontos, denominados a e b . A relação matemática entre o trabalho e a carga é expressa por:

$$v_{ab} = \frac{dw}{dq}$$

onde $v_{ab} = v$ é a tensão entre os pontos a e b , w é a energia em joules (J) e q é a carga em coulombs (C). Portanto, a unidade de medida do volt é $1 V = 1 J/C$.

Além disso, o circuito pode ser composto por uma fonte de corrente, que representa o fluxo de carga por unidade de tempo. A corrente é medida em ampères (A), sendo $1 A = 1 C/s$. Essa corrente fornece energia às cargas elétricas, e é o princípio que fundamenta todos os fenômenos elétricos. A carga elétrica, medida em coulombs, é conduzida através dos condutores que conectam os elementos do circuito. Esses elementos, por sua vez, transformam a energia elétrica em outras formas de energia, como luz, calor ou movimento. Se considerarmos que a carga elétrica $q(t)$ varia ao longo do tempo, a corrente elétrica $i(t)$ corresponde à taxa de variação dessa carga em relação ao tempo. Em outras palavras, a corrente indica o quão rápido a carga está se movendo pelo circuito. Assim, a expressão matemática da corrente como a derivada da carga em relação ao tempo formaliza essa definição:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

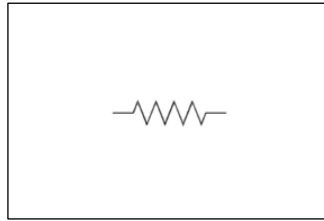
Existem diferentes configurações de circuitos elétricos, como os *circuitos em série, em paralelo e mistos*, que se distinguem pela maneira como as cargas são conectadas. Além das cargas, um circuito elétrico pode conter componentes como resistores, capacitores, geradores e indutores, cada um desempenhando funções específicas, como controlar ou armazenar a corrente elétrica.

Nos circuitos em série, as cargas estão conectadas sequencialmente, permitindo que a corrente elétrica passe por cada uma delas sucessivamente. Nessa configuração, se uma carga falhar ou for removida, todo o circuito deixa de funcionar. A resistência total do circuito é a soma das resistências individuais de cada carga. Por outro lado, nos circuitos paralelos, as cargas estão dispostas lado a lado, permitindo que a corrente elétrica se divida e passe por cada carga de forma independente. Nesse caso, a falha de uma carga não afeta o funcionamento das demais, e a resistência total do circuito é inferior à resistência individual de cada carga. Já os circuitos mistos combinam cargas conectadas em série e em paralelo, sendo utilizados em situações onde é necessário conectar múltiplas cargas de maneira simultânea e variada. A seguir, apresentaremos uma breve descrição dos principais componentes que podem ser encontrados em um circuito elétrico. Esses componentes, diferente das fontes, não geram energia para o circuito, apenas interagem dissipando ou armazenando. Vejamos a definição de cada um deles:

- **Condutores** são materiais que permitem que a corrente elétrica flua através dele com facilidade. Eles são usados para conectar os componentes de um circuito elétrico e permitir que a corrente elétrica flua entre eles.
- **Resistores** são componentes eletrônicos que limitam a passagem da corrente elétrica em um circuito. Eles são usados para controlar a quantidade de corrente que flui em um circuito e para reduzir a tensão em um circuito. A resistência elétrica é medida em ohms (Ω) e é determinada pela relação entre a tensão aplicada e a corrente que flui através do resistor, de acordo com a Lei de Ohm. Existem diferentes tipos de resistores, como resistores fixos, variáveis, de fio, de filme e de carbono. Eles são usados em muitos dispositivos eletrônicos, como computadores, telefones celulares, televisores e sistemas de som. Pela Lei de Ohm a tensão v sobre um resistor é diretamente proporcional à corrente i que flui através dele. A resistência R é a constante responsável pela proporcionalidade. Ou seja,

$$v(t) = Ri(t).$$

Figura 3: Resistor



Fonte: Autor

• **Capacitores** são componentes eletrônicos que armazenam a carga elétrica. Eles são usados para armazenar energia elétrica em um campo elétrico. Um capacitor é composto por duas placas condutoras separadas por um material isolante, chamado de dielétrico. A capacitância é a medida da capacidade de um capacitor de armazenar carga elétrica e é medida em Farad (F). A capacitância de um capacitor depende da área das placas, da distância entre elas e do dielétrico utilizado. Quando uma tensão é aplicada a um capacitor, ele armazena cargas elétricas nas placas condutoras. Quando a tensão é removida, o capacitor libera as cargas elétricas armazenadas. Os capacitores são usados em muitos dispositivos eletrônicos, como computadores, telefones celulares, televisores e sistemas de som. Ao conectarmos uma fonte de tensão v ao capacitor, esta fonte deposita uma carga positiva q sobre uma placa. Nesse sentido, o capacitor armazena a carga elétrica e dizemos que a quantidade desta carga armazenada é diretamente proporcional à v de modo que

$$q(t) = Cv(t)$$

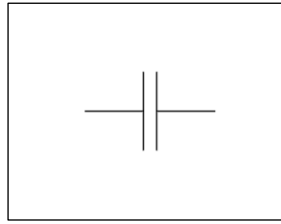
onde a capacitância C é definida como a constante de proporcionalidade. Segundo Alexander e Sadiku (2013), a capacitância é a razão entre a carga depositada em uma placa de um capacitor e a diferença de potencial entre as duas placas, medidas em Farad (F),

$$C = \frac{q(t)}{v(t)}.$$

Por outro lado, uma vez que $q'(t) = i(t)$, temos

$$q'(t) = i(t) = C \frac{dv}{dt}.$$

Figura 4: Capacitor

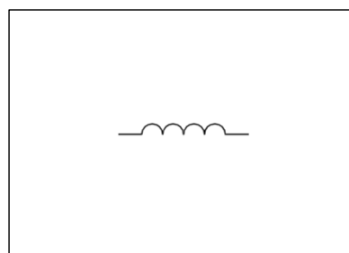


Fonte: Autor

• **Indutores** são componentes eletrônicos que armazenam energia na forma de corrente elétrica. Eles são usados em circuitos elétricos para armazenar energia em um campo magnético. Onde o indutor pode ser composto por uma bobina de fio condutor enrolada em torno de um núcleo, que pode ser feito de ar, ferro, aço ou outro material. A indutância (L) é definida por Alexander e Sadiku (2013), como a propriedade segundo a qual um indutor se opõe à mudança do fluxo de corrente através dele, medida em henrys (H). A indutância de um indutor depende do número de espirais na bobina, do diâmetro da bobina, do comprimento da bobina e do material do núcleo. Quando uma corrente elétrica flui através de um indutor, ela cria um campo magnético ao seu redor. Quando a corrente é interrompida, o campo magnético entra em colapso e a energia armazenada no campo é liberada. Se uma corrente flui através de um indutor, a tensão induzida é diretamente proporcional à taxa de variação da corrente. A constante de proporcionalidade será o indutor.

$$v(t) = L \frac{di}{dt}.$$

Figura 5: Indutor



Fonte: Autor

4.1.1 Circuitos LC, RC e LRC

O **circuito RC e RL** são conhecidos como circuitos de primeira ordem. Esse tipo de circuito é formado por dois componentes, um resistor e um capacitor ou um resistor e um indutor na qual, podem ser conectados em serie, ou paralelo ambos. Os circuitos apresentam respostas transitórias, ou seja, quando uma fonte é retirada ou aplicada, o sistema leva um certo tempo para atingir o estado estável, já que o capacitor armazena energia em um campo elétrico e o indutor em um campo magnético. Para esses dois tipos de circuito usaremos Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT), que diz que “*soma algébrica de todas as tensões em torno de um caminho fechado (ou laço) é zero*” (Alexander & Sadiku, 2013), ou seja,

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0.$$

Para o **circuito RC**, nós temos um resistor e um capacitor conectado a uma fonte de tensão $E(t)$. Por LKT,

$$V_C + V_R = E(t)$$

onde $V_R = Ri(t)$ é a queda de tensão sobre o resistor e $V_C = \frac{1}{C}q(t)$ é a queda no capacitor.

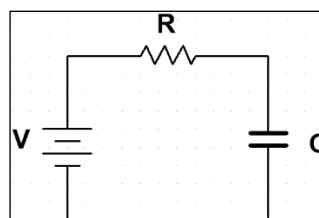
Assim, temos

$$\frac{1}{C}q(t) + Ri(t) = E(t),$$

Lembrando que $i(t) = \frac{dq}{dt}$, temos

$$\frac{1}{C}q(t) + R \frac{dq(t)}{dt} = E(t).$$

Figura 6: Circuito RC



Fonte: Autor

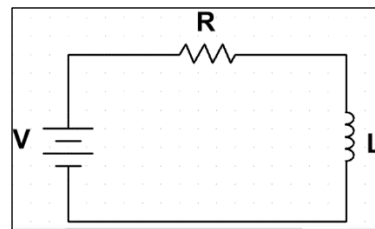
Agora, vamos analisar o **circuito RL** onde o indutor é conectado com um resistor. Ele terá a mesma forma matemática do circuito **RC**, será à soma da tensão sobre o indutor de $V_L = L \frac{di}{dt}$ com a tensão sobre o resistor $V_R = Ri(t)$, ou seja,

$$V_L + V_R = E(t)$$

donde,

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t).$$

Figura 7: Circuito RL



Fonte: Autor

Por outro lado, o **circuito RLC** é composto por três componentes: resistor (**R**), indutor (**L**) e capacitor (**C**) que podem ser conectados em série ou paralelo. Esse tipo de circuito é denominado de segunda ordem por causa da sua equação diferencial em que a corrente ou a tensão no circuito envolve derivadas de segunda ordem. Aplicando LKT também iremos obter a seguinte fórmula

$$V_L + V_R + V_C = E(t)$$

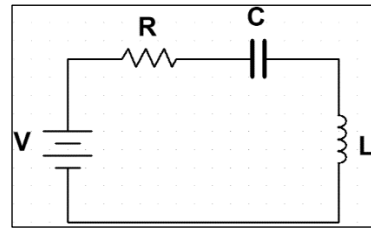
na qual as expressões já são conhecidas,

$$L \frac{di(t)}{dt} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E(t)$$

Ou ainda,

$$L \frac{dq^2(t)}{dt} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E(t)$$

Figura 8: Circuito RLC



Fonte: Autor

Esse tipo de circuito pode nos dar três tipos de respostas dependendo da relação do capacitor, indutor e resistor que serão:

- **Subamortecido** se a resistência for baixa o suficiente, o circuito exibirá oscilações ($\alpha < \omega_0$).
- **Criticamente amortecido** onde o circuito retorna ao equilíbrio sem oscilações, mas de forma rápida ($\alpha = \omega_0$)
- **Superamortecido** na qual o circuito retorna ao equilíbrio de forma lenta, sem oscilações $\alpha > \omega_0$.

onde $\alpha = \frac{R}{2L}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

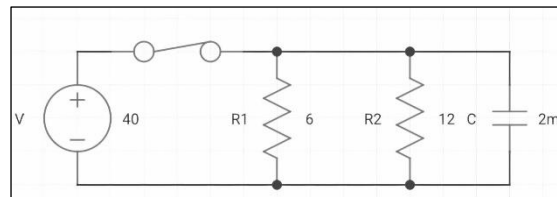
4.2 Aplicação da transformada de Laplace na resolução de circuitos elétricos

A Transformada de Laplace é uma ferramenta fundamental por facilitar a análise de circuitos elétricos e os simplificando, permitir transformar um circuito descrito no domínio do tempo, onde o comportamento é regido por equações diferenciais, para o domínio da frequência, no qual as equações se tornam algébricas e mais fáceis de resolver. Essa transformação facilita a análise e a solução de circuitos, especialmente quando há condições iniciais envolvidas. Para retornar ao domínio do tempo, basta aplicar a Transformada Inversa de Laplace.

Em circuitos RC e RL que são circuitos de primeira ordem, temos um único elemento armazenador de energia, um indutor ou um capacitor, acompanhados de 1 ou mais resistores. Veremos a seguir alguns exemplos das propriedades usadas no cálculo da Transformada de Laplace aplicada em circuitos elétricos.

Exemplo 4.1 Vamos analisar o circuito e descobrir quanto é sua carga em um certo $t > 0$ que é quando sua chave é aberta, levando em consideração que ela ficou fechada por um longo período, onde $E(t) = 40V$, $C = 2mF$, $R1 = 6\Omega$, $R2 = 12$.

Figura 9: Exemplo de circuito RC



Fonte: Autor

Primeiro fazemos a resistência equivalente entre os resistores. Nesse exemplo como os resistores estão em paralelo, isto é, conectados pelas mesmas conexões, sua fórmula pode ser descrita como produto sobre a soma entre dois resistores $\frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = R_{eq}$. Assim,

$$\frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4\Omega$$

Após isso, usamos a fórmula do circuito RC

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E(t).$$

Então,

$$4 \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{2 \times 10^{-3}} q(t) = 40$$

Dividindo tudo por 4,

$$\frac{dq(t)}{dt} + 125q(t) = 10.$$

Usando a Transformada de Laplace em cada termo,

$$\mathcal{L}[q(t)] = Q(s)$$

$$\mathcal{L}[q'(t)] = sQ(s) - q(0)$$

e considerando $q(0) = 0$, obtemos

$$sQ(s) + 125Q(s) = \frac{10}{s} \rightarrow Q(s) = \frac{10}{s(s + 125)}$$

Usando a técnica de frações parciais, segue que a carga no domínio da frequência é dada por

$$Q(s) = \frac{2/25}{s} - \frac{2/25}{s + 125}$$

Agora, podemos simplificar e em seguida usando a transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$, obtemos

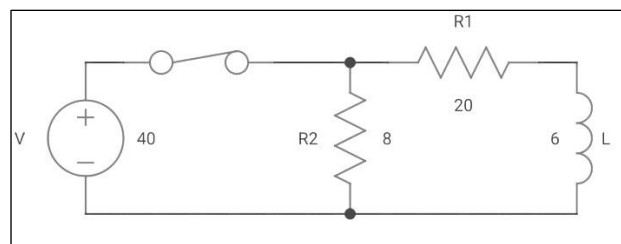
$$q(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2/25}{s} - \frac{2/25}{s + 125} \right] = \frac{2}{25} - \frac{2}{25} e^{-125t}$$

e o resultado da carga no instante t será

$$q(t) = \frac{2}{25} - \frac{2}{25} e^{-125t}.$$

Exemplo 4.2 No próximo circuito teremos uma fonte de tensão de $40V$, dois resistores $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 8\Omega$ com um indutor de $6H$ com a corrente circulando no circuito de $10A$. após um longo período com a chave fechada ela é aberta, desconectando a bateria do restante do circuito. Qual é a corrente após a chave ser aberta em qualquer instante de $t > 0$

Figura 10: Exemplo de circuito RL



Fonte: autor

Faremos o mesmo procedimento do primeiro exemplo, no entanto, observe que, após a chave ser aberta, os resistores ficam em série devido à sua conexão. Analisando a figura, vemos que eles estão conectados um após o outro, ou seja, podemos simplesmente somar suas resistências para obter a resistência equivalente, $R_1 + R_2 = R_{eq}$, ou seja, $R_{eq} = 20 + 8 = 28$.

Então, usando a formula do RL dada por

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t)$$

Quando a bateria é desconectada, $E(t) = 0$ assim, atribuindo os valores conhecidos, obtemos

$$6 \frac{di(t)}{dt} + 28i(t) = 0.$$

Dividindo toda a equação por 6, obtemos

$$\frac{di(t)}{dt} + 4,67i(t) = 0$$

Usando agora a transformada e adotando $i(0) = (10)$, temos

$$\mathcal{L}[i(t)] = I(s) \text{ e}$$

$$\mathcal{L}[i'(t)] = sI(s) - i(0)$$

Assim,

$$[sI(s) - 10] + 4,67[i(s)] = 0$$

e colocando no domínio da frequência

$$I(s) = \frac{10}{s + 4,67}$$

Aplicando a transformada inversa, obtemos, a corrente

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10}{s + 4,67} \right] = 10e^{-4,67t}.$$

No próximo exemplo de circuito, utilizaremos a Transformada de Laplace de uma forma diferente, transformando todos os componentes em suas respectivas impedâncias, representadas por Z . A ideia é transformar o circuito do domínio do tempo para o domínio s e para isso utilizaremos a transformada de Laplace nos componentes já definidos assim, resistor, capacitor e indutor. Esse método ajuda a calcular e analisar circuitos de forma mais simples, onde todos os componentes passivos (resistor, capacitor e indutor) são representados por uma única impedância. Essa forma de análise é amplamente utilizada em circuitos de corrente alternada (CA), mas também pode ser aplicada a circuitos de corrente contínua (CC).

A impedância, Z , é um conceito que permite descrever o comportamento dos componentes passivos de um circuito em termos de uma resistência única, considerando tanto a resistência real quanto a reatância (resistência ao fluxo de corrente devido à capacitância ou indutância). Como estamos lidando com números complexos, a impedância pode ser representada tanto na forma retangular (parte real e parte imaginária) quanto na forma polar (magnitude e ângulo).

Portanto, ao aplicar a Transformada de Laplace, podemos expressar a função de transferência do circuito, que descreve o comportamento da tensão ou corrente de saída em relação à entrada, levando em consideração a contribuição de todos os elementos representados em termos de suas impedâncias. A transformada de Laplace é útil porque transforma equações diferenciais no domínio do tempo em equações algébricas no domínio de s , o que facilita a análise dos circuitos.

Assim, teremos

- No caso do resistor, a relação tensão-corrente no domínio do tempo é

$$v(t) = Ri(t).$$

Aplicando a transformada de Laplace, obtemos a equação no domínio da frequência

$$V(s) = RI(s).$$

- Para o indutor,

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

e aplicando a transformada de Laplace, obtemos

$$V(s) = L[sI(s) - i(0)] = sLI(s) - Li(0)$$

Ou equivalentemente,

$$I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0)}{s}$$

- No caso do capacitor,

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

Aplicando a Transformada de Laplace, e considerando as condições iniciais igual a 0, obtemos no domínio da frequência s

$$I(s) = C[sV(s) - v(0)] = sCV(s) - Cv(0).$$

Ou equivalentemente,

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0)}{s}$$

Considerando as condições iniciais iguais a zero para o indutor e capacitor, as equações se reduzem

$$V(s) = RI(s),$$

$$V(s) = sLI(s) \text{ e}$$

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s)$$

No domínio de Laplace (s), as impedâncias são definidas como a razão entre a transformada da tensão e a transformada da corrente sob condições iniciais zero, ou seja,

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

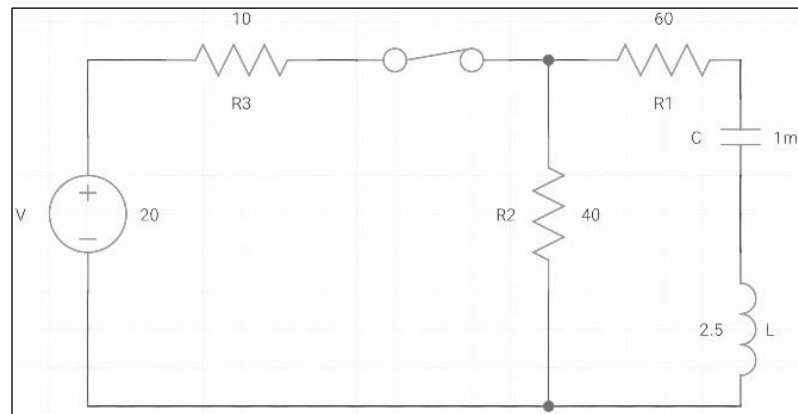
Assim, a impedância dos três elementos do circuito será

- Resistor $Z(s) = R$
- Capacitor $Z(s) = \frac{1}{sC}$
- Indutor $Z(s) = sL$.

Dessa forma, ao utilizarmos a Transformada de Laplace e aplicarmos as condições iniciais podemos converter todos os elementos do circuito para suas respectivas impedâncias no domínio de s . Isso simplifica a análise de circuitos complexos, já que podemos aplicar as mesmas leis usadas para circuitos resistivos (como Lei de Ohm, Divisor de Tensão, etc.) para encontrar a resposta do circuito.

Exemplo 4.3 (ALEXANDER & SADIKU, 2013) Vejamos um exemplo de circuito de segunda ordem. Queremos determinar $i(t)$ para $t > 0$ no circuito ilustrado abaixo. A tensão que o capacitor armazena antes da chave se abrir é de $16V$, ou seja, para $t < 0$, $E(t) = 16V$. Além disso, o capacitor é de $1mF$ (millifarad) que é 1×10^{-3} .

Figura 11: Exemplo RLC



Fonte: ALEXANDER & SADIKU, 2013

Analisando o circuito em domínio de Laplace s , vamos obter uma expressão para a corrente. Assim, teremos

- **Capacitor** $Z_C = \frac{1}{sC} = \frac{1}{s \times 0,001} = \frac{1000}{s} \Omega$
- **Indutor** $Z_L = sL = 2,5s \Omega$
- **Resistores** $R1 = 60 \Omega, R2 = 40 \Omega$.

Como o capacitor tem uma tensão inicial de $16V$, no domínio de Laplace isso se traduz em $\frac{16}{s}$.

Então por LKT, temos:

$$\frac{1000}{s} I + \frac{16}{s} + 2,5sI + 40I + 60I = 0.$$

Colocando o I em evidência, teremos

$$\begin{aligned} I \left(\frac{1000}{s} + 2,5s + 100 \right) &= -\frac{16}{s} \\ I \left(\frac{1000 + 2,5s^2 + 100s}{s} \right) &= -\frac{16}{s} \\ I &= -\frac{16}{s \left(\frac{1000 + 2,5s^2 + 100s}{s} \right)} \\ I &= -\frac{16}{1000 + 2,5s^2 + 100s} \end{aligned}$$

E agora dividindo tudo por 2,5 ficamos com o seguinte.

$$I = -\frac{6,4}{s^2 + 40s + 400}$$

onde o denominador pode ser visto como um quadrado perfeito $s^2 + 40s + 400 = (s + 20)^2$.

Então,

$$I = -\frac{6,4}{(s + 20)^2} = 6,4 \frac{1}{(s + 20)^2}.$$

Aplicando a Transformada de Laplace inversa e considerando que

$$t^n e^{at} u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - a)^{n+1}} \right\},$$

Obtemos,

$$i(t) = -6,4te^{-20t}u(t)A.$$

5. CONCLUSÃO

Em primeiro lugar mostramos a importância das equações diferenciais, destacando sua eficácia como ferramenta para modelar e resolver problemas complexos. Elas desempenham um papel crucial na descrição de fenômenos dinâmicos, permitindo a compreensão do comportamento de sistemas ao longo do tempo, como as respostas em estado estacionário e em estado transiente de circuitos RC, RL e RLC. A capacidade das equações diferenciais de modelar e destacar os parâmetros relevantes de um sistema faz delas uma peça fundamental na engenharia elétrica e em outras áreas.

Em seguida, exploramos as propriedades da Transformada de Laplace, que é um método matemático extremamente útil para lidar com sistemas que envolvem equações diferenciais. A principal vantagem da Transformada de Laplace é a conversão de equações diferenciais em equações algébricas, e fazendo uso das suas tabelas tanto para sua transformada como para a sua transformada inversa que torna o problema muito mais simples de resolver.

Para demonstrar sua aplicação prática, utilizamos a Transformada de Laplace na análise de três tipos diferentes de circuitos. No primeiro exemplo, aplicamos a transformada a um circuito RC, RL e RLC. Esses exemplos ilustram como a Transformada de Laplace simplifica a análise de circuitos elétricos, permitindo que equações diferenciais complexas sejam resolvidas de maneira mais direta e eficiente.

Em conclusão, a Transformada de Laplace é uma ferramenta eficaz para a análise e resolução de circuitos elétricos de primeira e de segunda ordem, pois facilitar o estudo de sistemas dinâmicos em geral. Sua capacidade de transformar problemas difíceis em resoluções mais simples e diretas a torna indispensável na engenharia e em outras áreas científicas.

6. REFERÊNCIAS

- [1] ALEXANDER, C. K; SADIKU, M. N. O; Fundamentos de circuitos elétricos. Tradução: José Lucimar do Nascimento. Mc Graw Hill. 5ª ed. Porto Alegre, 2013.
- [2] ANDREOTTI, F. Laplace, Pierre Simon (1749 – 1827). **fem.unicamp**. Disponível em: <http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/laplace.htm>. Acesso em 14 de Setembro de 2023.
- [3] BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C; MEADE, D. B; Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio. – 11. ed. Rio de Janeiro : LTC, 2020.
- [4] BURIAN, Y; LYRA, A. C. C; Circuitos elétricos. São Paulo. Pearson Prentice Hall, 2006.
- [5] DEAKIN, M.A.B; Archive for History of Exact Sciences 25, 4 (1981)
- [6] EVES, H. Introdução a História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª Edição - Campinas, SP. Editora Unicamp. 2011.
- [7] TONIDANDEL, D. A. V; ARAÚJO, A. E. A. Transformada de Laplace: uma obra de engenharia. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, n. 2, 2601 (2012)
- [8] ZILL, D. G; CULLEN, M. R; Equações diferenciais. Tradução: Alfredo Alves de Faria. São Paulo. Pearson, Makron Books. 3ª Ed. 2001.