

COMPARAÇÃO DE EFICIÊNCIA DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A DETERMINAÇÃO DE CORRENTE ELÉTRICA

Luiz Felipe da Cunha Silva, Prof.Me. Rodrigo Toledo Teixeira Câmara
Janeiro, 2022

Resumo: A utilização de aparelhos eletrônicos estão se tornando cada vez mais presentes em nosso cotidiano, de modo que, a presença dos circuitos elétricos que compõe esses equipamentos estão cada vez mais comuns, assim, entender os conceitos físicos e matemáticos que determinam o funcionamento desses objetos é de fundamental importância na atualidade. Desse modo, o objetivo desta pesquisa é mostrar a similaridade entre circuitos elétricos e modelos matemáticos, em especial, sistemas lineares. Foram expostos exemplos de circuitos simples. Com base nisso, foi discutido o porquê de não se utilizar um método X para resolvê-los, além de comparar com as vantagens de um método Y, por exemplo. Também foi realizada uma comparação entre os diferentes métodos possíveis na resolução do sistema. Além disso, foi efetuada uma pesquisa bibliográfica sobre circuitos elétricos e modelagem por sistema linear. A comparação entre os métodos foi elaborada por medição de tempo de cálculo, objetivando, assim, soluções com mesmas precisões. A partir disso, verificou-se que para alguns dos problemas abordados no trabalho, os métodos aplicados chegaram a soluções de mesma precisão, porém, tempos de cálculo bastante diferentes, e, portanto, sendo definido o método da Eliminação de Gauss como o de melhor eficiência.

Palavras-chave: Circuitos elétricos, sistemas lineares, lei de Kirchhoff, corrente elétrica.

1 Introdução

A presença e utilização de circuitos elétricos é algo que, desde o começo do século XX, vêm se tornando cada vez mais comum em nossas vidas. Os circuitos estão presentes na maioria dos dispositivos elétricos e eletrônicos que encontramos diariamente, sendo de fundamental importância a compreensão da teoria física e matemática por trás do funcionamento desses componentes. Neste contexto, é importante mencionar que um dos principais conceitos físicos presentes no estudo de circuitos elétricos é o de corrente elétrica. Com base nisso, é possível definir este conceito como um fluxo de cargas elétricas que percorrem um material condutor em um determinado tempo (YOUNG; FREEDMAN, 2016). Além disso, é possível analisar a corrente por meio da lei de Kirchhoff que, na maioria dos casos, implica na solução de um sistema linear.

A partir disso, podemos observar que estes sistemas lineares possuem diversos métodos de resolução, como visto em Franco (2006). Alguns desses são os chamados métodos numéricos, que buscam encontrar as soluções do sistema de forma simplificada, com maior velocidade e precisão.

Dessa forma, este trabalho busca, portanto, fazer uma análise da aplicação desses métodos numéricos na solução de sistemas lineares, gerados no cálculo da corrente elétrica em circuitos resistivos. Pretende-se mostrar, a partir da análise de exemplos, quais métodos são mais eficientes para execução dessa tarefa, por meio de objetivos auxiliares que consistem em basicamente: Realizar uma revisão bibliográfica a respeito de circuitos elétricos, em especial circuitos resistivos, reunir algoritmos de solução de sistemas lineares, modelar circuitos elétricos por meio das Leis de Kirchhoff e, por último, comparar a eficiência dos métodos numéricos analisados. Desse modo, determinando qual dos métodos de solução de sistemas lineares é o mais eficiente.

2 Embasamento teórico

2.1 Conceitos iniciais

De acordo com Halliday (2009), um circuito elétrico é composto por diversos elementos, para que possa ser feito a análise deste, é necessário que tenhamos o entendimento do conceito de cada um desses componentes, sendo eles, principalmente, carga elétrica, corrente elétrica, tensão e resistência.

A propriedade intrínseca das partículas chamadas de fundamentais, ou seja, a carga de prótons e elétrons, é a carga elétrica (q), dada na unidade Coulomb (C), matematicamente pode ser representada como sendo a multiplicação entre o número de elétrons, em falta (+) ou em excesso (−), pelo valor da carga elementar (e). Logo, tem-se que:

$$q = ne \quad (1)$$

Outro importante conceito presente no estudo dos circuitos elétricos é a Corrente elétrica (i), sendo ela o fluxo de cargas elétricas que percorrem por um material condutor em um determinado intervalo de tempo (t), tem como unidade no SI o Ampére (A) e possui como principal característica o seu valor constante em todo o percurso que segue. Portanto:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2)$$

Tensão é a quantidade de energia armazenada necessária para o deslocamento da carga elétrica, sendo medida em Volts (V), podendo ser escrita matematicamente como a razão entre a energia potencial elétrica (U) e a carga elétrica (q), então:

$$V = \frac{U}{q} \quad (3)$$

Os Resistores são componentes condutores cuja a função no circuito elétrico é apresentar uma resistência a passagem de corrente elétrica no sistema, essa resistência (R) é medida com a unidade Ohms (Ω), e pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$R = \frac{V}{i} \quad (4)$$

A partir dessa relação, reorganizando a equação (4), é notório que é possível escrever a tensão como sendo, o produto da resistência com a corrente elétrica, da seguinte maneira:

$$V = Ri \quad (5)$$

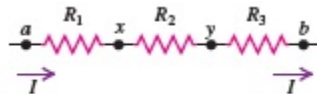
2.2 Associação de Resistores

Outra importante propriedade presente nos circuitos elétricos é a associação de resistores que pode ser encontrada em série e em paralelo.

2.2.1 Resistores em série

Os resistores em série, podem ser ilustrados a partir da seguinte figura:

Figura 1: Resistores em Série.



Fonte: Young e Freedman (2016).

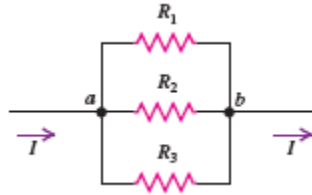
Quando existem dois ou mais resistores associados em série, diz-se que a resistência equivalente é a soma de todas as resistências, pode ser observado, também, que a corrente elétrica é a mesma em todos os resistores e a tensão presente em cada resistor é diferente, sendo que esta é proporcional aos valores da resistência de cada um dos resistores. Portanto:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N \quad (6)$$

2.2.2 Resistores em Paralelo

Já os resistores em paralelo, podem ser ilustrados da seguinte maneira:

Figura 2: Resistores em Paralelo.



Fonte: Young e Freedman (2016).

Quando existem dois ou mais resistores associados em paralelo, diz-se que o inverso da resistência equivalente é igual o somatório do inverso das resistências, observa-se que a tensão é constante em todos os resistores, logo, a corrente elétrica é dividida para cada um dos resistores, voltando a ter o seu valor inicial ao fim do percurso ao longo do circuito elétrico, neste caso a resistência é considerada inversamente proporcional a corrente elétrica. Assim, tem-se que matematicamente a resistência equivalente é dada por:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R(i)} \quad (7)$$

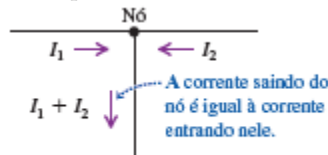
2.3 Leis de Kirchhoff

Nesse contexto, com base no conhecimento de todos esses conceitos iniciais pode-se, então, definir as chamadas Leis de Kirchhoff.

2.3.1 Lei dos nós

Segundo Young e Freedman (2016), a lei dos nós afirma que o fluxo de corrente que entra em um nó de um circuito elétrico é igual ao fluxo de corrente que sai dele. Conforme a figura abaixo:

Figura 3: Esquema referente a Lei dos Nós.



Fonte: Young e Freedman (2016).

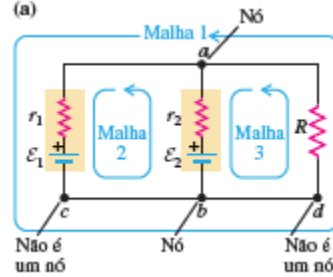
Portanto, a soma de todas as correntes que entram em um nó é igual a zero, então:

$$\sum i = 0 \quad (8)$$

2.3.2 Lei das Malhas

A segunda lei de Kirchhoff, afirma que a soma do potencial elétrico ao longo de uma malha de circuito elétrico fechada é igual a zero. Conforme a figura abaixo:

Figura 4: Esquema referente a Lei das Malhas.



Fonte: Young e Freedman (2016).

Portanto, a lei das malhas está diretamente ligada com os princípios da conservação de energia, logo, pode-se obter a seguinte relação:

$$\sum V = 0 \quad (9)$$

2.4 Métodos Numéricos para a solução de sistemas lineares

Desse modo, ao serem aplicadas as leis de Kirchhoff, na maioria dos casos, obtêm-se sistemas lineares. Então, para que se torne possível resolver os sistemas lineares, surgidos após serem aplicados os conceitos das leis de Kirchhoff, deve-se recorrer aos diversos métodos possíveis para a solução de sistemas lineares. Nesse contexto, foram abordados nesta pesquisa a solução dos sistemas lineares a partir dos métodos numéricos. Para isso, foram utilizados os seguintes métodos: Eliminação de Gauss, Método de Cholesky e o Método de Gauss-Seidel.

2.4.1 Eliminação de Gauss

A eliminação gaussiana, também conhecida como escalonamento, é um método para resolver sistemas lineares. Este método consiste em manipular o sistema através de determinadas operações elementares, transformando a matriz estendida do sistema em uma matriz triangular (chamada de matriz escalonada do sistema). Uma vez, triangularizado o sistema, a solução pode ser obtida via substituição regressiva. (REAMAT, 2020). Naturalmente estas operações elementares devem preservar a solução do sistema e consistem em:

- Multiplicação de uma linha por uma constante não nula;
- Substituição de uma linha por ela mesma somada a um múltiplo de outra linha;
- Permutação de duas linhas.

A matriz correspondente ao sistema dado deve ser modificada para uma matriz triangular, podendo ser do tipo triangular superior ou triangular inferior, segue abaixo o exemplo de cada um desses tipos:

- **Matriz Triangular Superior:**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

- Matriz Triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Além disso, para a resolução deve-se desenvolver um algoritmo que executa os seguintes passos, e também, implementar um código para a execução do cálculo:

Figura 5: Algoritmo Eliminação de Gauss.

Algoritmo 1: Eliminação de Gauss.
<pre> para k = 1, ..., (n - 1) faça para i = (k + 1), ..., n faça m = a_{ik}/a_{kk} a_{ik} = 0 para j = (k + 1), ..., n faça a_{ij} = a_{ij} + m*a_{kj} fim b_i = b_i - m*b_k fim fim Resolução do sistema triangular superior x_n = b_n/a_{nn} para i = (n - 1), ..., 1 faça soma = 0 para j = (i + 1), ..., n faça soma = soma + a_{ij}x_j fim x_i = (b_i - soma)/a_{ii} fim </pre>

Fonte: REAMAT (2020).

Figura 6: Código Eliminação de Gauss.

Código Scilab 1: Método da Eliminação de Gauss.
<pre> function x=gauss(A, b) [m,n] = size(A); nb = n+1; Aug = [A b]; for k = 1:n-1 for i = k+1:n mult = Aug(i,k)/Aug(k,k); Aug(i,k:nb) = Aug(i,k:nb)-mult*Aug(k,k:nb); end end x = zeros(n,1); x(n) = Aug(n,nb)/Aug(n,n); for i = n-1:-1:1 x(i) = (Aug(i,nb)-Aug(i,i+1:n)*x(i+1:n))/Aug(i,i); end end </pre>

Fonte: REAMAT (2020).

2.4.2 Método de Cholesky

Quando tem-se uma matriz simétrica e positiva definida é possível simplificar os cálculos utilizando o método de resolução de Cholesky. Nesse contexto, o método baseia-se da seguinte maneira, segundo Franco (2006), se a matriz A é positiva definida, então A pode ser decomposta unicamente no produto GG^t , onde G é a matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.

Desse modo, para que seja obtida a matriz G é necessário aplicar a definição de produto e igualdade de matrizes, então tem-se a seguinte relação:

$$GG^t = \begin{bmatrix} g_{11} & & \\ g_{21} & g_{22} & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ & g_{22} & g_{23} \\ & & g_{33} \end{bmatrix},$$

sendo a Matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

A partir disso, é necessário encontrar uma relação para que sejam calculados os valores dos elementos diagonais e não diagonais, que podem ser obtidos através das seguintes relações matemáticas:

Elementos diagonais:

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}}, \\ g_{ii} = (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2)^{1/2}, i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Elementos não diagonais:

$$\begin{cases} g_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, i = 2, 3, \dots, n. \\ g_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk})/g_{jj}, 2 \leq j < i. \end{cases}$$

Para que o método seja utilizado, foi necessário implementar o seguinte algoritmo, e também utilizar o código abaixo:

Figura 7: Algoritmo Método de Cholesky.

Algoritmo 2: Método de Cholesky.
<pre> para k = 1, ..., n faça s = 0 para i = 1, ..., (k - 1) faça s = s + g_{ki}² fim s = a_{kk} - s se s ≤ 0 então Para o cálculo, já que a matriz não é positiva definida. fim g_{kk} = √s para j = (k + 1), ..., n faça s = 0 para i = 1, ..., (k - 1) faça s = s + g_{ji} * g_{ki} fim g_{jk} = (a_{jk} - s) / g_{kk} fim fim </pre>

Fonte: REAMAT (2020).

Figura 8: Código Método de Cholesky.

Código Scilab 2: Método de Cholesky.
<pre> function sol=cholesky(A, b), u = chol(A) l = u' d = linsolve(l,-b) sol = linsolve(u,-d) endfunction </pre>

Fonte: REAMAT (2020).

2.4.3 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel pode ser utilizado quando tem-se uma matriz dos coeficientes estritamente diagonal dominante. Nesse sentido, o método consiste em uma sequência de aproximantes das iterações a partir de valores iniciais.

A partir disso, sabe-se que são calculadas as iterações do método de Gauss-Seidel da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x_1^{(x+1)} = -a_{12}^* x_2^{(k)} - a_{13}^* x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}^* x_n^{(k)} + b_1^* \\ x_2^{(x+1)} = -a_{21}^* x_1^{(k)} - a_{23}^* x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}^* x_n^{(k)} + b_2^* \\ x_3^{(x+1)} = -a_{31}^* x_1^{(k)} - a_{32}^* x_2^{(k)} - \dots - a_{3n}^* x_n^{(k)} + b_3^* \\ \dots \\ x_n^{(x+1)} = -a_{n1}^* x_1^{(k+1)} - a_{n2}^* x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}^* x_{n-1}^{(k+1)} + b_n^* \end{cases}$$

Esse método faz o cálculo de uma componente de $x^{(k+1)}$ utilizando o valor mais recente das demais componentes anteriores, por esse motivo, também é chamado de método dos deslocamentos sucessivos.

Nesse contexto, deve-se implementar o seguinte algoritmo e código para a solução de sistemas lineares através desse método:

Figura 9: Algoritmo método de Gauss-Seidel.

```

Algoritmo 3: Método de Gauss-Seidel

Entrada – Matriz dos coeficientes A, vetor de termos independentes b, os valores iniciais x,
precisão tol e o número máximo de iterações N.
Saída – Vetor solução do sistema Ax = b e o número de iterações.

Início
  B ← eye(A) – inv(A * eye(A)) * A
  d ← (b)/diag(A)
  [nl,nc] ← tamanho(A)
  xold ← d
  x ← xold
  er ← 1
  it ← 0
  enquanto er >= p it < N faça
    para i = 1 : nc faça
      x(i) = B(i,:) * x + d(i)
    fim
    er = max(abs(x – xold))/max(abs(x))
    xold = x
    it = it + 1
  fim
fim

Retorna [x,it]

```

Fonte: REAMAT (2020).

Figura 10: Código método de Gauss-Seidel.

```

Código Scilab 3: Método de Gauss – Seidel

function [x, deltax]=gauss_seidel(A, b, x, tol, N)
n=size(A,1)
xnew =x
convergiu=%F

k=1
while k<=N & ~convergiu
  xnew(1)=(b(1) - A(1,2:n)*x(2:n))/A(1,1)
  for i=2:n-1
    xnew(i)=(b(i) -A(i,1:i-1)*xnew(1:i-1) ...
      -A(i,i+1:n)*x(i+1:n) )/A(i,i)
  end
  xnew(n)=(b(n) -A(n,1:n-1)*xnew(1:n-1) )/A(n,n)

  deltax=max( abs(x-xnew) )
  if deltax<tol then
    convergiu=%T
  end
  k=k+1
  x=xnew
  disp([k,x',deltax])
end
if ~convergiu then
  error('Nao convergiu')
end

```

Fonte: REAMAT (2020).

3 Metodologia

Serão realizados os testes com quatro problemas de circuitos elétricos: a determinação das correntes de um circuito de 3 malhas, a determinação das correntes de um circuito de 4 malhas, a determinação das correntes de uma Ponte de Wheatstone e a determinação das correntes de um circuito de 10 malhas.

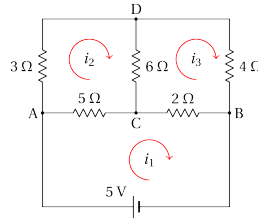
Portanto, estes problemas foram resolvidos com os métodos de Eliminação de Gauss, Cholesky e Gauss-Seidel. Com base nisso, foram comparados os tempos de resolução e a precisão do resultado. O tempo será medido pelos comandos de stopwatch counter tic() e toc() do Scilab, conforme descrito em Scilab (2015). A precisão será medida pelo módulo do resíduo, conforme definido por Franco (2006),

$$res = ||A * sol.calculada - b||. \quad (10)$$

4 Circuitos Analisados

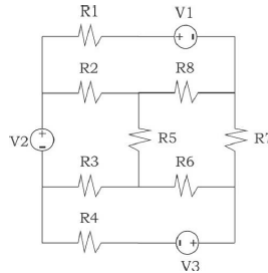
Os circuitos analisados nesta pesquisa estão dispostos abaixo:

Figura 11: Circuito 1 - Circuito de 3 Malhas.



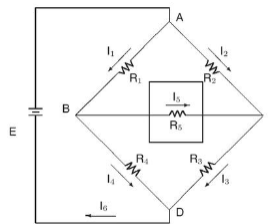
Fonte: Villate (2021).

Figura 12: Circuito 2 - Circuito de 4 Malhas.



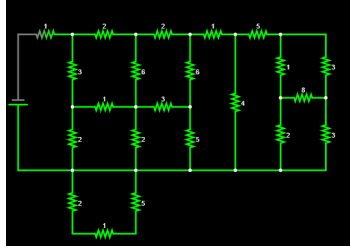
Fonte: Ávila (2019).

Figura 13: Circuito 3 - Ponte de Wheatstone.



Fonte: Franco (2006)

Figura 14: Circuito 4 - Circuito de 10 Malhas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir disso, é importante serem informados os sistemas lineares referentes a cada um destes circuitos após serem aplicadas as leis de Kirchhoff:

O circuito descrito na Figura 11 (Circuito de 3 malhas), pode ser modelada pelo seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para o circuito da Figura 12 (Circuito de 4 malhas), tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Em relação ao circuito da Figura 13 (Ponte de Wheatstone), o sistema linear pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 10 & -100 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & -100 & 100 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Em relação ao circuito da Figura 14 (Circuito de 10 malhas), o sistema linear pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 12 & -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 17 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 10 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -5 & 16 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5 Dados Obtidos

Aqui foram discutidos os resultados obtidos para a corrente elétrica dos demais circuitos mostrados anteriormente, foram utilizados os métodos de Eliminação de Gauss, Cholesky e Gauss-seidel nessa ordem.

5.1 Dados obtidos a partir do Circuito 1 - Circuito de 3 malhas

A partir da utilização dos métodos de Eliminação de Gauss, Cholesky e Gauss Seidel foram obtidos os seguintes valores para as correntes elétricas do Circuito 1:

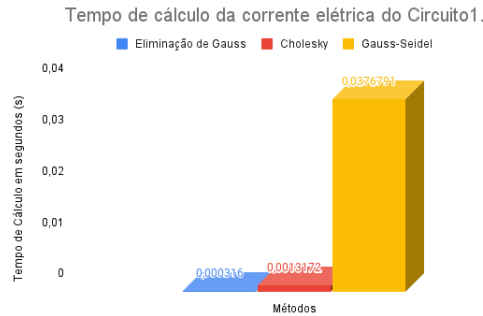
Tabela 1: Valores da Corrente elétrica para o Circuito 1

Corrente (A)	Eliminação de Gauss	Métod. Cholesky	Métod. Gauss - Seidel
I_1	1.4732143	1.4732143	1.4732143
I_2	0.8035714	0.8035714	0.8035714
I_3	0.6473214	0.6473214	0.6473214

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para os métodos de Eliminação de Gauss, Cholesky e Gauss-Seidel os resultados obtidos foram análogos. Portanto, não existe necessidade do cálculo do resíduo já que não houveram diferenças em relações aos valores adquiridos. No entanto, em relação ao tempo de cálculo de cada um dos métodos os resultados obtidos tiveram considerável diferença, como pode ser observado no gráfico abaixo:

Figura 15: Gráfico 1 - Tempo de cálculo do Circuito 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vale mencionar também, que a medição do tempo de cálculo para a obtenção dos valores da corrente elétrica referente ao Circuito 1 foi realizada pelo comando `tic() toc()` do programa Scilab.

5.2 Dados obtidos a partir o Circuito 2 - Circuito de 4 malhas

Partindo da utilização dos métodos da Eliminação de Gauss, Cholesky e Gauss-Seidel e ao serem implementados os códigos mencionados anteriormente, obtivemos os seguintes resultados:

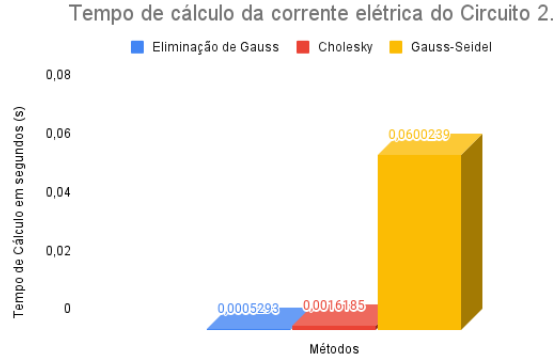
Tabela 2: Valores da Corrente elétrica do Circuito 2.

Corrente (A)	Eliminação de Gauss	Métod. Cholesky	Métod. Gauss - Seidel
I_1	2.3333333	2.3333333	2.3333333
I_2	3.3333333	3.3333333	3.3333333
I_3	0.3333333	0.3333333	0.3333333
I_4	2.3333333	2.3333333	2.3333333

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim como no experimento anterior, para os métodos de Eliminação de Gauss, Cholesky e Gauss-Jordan os resultados obtidos foram análogos. Portanto, não existe necessidade do cálculo do resíduo já que não houveram diferenças em relações aos valores adquiridos. No entanto, em relação ao tempo de cálculo de cada um dos métodos os resultados obtidos tiveram considerável diferença, como pode ser observado no gráfico abaixo:

Figura 16: Gráfico 2 - Tempo de cálculo do Circuito 2.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim como no experimento do Circuito 1, os tempos de cálculo foram cronometrados pelo comando *tic()* *toc()* do Scilab.

5.3 Dados obtidos a partir do Circuito 3 - Ponte de Wheatstone

Primeiramente, utilizando o método da Eliminação de Gauss, foi implementado no programa Scilab o código mostrado na Figura 2 e foram obtidos os seguintes resultados para os valores de corrente elétrica:

Tabela 3: Valores da Corrente elétrica do Circuito 3, obtidos pelo método da Eliminação de Gauss.

Corrente (A)	Eliminação de Gauss
I_1	0.2285714
I_2	0.0742857
I_3	0.1257143
I_4	0.1771429
I_5	0.0514286
I_6	0.3028571

Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, cabe mencionar que o tempo obtido ao utilizar o comando *tic()* *toc()* dos Scilab foi de 0.0009172 s.

A segunda experiência foi feita com o método de Cholesky. O Scilab retornou a seguinte mensagem de erro: “Matrix is not positive definite” (“Matriz não é positiva definida”, em português). De fato, de acordo com Wolfram (2022), a condição 2, $a_{ii} + a_{jj} > 2a_{ij}$, não é satisfeita, uma vez que $a_{11} + a_{44} < 2a_{14}$ por exemplo.

A última experiência foi feita com o método de Gauss-Seidel, para isso é necessário que o sistema linear seja organizado, trocando algumas de suas linhas para que a diagonal principal não apresente nenhum elemento nulo, sendo assim o sistema fica da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 10 & -100 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & -100 & 100 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A partir disso, utilizando o sistema linear anterior foi implementado no Scilab utilizando o Código 3, referente ao método de Gauss-Seidel, e após implementarmos 300 iterações o sistema não convergiu.

Desse modo, pode-se analisar alguns dos critérios que permitem a convergência da solução de um sistema linear pelo método de Gauss-Seidel. O critério de Sassenfeld é uma condição suficiente (mas não necessária) para garantir a convergência. O critério, segundo Franco (2006), é analisado da seguinte forma: sejam os betas dados por

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|\beta_j}{a_{ii}} + \sum_{j=i+1}^n \frac{|a_{ij}|}{a_{ii}}. \quad (11)$$

Se todos estes betas são menores que 1, então o critério garante a convergência do método de Gauss-Seidel. Observa-se que o critério não é satisfeito neste caso, uma vez que

$$\beta_1 = \frac{|-100|+0+0+|100|+0}{10} = 20.$$

No entanto, cabendo ressaltar, que isso ainda não garante a não convergência.

5.4 Dados obtidos a partir do Circuito 4 - Circuito de 10 malhas

A partir da utilização dos métodos de Eliminação de Gauss, Cholesky e Gauss-Seidel foram obtidos os seguintes valores para as correntes elétricas do Circuito 4:

Tabela 4: Valores das correntes elétricas do Circuito 4.

Correntes (A)	Eliminação de Gauss	Métod. Cholesky	Métod. Gauss - Seidel
I_1	12.595731	12.595731	12.595731
I_2	5.7332218	5.7332218	5.7332218
I_3	7.8894941	7.8894941	7.8894941
I_4	0	$3.244 * 10^{-17}$	0
I_5	3.8536626	3.8536626	3.8536626
I_6	4.2613936	4.2613936	4.2613936
I_7	3.054792	3.054792	3.054792
I_8	1.1119322	1.1119322	1.1119322
I_9	0.3505004	0.3505004	0.3505004
I_{10}	0.386759	0.386759	0.386759

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analogamente aos problemas anteriores, os valores obtidos no cálculo da corrente elétrica foram os mesmos, para os métodos de Eliminação de Gauss e para o método de Gauss-Seidel. Em contrapartida, o método de Cholesky apresentou um valor diferente em relação a corrente que percorria a malha 4 do circuito, desse modo, é possível que seja calculado o resíduo, mostrado na equação (10), para esse resultado.

Tabela 5: Resíduo dos resultados das correntes elétricas do Circuito 4.

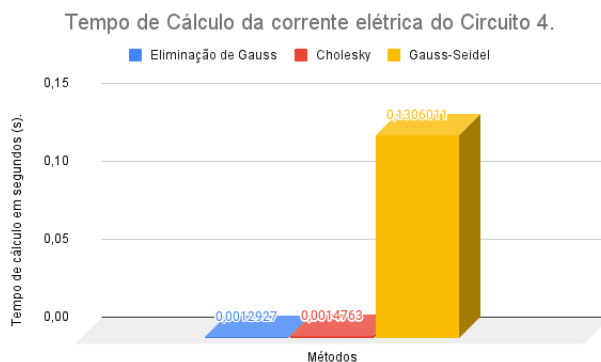
Elim. de Gauss (<i>res</i>)	Cholesky (<i>res</i>)	Gauss-Seidel (<i>res</i>)
$7,105 * 10^{-15}$	$1,776 * 10^{-14}$	$7,105 * 10^{-15}$
$7,105 * 10^{-15}$	$2,842 * 10^{-14}$	$7,105 * 10^{-15}$
0	$1,559 * 10^{-14}$	$1,176 * 10^{-15}$
0	$2,596 * 10^{-16}$	0
0	$4,974 * 10^{-14}$	0
$5,329 * 10^{-15}$	$2,309 * 10^{-14}$	$3,553 * 10^{-15}$
0	$2,487 * 10^{-14}$	$3,553 * 10^{-15}$
$1,144 * 10^{-15}$	$2,187 * 10^{-14}$	$7,772 * 10^{-16}$
$4,441 * 10^{-16}$	$4,441 * 10^{-15}$	0
$2,776 * 10^{-16}$	$5,218 * 10^{-15}$	$1,665 * 10^{-16}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, observa-se na Tabela 5 que a partir do cálculo do resíduo os resultados mais precisos são mostrados pelos métodos de Eliminação de Gauss e Gauss-Seidel, já que estes valores são mais próximos de zero quando comparados com os resultados do método de Cholesky.

Além disso, foram analisados também os tempos decorridos na realização dos cálculos, estes foram medidos utilizando o comando *tic () toc()* do Scilab. A imagem a seguir traz o gráfico contendo estes tempos:

Figura 17: Gráfico 3 - Tempo de cálculo do Circuito 4.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.5 Comparação dos tempos de cálculo

Em relação aos tempos cronometrados, a tabela a seguir traz cada um dos tempos obtidos na realização dos experimentos. Observa-se a partir da Tabela 6, que os tempos de cálculo referentes ao método da Eliminação de Gauss são menores em relação aos demais métodos.

Tabela 6: Tempos de cálculo para cada um dos circuitos.

Tempo (s)	Eliminação de Gauss	Métod. de Cholesky	Métod. de Gauss - Seidel
Circuito 1	0.000316	0.0013172	0.0376791
Circuito 2	0.000529	0.0016185	0.0600239
Circuito 3	0.000917	-	-
Circuito 4	0.0012927	0.0014763	0.1306011

Fonte: Elaborada pelo autor.

6 Discussão dos resultados

A partir do conteúdo abordado e dos experimentos realizados, é necessário realizar uma análise a respeito dos dados obtidos na aplicação de métodos numéricos no estudo de sistemas lineares.

Primeiramente, quando observa-se os resultados obtidos no Circuito 1 nota-se que todos os métodos obtiveram convergência, quando foram aplicados ao seu sistema linear. Além disso, os valores que foram obtidos foram os mesmos em todos os experimentos, o que mostra uma boa eficiência de todos os métodos no quesito precisão de resultado, porém, quando é analisado o tempo para a resolução desses cálculos, o método que se mostra mais rápido é o da Eliminação de Gauss, já que ele chegou ao mesmo resultado em uma velocidade consideravelmente superior aos demais.

Em relação ao sistema linear do Circuito 2, análogamente ao problema anterior, notou-se que todos os métodos obtiveram êxito em relação a convergência do resultado, sendo estes resultados iguais em todos os testes, mostrando novamente uma boa precisão dos resultados. Em relação ao tempo, novamente o método de Eliminação de Gauss apresentou um melhor desempenho, já que realizou os cálculos com a mesma precisão dos demais em um menor tempo.

Partindo dos resultados do Circuito 3, pode-se dizer que diferente dos experimentos anteriores apenas um método conseguiu apresentar as soluções do sistema linear, sendo este método o da Eliminação de Gauss. O método de Cholesky, quando aplicado retornou que a matriz não é positiva definida, e como foi verificado a partir da Condição 2 a matriz realmente não possui essa propriedade. Para o método de Gauss-Seidel, o programa retornou que o sistema não converge e portanto, foi analisado que o sistema não obedece ao critério de Sassenfeld, o que pode implicar na não convergência a partir deste método.

Em relação aos resultados obtidos no Circuito 4, é possível observar que assim como a maior parte dos exemplos anteriores o sistema linear obteve solução por meio de todos os métodos. Com base nisso, observa-se que para o método de Cholesky o resultado referente ao valor da corrente elétrica da malha 4 (I_4), apresentou uma diferença em relação aos resultados alcançados pelo método da Eliminação de Gauss e Gauss-Seidel. Em função disso, foi necessário o cálculo do resíduo e, portanto, seus resultados mostraram que os métodos da Eliminação de Gauss e Gauss-Seidel chegaram a soluções mais precisas, já que os valores do resíduo foram mais próximos de zero. Em relação ao tempo, novamente o método da Eliminação de Gauss obteve um melhor desempenho, visto que chegou a soluções precisas em um intervalo de tempo inferior, porém, o tempo de cálculo observado no método de Cholesky foi bastante próximo ao observado na Eliminação Gaussiana, fato que não foi comum aos exemplos anteriores.

7 Considerações Finais

Desse modo, a partir do estudo teórico e das experiências realizadas, é possível concluir que o método numérico de resolução de sistemas lineares mais vantajoso para que seja determinada a corrente elétrica é o método da Eliminação de Gauss, já que este possui uma ótima precisão, além de tempo de cálculo inferior aos métodos de Cholesky e Gauss-Seidel, mesmo quando utilizado em sistemas lineares com um grande número de equações, como por exemplo, o Circuito 4, e, portanto, devido a estas características sua eficiência é superior aos demais métodos abordados.

Referências

ÁVILA, S. L. **Cálculo Numérico aplicado á Engenharia Elétrica com MATLAB**. IFSC, 2019. Disponível em: https://www.ifsc.edu.br/documents/30701/523474/livro_calculo_numerico_AVILA_final.pdf/73592cec-4ae3-4f43-98ff-5da567c1a60e.

FRANCO, N. B. **Cálculo numérico**. [S.l.]: Pearson, 2006.

HALLIDAY. **Fundamentos de física - Volume 3 : Eletromagnetismo**. [S.l.]: LTC, 2009.

REAMAT. **Cálculo Numérico: Um livro colaborativo - Versão Scilab**. UFRGS, 2020. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-sci/livro-sci.pdf>.

SCILAB. **Start a Stopwatch Timer**. 2015. Disponível em: https://help.scilab.org/doc/5.5.2/en_US/tic.html. Acesso em: 18 de Janeiro de 2022.

WOLFRAM. **Positive Definite Matrix**. 2022. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/PositiveDefiniteMatrix.html>. Acesso em: 18 de Janeiro de 2022.

YOUNG, H.; FREEDMAN, R. **Sears & Zemansky física III: eletromagnetismo**. [S.l.]: Pearson, 2016.