



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA E TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

THYAGO CHRYSTIANN DA SILVA LOPES

**SIMULAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS
APLICADAS AOS ENSAIOS DE UM TRANSFORMADOR**

MOSSORÓ

2020

THYAGO CHRYSTIANN DA SILVA LOPES

**SIMULAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS
APLICADAS AOS ENSAIOS DE UM TRANSFORMADOR**

Projeto de Engenharia Elétrica apresentado a
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
como requisito para obtenção do título de
Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Victor de Paula Brandão Aguiar,
Prof. Dr.

Co-orientador: Antônio Sérgio Bezerra
Sombra, Prof. Dr.

MOSSORÓ

2020

©Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata, exceto as pesquisas que estejam vinculadas ao processo de patenteamento. Esta investigação será base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) seja devidamente citado e mencionado os seus créditos bibliográficos.

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas
da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L891s Lopes, Thyago Chrystiann da Silva.
Simulações Por Elementos Finitos Aplicadas Aos
Ensaaios De Um Transformador / Thyago Chrystiann
da Silva Lopes. - 2020.
70 f. : il.

Orientador: Victor de Paula Brandão Aguiar.
Coorientador: Antônio Sérgio Bezerra Sombra.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Engenharia
Elétrica, 2020.

1. Ensaio a vazio. 2. Ensaio de curto-
circuito. 3. Modelagem por elementos finitos. 4.
Transformadores. I. Aguiar, Victor de Paula
Brandão, orient. II. Sombra, Antônio Sérgio
Bezerra, co-orient. III. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

THYAGO CHRYSTIANN DA SILVA LOPES

**SIMULAÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS
APLICADAS AOS ENSAIOS DE UM TRANSFORMADOR**

Projeto de Engenharia Elétrica apresentado a
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
como requisito para obtenção do título de
Bacharel em Engenharia Elétrica.

Defendida em: ____ / ____ / 2 ____.

BANCA EXAMINADORA

Victor de Paula Brandão Aguiar, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

Antônio Sérgio Bezerra Sombra, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Kleymilson do Nascimento Souza, Prof. Dr. (UFOB)
Membro Examinador

Isaac Barros Tavares da Silva, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

RESUMO

No presente trabalho, é apresentada a aplicação do método dos elementos finitos para a determinação de parâmetros construtivos de um transformador, no qual o mesmo foi previamente analisado por meio de procedimentos experimentais, denominados ensaios. Os principais ensaios realizados em transformadores são o ensaio a vazio e o ensaio de curto-circuito. O método dos elementos finitos é um método numérico que, por meio de procedimentos computacionais em um ambiente virtual, é capaz de simular o funcionamento de máquinas elétricas, tais como um transformador. A aplicação do método é realizada por meio do *software* COMSOL Multiphysics, um programa de análise de elementos finitos e simulações multifísicas. Na simulação por elementos finitos considera-se a conexão com circuitos elétricos, o funcionamento no domínio do tempo, bem como as características dos materiais do transformador. Após a aplicação do método, realiza-se uma comparação entre resultados simulados e experimentais. Os resultados simulados do ensaio a vazio apresentam erros percentuais elevados, se comparados aos erros percentuais dos resultados simulados do ensaio de curto-circuito. Enquanto na simulação do ensaio a vazio os erros percentuais dos parâmetros situam-se entre 14,52% e 204,03%, com um único parâmetro apresentando erro de 0,08%; na simulação do ensaio de curto-circuito os parâmetros apresentam erros percentuais entre 0,00% e 2,64%, com um único parâmetro apresentando erro de 83,17%. Considerações a respeito dos erros apresentados são realizadas, bem como são realizadas discussões sobre o método dos elementos finitos ser uma técnica útil para a utilização em conjunto com procedimentos experimentais, podendo ser aplicada para fins de projeto, pesquisa, e, principalmente, de ensino, sendo capaz de compor um modelo híbrido de ensino.

Palavras-chave: Ensaio a vazio. Ensaio de curto-circuito. Modelagem por elementos finitos. Transformadores.

ABSTRACT

In the present work, the application of the finite element method for the determination of constructive parameters of a transformer, in which it was previously analyzed by means of experimental procedures, called tests. The main tests carried out on transformers are the open-circuit test and the short-circuit test. The finite element method is a numerical method that, through computational procedures in a virtual environment, is able to simulate the functioning of electrical machines, such as a transformer. The method is applied using the COMSOL Multiphysics software, a program for analyzing finite elements and multiphysical simulations. In finite element simulation the connection with electrical circuits, the operation in the time domain, as well as the materials characteristics of the transformer are considered. After applying the method, a comparison is made between simulated and experimental results. The simulated results of the open-circuit test show high percentage errors, when compared to the percentage errors of the simulated results of the short-circuit test. While in the simulation of the open-circuit test the percentage errors of the parameters are between 14.52% and 204.03%, with a single parameter presenting an error of 0.08%; in the simulation of the short-circuit test, the parameters show percentage errors between 0.00% and 2.64%, with a single parameter showing an error of 83.17%. Considerations regarding the errors presented are made, as well as discussions about the finite element method being a useful technique for use in conjunction with experimental procedures, which can be applied for the purposes of design, research, and, mainly, teaching, being able to compose a hybrid teaching model.

Keywords: Open-circuit test. Short-circuit test. Finite elements modeling. Transformers.

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 1 - Circuito Equivalente.	14
Figura 2 - Circuito Equivalente do Ensaio a Vazio.	15
Figura 3 - Circuito Equivalente do Ensaio de Curto-Circuito.	16
Figura 4 - Corte do Domínio do Transformador.	20
Figura 5 - a) Malha. b) Tetraedro linear.	24
Figura 6 - Circuito Conectado ao Transformador.	32
Figura 7 - Curva BH.	36
Figura 8 - Malha Genérica.	42
Figura 9 - a) I_{EAV} de 0 a 0,1 s. b) I_{EAV} de 0,1 a 0,5 s.	45
Figura 10 - Tensão de Curto-Circuito.	45
Figura 11 - a) B_{EAV} . b) Local de obtenção de B_{EAV}	47
Figura 12 - B_{EAV} no Corte da Geometria do Transformador Durante o: a) Pico da Corrente de <i>In-rush</i> . b) Regime Permanente.	48
Figura 13 - B_{EAV} na Superfície do Transformador Durante o Pico da Corrente de <i>In-rush</i>	49
Figura 14 - EAV: a) Direção do Fluxo Magnético. b) Fluxo Disperso.	49
Tabela 1 - Resultados Simulados e Experimentais dos Parâmetros dos Ensaio.	46

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EAV	Ensaio a vazio
ECC	Ensaio de curto-circuito
MEF	Método dos elementos finitos
CAD	<i>Computer-aided design</i>
PVC	Problema de valor de contorno
ED	Equação diferencial
PVM	Potencial vetor magnético
DDT	Discretização no domínio do tempo
BDF	<i>Backward difference</i>
MNR	Método de Newton-Raphson
RMS	<i>Root mean square</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

V_1	Tensão do enrolamento primário
V_2	Tensão do enrolamento secundário
I_1	Corrente do enrolamento primário
I_2	Corrente do enrolamento secundário.
I_φ	Corrente de excitação.
R_{eq}	Resistência equivalente dos enrolamentos.
X_{eq}	Reatância equivalente dos enrolamentos.
R_c	Resistência do núcleo.
X_m	Reatância de magnetização.
V_{EAV}	Tensão a vazio
I_{EAV}	Corrente a vazio
P_{EAV}	Potência ativa a vazio
V_{ECC}	Tensão de curto-circuito
I_{ECC}	Corrente de curto-circuito
P_{ECC}	Potência ativa de curto-circuito
S_n	Potência aparente nominal do transformador
V_n^P	Tensão nominal do enrolamento primário
I_n^P	Corrente nominal do enrolamento primário
Ω	Domínio
Γ	Fronteira
$\vec{n}$	Vetor unitário normal à fronteira
P	Primário
S	Secundário
$\vec{E}$	Vetor intensidade de campo elétrico
$\vec{H}$	Vetor intensidade de campo magnético
$\vec{J}_e$	Vetor densidade de corrente elétrica externa

$\vec{B}$	Vetor densidade de campo magnético
$\partial/\partial t$	Derivada parcial em relação ao tempo
σ	Condutividade elétrica
ν	Relutividade magnética
$\vec{V}$	Campo vetorial qualquer
$\vec{A}$	Potencial vetor magnético
I_{cir}	Corrente elétrica de um circuito
$\vec{e}$	Vetor densidade de corrente elétrica
N_{esp}	Número de espiras de um enrolamento
S_{dom}	Seção reta do domínio de um enrolamento
ν_0	Relutividade magnética no vácuo
ν_r	Relutividade magnética relativa
σ_{Ω_2}	Condutividade elétrica do domínio Ω_2
e	Elemento
$\vec{A}^e$	Potencial vetor magnético dentro de um elemento e
a, b, c, d	Coefficientes da função de interpolação do potencial vetor magnético dentro de um elemento
x, y, z	Coordenadas de um elemento
$[a]$	Matriz dos coeficientes da função de interpolação do potencial vetor magnético dentro de um elemento
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Coefficientes da função de forma
$[C]$	Matriz dos coeficientes da função de forma
V	Volume do elemento
N	Função de forma
$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$	Vetores unitários das coordenadas tridimensionais
A_c^e	Componente do potencial vetor magnético dentro de um elemento e , com $c = x, y, z$
A_{ci}^e	Componente do potencial vetor magnético em um nó i dentro de um elemento e , com $c = x, y, z$

W	Função de aproximação do método de Galerkin
Res	Resíduo
$\vec{N}_j^T$	Transposta do vetor função de forma em um nó j
$\vec{U}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	Campos vetoriais quaisquer
U	Campo escalar genérico
$[S^e], [T^e],$ $[D^e]$	Matrizes da equação do campo
V_{cir}	Tensão de alimentação do transformador
R	Resistência de um enrolamento
V_{ind}	Tensão induzida
l	Comprimento médio de um enrolamento
σ_{enr}	Condutividade elétrica de um enrolamento
S_{enr}	Seção reta de um enrolamento
φ	Fluxo magnético
t	Instante de tempo
Δt	Passo temporal
β	Coefficiente que caracteriza o método de discretização no domínio do tempo empregado
k	Número de interação
x	Incógnita qualquer
Δx	Variação do valor da incógnita
ε	Erro pré-estabelecido para o método de Newton-Raphson
$[J(x^k)]$	Matriz Jacobiana
$[P^e(\vec{A}^e _t^k)]$	Matriz proveniente da aplicação do método de Newton-Raphson
N_m	Número de nós da malha
$[G]$	Matriz global dos coeficientes
$[X]$	Matriz das incógnitas

$[F]$	Matriz das fontes
V_t	Tensão de um instante t
I_t	Corrente em um instante t
i, j, k, n	Coefficientes genéricos

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	12
2 ENSAIOS EM TRANSFORMADORES.....	14
2.1 Ensaio a Vazio.....	14
2.2 Ensaio de Curto-Circuito.....	16
3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	18
4 DEFINIÇÃO DO MODELO DO TRANSFORMADOR.....	20
4.1 Problema de Valor de Contorno e Equação do Campo.....	20
4.2 Discretização do Domínio.....	23
4.3 Método de Galerkin.....	29
4.4 Equação do Circuito Elétrico.....	32
4.5 Simulação do Ensaio a Vazio.....	34
4.5.1 Discretização no Domínio do Tempo.....	34
4.5.2 Curva BH e Método de Newton-Raphson.....	35
4.5.3 Aplicação do Método de Newton-Raphson.....	38
4.6 Simulação do Ensaio de Curto-Circuito.....	40
4.7 Formação da Matriz Global e Solução da Equação Global.....	41
5 RESULTADOS.....	45
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	50
REFERÊNCIAS.....	52
ANEXO A - DEMONSTRAÇÃO DAS MATRIZES.....	54
A.1 Matriz $[S^e]$	55
A.2 Matriz $[T^e]$	63
A.3 Matriz $[D^e]$	65
A.4 Matriz $\left[P^e \left(\vec{A}^e \Big _t^k \right) \right]$	67

1 INTRODUÇÃO

Em virtude dos avanços tecnológicos alcançados recentemente, ferramentas computacionais demonstram grande utilidade em aplicações nas engenharias em geral (BASTOS E SADOWSKI, 2013), servindo como via alternativa para análises dos mais variados problemas ou como meio principal para este mesmo fim. Na lista de ferramentas computacionais estão os métodos numéricos, que consistem em algoritmos que realizam operações matemáticas com objetivo de encontrar soluções aproximadas para os mais diversos problemas (SADIKU, 2000). No escopo da engenharia elétrica, a necessidade de análises precisas em máquinas elétricas tornou o emprego de métodos numéricos indispensável (BASTOS E SADOWSKI, 2013).

Na disciplina Conversão Eletromecânica de Energia 1, cujo o principal objeto de estudo é o transformador elétrico, existe uma prática laboratorial intitulada de “Ensaio em Transformadores Monofásicos”, que ensina os alunos a realizar Ensaio a vazio (EAV) e Ensaio de curto-circuito (ECC) em transformadores monofásicos. Nesta prática, são realizados procedimentos que consistem na alimentação do transformador, a utilização de equipamentos de medição, o uso dos dados obtidos para a determinação dos parâmetros solicitados, bem como é realizada uma breve fundamentação teórica a respeito do funcionamento do transformador nas condições dos ensaios.

No contexto da prática laboratorial citada, a aplicação de métodos numéricos é realizada com o intuito de possibilitar a previsão dos resultados dos ensaios em um ambiente virtual (LOPES *et al.*, 2020). Alguns exemplos de métodos numéricos disponíveis são: o método dos elementos discretos, método dos volumes finitos, método dos elementos de contorno, método das diferenças finitas e Método dos elementos finitos (MEF), nos quais cada um deles é preferencialmente aplicado para fins específicos. Atentando-se ao MEF, o mesmo é adequado para problemas que possuem geometrias e propriedades de materiais complexas, sendo escolhido no presente trabalho para simular os ensaios em transformadores.

A simulação por MEF dos ensaios em transformadores permite a comparação entre resultados simulados e experimentais, sendo realizada por meio do *software* comercial COMSOL Multiphysics. O COMSOL é um programa de análise e solução de elementos finitos e simulações multifísicas, e nele estão presentes ferramentas de *Computer-aided design* (CAD) que possibilitam a criação da geometria do transformador em um ambiente virtual, bem como estão presentes configurações intuitivas que tornam possível a aplicação

das formulações matemáticas que descrevem a aplicação do MEF, o fenômeno físico do funcionamento do transformador, e seus aspectos construtivos.

O MEF é um método numérico de vasta aplicabilidade nas engenharias em geral, e na engenharia elétrica em específico, uma de suas principais aplicações está na análise de máquinas elétricas, tais como motores, geradores e transformadores. A sua aplicação possibilita a análise de máquinas elétricas de geometrias complexas (SADIKU, 2000). Tal procedimento é possível em virtude de que no MEF é realizada a subdivisão da geometria dessas máquinas em pequenas partes, chamadas de elementos, onde são aplicadas as formulações matemáticas necessárias para a resolução dos fenômenos físicos desejados (LOPES *et al.*, 2020).

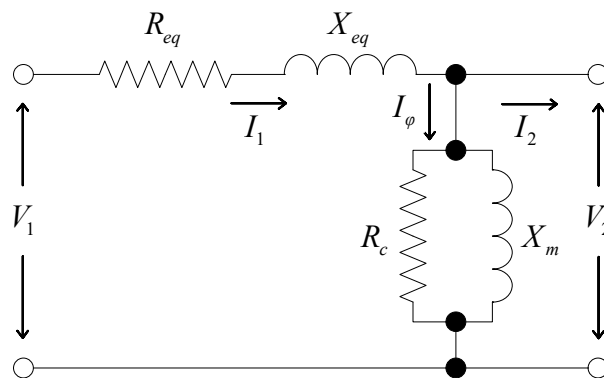
A simulação por MEF permite considerar vários aspectos presentes em um fenômeno físico. Para um transformador, o MEF possibilita levar em consideração a sua alimentação por meio de circuitos elétricos, a operação no domínio do tempo, bem como as características dos seus materiais (LOPES *et al.*, 2020).

Diante de tais características, a simulação por MEF em conjunto aos procedimentos experimentais, com eventual comparação entre resultados simulados e experimentais, proporciona maior compreensão acerca dos problemas analisados, garantindo maior confiabilidade nos resultados. Logo, espera-se que o MEF sirva como importante ferramenta para fins de ensino, projeto e pesquisa, auxiliando os procedimentos experimentais. No escopo de fins de ensino, a simulação prévia de tais procedimentos caracteriza uma pré-aula utilizando o método da sala de aula invertida (LOPES *et al.*, 2020), estimulando a aprendizagem do aluno ao introduzi-lo a métodos de ponta da ciência moderna. Portanto, espera-se também que a realização de procedimentos experimentais acompanhados da simulação por MEF possa compor um modelo híbrido de ensino, abrangendo mais de uma forma de estudar determinado assunto, enriquecendo as ferramentas necessárias para a aplicação do método científico.

2 ENSAIOS EM TRANSFORMADORES

Os ensaios realizados em transformadores são procedimentos experimentais que visam determinar alguns de seus parâmetros construtivos. Tais parâmetros representam as características do núcleo e dos enrolamentos, podendo ser utilizados agrupando-os no circuito equivalente, apresentado na Figura 1 (BIM, 2012). A construção desse circuito possibilita a análise de transformadores utilizando elementos de circuito elétrico.

Figura 1 - Circuito Equivalente.



Fonte: Autoria própria.

No Figura 1, V_1 , V_2 , I_1 e I_2 são as tensões e correntes dos enrolamentos primário e secundário, respectivamente, enquanto I_ϕ é a corrente de excitação. R_{eq} e X_{eq} representam a resistência e reatância equivalente dos enrolamentos, respectivamente, R_c é a resistência do núcleo e X_m é a reatância de magnetização.

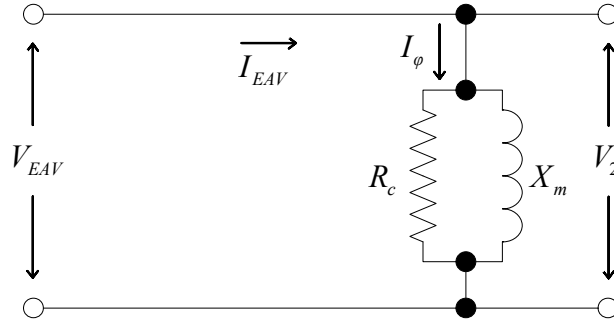
O circuito equivalente, uma vez elaborado, permite o estudo do comportamento de transformadores dispensando eventuais procedimentos experimentais, podendo ser utilizado para fins de projeto, educacionais, ou de pesquisa. Os principais ensaios empregados em transformadores são o EAV e o ECC.

2.1 Ensaio a Vazio

No EAV o enrolamento secundário do transformador é mantido a vazio (sem carga), enquanto o enrolamento primário é alimentado com sua tensão nominal. Nessa situação, mesmo a vazio, o enrolamento primário é percorrido pela corrente de excitação. Essa corrente

ocorre devido à presença de correntes parasitas no núcleo do transformador e também devido à magnetização do mesmo (UMANS, 2014). Dessa forma, o núcleo consome energia devido as características do seu material, apresentando perdas operacionais.

Figura 2 - Circuito Equivalente do Ensaio a Vazio.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 2 é representado o circuito elétrico que descreve a condição do EAV, nele V_{EAV} é a tensão a vazio (tensão nominal do enrolamento primário), I_{EAV} é a corrente a vazio (corrente de excitação) e ambos os parâmetros são obtidos utilizando equipamentos de medição. Com o enrolamento secundário a vazio, a corrente de excitação percorre apenas o enrolamento primário e o núcleo do transformador, porém na Figura 2 é possível observar apenas elementos de circuito que representam o núcleo. Isso se dá em função de que a queda de tensão no enrolamento primário é desprezível, podendo ser desconsiderados os elementos de circuito que representam os enrolamentos. Os parâmetros R_c e X_m representam as correntes parasitas e a magnetização do núcleo do transformador, respectivamente, e são determinados em:

$$R_c = \frac{V_{EAV}^2}{P_{EAV}} \quad (1)$$

$$X_m = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{I_{EAV}}{V_{EAV}}\right)^2 - \left(\frac{1}{R_c}\right)^2}}, \quad (2)$$

onde P_{EAV} é a potência ativa a vazio, sendo obtida por meio de medição.

2.2 Ensaio de Curto-Circuito

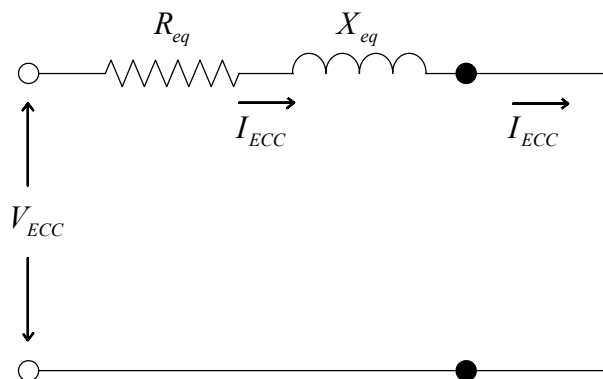
No ECC o enrolamento secundário do transformador é mantido em curto-circuito, enquanto o enrolamento primário é alimentado com a tensão que faz com que se percorra através do mesmo a sua corrente nominal (I_n^P) (UMANS, 2014). Essa tensão, denominada de tensão de curto-circuito (V_{ECC}), é obtida ao alimentar o transformador com uma fonte de tensão variável. O procedimento para determinar V_{ECC} consiste em inicialmente alimentar o transformador com tensão nula e, em seguida, deve-se aumentar cuidadosamente a tensão enquanto a corrente é monitorada por meio de equipamentos de medição. A corrente monitorada é a corrente de curto-circuito (I_{ECC}), e esse procedimento é realizado até que a mesma seja igual à corrente nominal do enrolamento primário, definida em:

$$I_n^P = \frac{S_n}{V_n^P}, \quad (3)$$

onde S_n é a potência aparente nominal do transformador e V_n^P é a tensão nominal do enrolamento primário.

O circuito do ECC é apresentado na Figura 3, nessa situação a corrente de curto-circuito percorre preferencialmente os enrolamentos do transformador, sendo muito maior que a corrente de excitação do núcleo, ou seja, $I_{ECC} \gg I_\varphi$. Desse modo, a maior parte das perdas operacionais se concentra nos enrolamentos, podendo ser desconsiderados na Figura 3 os elementos de circuito que representam o núcleo do transformador.

Figura 3 - Circuito Equivalente do Ensaio de Curto-Circuito.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 3, R_{eq} e X_{eq} descrevem as perdas ôhmicas e os efeitos da dispersão nos enrolamentos, respectivamente, e são determinadas em:

$$R_{eq} = \frac{P_{ECC}}{I_{ECC}^2} \quad (4)$$

$$X_{eq} = \sqrt{\left(\frac{V_{ECC}}{I_{ECC}}\right)^2 - R_{eq}^2}, \quad (5)$$

onde P_{ECC} é a potência ativa de curto-circuito, sendo obtida por meio de medição.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O MEF é um método numérico que consiste em procedimentos computacionais que têm como objetivo resolver Problemas de valor de contorno (PVCs). Um PVC consiste em Equações diferenciais (EDs) que atuam em uma região (Ω), chamada domínio, submetidas a restrições que atuam na fronteira (Γ) desse domínio, denominadas condições de fronteira.

O nome característico do MEF dá-se em virtude de que na sua aplicação é realizada a subdivisão da geometria do objeto de estudo em pequenas partes, chamadas de elementos (CARDOSO, 2016). Esse procedimento possibilita a análise de objetos de estudo com geometrias complexas em um ambiente virtual. Em máquinas elétricas, tais como motores, geradores e transformadores, a subdivisão de suas respectivas geometrias em pequenas regiões permite representar com fidelidade os aspectos construtivos dessas máquinas (SALON, 1995).

Para um objeto de estudo qualquer, o procedimento de subdivisão da sua geometria (domínio) possui aplicações quando realizado em conjunto com a resolução do seu PVC. No caso do transformador, com o seu domínio subdividido em elementos que podem ser tratados como pequenos domínios, o PVC é resolvido em cada um desses domínios. Desse modo, o fenômeno físico do funcionamento do transformador é analisado em cada elemento do seu domínio, e os parâmetros de interesse são estudados de forma distribuída, e não somente de forma global. Essa natureza do MEF permite o estudo de campos eletromagnéticos inerentes ao funcionamento de máquinas elétricas em geral.

Sendo um método que lida diretamente com formulações matemáticas que descrevem fenômenos físicos, para o transformador podem ser levados em consideração vários aspectos do seu funcionamento. A alimentação por meio de circuitos elétricos, a operação no domínio do tempo e as propriedades dos materiais do transformador são aspectos que podem ser levados em conta na simulação por MEF (SALON, 1995), de forma que a precisão do método está ligada à complexidade da formulação matemática empregada.

Apesar de que na simulação por MEF o PVC é resolvido em cada um dos elementos, tal procedimento não é realizado de forma individual em cada elemento. Todos os elementos são interligados entre si, de forma que a solução do PVC de um elemento sofre influência imediata da solução do PVC de um elemento vizinho. Desse modo, a resolução do PVC deve ser realizada em todos os elementos simultaneamente. Esse procedimento caracteriza a formação da matriz global dos coeficientes e resolução da equação global do MEF, onde as

soluções dos PVCs de todos os elementos são obtidas por meio de resolução de uma equação matricial.

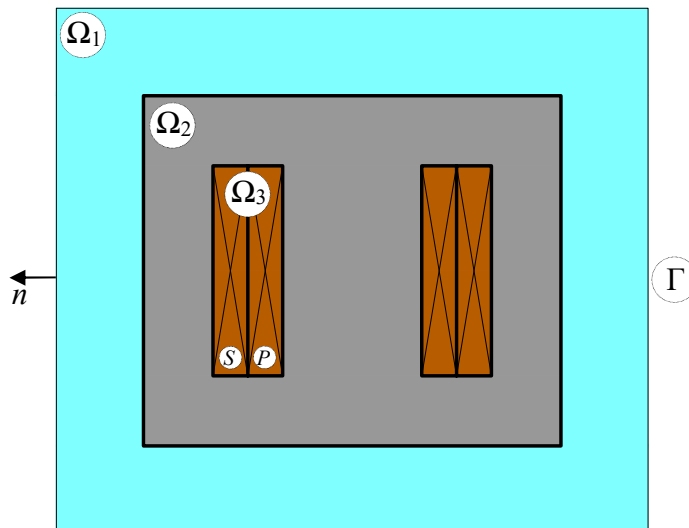
Por ser um método numérico, a simulação por MEF resulta em soluções aproximadas. A subdivisão do domínio do objeto de estudo em elementos é uma aproximação da sua geometria real, sendo um fator que pode ocasionar na introdução de discrepância entre resultados simulados e experimentais. No mais, a aplicação do MEF é realizada conforme os passos a seguir que serão explanados nos capítulos a seguir:

1. Definição do PVC;
2. Subdivisão do domínio do objeto de estudo;
3. Formação da matriz global dos coeficientes;
4. Resolução da equação global do MEF.

4 DEFINIÇÃO DO MODELO DO TRANSFORMADOR

O transformador a ser simulado por MEF pode ser encontrado em (LOPES E AGUIAR, 2018), com 150 VA, 220/110 V, operando em 60 Hz. Para a simulação, a sua geometria é modelada em 3 dimensões. No intuito de explicitar o domínio do transformador, um corte do mesmo é detalhado na Figura 4. O domínio Ω_1 caracteriza o ar que envolve o transformador, Ω_2 representa o núcleo do transformador, Ω_3 indica os enrolamentos, e a união de todos esses domínios resulta no domínio Ω . O domínio Ω_3 é subdividido nos domínios dos enrolamentos primário e secundário, indicados por P e S . A fronteira Γ representa o limite do domínio Ω , e $\vec{n}$ é o vetor unitário normal à superfície da fronteira Γ .

Figura 4 - Corte do Domínio do Transformador.



Fonte: Autoria própria.

4.1 Problema de Valor de Contorno e Equação do Campo

Dada a Figura 4 que apresenta o domínio Ω do transformador, o primeiro passo para a simulação por MEF é definir o PVC que atua nesse mesmo domínio. A operação do transformador em 60 Hz caracteriza a situação *quasi-estática*, nessa condição as equações de Maxwell na forma diferencial e variante no tempo são apresentadas em:

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_e \text{ em } \Omega \quad (6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ em } \Omega \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (8)$$

onde $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são os vetores intensidade de campo elétrico e magnético, respectivamente. $\vec{J}_e$ é o vetor densidade de corrente elétrica externa, $\vec{B}$ é o vetor densidade de fluxo magnético, $\partial/\partial t$ é a derivada parcial em relação ao tempo, e σ é a condutividade elétrica.

As condições de fronteira são apresentadas nas Equações (9) e (10), enquanto a relação constitutiva dos materiais é apresentada na Equação (11), com ν sendo a relutividade magnética:

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = \vec{0} \text{ em } \Gamma \quad (9)$$

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{0} \text{ em } \Gamma \quad (10)$$

$$\vec{H} = \nu \vec{B}. \quad (11)$$

As Equações (6) a (10) caracterizam o PVC que descreve o comportamento do campo do transformador durante a sua operação, dessa forma, estão definidas as EDs e condições de fronteira que atuam no domínio Ω e na fronteira Γ , descritos na Figura 4.

Sendo $\vec{B}$ um campo vetorial com divergente nulo, conforme a Equação (8), e utilizando a Equação (12) com $\vec{V}$ sendo um campo vetorial qualquer, é possível definir $\vec{B}$ como função do Potencial vetor magnético (PVM) (BÍRÓ; PREIS; PAUL, 1999), $\vec{A}$, de acordo com a Equação (13):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0 \quad (12)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \text{ em } \Omega. \quad (13)$$

As Equações (6), (7), (9) e (10) são formuladas com as Equações (11) e (13), tornando-se, respectivamente:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) - \sigma \vec{E} - \vec{J}_e = \vec{0} \text{ em } \Omega \quad (14)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ em } \Omega \quad (15)$$

$$\vec{n} \times \vec{A} = \vec{0} \text{ em } \Gamma \quad (16)$$

$$\left(\nu \nabla \times \vec{A}\right) \times \vec{n} = \vec{0} \text{ em } \Gamma. \quad (17)$$

Segundo o teorema de Helmholtz, um campo vetorial que se anula no infinito é único se o seu divergente e o seu rotacional são conhecidos em todo o seu domínio (FLEMING, 2003). A Equação (13) define o rotacional do PVM, restando a definição do seu divergente. Para garantir uma solução única do PVC, é necessário utilizar a condição de Coulumb (BÍRÓ; PREIS; PAUL, 1999), que apresenta o divergente do campo $\vec{A}$:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (18)$$

combinando as Equações (14) e (15), e utilizando a condição de Coulumb, obtém-se:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) - \nabla (\nu \nabla \cdot \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{J}_e = \vec{0} \text{ em } \Omega, \quad (19)$$

com a aplicação da condição de Coulumb, novas condições de fronteira necessitam ser adicionadas ao PVC, definidas em:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \text{ em } \Gamma \quad (20)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \Gamma. \quad (21)$$

A Equação (19) descreve o comportamento do campo $\vec{A}$ em função da densidade de corrente elétrica externa ($\vec{J}_e$), que pode ser definida em função de uma corrente de um circuito elétrico (I_{cir}) conectado a um enrolamento do transformador (RENYUAN *et al.*, 2000), conforme:

$$\vec{J}_e = \frac{N_{esp}}{S_{dom}} I_{cir} \vec{e}, \quad (22)$$

onde o vetor densidade de enrolamento ($\vec{e}$) é sempre tangencial aos domínios dos enrolamentos e define a direção da corrente. N_{esp} e S_{dom} são o número de espiras e a seção

reta do domínio de um enrolamento, respectivamente. Combinando as Equações (19) e (22), obtém-se:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) - \nabla (\nu \nabla \cdot \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{N_{esp}}{S_{dom}} I_{cir} \vec{e} = \vec{0} \text{ em } \Omega. \quad (23)$$

A formulação matemática final do PVC do transformador é apresentada na Equação (24), sendo composta pela equação do campo descrita na Equação (23), e pelas condições de fronteira apresentadas nas Equações (16), (17), (20) e (21):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) - \nabla (\nu \nabla \cdot \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{N_{esp}}{S_{dom}} I_{cir} \vec{e} = \vec{0} & \text{em } \Omega \\ \vec{n} \times \vec{A} = \vec{0} & \text{em } \Gamma \\ (\nu \nabla \times \vec{A}) \times \vec{n} = \vec{0} & \text{em } \Gamma \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 & \text{em } \Gamma \\ \vec{A} \cdot \vec{n} = 0 & \text{em } \Gamma \end{array} \right. \quad (24)$$

A Equação (23) pode ser apresentada de forma mais detalhada, com o comportamento do campo $\vec{A}$ e a relatividade dos materiais definidos em cada uma das subdivisões do domínio Ω , apresentadas na Figura 4:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) - \nabla (\nu \nabla \cdot \vec{A}) = \left\{ \begin{array}{lll} \vec{0} & \nu_0 & \Omega_1 \\ -\sigma_{\Omega_2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} & \nu_0 \nu_r \left(|\vec{B}|^2 \right) & \Omega_2 \\ \frac{N_{esp}}{S_{dom}} I_{cir} \vec{e} & \nu_0 \nu_r & \Omega_3 \end{array} \right. \quad (25)$$

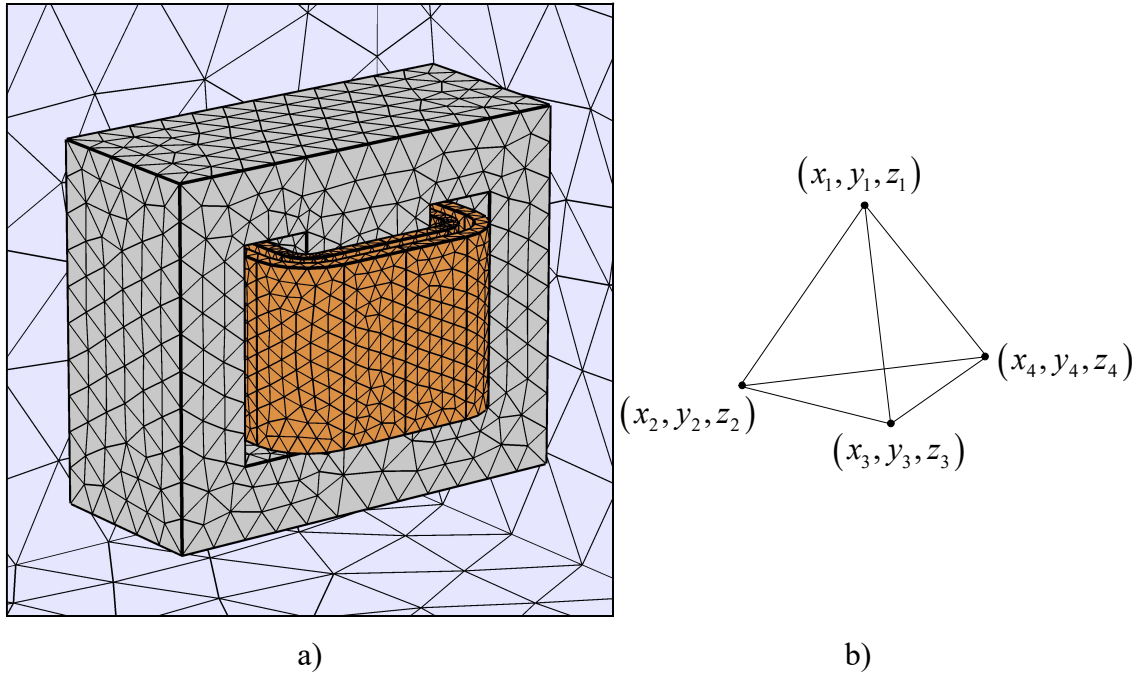
onde σ_{Ω_2} é a condutividade elétrica do domínio Ω_2 .

4.2 Discretização do Domínio

A principal característica do MEF é a subdivisão da geometria (domínio) do objeto de estudo em pequenas regiões. Aplicando esse conceito, o domínio do transformador é

subdividido conforme a Figura 5a, utilizando a junção de tetraedros lineares, entidade geométrica da Figura 5b. Esses tetraedros são interligados por meio de seus vértices, formando uma malha, no qual cada tetraedro é um elemento da malha e cada vértice é um nó da malha.

Figura 5 - a) Malha. b) Tetraedro linear.



Fonte: a) COMSOL (2020). b) Cardoso (2006).

A solução da equação do campo, apresentada na Equação (23), é obtida ao determinar o PVM em todo o domínio do transformador e, sendo o domínio representado conforme a malha da Figura 5a, é necessário definir o PVM em toda a malha. Visto que a malha é formada pelo agrupamento dos elementos, a definição do campo $\vec{A}$ na malha ocorre ao defini-lo em um elemento (e) qualquer. Esse procedimento é denominado discretização do domínio, sendo realizado por meio da seguinte função de interpolação (CARDOSO, 2016):

$$\vec{A}^e = a + bx + cy + dz, \quad (26)$$

onde a , b , c e d são coeficientes a serem determinados e x , y e z são as coordenadas do elemento. A Equação (26) é escrita para cada um dos quatro nós do elemento, resultando no sistema a seguir:

$$\begin{cases} \vec{A}_1^e = a + bx_1 + cy_1 + dz_1 \\ \vec{A}_2^e = a + bx_2 + cy_2 + dz_2 \\ \vec{A}_3^e = a + bx_3 + cy_3 + dz_3 \\ \vec{A}_4^e = a + bx_4 + cy_4 + dz_4 \end{cases}, \quad (27)$$

com sua forma matricial apresentada em:

$$\begin{bmatrix} \vec{A}_1^e \\ \vec{A}_2^e \\ \vec{A}_3^e \\ \vec{A}_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[\vec{A}^e] = [C][a].$$

A matriz $[a]$ é obtida ao realizar a inversão da matriz $[C]$ por meio do método da matriz adjunta, conforme:

$$[a] = [C]^{-1} [\vec{A}^e]$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_1^e \\ \vec{A}_2^e \\ \vec{A}_3^e \\ \vec{A}_4^e \end{bmatrix}, \quad (29)$$

onde os coeficientes α_i , β_i , γ_i e δ_i em um nó i são obtidos a partir da relação da Equação (30) por meio do método da matriz dos cofatores, e o volume do elemento (V) é definido na relação da Equação (31):

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Exemplificando a relação da Equação (30), os coeficientes α_1 , β_1 , γ_1 e δ_1 são definidos como:

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (32)$$

$$\beta_1 = - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (33)$$

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (34)$$

$$\delta_1 = - \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}. \quad (35)$$

A Equação (26) pode ser escrita conforme:

$$\vec{A}^e = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \quad (36)$$

e combinando as Equações (29) e (36) tem-se:

$$\vec{A}^e = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_1^e \\ \vec{A}_2^e \\ \vec{A}_3^e \\ \vec{A}_4^e \end{bmatrix}. \quad (37)$$

A partir da Equação (37), é possível definir a função de forma de acordo com:

$$[N] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4],$$

onde a função de forma em um nó i é dada por:

$$N_i = \frac{1}{6V} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y + \delta_i z). \quad (39)$$

Com a definição da função de forma, é possível escrever a Equação (37) como:

$$\vec{A}^e = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{bmatrix} \vec{A}_1^e \\ \vec{A}_2^e \\ \vec{A}_3^e \\ \vec{A}_4^e \end{bmatrix}, \quad (40)$$

resultando em:

$$\vec{A}^e = N_1 \vec{A}_1^e + N_2 \vec{A}_2^e + N_3 \vec{A}_3^e + N_4 \vec{A}_4^e. \quad (41)$$

Sendo o PVM definido em 3 dimensões, é possível escrevê-lo como:

$$\vec{A}_i^e = \vec{x} A_{xi}^e + \vec{y} A_{yi}^e + \vec{z} A_{zi}^e, \quad (42)$$

com $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ sendo os vetores unitários das coordenadas e A_{xi}^e , A_{yi}^e e A_{zi}^e as componentes de $\vec{A}_i^e$. Dessa forma, combinando as Equações (41) e (42), obtém-se:

$$\vec{A}^e = \vec{x} \sum_{i=1}^4 N_i A_{xi}^e + \vec{y} \sum_{i=1}^4 N_i A_{yi}^e + \vec{z} \sum_{i=1}^4 N_i A_{zi}^e, \quad (43)$$

assim, as componentes do PVM A_x^e , A_y^e e A_z^e são definidas em:

$$A_c^e = \vec{c} \sum_{i=1}^4 N_i A_{ci}^e \text{ para } c = x, y, z, \quad (44)$$

e por meio da Equação (44), a Equação (43) pode ser escrita como:

$$\vec{A}^e = \vec{x} A_x^e + \vec{y} A_y^e + \vec{z} A_z^e. \quad (45)$$

A forma matricial da Equação (43) é apresentada em:

$$\vec{A}^e = \begin{bmatrix} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [N] & 0 \\ 0 & 0 & [N] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x^e \\ A_y^e \\ A_z^e \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\vec{A}^e = \vec{N} [A^e],$$

e com a Equação (46), é possível observar que a definição do PVM dentro de um elemento dá-se em função das suas componentes em cada um dos nós do elemento, e também em função da função de forma. Vale salientar que a presente definição do PVM dentro de um elemento é uma aproximação, visto que a mesma é realizada por meio de uma função de interpolação.

A Equação (47) é a forma expandida da Equação (46), e nela é possível observar que o PVM possui 12 incógnitas dentro de um elemento, cada componente de $\vec{A}^e$ apresenta uma incógnita por nó:

$$\vec{A}^e = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{x1}^e \\ A_{x2}^e \\ A_{x3}^e \\ A_{x4}^e \\ A_{y1}^e \\ A_{y2}^e \\ A_{y3}^e \\ A_{y4}^e \\ A_{z1}^e \\ A_{z2}^e \\ A_{z3}^e \\ A_{z4}^e \end{bmatrix}. \quad (47)$$

4.3 Método de Galerkin

O PVM é aproximado por meio de uma função de interpolação, conforme a Equação (46). Devido a essa aproximação, a equação do campo apresentada na Equação (23) possuirá uma solução aproximada, e a substituição dessa solução na própria equação do campo resulta em um resíduo, conforme:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) - \nabla (\nu \nabla \cdot \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{N_{esp}}{S_{dom}} I_{cir} \vec{e} = Res. \quad (48)$$

Para o caso de uma solução exata, a substituição da mesma na equação do campo resulta em um valor nulo, tal como na Equação (23). O método de Galerkin é um caso particular do método de resíduos ponderados, e a sua aplicação possui como objetivo minimizar o resíduo da Equação (48) (BASTOS E SADOWSKI, 2003). O método é descrito como:

$$\int_{\Omega} W \cdot Res \, d\Omega = 0, \quad (49)$$

onde W é uma função qualquer, que no caso do método de Galerkin é definida como a própria função de aproximação do PVM. Dessa forma, a Equação (49) possui valor nulo se, e

somente se, o resíduo for nulo. Essa condição força a nulificação do resíduo, garantindo que a solução aproximada seja próxima a solução exata. Aplicando o método, tem-se que:

$$\int_{\Omega} W \left[\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) - \nabla (\nu \nabla \cdot \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{N_{esp}}{S_{dom}} I_{cir} \vec{e} \right] d\Omega = 0, \quad (50)$$

e com W sendo a transposta da função de forma em um nó j ($\vec{N}_j^T$) (BASTOS E SADOWSKI, 2013), tem-se:

$$\int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \left[\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \left[\nabla (\nu \nabla \cdot \vec{A}) \right] d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega - \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \vec{e} d\Omega I_{cir} = 0. \quad (51)$$

Sejam as igualdades apresentadas nas Equações (52), (53) e (54), com $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sendo campos vetoriais quaisquer e U sendo um campo escalar qualquer:

$$\vec{U} \cdot \nabla \times \vec{V} = \vec{V} \cdot \nabla \times \vec{U} - \nabla \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) \quad (52)$$

$$\vec{V} \cdot \nabla U = \nabla \cdot (U \vec{V}) - U \nabla \cdot \vec{V} \quad (53)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}, \quad (54)$$

por meio da Equação (52) com $\vec{U} = \vec{N}_j^T$ e $\vec{V} = \nu \nabla \times \vec{A}$, o primeiro termo da Equação (51) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \left[\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) \right] d\Omega = \nu \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j^T \cdot \nabla \times \vec{A} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[\vec{N}_j^T \times (\nu \nabla \times \vec{A}) \right] d\Omega, \quad (55)$$

utilizando o teorema da divergência tem-se que:

$$\int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \left[\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) \right] d\Omega = \nu \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j^T \cdot \nabla \times \vec{A} d\Omega - \int_{\Gamma} \left[\vec{N}_j^T \times (\nu \nabla \times \vec{A}) \right] \cdot \vec{n} d\Gamma, \quad (56)$$

modificando o segundo termo após a igualdade da Equação (56) por meio da Equação (54) com $\vec{a} = \vec{N}_j^T$, $\vec{b} = \nu \nabla \times \vec{A}$ e $\vec{c} = \vec{n}$ obtém-se:

$$\int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \left[\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) \right] d\Omega = \nu \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j^T \cdot \nabla \times \vec{A} d\Omega - \int_{\Gamma} \left[(\nu \nabla \times \vec{A}) \times \vec{n} \right] \cdot \vec{N}_j^T d\Gamma, \quad (57)$$

com o termo anulado da Equação (57) devendo-se à utilização da condição de fronteira da Equação (17). Já por meio da Equação (53) com $\vec{V} = \vec{N}_j^T$ e $U = \nu \nabla \cdot \vec{A}$, o segundo termo da Equação (51) pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \left[\nabla (\nu \nabla \cdot \vec{A}) \right] d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nu \nabla \cdot \vec{A} \vec{N}_j^T) d\Omega - \nu \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{N}_j^T \nabla \cdot \vec{A} d\Omega, \quad (58)$$

e por meio do teorema da divergência tem-se que:

$$\int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \left[\nabla (\nu \nabla \cdot \vec{A}) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \nu \nabla \cdot \vec{A} \vec{N}_j^T \cdot \vec{n} d\Gamma - \nu \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{N}_j^T \nabla \cdot \vec{A} d\Omega, \quad (59)$$

com o termo anulado da Equação (59) devendo-se à utilização da condição de fronteira da Equação (20). Então, combinando as Equações (57) e (59) com a Equação (51), obtém-se:

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j^T \cdot \nabla \times \vec{A} d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{N}_j^T \nabla \cdot \vec{A} d\Omega + \sigma \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega - \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \vec{e} d\Omega I_{cir} = 0, \quad (60)$$

e utilizando a discretização do PVM tem-se que:

$$\left(\nu \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j^T \cdot \nabla \times \vec{N}_i d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{N}_j^T \nabla \cdot \vec{N}_i d\Omega \right) A^e + \sigma \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \vec{N}_i d\Omega \frac{\partial A^e}{\partial t} - \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \vec{e} d\Omega I_{cir} = 0, \quad (61)$$

com sua forma matricial definida em:

$$\nu [S^e] \{A^e\} + [T^e] \left\{ \frac{\partial A^e}{\partial t} \right\} - [D^e] \{I_{cir}\} = \{0\}, \quad (62)$$

onde as matrizes $[S^e]$, $[T^e]$ e $[D^e]$ em um elemento são definidas em:

$$[S^e] = \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j^T \cdot \nabla \times \vec{N}_i d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{N}_j^T \nabla \cdot \vec{N}_i d\Omega \quad (63)$$

$$[T^e] = \sigma \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \vec{N}_i d\Omega \quad (64)$$

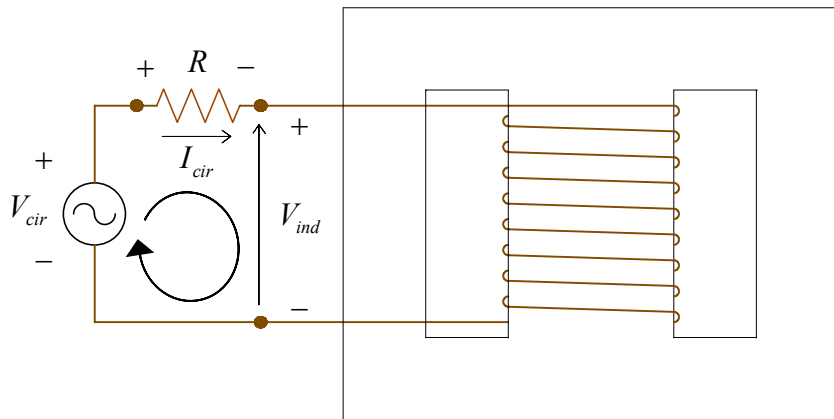
$$[D^e] = \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \vec{e} d\Omega. \quad (65)$$

A demonstração das matrizes $[S^e]$, $[T^e]$ e $[D^e]$ das Equações (63), (64) e (65), respectivamente, são apresentadas no Anexo A.

4.4 Equação do Circuito Elétrico

No intuito de considerar parâmetros práticos utilizados nos ensaios, tais como a tensão de alimentação do transformador (V_{cir}) e a corrente do circuito (I_{cir}) conectado a um enrolamento do transformador, é necessário definir a equação do circuito elétrico para ser utilizada em um eventual acoplamento com a equação do campo (RENYUAN *et al.*, 2000). Desse modo, na Figura 6 está representado o circuito elétrico conectado ao enrolamento primário do transformador.

Figura 6 - Circuito Conectado ao Transformador.



Fonte: Autoria própria.

Percorrendo a malha do circuito da Figura 6, a tensão de alimentação do transformador é definida na Equação (66), com R sendo a resistência do enrolamento e V_{ind} sendo a tensão induzida por esse enrolamento:

$$V_{cir} = RI_{cir} + V_{ind} , \quad (66)$$

onde R é definida de acordo com:

$$R = \frac{N_{esp} l}{\sigma_{enr} S_{enr}} , \quad (67)$$

sendo N_{esp} , l , σ_{enr} e S_{enr} o número de espiras, o comprimento médio, a condutividade e a seção reta do enrolamento, respectivamente.

Utilizando a lei de Faraday, a Equação (66) é escrita como:

$$V_{cir} = RI_{cir} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} , \quad (68)$$

com o fluxo magnético (φ) sendo definido em:

$$\varphi = \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \vec{A} \cdot \vec{e} d\Omega . \quad (69)$$

onde S_{dom} é a seção reta do domínio do enrolamento. Dessa forma, combinando as Equações (68) e (69) tem-se:

$$V_{cir} = RI_{cir} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \vec{A} \cdot \vec{e} d\Omega , \quad (70)$$

e utilizando a discretização do PVM:

$$\frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \vec{N}_i \cdot \vec{e} d\Omega \frac{\partial A^e}{\partial t} + RI_{cir} - V_{cir} = 0 , \quad (71)$$

com sua forma matricial apresentada em:

$$\left[D^e \right]^T \left\{ \frac{\partial A^e}{\partial t} \right\} + [R] \{ I_{cir} \} - \{ V_{cir} \} = \{ 0 \}, \quad (72)$$

onde a matriz $\left[D^e \right]^T$ é a transposta da matriz da Equação (65), sendo definida como:

$$\left[D^e \right]^T = \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \vec{N}_i \cdot \vec{e} d\Omega. \quad (73)$$

4.5 Simulação do Ensaio a Vazio

De acordo com o procedimento experimental do EAV, o transformador é alimentado com tensão V_{cir} conhecida, impossibilitando a resolução individual da Equação (62), pois haveriam duas incógnitas na equação do campo, $\{ A^e \}$ e $\{ I_{cir} \}$. Para este caso, a equação do campo e a equação do circuito elétrico devem ser solucionadas em conjunto por meio do sistema a seguir (ABBA E RACHEK, 2019):

$$\begin{bmatrix} v[S^e] & -[D^e] \\ 0 & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [T^e] & 0 \\ [D^e]^T & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{cir} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (74)$$

4.5.1 Discretização no Domínio do Tempo

A Discretização no domínio do tempo (DDT) é o processo de definição de uma variável nos instantes de tempo, e a sua aplicação permite considerar o funcionamento do transformador em um determinado período de tempo, sendo realizada conforme (ABBA E RACHEK, 2019):

$$\beta \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t + (1-\beta) \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_{t-\Delta t} = \frac{\begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t - \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_{t-\Delta t}}{\Delta t}, \quad (75)$$

onde t é o instante de tempo, Δt é o passo temporal e β é o coeficiente que caracteriza o método de discretização empregado, para $\beta = 1$ tem-se o *Backward difference* (BDF). Dessa forma, de acordo com a Equação (75), para o método BDF, a Equação (74) torna-se:

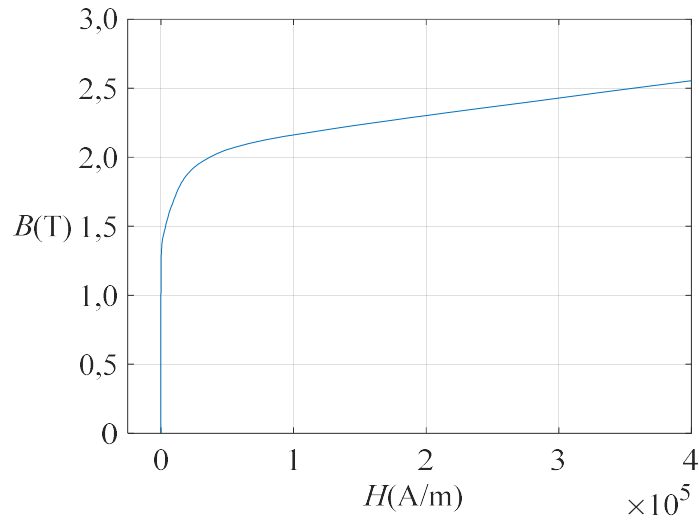
$$\begin{bmatrix} v[S^e] + \frac{[T^e]}{\Delta t} & -[D^e] \\ \frac{[D^e]^T}{\Delta t} & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t - \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} [T^e] & 0 \\ [D^e]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_{t-\Delta t} - \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{cir} \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (76)$$

Em um determinado instante de tempo t , a Equação (76) é resolvida para $\{A\}_t$ e $\{I_{cir}\}_t$, sendo conhecidos os valores de $\{A\}_{t-\Delta t}$, $\{I_{cir}\}_{t-\Delta t}$ e $\{V_{cir}\}_t$. A resolução no próximo instante de tempo dá-se com $\{A\}_{t-\Delta t}$ e $\{I_{cir}\}_{t-\Delta t}$ assumindo os valores de $\{A\}_t$ e $\{I_{cir}\}_t$ do instante de tempo anterior, de forma que a solução em um instante de tempo t depende imediatamente da solução no instante de tempo anterior $t - \Delta t$.

4.5.2 Curva BH e Método de Newton-Raphson

O material utilizado para a fabricação do núcleo do transformador apresenta entre suas características uma relação não linear entre a intensidade de campo magnético (H) e a densidade de fluxo magnético (B) caracterizada pela curva BH, ilustrada na Figura 7. Essa curva apresenta influência no comportamento de alguns parâmetros do transformador, ao ponto de que desprezá-la em uma análise colocaria em xeque a confiabilidade dos resultados.

Figura 7 - Curva BH.



Fonte: COMSOL (2020).

Para considerar a relação não linear descrita na curva BH é necessário aplicar o Método de Newton-Raphson (MNR) (SALON, 1995). O método consiste em um processo iterativo que determina uma incógnita (x) na iteração $k+1$ a partir do seu valor na iteração k , e é aplicado enquanto a variação do valor da incógnita (Δx) for maior que um erro (ϵ) pré-estabelecido, conforme:

$$\begin{aligned} \Delta x &> \epsilon \\ x^{k+1} - x^k &> \epsilon. \end{aligned} \quad (77)$$

Seja um sistema de equações não lineares com incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, \quad (78)$$

expandindo a Equação (78) na série de Taylor e realizando o truncamento após os termos de primeira ordem tem-se:

$$\begin{aligned}
f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_n^{k+1}) &= f_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) + \frac{\partial f_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots \\
&\dots + \frac{\partial f_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)}{\partial x_n} \Delta x_n = 0
\end{aligned} \tag{79}$$

com $i = 1, 2, \dots, n$, resultando em:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots \\
&\dots + \frac{\partial f(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)}{\partial x_n} \Delta x_n = -f_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)
\end{aligned} \tag{80}$$

com sua forma matricial dada por:

$$\left[J(x^k) \right]_{n \times n} \{ \Delta x \}_{n \times 1} = - \{ f_i(x^k) \}_{n \times 1}, \tag{81}$$

podendo ser escrita como:

$$\left[J(x^k) \right]_{n \times n} \{ x^{k+1} - x^k \}_{n \times 1} = - \{ f_i(x^k) \}_{n \times 1}, \tag{82}$$

onde a matriz Jacobiana $\left[J(x^k) \right]$ é dada por:

$$\left[J(x^k) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \frac{\partial f_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{83}$$

A Equação (81) é resolvida para Δx , e caso $\Delta x > \varepsilon$ o valor de Δx é somado a x^k , desse modo x^k assume o valor de x^{k+1} , e o processo é realizado novamente.

4.5.3 Aplicação do Método de Newton-Raphson

Conforme a Equação (25), a relutividade magnética do material do núcleo do transformador é definida como função de $\left|\vec{B}\right|^2$ (SALON, 1995), dessa forma:

$$v = v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right), \quad (84)$$

onde $\left|\vec{B}^e\right|_t^2$ representa o quadrado da norma do vetor densidade de fluxo magnético em um elemento e no instante t . Assim, combinando as Equações (76) e (84) tem-se:

$$\begin{bmatrix} v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)[S^e] + \frac{[T^e]}{\Delta t} & -[D^e] \\ \frac{[D^e]^T}{\Delta t} & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t - \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} [T^e] & 0 \\ [D^e]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_{t-\Delta t} - \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{cir} \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (85)$$

Aplicando o MNR na Equação (85) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)[S^e] + \frac{\partial v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)}{\partial B^2} \left[P^e\left(\vec{A}^e\right)_t\right] + \frac{[T^e]}{\Delta t} & -[D^e] \\ \frac{[D^e]^T}{\Delta t} & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta A^e \\ \Delta I_{cir} \end{Bmatrix}_t = \dots \\ & \dots - \begin{bmatrix} v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)[S^e] + \frac{[T^e]}{\Delta t} & -[D^e] \\ \frac{[D^e]^T}{\Delta t} & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} [T^e] & 0 \\ [D^e]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_{t-\Delta t} + \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{cir} \end{Bmatrix}_t, \end{aligned} \quad (86)$$

com a variação das incógnitas $\begin{Bmatrix} \Delta A^e \\ \Delta I_{cir} \end{Bmatrix}_t$ sendo:

$$\begin{Bmatrix} \Delta A^e \\ \Delta I_{cir} \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t^{k+1} - \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t^k. \quad (87)$$

O quadrado da norma do vetor $\tilde{B}^e|_t^k$ é definido como:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{B}^e|_t^k \right|^2 = & \left(\frac{\partial[N]}{\partial y} \{A_z^e\}_t^k - \frac{\partial[N]}{\partial z} \{A_y^e\}_t^k \right)^2 + \left(\frac{\partial[N]}{\partial z} \{A_x^e\}_t^k - \frac{\partial[N]}{\partial x} \{A_z^e\}_t^k \right)^2 + \dots \\ & \dots + \left(\frac{\partial[N]}{\partial x} \{A_y^e\}_t^k - \frac{\partial[N]}{\partial y} \{A_x^e\}_t^k \right)^2 \end{aligned} \quad (88)$$

com as derivadas parciais da função de forma definidas em:

$$\frac{\partial[N]}{\partial x} = \frac{1}{6V} [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4] \quad (89)$$

$$\frac{\partial[N]}{\partial y} = \frac{1}{6V} [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4] \quad (90)$$

$$\frac{\partial[N]}{\partial z} = \frac{1}{6V} [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4], \quad (91)$$

utilizando a definição da Equação (47) e as Equações (89) a (91), a Equação (88) torna-se:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{B}^e|_t^k \right|^2 = & \left\{ \frac{1}{6V} \left[\left(\gamma_1 A_{z1}^e + \dots + \gamma_4 A_{z4}^e \right)_t^k - \left(\delta_1 A_{y1}^e + \dots + \delta_4 A_{y4}^e \right)_t^k \right] \right\}^2 + \dots \\ & \dots + \left\{ \frac{1}{6V} \left[\left(\delta_1 A_{x1}^e + \dots + \delta_4 A_{x4}^e \right)_t^k - \left(\beta_1 A_{z1}^e + \dots + \beta_4 A_{z4}^e \right)_t^k \right] \right\}^2 + \dots \\ & \dots + \left\{ \frac{1}{6V} \left[\left(\beta_1 A_{y1}^e + \dots + \beta_4 A_{y4}^e \right)_t^k - \left(\gamma_1 A_{x1}^e + \dots + \gamma_4 A_{x4}^e \right)_t^k \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (92)$$

O valor do termo $\frac{\partial v \left(\left| \tilde{B}^e|_t^k \right|^2 \right)}{\partial B^2}$ pode ser obtido ao utilizar métodos de interpolação nos

dados utilizados para gerar a curva BH do núcleo do transformador, tal como o *cubic spline*, (SALON, 1995).

O processo de resolução da Equação (86) ocorre de acordo com os seguintes passos:

1. Assumem-se valores para $\begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t^k$ enquanto $\begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_{t-\Delta t}$ e $\{V_{cir}\}_t$ são conhecidos e $v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^k\right)^2$ é calculada utilizando $\{A^e\}_t^k$;
2. A equação é resolvida para $\begin{Bmatrix} \Delta A^e \\ \Delta I_{cir} \end{Bmatrix}_t$ utilizando esses valores;
3. A condição $\begin{Bmatrix} \Delta A^e \\ \Delta I_{cir} \end{Bmatrix}_t > \varepsilon$ é verificada, e caso seja verdadeira o valor de $\begin{Bmatrix} \Delta A^e \\ \Delta I_{cir} \end{Bmatrix}_t$ é somado a $\begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t^k$, desse modo $\begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t^k$ assume o valor de $\begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t^{k+1}$, e $v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^k\right)^2$ é calculada utilizando os novos valores de $\{A^e\}_t^k$;
4. Os passos 2 e 3 são repetidos enquanto $\begin{Bmatrix} \Delta A^e \\ \Delta I_{cir} \end{Bmatrix}_t > \varepsilon$.

A demonstração da matriz $\left[P^e\left(\vec{A}^e\right)_t^k\right]$ da Equação (86) é apresentada no Anexo A.

4.6 Simulação do Ensaio de Curto-Circuito

Diferente do EAV, no procedimento experimental do ECC o transformador é alimentado com corrente $\{I_{cir}\}$ conhecida, dessa forma a Equação do Campo apresenta apenas uma incógnita, $\{A^e\}$, não se fazendo necessária a resolução do sistema da Equação (74). Nesse caso, aplicando a DDT e o MNR na Equação (62), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left(v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^k\right)^2 \left[S^e\right] + \frac{\partial v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^k\right)^2}{\partial B^2} \left[P^e\left(\vec{A}^e\right)_t^k\right] + \frac{\left[T^e\right]}{\Delta t} \right) \{\Delta A^e\}_t = \dots \\ & \dots = - \left(v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^k\right)^2 \left[S^e\right] + \frac{\left[T^e\right]}{\Delta t} \right) \{A^e\}_t^k + \frac{\left[T^e\right]}{\Delta t} \{A^e\}_{t-\Delta t} + \left[D^e\right] \{I_{cir}\}_t. \end{aligned} \quad (93)$$

Após a resolução da Equação (93), $\{A^e\}$ é conhecida em todos os instantes de tempo, e a tensão de alimentação do transformador $\{V_{cir}\}_t$ pode ser obtida por meio da aplicação da DDT na Equação (72), resultando em:

$$\{V_{cir}\}_t = \frac{[D^e]^T}{\Delta t} \left(\{A^e\}_t - \{A^e\}_{t-\Delta t} \right) + [R] \{I_{cir}\}_t, \quad (94)$$

onde os elementos da matriz $[R]$ devem considerar a resistência em série dos enrolamentos primário e secundário, indicados pelos sobrescritos P e S , respectivamente, conforme:

$$R_{ij} = \frac{N_{esp}^P l^P}{\sigma_{enr} S_{enr}^P} + \left(\frac{N_{esp}^P}{N_{esp}^S} \right)^2 \frac{N_{esp}^S l^S}{\sigma_{enr} S_{enr}^S}, \quad (95)$$

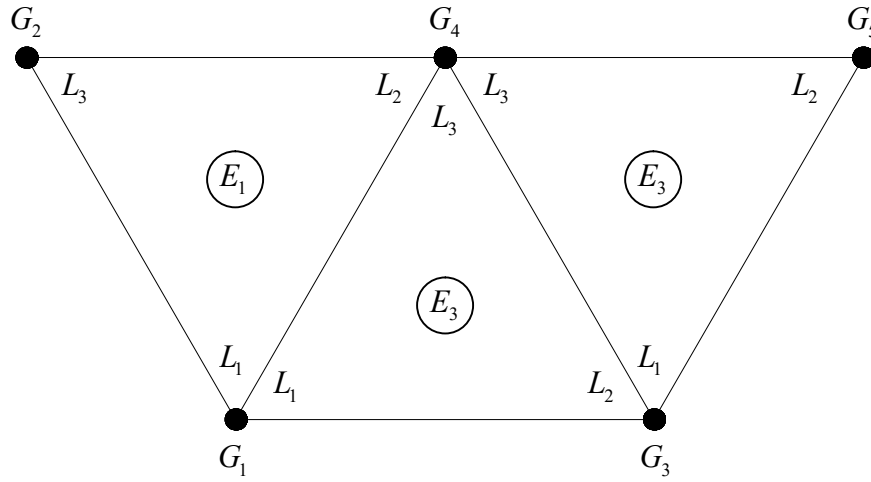
sendo N_{esp} , l , σ_{enr} e S_{enr} o número de espiras, o comprimento médio, a condutividade e a seção reta do enrolamento, respectivamente.

4.7 Formação da Matriz Global e Solução da Equação Global

Os procedimentos descritos até então tratam da aplicação do MEF para apenas um único elemento da malha, porém, a solução do PVC deve ser obtida para todos os elementos de forma simultânea. Desse modo, os PVCs de todos os elementos da malha devem ser agrupados de forma que seja levada em consideração a influência dos elementos vizinhos na solução de um determinado elemento. Para este procedimento, é utilizada a matriz global dos coeficientes (SADIKU, 2000), que agrupa os coeficientes dos PVCs de todos os elementos em uma única matriz que compõem uma única equação a ser solucionada, a equação global do MEF.

O processo de formação da matriz global dos coeficientes é melhor explicado por meio de um exemplo. Uma malha qualquer em duas dimensões com elementos triangulares, representada na Figura 8, possui elementos indicados por E_i , nós locais dos elementos indicados por L_i e nós da malha indicados por G_i .

Figura 8 - Malha Genérica.



Fonte: Sadiku (2000) (Adaptada).

A matriz global dos coeficientes possui dimensões $N_m n \times N_m n$, com N_m sendo o número de nós da malha e n sendo o número de incógnitas por nó da malha. Dessa forma, para a malha da Figura 8, com $n = 1$:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} \end{bmatrix}, \quad (96)$$

onde os elementos G_{ij} indicam o acoplamento entre os nós i e j da malha.

Observando a Figura 8, o acoplamento entre os nós 1 e 1 da malha é composto pelo acoplamento entre os nós 1 e 1 locais dos elementos 1 e 2, assim, o elemento G_{11} é definido por:

$$G_{11} = G_{11}^{(1)} + G_{11}^{(2)}, \quad (97)$$

com os elementos $G_{ij}^{(k)}$ indicando o acoplamento entre os nós locais i e j e de um elemento k . Conforme a Figura 8, o elemento G_{22} , que indica o acoplamento entre os nós 2 e 2 da malha, é composto apenas pelo acoplamento entre os nós 3 e 3 locais do elemento 1, dessa forma:

$$G_{22} = G_{33}^{(1)}. \quad (98)$$

Para o elemento G_{14} tem-se:

$$G_{14} = G_{12}^{(1)} + G_{13}^{(2)}, \quad (99)$$

visto que o acoplamento entre os nós 1 e 4 da malha pertence simultaneamente aos elementos 1 e 2, com $G_{14} = G_{41}$. O elemento G_{23} possui valor nulo, visto que não há acoplamento entre os nós 2 e 3 da malha, logo:

$$G_{23} = G_{32} = 0. \quad (100)$$

Realizando esse procedimento para todos os elementos G_{ij} da Equação (96), obtém-se:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11}^{(1)} + G_{11}^{(2)} & G_{13}^{(1)} & G_{12}^{(2)} & G_{12}^{(1)} + G_{13}^{(1)} & 0 \\ G_{31}^{(1)} & G_{33}^{(1)} & 0 & G_{32}^{(1)} & 0 \\ G_{21}^{(2)} & 0 & G_{22}^{(2)} + G_{11}^{(3)} & G_{23}^{(2)} + G_{13}^{(3)} & G_{12}^{(3)} \\ G_{21}^{(1)} + G_{31}^{(1)} & G_{23}^{(1)} & G_{32}^{(2)} + G_{31}^{(3)} & G_{22}^{(1)} + G_{33}^{(2)} + G_{33}^{(3)} & G_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & G_{21}^{(3)} & G_{23}^{(3)} & G_{22}^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Para a malha do transformador, observando a Equação (86), os elementos G_{ij} da matriz global dos coeficientes são obtidos ao definir os elementos de índice ij de um elemento k das matrizes $[S^e]$, $\left[P^e \left(\vec{A}^e \Big|_t^k\right)\right]$, $[T^e]$, $[D^e]$ e $[R]$, e repetir o procedimento realizado na malha da Figura 8.

O processo de formação da matriz global dos coeficientes define o PVC em cada um dos acoplamentos entre os nós da malha, e, conseqüentemente, define também o PVC em todos os elementos. Com esse procedimento realizado, a resolução do PVC em todos os

elementos de forma simultânea torna-se possível por meio da equação global do MEF (CARDOSO, 2016), definida conforme:

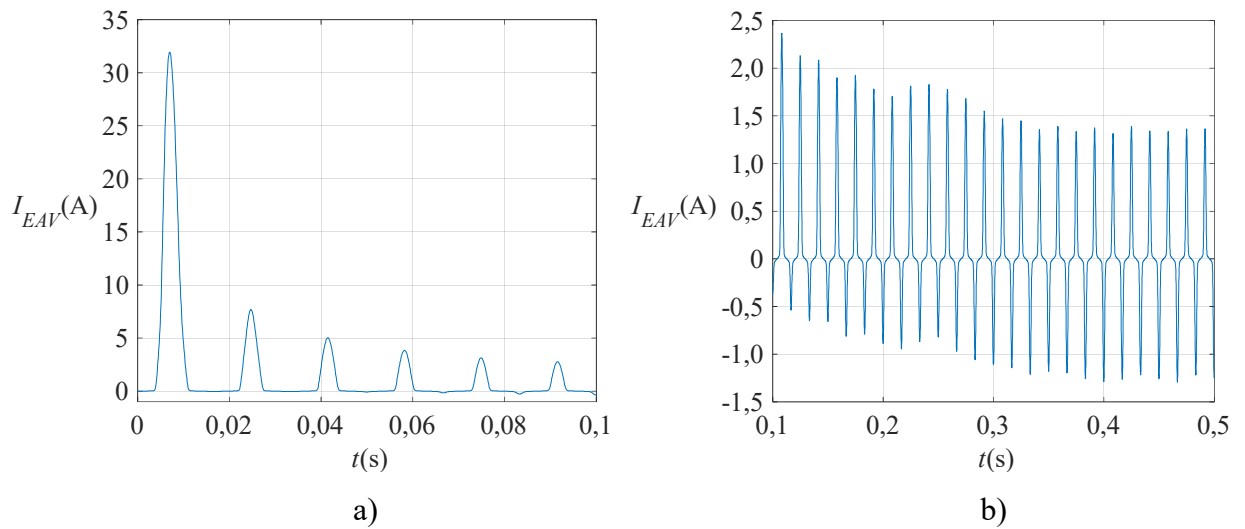
$$[G]_{N_m n \times N_m n} [X]_{N_m n \times 1} = [F]_{N_m n \times 1} \quad (102)$$

onde $[X]$ é a matriz das incógnitas, sendo composta pelas incógnitas nos nós da malha e $[F]$ é a matriz das fontes, que apresenta os valores conhecidos nesses respectivos nós.

5 RESULTADOS

As Figura 9a e Figura 9b apresentam a corrente a vazio (I_{EAV}) em intervalos de tempo distintos. Enquanto na Figura 9a observa-se um elevado valor de I_{EAV} nos instantes iniciais, na Figura 9b observa-se a estabilização de I_{EAV} após um determinado período de tempo.

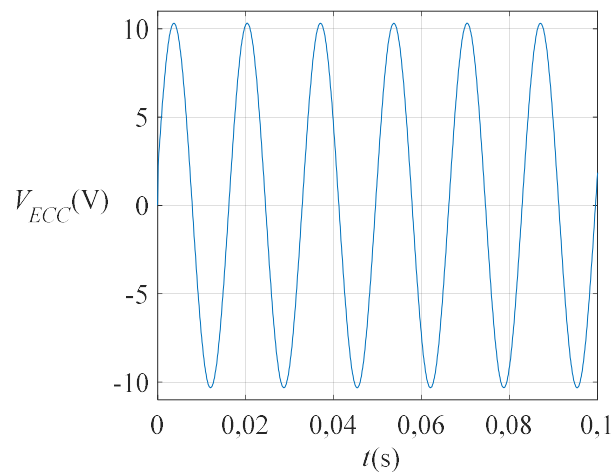
Figura 9 - a) I_{EAV} de 0 a 0,1 s. b) I_{EAV} de 0,1 a 0,5 s.



Fonte: Autoria própria.

A tensão de curto-circuito (V_{ECC}) é representada na Figura 10.

Figura 10 - Tensão de Curto-Circuito.



Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 1, os parâmetros calculados utilizando os dados da simulação do EAV e do ECC no transformador são comparados aos parâmetros obtidos por meio de procedimentos experimentais desse mesmo transformador em (LOPES E AGUIAR, 2018).

Tabela 1 - Resultados Simulados e Experimentais dos Parâmetros dos Ensaio.

EAV				ECC			
Parâmetro	Simulado	Experimental	Erro (%)	Parâmetro	Simulado	Experimental	Erro (%)
V_{EAV}	219,98 V	219,8 V	0,08	V_{ECC}	7,29 V	7,4 V	1,49
I_{EAV}	0,53 A	0,62 A	14,52	I_{ECC}	0,72 A	0,72 A	0,00
P_{EAV}	1,68 W	5,1 W	67,06	P_{ECC}	5,16 W	5,3 W	2,64
R_c	28804,29 Ω	9474,14 Ω	204,03	R_{eq}	9,95 Ω	10,22 Ω	2,64
X_m	415,1 Ω	354,74 Ω	17,02	X_{eq}	1,85 Ω	1,01 Ω	83,17

Fonte: Autoria própria.

O erro percentual apresentado na Tabela 1 é calculado conforme:

$$\text{Erro}(\%) = \frac{|X_{SIMULADO} - X_{EXPERIMENTAL}|}{X_{EXPERIMENTAL}} \cdot 100\%. \quad (103)$$

São utilizados os valores *Root mean square* (RMS) de tensão (V) e corrente (I) obtidos por meio das simulações do EAV e do ECC, necessários para o cálculo dos parâmetros das Equações (1), (2), (4) e (5), presentes na Tabela 1. Para a obtenção desses valores, são considerados os valores instantâneos de V e I entre 0,4 e 0,5 s, em regime permanente. Dessa forma, sendo t um instante de tempo, os valores RMS de V e I são determinados conforme:

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n X_t^2}{n}}, \quad (104)$$

com X sendo uma variável qualquer e n o número de instantes de tempo.

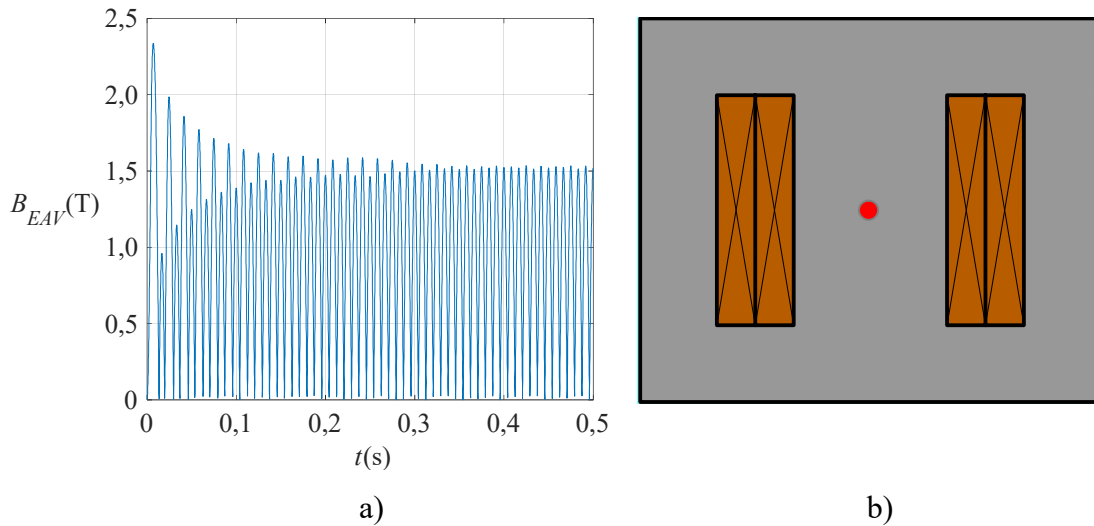
A potência ativa (P) nas simulações dos EAV e do EAV também é calculada utilizando os valores instantâneos de V e I em regime permanente, sendo definida como:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{V_i I_i}{n}, \quad (105)$$

onde V_i e I_i são os valores de tensão e corrente, respectivamente, em um instante de tempo t .

Além dos parâmetros agrupados na Tabela 1, que são diretamente relacionados aos ensaios, o MEF possibilita o estudo de outros parâmetros do transformador, alguns inviáveis de serem analisados por meio de procedimentos experimentais. Na Figura 11a é apresentada a densidade de fluxo magnético a vazio (B_{EAV}), enquanto na Figura 11b é destacado o local onde B_{EAV} foi obtida, no centro do corte da geometria do transformador.

Figura 11 - a) B_{EAV} . b) Local de obtenção de B_{EAV} .

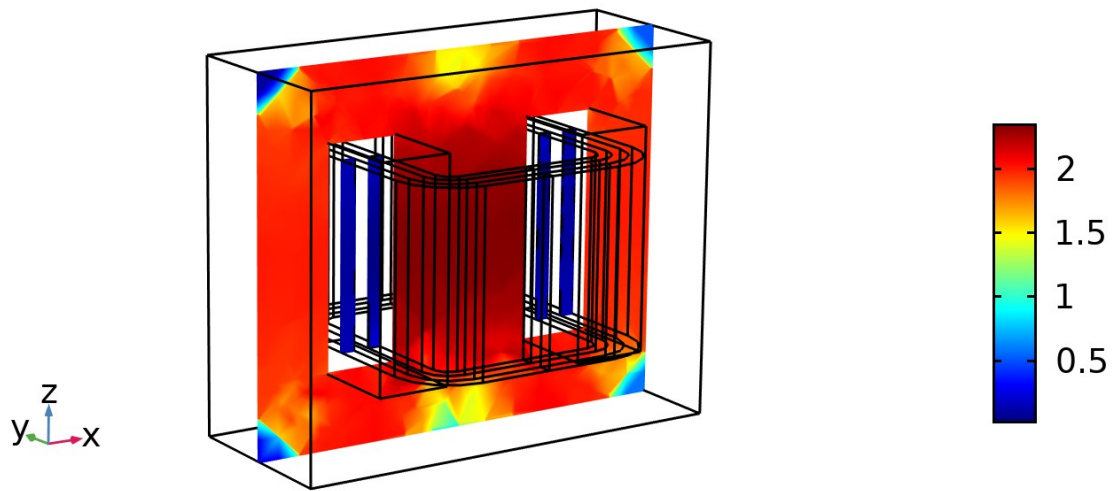


Fonte: Autoria própria.

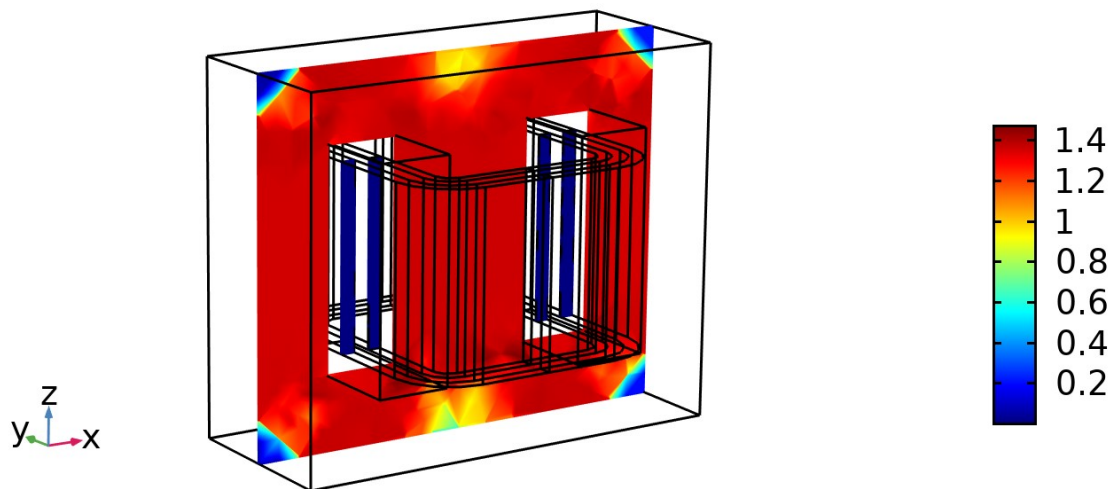
A Figura 12 apresenta a densidade de fluxo magnético a vazio ao longo de um corte no plano x-z da geometria do transformador. Nas Figura 12a e Figura 12b é possível observar as regiões onde se concentra a maior parte do fluxo magnético e sua respectiva intensidade, durante o pico da corrente de *in-rush* e durante o regime permanente, respectivamente.

Figura 12 - B_{EAV} no Corte da Geometria do Transformador Durante o:

a) Pico da Corrente de *In-rush*. b) Regime Permanente.



a)

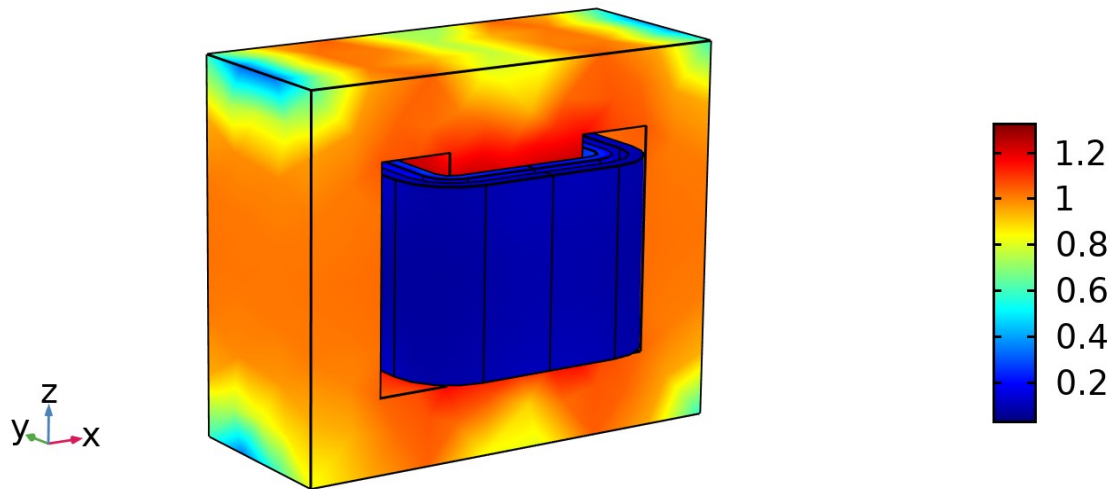


b)

Fonte: COMSOL (2020).

A Figura 13 apresenta um resultado similar à Figura 12a, nela também está representada a densidade de fluxo magnético a vazio durante o pico da corrente de *in-rush*, porém, ao longo da superfície do transformador. Na legenda da Figura 13 é possível observar a diminuição do valor máximo de B_{EAV} , visto que a densidade de fluxo magnético é mais intensa nas regiões internas do núcleo do transformador.

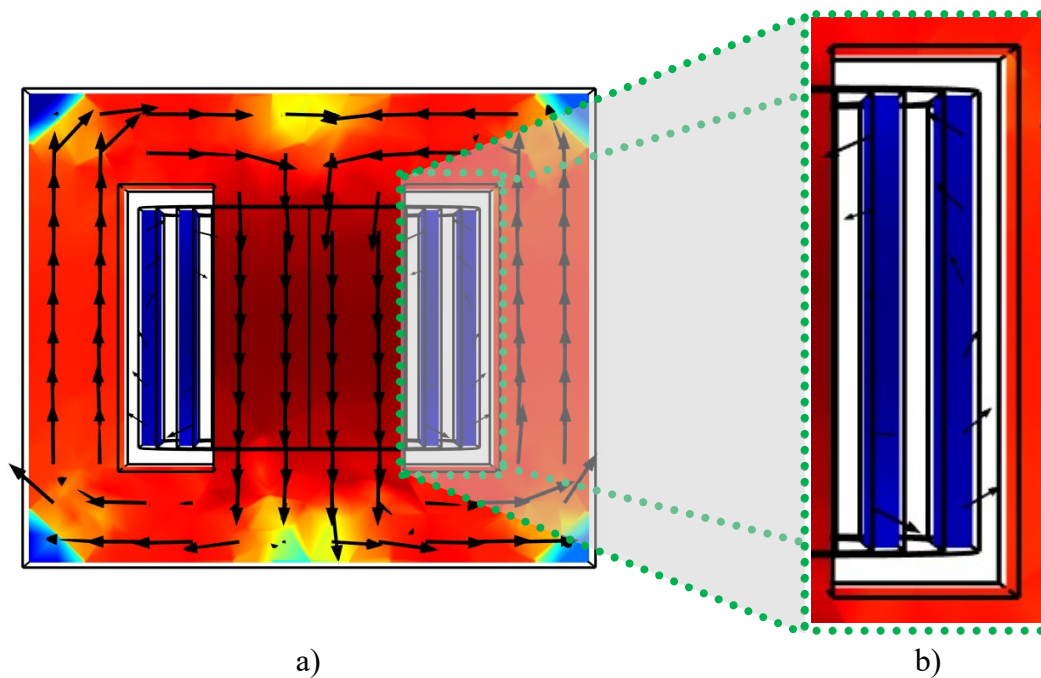
Figura 13 - B_{EAV} na Superfície do Transformador Durante o Pico da Corrente de *In-rush*.



Fonte: COMSOL (2020).

Na Figura 14a é apresentada a vista frontal do corte no plano x-z da geometria do transformador, nela está representada, além da distribuição e intensidade de B_{EAV} , o comportamento do fluxo magnético, com as setas indicando a sua direção. É possível, ainda, na Figura 14b, observar o fluxo magnético disperso do núcleo do transformador.

Figura 14 - EAV: a) Direção do Fluxo Magnético. b) Fluxo Disperso.



Fonte: COMSOL (2020).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na Tabela 1, os resultados da simulação do EAV apresentaram erros percentuais elevados, se comparados aos erros percentuais dos resultados da simulação do ECC. Um dos fatores que influenciam nesses erros elevados é o desconhecimento da curva BH do material do núcleo do transformador. Em (LOPES E AGUIAR, 2018), as chapas de aço-silício utilizadas para a montagem do transformador eram reaproveitadas, sendo desconhecidas as características do seu material. A curva utilizada na simulação é representada na Figura 7, do material descrito como *silicon steel M-6 cross*, presente na biblioteca de materiais do COMSOL Multiphysics, sendo a que gerou resultados mais próximos aos experimentais.

Nos instantes iniciais a corrente I_{EAV} , ou corrente de excitação I_{ϕ} que percorre o núcleo do transformador, apresenta um pico observado na Figura 9a. Esse comportamento da corrente a vazio é chamado de corrente de *in-rush*, sendo ocasionado devido a magnetização do núcleo do transformador durante a sua partida. Na Figura 11a, o valor de B_{EAV} nos instantes iniciais chega a 2,3 T, caracterizando a saturação do núcleo e resultando no pico inicial de I_{EAV} . Esse valor estabiliza-se em 1,5 T, com o comportamento de B_{EAV} sendo refletido na corrente a vazio presente na Figura 9b.

Já os resultados da simulação do ECC, com exceção da reatância equivalente dos enrolamentos (X_{eq}) que apresentou erro percentual de 83,17%, foram próximos aos resultados experimentais. O parâmetro X_{eq} se demonstrou sensível aos erros percentuais dos parâmetros utilizados para o seu cálculo. Uma das possíveis causas para a proximidade entre resultados simulados e experimentais deve-se ao fato de que no ECC o núcleo do transformador, e, conseqüentemente, a curva BH apresenta pouca influência sobre os parâmetros a serem calculados.

Sendo assim, visto a sensibilidade dos resultados do EAV à curva BH do núcleo, melhores resultados podem ser obtidos em simulações cujo os materiais do transformador possuem informações características conhecidas. Outras possíveis causas para os erros entre resultados simulados e experimentais são a falta de consideração de alguns aspectos presentes no funcionamento do transformador, tais como a temperatura e a vibração, e também a impossibilidade de considerar todos os aspectos construtivos do mesmo, visto que até mínimos detalhes da construção influenciam em seus parâmetros.

A análise dos resultados obtidos por meio do MEF indica que o método permite determinar os parâmetros do transformador no EAV e no ECC, assim como possibilita o

estudo de parâmetros dificilmente analisados durante procedimentos experimentais, tais como a densidade de fluxo magnético e a corrente de *in-rush*.

Os resultados apresentados no presente trabalho foram publicados em forma de artigo no XLVIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia e III Simpósio Internacional de Educação em Engenharia - COBENGE 2020 em (LOPES *et al.*, 2020). No artigo, é defendido que o MEF é capaz de constituir um modelo híbrido de ensino composto por simulações e procedimentos experimentais, que caracteriza técnicas de aprendizagem como a sala de aula invertida. Diante dos resultados obtidos na simulação do transformador, nos quais várias características inerentes ao seu funcionamento foram levadas em consideração, e apesar das discrepâncias observadas entre os parâmetros simulados e experimentais, já justificadas, o método cumpre com o objetivo de poder ser aplicado de forma complementar aos procedimentos experimentais dos ensaios, revelando-se útil para fins de ensino, projeto e pesquisa, provando-se promissor como ferramenta que promove o enriquecimento da bagagem necessária para a aplicação do método científico.

Como sugestão para trabalhos futuros propõe-se:

- A simulação do EAV e do ECC considerando aspectos como temperatura e vibração na formulação do PVC;
- A comparação entre resultados simulados e experimentais de um transformador cujo as características dos seus materiais são conhecidas;
- A utilização das simulações dos ensaios em transformadores como ferramentas de ajuste da curva BH de um transformador cujo as características dos seus materiais são desconhecidas.

REFERÊNCIAS

ABBA, Faiza; RACHEK, M'hemed. **Time-Stepping FEM-Based Multi-Level Coupling of Magnetic Field–Electric Circuit and Mechanical Structural Deformation Models Dedicated to the Analysis of Electromagnetic Actuators**. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2076-0825/8/1/22/pdf-vor>. Acesso em: 05 jul. 2020.

BASTOS, João Pedro A.; SADOWSKI, Nelson. **Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods**. New York: CRC Press. 2003. 512p.

BASTOS, João Pedro A.; SADOWSKI, Nelson. **Magnetic Materials and 3D Finite Element Modeling**. New York: CRC Press. 2013. 402p.

BIM, Edson. **Máquinas Elétricas e Acionamento**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. 547p.

BÍRÓ, Oszkár; PREIS, Kurt; PAUL, Christian. The use of a reduced vector potential A_r formulation for the calculation of iron induced field errors. **ROXIE: routine for the optimization of magnet X-sections, inverse field calculation and coil end design**, p. 31-46, 1999.

CARDOSO, José Roberto. **Electromagnetics Through the Finite Element Method: A Simplified Approach Using Maxwell's Equations**. New York: CRC Press. 2016. 214p.

COMSOL. **COMSOL Multiphysics**. Versão 5.5.0.359, 25 fev. 2020. Disponível em: <https://br.comsol.com/product-download/5.5/windows>>. Acesso em: 13 mar. 2020.

FLEMING, Henrique. **O Teorema de Helmholtz**. 2003. Disponível em: <http://fma.if.usp.br/~fleming/vfield/node12.html>>. Acesso em: 15 jun. 2020.

LOPES, T. C. da S.; AGUIAR, V. de P. B. **Projeto e Análise de Parâmetros de Operação de um Autotransformador**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal Rural do Semi-Árido. 2018.

LOPES, T. C. da S.; AGUIAR, V. de P. B.; MOURA, A. A. F. de; CORREIA, W. B.. Simulações por Elementos Finitos Aplicadas aos Ensaio de um Transformador em Pré-Aula de Prática Laboratorial. **XLVIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia e III Simpósio Internacional de Educação em Engenharia - COBENGE 2020**, 2020.

RENYUAN, Tang; SHENGHUI, Wang; YAN, Li; XIULIAN, Wang; XIANG, Cui. Transient simulation of power transformers using 3D finite element model coupled to electric circuit equations. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 36, no. 4, p. 1417-1420, 2000.

SADIKU, Matthew N.O. **Numerical Techniques in Electromagnetics**. New York: CRC Press. 2000. 750p.

SALON; S. J. **Finite Element Analysis of Electrical Machines**. Netherlands: Editora Springer. 1995. 247p

UMANS, Stephen D. **Máquinas elétricas de Fitzgerald e Kingsley**. 7.ed. Porto Alegre: AMGH, 2014. 708p.

ANEXO A - DEMONSTRAÇÃO DAS MATRIZES

Para demonstrar as matrizes definidas nas Equações (63), (64), (65) e (86), é necessário definir previamente alguns termos, tais como o rotacional do potencial vetor magnético (BASTOS E SADOWSKI, 2013), que utilizando a discretização de $\vec{A}^e$ da Equação (46) é definido como:

$$\nabla \times \vec{A}^e = \nabla \times (\vec{N}A^e), \quad (\text{A.1})$$

podendo ser representado conforme:

$$\begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ NA_x^e & NA_y^e & NA_z^e \end{vmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y} A_z^e - \frac{\partial N}{\partial z} A_y^e \right) \vec{x} + \left(\frac{\partial N}{\partial z} A_x^e - \frac{\partial N}{\partial x} A_z^e \right) \vec{y} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} A_y^e - \frac{\partial N}{\partial y} A_x^e \right) \vec{z},$$

e sua forma matricial é apresentada em:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial[N]}{\partial z} & \frac{\partial[N]}{\partial y} \\ \frac{\partial[N]}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial[N]}{\partial x} \\ -\frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x^e \\ A_y^e \\ A_z^e \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \vec{N}[A^e].$$

Também se faz necessário definir o divergente do potencial vetor magnético (BASTOS E SADOWSKI, 2013), que novamente utilizando a discretização de $\vec{A}^e$ é definido como:

$$\nabla \cdot \vec{A}^e = \nabla \cdot (\vec{N} A^e), \quad (\text{A.4})$$

podendo ser representado por meio de:

$$\frac{\partial N}{\partial x} A_x^e + \frac{\partial N}{\partial y} A_y^e + \frac{\partial N}{\partial z} A_z^e, \quad (\text{A.5})$$

e sua forma matricial é apresentada em:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial[N]}{\partial x} & \frac{\partial[N]}{\partial y} & \frac{\partial[N]}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x^e \\ A_y^e \\ A_z^e \end{bmatrix} = \nabla \cdot \vec{N} [A^e]. \quad (\text{A.6})$$

As derivadas parciais da função de forma, definida na Equação (38), são apresentadas nas Equações a seguir:

$$\frac{\partial[N]}{\partial x} = N_x = \frac{\beta}{6V} = \frac{1}{6V} [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4] \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial[N]}{\partial y} = N_y = \frac{\gamma}{6V} = \frac{1}{6V} [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4] \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial[N]}{\partial z} = N_z = \frac{\delta}{6V} = \frac{1}{6V} [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4]. \quad (\text{A.9})$$

A.1 Matriz $[S^e]$

A matriz $[S^e]$ definida na Equação (63) é apresentada na Equação (A.10):

$$[S^e] = \int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j^T \cdot \nabla \times \vec{N}_i d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{N}_j^T \nabla \cdot \vec{N}_i d\Omega, \quad (\text{A.10})$$

sendo a Equação (A.11) o primeiro termo da matriz da Equação (A.10):

$$\int_{\Omega} \nabla \times \vec{N}_j^T \cdot \nabla \times \vec{N}_i d\Omega, \quad (\text{A.11})$$

e utilizando a definição do rotacional de $\vec{A}^e$ da Equação (A.3), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & N_z^T & -N_y^T \\ -N_z^T & 0 & N_x^T \\ N_y^T & -N_x^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -N_z & N_y \\ N_z & 0 & -N_x \\ -N_y & N_x & 0 \end{bmatrix} \int_{\Omega} d\Omega. \quad (\text{A.12})$$

A integral de $d\Omega$ sobre todo o domínio do PVC resulta no volume do próprio domínio, e para um elemento o volume do domínio é o volume do próprio elemento (V) (BASTOS E SADOWSKI, 2013), definido na Equação (31). Desenvolvendo a multiplicação matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} N_y^T N_y + N_z^T N_z & -N_y^T N_x & -N_z^T N_x \\ -N_x^T N_y & N_x^T N_x + N_z^T N_z & -N_z^T N_y \\ -N_x^T N_z & -N_y^T N_z & N_x^T N_x + N_y^T N_y \end{bmatrix} V, \quad (\text{A.13})$$

e utilizando as definições das derivadas parciais da função de forma das Equações (A.7), (A.8), e (A.9), a Equação (A.13) torna-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma^T \gamma}{36V^2} + \frac{\delta^T \delta}{36V^2} & -\frac{\gamma^T \beta}{36V^2} & -\frac{\delta^T \beta}{36V^2} \\ -\frac{\beta^T \gamma}{36V^2} & \frac{\beta^T \beta}{36V^2} + \frac{\delta^T \delta}{36V^2} & -\frac{\delta^T \gamma}{36V^2} \\ -\frac{\beta^T \delta}{36V^2} & -\frac{\gamma^T \delta}{36V^2} & \frac{\beta^T \beta}{36V^2} + \frac{\gamma^T \gamma}{36V^2} \end{bmatrix} V, \quad (\text{A.14})$$

podendo ser escrita como:

$$\frac{1}{36V} \begin{bmatrix} \gamma^T \gamma + \delta^T \delta & -\gamma^T \beta & -\delta^T \beta \\ -\beta^T \gamma & \beta^T \beta + \delta^T \delta & -\delta^T \gamma \\ -\beta^T \delta & -\gamma^T \delta & \beta^T \beta + \gamma^T \gamma \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

A Equação (A.16) é o segundo termo da matriz da Equação (A.10):

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{N}_j^T \nabla \cdot \vec{N}_i d\Omega, \quad (\text{A.16})$$

e utilizando a definição do divergente de $\vec{A}^e$ da Equação (A.6), tem-se:

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_z \end{bmatrix} \int_{\Omega} d\Omega, \quad (\text{A.17})$$

desenvolvendo:

$$\begin{bmatrix} N_x^T N_x & N_x^T N_y & N_x^T N_z \\ N_y^T N_x & N_y^T N_y & N_y^T N_z \\ N_z^T N_x & N_z^T N_y & N_z^T N_z \end{bmatrix} V, \quad (\text{A.18})$$

e utilizando as definições das derivadas parciais da função de forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta^T \beta}{36V^2} & \frac{\beta^T \gamma}{36V^2} & \frac{\beta^T \delta}{36V^2} \\ \frac{\gamma^T \beta}{36V^2} & \frac{\gamma^T \gamma}{36V^2} & \frac{\gamma^T \delta}{36V^2} \\ \frac{\delta^T \beta}{36V^2} & \frac{\delta^T \gamma}{36V^2} & \frac{\delta^T \delta}{36V^2} \end{bmatrix} V, \quad (\text{A.19})$$

podendo ser escrita como:

$$\frac{1}{36V} \begin{bmatrix} \beta^T \beta & \beta^T \gamma & \beta^T \delta \\ \gamma^T \beta & \gamma^T \gamma & \gamma^T \delta \\ \delta^T \beta & \delta^T \gamma & \delta^T \delta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Com a definição dos dois termos, a Equação (A.10) se torna uma matriz composta por submatrizes, sendo escrita como:

$$\begin{aligned} [S^e] &= \int_{\Omega} \nabla \times \bar{N}_j^T \cdot \nabla \times \bar{N}_i d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{N}_j^T \nabla \cdot \bar{N}_i d\Omega \\ [S^e] &= \frac{1}{36V} \begin{bmatrix} \gamma^T \gamma + \delta^T \delta & -\gamma^T \beta & -\delta^T \beta \\ -\beta^T \gamma & \beta^T \beta + \delta^T \delta & -\delta^T \gamma \\ -\beta^T \delta & -\gamma^T \delta & \beta^T \beta + \gamma^T \gamma \end{bmatrix} + \frac{1}{36V} \begin{bmatrix} \beta^T \beta & \beta^T \gamma & \beta^T \delta \\ \gamma^T \beta & \gamma^T \gamma & \gamma^T \delta \\ \delta^T \beta & \delta^T \gamma & \delta^T \delta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (A.21)$$

desenvolvendo:

$$[S^e] = \frac{1}{36V} \begin{bmatrix} \beta^T \beta + \gamma^T \gamma + \delta^T \delta & -\gamma^T \beta + \beta^T \gamma & -\delta^T \beta + \beta^T \delta \\ -\beta^T \gamma + \gamma^T \beta & \beta^T \beta + \gamma^T \gamma + \delta^T \delta & -\delta^T \gamma + \gamma^T \delta \\ -\beta^T \delta + \delta^T \beta & -\gamma^T \delta + \delta^T \gamma & \beta^T \beta + \gamma^T \gamma + \delta^T \delta \end{bmatrix}, \quad (A.22)$$

resultando em:

$$[S^e] = \frac{1}{36V} \begin{bmatrix} \beta^T \beta + \gamma^T \gamma + \delta^T \delta & \beta^T \gamma - \gamma^T \beta & \beta^T \delta - \delta^T \beta \\ -Sim & \beta^T \beta + \gamma^T \gamma + \delta^T \delta & \gamma^T \delta - \delta^T \gamma \\ -Sim & -Sim & \beta^T \beta + \gamma^T \gamma + \delta^T \delta \end{bmatrix}. \quad (A.23)$$

onde o termo “*-Sim*” indica antissimetria entre as submatrizes.

A definição das submatrizes da diagonal principal da matriz da Equação (A.23) dá-se conforme:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4] + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4] + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4], \quad (A.24)$$

desenvolvendo:

$$\begin{bmatrix} \beta_1\beta_1 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\beta_3 & \beta_1\beta_4 \\ \beta_2\beta_1 & \beta_2\beta_2 & \beta_2\beta_3 & \beta_2\beta_4 \\ \beta_3\beta_1 & \beta_3\beta_2 & \beta_3\beta_3 & \beta_3\beta_4 \\ \beta_4\beta_1 & \beta_4\beta_2 & \beta_4\beta_3 & \beta_4\beta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1\gamma_1 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\gamma_3 & \gamma_1\gamma_4 \\ \gamma_2\gamma_1 & \gamma_2\gamma_2 & \gamma_2\gamma_3 & \gamma_2\gamma_4 \\ \gamma_3\gamma_1 & \gamma_3\gamma_2 & \gamma_3\gamma_3 & \gamma_3\gamma_4 \\ \gamma_4\gamma_1 & \gamma_4\gamma_2 & \gamma_4\gamma_3 & \gamma_4\gamma_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1\delta_1 & \delta_1\delta_2 & \delta_1\delta_3 & \delta_1\delta_4 \\ \delta_2\delta_1 & \delta_2\delta_2 & \delta_2\delta_3 & \delta_2\delta_4 \\ \delta_3\delta_1 & \delta_3\delta_2 & \delta_3\delta_3 & \delta_3\delta_4 \\ \delta_4\delta_1 & \delta_4\delta_2 & \delta_4\delta_3 & \delta_4\delta_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

resultando em:

$$\begin{bmatrix} \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2 & \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2 & \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 + \delta_1\delta_3 & \beta_1\beta_4 + \gamma_1\gamma_4 + \delta_1\delta_4 \\ \text{Sim} & \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \delta_2^2 & \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 + \delta_2\delta_3 & \beta_2\beta_4 + \gamma_2\gamma_4 + \delta_2\delta_4 \\ \text{Sim} & \text{Sim} & \beta_3^2 + \gamma_3^2 + \delta_3^2 & \beta_3\beta_4 + \gamma_3\gamma_4 + \delta_3\delta_4 \\ \text{Sim} & \text{Sim} & \text{Sim} & \beta_4^2 + \gamma_4^2 + \delta_4^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.26})$$

onde o termo “*Sim*” indica simetria entre elementos da matriz.

É possível definir os elementos S_{ij}^e , i-ésima linha e j-ésima coluna, da matriz da Equação (A.27) igualando-os aos elementos da matriz da Equação (A.26):

$$\begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e & S_{13}^e & S_{14}^e \\ S_{12}^e & S_{22}^e & S_{23}^e & S_{24}^e \\ S_{13}^e & S_{23}^e & S_{33}^e & S_{34}^e \\ S_{14}^e & S_{24}^e & S_{34}^e & S_{44}^e \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

A definição da submatriz $\beta^T \gamma - \gamma^T \beta$ da matriz da Equação (A.23) dá-se conforme:

$$\beta^T \gamma - \gamma^T \beta$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

desenvolvendo:

$$\begin{bmatrix} \beta_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_2 & \beta_1\gamma_3 & \beta_1\gamma_4 \\ \beta_2\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \beta_2\gamma_3 & \beta_2\gamma_4 \\ \beta_3\gamma_1 & \beta_3\gamma_2 & \beta_3\gamma_3 & \beta_3\gamma_4 \\ \beta_4\gamma_1 & \beta_4\gamma_2 & \beta_4\gamma_3 & \beta_4\gamma_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1\beta_1 & \gamma_1\beta_2 & \gamma_1\beta_3 & \gamma_1\beta_4 \\ \gamma_2\beta_1 & \gamma_2\beta_2 & \gamma_2\beta_3 & \gamma_2\beta_4 \\ \gamma_3\beta_1 & \gamma_3\beta_2 & \gamma_3\beta_3 & \gamma_3\beta_4 \\ \gamma_4\beta_1 & \gamma_4\beta_2 & \gamma_4\beta_3 & \gamma_4\beta_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

resultando em:

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 & \beta_1\gamma_3 - \gamma_1\beta_3 & \beta_1\gamma_4 - \gamma_1\beta_4 \\ -Sim & 0 & \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3 & \beta_2\gamma_4 - \gamma_2\beta_4 \\ -Sim & -Sim & 0 & \beta_3\gamma_4 - \gamma_3\beta_4 \\ -Sim & -Sim & -Sim & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

onde o termo “*Sim*” indica antissimetria entre os elementos.

Define-se então os elementos S_{ij}^e da matriz da Equação (A.31) igualando-os aos elementos da matriz da Equação (A.30):

$$\begin{bmatrix} 0 & S_{16}^e & S_{17}^e & S_{18}^e \\ -S_{16}^e & 0 & S_{27}^e & S_{28}^e \\ -S_{17}^e & -S_{27}^e & 0 & S_{38}^e \\ -S_{18}^e & -S_{28}^e & -S_{38}^e & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

A definição da submatriz $\beta^T \delta - \delta^T \beta$ da matriz da Equação (A.23) dá-se conforme:

$$\beta^T \delta - \delta^T \beta$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

desenvolvendo:

$$\begin{bmatrix} \beta_1\delta_1 & \beta_1\delta_2 & \beta_1\delta_3 & \beta_1\delta_4 \\ \beta_2\delta_1 & \beta_2\delta_2 & \beta_2\delta_3 & \beta_2\delta_4 \\ \beta_3\delta_1 & \beta_3\delta_2 & \beta_3\delta_3 & \beta_3\delta_4 \\ \beta_4\delta_1 & \beta_4\delta_2 & \beta_4\delta_3 & \beta_4\delta_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1\beta_1 & \delta_1\beta_2 & \delta_1\beta_3 & \delta_1\beta_4 \\ \delta_2\beta_1 & \delta_2\beta_2 & \delta_2\beta_3 & \delta_2\beta_4 \\ \delta_3\beta_1 & \delta_3\beta_2 & \delta_3\beta_3 & \delta_3\beta_4 \\ \delta_4\beta_1 & \delta_4\beta_2 & \delta_4\beta_3 & \delta_4\beta_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

resultando em:

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta_1\delta_2 - \delta_1\beta_2 & \beta_1\delta_3 - \delta_1\beta_3 & \beta_1\delta_4 - \delta_1\beta_4 \\ -Sim & 0 & \beta_2\delta_3 - \delta_2\beta_3 & \beta_2\delta_4 - \delta_2\beta_4 \\ -Sim & -Sim & 0 & \beta_3\delta_4 - \delta_3\beta_4 \\ -Sim & -Sim & -Sim & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Define-se então os elementos S_{ij}^e da matriz da Equação (A.35) igualando-os aos elementos da matriz da Equação (A.34):

$$\begin{bmatrix} 0 & S_{110}^e & S_{111}^e & S_{112}^e \\ -S_{110}^e & 0 & S_{211}^e & S_{212}^e \\ -S_{111}^e & -S_{211}^e & 0 & S_{312}^e \\ -S_{112}^e & -S_{212}^e & -S_{312}^e & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

A definição da submatriz $\gamma^T \delta - \delta^T \gamma$ da matriz da Equação (A.23) dá-se conforme:

$$\gamma^T \delta - \delta^T \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

desenvolvendo:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1\delta_1 & \gamma_1\delta_2 & \gamma_1\delta_3 & \gamma_1\delta_4 \\ \gamma_2\delta_1 & \gamma_2\delta_2 & \gamma_2\delta_3 & \gamma_2\delta_4 \\ \gamma_3\delta_1 & \gamma_3\delta_2 & \gamma_3\delta_3 & \gamma_3\delta_4 \\ \gamma_4\delta_1 & \gamma_4\delta_2 & \gamma_4\delta_3 & \gamma_4\delta_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1\gamma_1 & \delta_1\gamma_2 & \delta_1\gamma_3 & \delta_1\gamma_4 \\ \delta_2\gamma_1 & \delta_2\gamma_2 & \delta_2\gamma_3 & \delta_2\gamma_4 \\ \delta_3\gamma_1 & \delta_3\gamma_2 & \delta_3\gamma_3 & \delta_3\gamma_4 \\ \delta_4\gamma_1 & \delta_4\gamma_2 & \delta_4\gamma_3 & \delta_4\gamma_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.37})$$

resultando em:

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2 & \gamma_1\delta_3 - \delta_1\gamma_3 & \gamma_1\delta_4 - \delta_1\gamma_4 \\ -Sim & 0 & \gamma_2\delta_3 - \delta_2\gamma_3 & \gamma_2\delta_4 - \delta_2\gamma_4 \\ -Sim & -Sim & 0 & \gamma_3\delta_4 - \delta_3\gamma_4 \\ -Sim & -Sim & -Sim & 0 \end{bmatrix}. \quad (A.38)$$

Define-se então os elementos S_{ij}^e da matriz da Equação (A.39) igualando-os aos elementos da matriz da Equação (A.38):

$$\begin{bmatrix} 0 & S_{510}^e & S_{511}^e & S_{512}^e \\ -S_{510}^e & 0 & S_{611}^e & S_{612}^e \\ -S_{511}^e & -S_{611}^e & 0 & S_{712}^e \\ -S_{512}^e & -S_{612}^e & -S_{712}^e & 0 \end{bmatrix}. \quad (A.39)$$

Dessa forma, a Equação (A.23) é representada em sua forma expandida na Equação (A.40), caracterizando uma matriz 12x12. Os elementos destacados são obtidos por meio das Equações (A.27), (A.31), (A.35) e (A.39), e seus respectivos valores são replicados em outros elementos devido a condições de simetria.

$$[S^e] = \frac{1}{36V} \begin{bmatrix} S_{11}^e & S_{12}^e & S_{13}^e & S_{14}^e & 0 & S_{16}^e & S_{17}^e & S_{18}^e & 0 & S_{110}^e & S_{111}^e & S_{112}^e \\ S_{12}^e & S_{22}^e & S_{23}^e & S_{24}^e & -S_{16}^e & 0 & S_{27}^e & S_{28}^e & -S_{110}^e & 0 & S_{211}^e & S_{212}^e \\ S_{13}^e & S_{23}^e & S_{33}^e & S_{34}^e & -S_{17}^e & -S_{27}^e & 0 & S_{38}^e & -S_{111}^e & -S_{211}^e & 0 & S_{312}^e \\ S_{14}^e & S_{24}^e & S_{34}^e & S_{44}^e & -S_{18}^e & -S_{28}^e & -S_{38}^e & 0 & -S_{112}^e & -S_{212}^e & -S_{312}^e & 0 \\ 0 & -S_{16}^e & -S_{17}^e & -S_{18}^e & S_{11}^e & S_{12}^e & S_{13}^e & S_{14}^e & 0 & S_{510}^e & S_{511}^e & S_{512}^e \\ S_{16}^e & 0 & -S_{27}^e & -S_{28}^e & S_{12}^e & S_{22}^e & S_{23}^e & S_{24}^e & -S_{510}^e & 0 & S_{611}^e & S_{612}^e \\ S_{17}^e & S_{27}^e & 0 & -S_{38}^e & S_{13}^e & S_{23}^e & S_{33}^e & S_{34}^e & -S_{511}^e & -S_{611}^e & 0 & S_{712}^e \\ S_{18}^e & S_{28}^e & S_{38}^e & 0 & S_{14}^e & S_{24}^e & S_{34}^e & S_{44}^e & -S_{512}^e & -S_{612}^e & -S_{712}^e & 0 \\ 0 & -S_{110}^e & -S_{111}^e & -S_{112}^e & 0 & -S_{510}^e & -S_{511}^e & -S_{512}^e & S_{11}^e & S_{12}^e & S_{13}^e & S_{14}^e \\ S_{110}^e & 0 & -S_{211}^e & -S_{212}^e & S_{510}^e & 0 & -S_{611}^e & -S_{612}^e & S_{12}^e & S_{22}^e & S_{23}^e & S_{24}^e \\ S_{111}^e & S_{211}^e & 0 & -S_{312}^e & S_{511}^e & S_{611}^e & 0 & -S_{712}^e & S_{13}^e & S_{23}^e & S_{33}^e & S_{34}^e \\ S_{112}^e & S_{212}^e & S_{312}^e & 0 & S_{512}^e & S_{612}^e & S_{712}^e & 0 & S_{14}^e & S_{24}^e & S_{34}^e & S_{44}^e \end{bmatrix} \quad (A.40)$$

A.2 Matriz $[T^e]$

A matriz $[T^e]$ definida na Equação (64) é apresentada na Equação (A.41):

$$[T^e] = \sigma \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \vec{N}_i d\Omega, \quad (\text{A.41})$$

e utilizando a discretização de $\vec{A}^e$, a Equação (A.41) é representada como:

$$[T^e] = \sigma \int_{\Omega} \begin{bmatrix} [N]^T & 0 & 0 \\ 0 & [N]^T & 0 \\ 0 & 0 & [N]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N] & 0 & 0 \\ 0 & [N] & 0 \\ 0 & 0 & [N] \end{bmatrix} d\Omega, \quad (\text{A.42})$$

desenvolvendo a multiplicação matricial tem-se:

$$[T^e] = \sigma \int_{\Omega} \begin{bmatrix} [N]^T [N] & 0 & 0 \\ 0 & [N]^T [N] & 0 \\ 0 & 0 & [N]^T [N] \end{bmatrix} d\Omega. \quad (\text{A.43})$$

As submatrizes da diagonal principal da matriz da Equação (A.43) são definidas conforme:

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] d\Omega, \quad (\text{A.44})$$

desenvolvendo:

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_1 N_2 & N_2^2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_1 N_3 & N_2 N_3 & N_3^2 & N_3 N_4 \\ N_1 N_4 & N_2 N_4 & N_3 N_4 & N_4^2 \end{bmatrix} d\Omega. \quad (\text{A.45})$$

Os termos T_{ij}^e da matriz da Equação (A.45) são definidos conforme (SADIKU, 2000):

$$\int_V N_1^p N_2^q N_3^r N_4^s dV = \frac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)!} 6V, \quad (\text{A.46})$$

sendo p, q, r e s coeficientes que representam o expoente das funções de forma N_1, N_2, N_3 e N_4 , respectivamente. A Equação (A.47) apresenta a aplicação da Equação (A.46) para a determinação dos termos T_{11}^e e T_{12}^e da matriz da Equação (A.45):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_1^2 d\Omega &= \frac{2!0!0!0!}{(2+0+0+0+3)!} 6V = \frac{V}{10} \\ \int_{\Omega} N_1 N_2 d\Omega &= \frac{1!1!0!0!}{(1+1+0+0+3)!} 6V = \frac{V}{20}. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

De modo geral, os termos T_{ij}^e resultam em $V/20$ para $i \neq j$ e $V/10$ para $i = j$. Assim, a Equação (A.45) é definida como:

$$\begin{bmatrix} \frac{V}{10} & \frac{V}{20} & \frac{V}{20} & \frac{V}{20} \\ \frac{V}{20} & \frac{V}{10} & \frac{V}{20} & \frac{V}{20} \\ \frac{V}{20} & \frac{V}{20} & \frac{V}{10} & \frac{V}{20} \\ \frac{V}{20} & \frac{V}{20} & \frac{V}{20} & \frac{V}{10} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.48})$$

podendo ser escrita como:

$$\frac{V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.49})$$

E por meio da Equação (A.49), a Equação (A.43) pode ser escrita em sua forma expandida como:

$$[T^e] = \sigma \frac{V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.50})$$

A.3 Matriz $[D^e]$

A matriz $[D^e]$ definida na Equação (65) é apresentada na Equação (A.51):

$$[D^e] = \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \vec{N}_j^T \cdot \vec{e} d\Omega, \quad (\text{A.51})$$

e utilizando a discretização de $\vec{A}^e$, a Equação (A.51) é representada como:

$$[D^e] = \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} [N]^T & 0 & 0 \\ 0 & [N]^T & 0 \\ 0 & 0 & [N]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix} d\Omega, \quad (\text{A.52})$$

desenvolvendo:

$$[D^e] = \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} e_x [N]^T & 0 & 0 \\ 0 & e_y [N]^T & 0 \\ 0 & 0 & e_z [N]^T \end{bmatrix} d\Omega. \quad (A.53)$$

As submatrizes diagonais da matriz da Equação (A.53) são representadas por meio de:

$$e_c \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} d\Omega \quad c = x, y, z \quad (A.54)$$

e utilizando a Equação (A.46), a Equação (A.54) se torna:

$$e_c \begin{bmatrix} \frac{V}{4} \\ \frac{V}{4} \\ \frac{V}{4} \\ \frac{V}{4} \end{bmatrix} \quad c = x, y, z \quad (A.55)$$

podendo ser reescrita como:

$$\frac{V}{4} \begin{bmatrix} e_c \\ e_c \\ e_c \\ e_c \end{bmatrix} \quad c = x, y, z. \quad (A.56)$$

E por meio da Equação (A.56), a Equação (A.53) pode ser escrita em sua forma expandida como:

$$[D^e] = \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \frac{V}{4} \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ e_x & 0 & 0 \\ e_x & 0 & 0 \\ e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \\ 0 & 0 & e_z \\ 0 & 0 & e_z \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix}. \quad (A.57)$$

A.4 Matriz $\left[P^e \left(\vec{A}^e \Big|_t^k \right) \right]$

O sistema da Equação (85) é apresentado em:

$$\begin{bmatrix} v \left(\left| \vec{B}^e \Big|_t \right|^2 \right) [S^e] + \frac{[T^e]}{\Delta t} & -[D^e] \\ \frac{[D^e]^T}{\Delta t} & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_t - \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} [T^e] & 0 \\ [D^e]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^e \\ I_{cir} \end{Bmatrix}_{t-\Delta t} - \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{cir} \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (A.58)$$

E sendo o MNR aplicado para n incógnitas conforme:

$$[J(x^k)]_{n \times n} \{\Delta x\}_{n \times 1} = -\{f_i(x^k)\}_{n \times 1}, \quad (A.59)$$

com a Matriz Jacobiana $[J(x^k)]$ definida como:

$$[J(x^k)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \frac{\partial f_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (A.60)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, o primeiro passo para determinar a matriz $\left[P^e \left(\vec{A}^e \Big|_t^k \right) \right]$ ocorre ao definir as funções f_i da Equação (A.60).

Na Equação (A.58), tratando apenas da Equação do Campo tem-se:

$$\left(v \left(\left| \vec{B}^e \Big|_t \right|^2 \right) \left[S^e \right] + \frac{\left[T^e \right]}{\Delta t} \right) \left\{ A^e \right\}_t - \left[D^e \right] \left\{ I_{cir} \right\}_t - \frac{\left[T^e \right]}{\Delta t} \left\{ A^e \right\}_{t-\Delta t} = \{0\}, \quad (\text{A.61})$$

partindo das definições das formas expandidas das Matrizes $\left[S^e \right]$, $\left[T^e \right]$ e $\left[D^e \right]$ apresentadas nas Equações (A.40), (A.50) e (A.57), é possível definir uma função f_i para cada linha i da Equação (A.61), conforme:

$$\begin{aligned} f_i = & \frac{v \left(\left| \vec{B}^e \Big|_t \right|^2 \right)}{36V} \left\{ S_{ij}^e \right\}_{1 \times 12} \left\{ A_j^e \Big|_t \right\}_{12 \times 1} + \sigma \frac{V}{20\Delta t} \left\{ T_{ij}^e \right\}_{1 \times 12} \left\{ A_j^e \Big|_t \right\}_{12 \times 1} - \dots \\ & \dots - \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \frac{V}{4} \left\{ D_{ij}^e \right\}_{1 \times 3} \left\{ I_{cir} \Big|_t \right\}_{3 \times 1} - \sigma \frac{V}{20\Delta t} \left\{ T_{ij}^e \right\}_{1 \times 12} \left\{ A_j^e \Big|_{t-\Delta t} \right\}_{12 \times 1}, \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

com a matriz coluna $\left\{ A_j^e \right\}$ definida como:

$$\begin{aligned} \left\{ A_j^e \right\} &= \left\{ A^e \right\} \\ \begin{bmatrix} A_1^e \\ \vdots \\ A_4^e \\ A_5^e \\ \vdots \\ A_8^e \\ A_9^e \\ \vdots \\ A_{12}^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{x1}^e \\ \vdots \\ A_{x4}^e \\ A_{y1}^e \\ \vdots \\ A_{y4}^e \\ A_{z1}^e \\ \vdots \\ A_{z4}^e \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

desse modo, a Equação (A.62) pode ser escrita como:

$$f_i = \frac{v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)}{36V} \sum_{j=1}^{12} S_{ij}^e A_j^e \Big|_t + \sigma \frac{V}{20} \sum_{j=1}^{12} T_{ij}^e A_j^e \Big|_t - \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \frac{V}{4} I_{cir} \Big|_t \sum_{j=1}^3 D_{ij}^e - \sigma \frac{V}{20} \sum_{j=1}^{12} T_{ij}^e A_j^e \Big|_{t-\Delta t}. \quad (\text{A.64})$$

Exemplificando a Equação (A.64), a função f_1 é definida como:

$$f_1 = \frac{v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)}{36V} \sum_{j=1}^{12} S_{1j}^e A_j^e \Big|_t + \sigma \frac{V}{20} \sum_{j=1}^{12} T_{1j}^e A_j^e \Big|_t - \frac{N_{esp}}{S_{dom}} \frac{V}{4} I_{cir} \Big|_t \sum_{j=1}^3 D_{1j}^e - \sigma \frac{V}{20} \sum_{j=1}^{12} T_{1j}^e A_j^e \Big|_{t-\Delta t}, \quad (\text{A.65})$$

e aplicando $\frac{\partial}{\partial A_1^e \Big|_t}$ na Equação (A.65):

$$\frac{\partial f_1}{\partial A_1^e \Big|_t} = \frac{v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)}{36V} S_{11}^e + \frac{1}{36V} \frac{\partial v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)}{\partial B^2} \frac{\partial B^2\left(\vec{A}^e\right)_t}{\partial A_1^e \Big|_t} \sum_{j=1}^{12} S_{1j}^e A_j^e \Big|_t^k + \sigma \frac{V}{20} T_{11}^e. \quad (\text{A.66})$$

Para $\frac{\partial}{\partial A_2^e \Big|_t}$ tem-se:

$$\frac{\partial f_1}{\partial A_2^e \Big|_t} = \frac{v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)}{36V} S_{12}^e + \frac{1}{36V} \frac{\partial v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)}{\partial B^2} \frac{\partial B^2\left(\vec{A}^e\right)_t}{\partial A_2^e \Big|_t} \sum_{j=1}^{12} S_{1j}^e A_j^e \Big|_t^k + \sigma \frac{V}{20} T_{12}^e, \quad (\text{A.67})$$

e de uma forma generalizada, para $\frac{\partial}{\partial A_n^e \Big|_t}$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial A_n^e \Big|_t} = \frac{v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)}{36V} S_{in}^e + \frac{1}{36V} \frac{\partial v\left(\left|\vec{B}^e\right|_t^2\right)}{\partial B^2} \frac{\partial B^2\left(\vec{A}^e\right)_t}{\partial A_n^e \Big|_t} \sum_{j=1}^{12} S_{ij}^e A_j^e \Big|_t^k + \sigma \frac{V}{20} T_{in}^e. \quad (\text{A.68})$$

Após a definição dos elementos $\frac{\partial f_i}{\partial x_n}$ da Matriz Jacobiana, obtém-se:

$$\left[J \left(\tilde{A}^e \Big|_t^k \right) \right] = v \left(\left| \tilde{B}^e \Big|_t^k \right|^2 \right) [S^e] + \frac{\partial v \left(\left| \tilde{B}^e \Big|_t^k \right|^2 \right)}{\partial B^2} \left[P^e \left(\tilde{A}^e \Big|_t^k \right) \right] + \frac{[T^e]}{\Delta t}, \quad (\text{A.69})$$

com a matriz $\left[P^e \left(\tilde{A}^e \Big|_t^k \right) \right]$ definida como:

$$\left[P^e \left(\tilde{A}^e \Big|_t^k \right) \right] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{12} S_{1j}^e A_j^e \Big|_t^k & \sum_{j=1}^{12} S_{1j}^e A_j^e \Big|_t^k & \dots & \sum_{j=1}^{12} S_{1j}^e A_j^e \Big|_t^k \\ \sum_{j=1}^{12} S_{2j}^e A_j^e \Big|_t^k & \sum_{j=1}^{12} S_{2j}^e A_j^e \Big|_t^k & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \sum_{j=1}^{12} S_{11j}^e A_j^e \Big|_t^k \\ \sum_{j=1}^{12} S_{12j}^e A_j^e \Big|_t^k & \dots & \sum_{j=1}^{12} S_{12j}^e A_j^e \Big|_t^k & \sum_{j=1}^{12} S_{12j}^e A_j^e \Big|_t^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial B^2 \left(\tilde{A}^e \Big|_t^k \right)}{\partial A_1^e \Big|_t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial B^2 \left(\tilde{A}^e \Big|_t^k \right)}{\partial A_2^e \Big|_t} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial B^2 \left(\tilde{A}^e \Big|_t^k \right)}{\partial A_{12}^e \Big|_t} \end{bmatrix} \quad (\text{A.70})$$

onde o termo $\frac{\partial B^2 \left(\tilde{A}^e \Big|_t^k \right)}{\partial A_n^e \Big|_t}$ é obtido aplicando $\frac{\partial}{\partial A_n^e \Big|_t}$ na Equação (92).