

IMPLEMENTAÇÃO DE GERADOR DE CONDUÇÃO DE CALOR PARA CASO DE PLACA BIDIMENSIONAL.

Paulo Guilherme da Silva¹, Victor Wagner Freire De Azevedo²

¹Graduando em Bel. em Ciência e Tecnologia, UFRSA, Mossoró-RN, e-mail: paulo.silva62478@alunos.ufersa.edu.br

²Professor Orientador, DET/CE – UFRSA, Mossoró-RN, e-mail: victorwfreire@ufersa.edu.br

Resumo: A atividade industrial está cada vez mais aumentando e a engenharia está avançando em diversos campos. Os processos de controle e manutenção da temperatura em objetos é algo muito importante que vem sendo bastante estudado pela matemática, garantindo qualidade do projeto. É neste cenário que o uso de métodos numéricos é aplicado em simulações de transporte de energia, tendo em vista as equações matemáticas que governam esses fenômenos. Este trabalho tem como objetivo a exposição de uma estratégia, bastante utilizada atualmente, para análise de gradientes de temperaturas, a estratégia consiste na aplicação do Método dos Volumes Finitos. Levando-se em consideração a geometria da placa, retangular, é desenvolvida uma rede nodal em coordenadas cartesianas, a discretização da geometria torna possível o uso de linguagem computacional para calcular o gradiente de temperaturas na placa, cujas condições de contorno são determinadas previamente. Utilizando a biblioteca Numpy, da linguagem de programação Python, é possível realizar a simulação de uma condução de calor bidimensional na placa, constatando que o método numérico utilizado obtém êxito em sua estratégia proposta, convergindo para uma solução exata.

Palavras-chave: Método dos Volumes Finitos. Métodos Numéricos. Condução de Calor. Simulação.

1. INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, cientistas e engenheiros se preocuparam em prever e controlar situações e fenômenos que ocorrem no mundo, sejam eles naturais ou induzidos pelo homem. Um grande exemplo disso é o fluxo de energia que é transferido em um referencial, como por exemplo: a quantidade de água necessária para mover um moinho, ou a quantidade de calor necessária para derreter o aço. O estudo sistemático e unificado da transferência de energia em forma de calor é bastante requisitado nos tempos atuais devido à alta produção do setor industrial.

Praticamente todas as engenharias se beneficiam dos avanços nas áreas de ciências térmicas, ramos da indústria como, metalurgia, construção civil, indústria automobilística e indústria química, utilizam ao longo de suas jornadas, aparelhos de aferição de temperatura. Em muitos casos, essa aferição precisa ser de forma contínua, dimensionando superfícies inteiras e contornando-as em função do tempo.

O avanço na engenharia térmica nas últimas décadas busca garantir o rígido controle das temperaturas em ambientes cada vez mais complexos. Para obter embasamento científico para projetar determinado equipamento, é levado em consideração, muitas vezes, a condução de calor em sólidos. Para um corpo com determinada geometria, a condução de calor permite representar gradientes de temperatura que se formam, indicando que há calor sendo transferido nesse corpo, tal fenômeno merece atenção pois o calor é capaz de alterar as propriedades mecânicas e até mesmo eletromagnéticas de um material.

A condução de calor pode ser descrita através de equações diferenciais. O engenheiro ou projetista tem à sua disposição, fundamentalmente, três ferramentas para desenvolver seu projeto ou analisar seu problema: método analítico, numérico e experimental, Maliska et al. [1]. Para resolver a equação diferencial que modela esse fenômeno, pode ser usado algum método teórico (analítico ou numérico) para descrevê-lo. Quando o problema a ser analisado envolve um corpo de geometria complexa ou condições de contorno difíceis, é utilizado de ampla forma o método numérico, para que os cálculos sejam simplificados.

Experimentos em laboratório obtêm resultados mais exatos e precisos para fenômenos estudados, no entanto, seu custo pode elevado, pois é necessário reproduzir as condições reais necessárias para o experimento do fenômeno físico e nem sempre é possível. O método numérico, por outro lado, pode reproduzir por um processo iterativo, as condições de experimento do laboratório, através de soluções aproximadas que convergem para o valor real obtido nos experimentos.

Dentre os métodos numéricos mais utilizados para solucionar equações diferenciais, está o Método dos Volumes Finitos (MVF), que consiste em discretizar as equações governantes do fenômeno analisado em uma certa geometria, dividindo-o em partes menores, criando uma malha, a qual possui nós que servem para demarcar o sentido do fluxo que está sendo conservado.

Com o aprimoramento das máquinas computacionais, a simulação do fenômeno de condução de calor em um corpo sólido também ficou mais exata, pois soluções numéricas passaram a ser calculadas de maneira mais rápida e eficiente. Aplicando o MVF ao fenômeno de condução, pretende-se obter uma boa aproximação da situação de

uma transferência de calor em uma superfície retangular, de forma que seja possível visualizar como o calor se propaga em duas dimensões.

A estratégia usada para o MVF é pensada de uma forma que ela possa gerar uma função numérica que resolva equações de forma generalizada, a qual os valores das dimensões da placa bidimensional e as temperaturas prescritas possam ser alteradas sem a modificação radical da estrutura do algoritmo feito. A ideia central do presente trabalho consiste na implementação do algoritmo, utilizando a linguagem de programação Python, para criação e solução de problemas bidimensionais em condução de calor bidimensional considerando o regime permanente (Ver Apêndice A).

Um algoritmo generalizado se torna uma boa estratégia devido a simulação numérica, praticamente, não apresentar restrições, podendo resolver problemas complexos com condições de contorno gerais, definidos em geometrias também complexas e apresentando resultados com uma rapidez muito grande [1].

2. DESENVOLVIMENTO

2.1 Transferência de calor

Transferência de calor é energia térmica em trânsito em razão de uma diferença de temperaturas no espaço [3]. Com base na primeira lei da termodinâmica, que é uma consequência direta do princípio de conservação da energia para sistemas termodinâmicos, a energia transferida de um sistema para a vizinhança pode-se dar por trabalho ou por calor [4].

Enquanto a termodinâmica lida com os estados inicial e final de um processo ao qual ocorre transferência de energia, a transferência de calor lida com a forma como o processo ocorre para transferência de energia na forma de calor. Na ciência térmica existem três modos de transferência de calor: condução, convecção e radiação.

Condução é a transferência de energia das partículas mais energéticas de uma substância para partículas vizinhas que são menos energéticas, podendo ocorrer em meio sólido ou fluido. Já a convecção é a transferência de energia entre uma superfície e um fluido em movimento, quando estes possuem temperaturas diferentes. A radiação, na ciência térmica, é a transferência de energia emitida de um corpo para outro corpo que possuem temperaturas diferentes, embora ocorra em qualquer tipo de material seja líquido ou gasoso, a radiação é considerada geralmente emitida por sólidos.

2.2 Transferência de calor permanente e transiente

Os processos de transferência de calor podem ser classificados quanto às condições de sistema em regime permanente e regime transiente. Em regime permanente a transferência de calor se dá por um meio sem que haja variação de parâmetros no sistema ao longo do tempo. Em regime transiente, existe uma variação dos parâmetros em função do tempo para o sistema.

Embora grande parte dos problemas observados na natureza ocorram de forma transiente, em certas aplicações da engenharia, considera-se um regime permanente em um determinado caso, para que assim obtenha-se uma análise mais simplificada e generalizada do sistema. Além disso uma das grandes dificuldades é determinar parâmetros do sistema que estão em constante mudança como, velocidade do fluido, densidade do fluido e quantidade de radiação emitida instantânea.

2.3 Transferência de Calor Multidimensional

Os problemas de transferência de calor podem ainda ser classificados como unidimensional, bidimensional ou tridimensional [2]. No caso de condução bidimensional em regime permanente, há um fluxo de calor na direção x e um fluxo de calor na direção y, de forma que há variação de temperatura ao longo dos pontos no sistema 2d.

Para obtermos a equação bidimensional do calor, é necessário realizar uma análise da equação geral da conservação de uma propriedade arbitrária, pois estamos lidando com uma propriedade sob o princípio da conservação de energia em um volume de controle.

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho c \phi)}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial(\rho c \phi)}{\partial x}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial(\rho c \phi)}{\partial y}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial(\rho c \phi)}{\partial z}}_{(2)} = \Gamma \phi \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}}_{(3)} + \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}}_{(3)} + \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}}_{(3)} \right) + \underbrace{S_\phi}_{(4)} \quad (1)$$

O termo ϕ é a propriedade transportada, $\Gamma \phi$ é o coeficiente difusivo da propriedade. A aplicação dessa equação para conhecimento de fenômenos de transporte acaba sendo de grande utilidade para modelar a equação conservativa de algumas propriedades. Cada termo enumerado na equação 1 pode ser descrito como:

- 1- Balanço de energia em função do tempo;
- 2- Termos advectivos, que consideram o transporte da variável em um campo vetorial;
- 3- Termos difusivos, que consideram a difusão da variável que é transportada devido aos gradientes vetoriais;
- 4- Termo fonte, que possui natureza diversa, podendo representar as condições de contorno do fenômeno e modelar a ação de forças e mecanismos físicos.

Considerando que a propriedade a ser trabalhada é a energia, a equação conservativa da energia pode ser descrita como sendo:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho c_p V_i T) = \vec{\nabla}(k \vec{\nabla} T) + S_i \quad (2)$$

No balanço de energia, para um volume infinitesimal, levando-se em consideração a energia em forma de calor sendo transferida por condução, os termos advectivos são anulados, pois não há transporte de energia em um fluido em movimento e o coeficiente difusivo k é considerado 1.

A taxa de geração de energia em forma de calor dentro do volume infinitesimal $\dot{E}_g$, também conhecida como energia gerada por uma fonte de energia térmica pode ser representada como:

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz \quad (3)$$

A taxa de variação de energia no volume de controle, que é interpretado como a taxa de acúmulo de energia, ao longo do tempo é representada como:

$$\dot{E}_t = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (4)$$

Onde c_p representa o calor específico do meio condutor e ρ representa a massa específica do meio condutor. Representando a taxa líquida de transferência de calor por unidade de volume nas direções x , y e z , temos a equação geral:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{E}_g = \dot{E}_t \quad (5)$$

2.4 Condução Bidimensional em Regime Estacionário

A condução bidimensional em regime estacionário, considerando que não há geração de energia interna no volume diferencial e nem variação de temperatura ao longo do eixo z , pode ser dada como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

Os termos de geração de calor interno, $\dot{E}_g$, balanço de calor com relação ao tempo, $\dot{E}_t$ e o termo de balanço de calor na direção z , são anulados. Restando apenas os fluxos de calor nas direções x e y .

A equação em questão trata-se de uma equação diferencial parcial. Uma equação diferencial parcial é uma equação que contém derivadas com relação a duas ou mais variáveis independentes, neste caso, as variáveis independentes são as coordenadas x e y (para mais informações sobre equações diferenciais, consulte Zill [7]).

Utilizando métodos analíticos, não é encontrado uma solução trivial, uma vez que a maioria dos problemas tratados são de geometria complexa (condições de contorno). É então necessário utilizar métodos numéricos, que são nada mais que técnicas criadas para resolver problemas matemáticos, usando operações menos complexas onde soluções aproximadas são obtidas através desses métodos (Ver Fig. 1). O método dos volumes finitos é um dos métodos numéricos capazes de tratar problemas de condução bidimensional com certa facilidade e gerar resultados satisfatório para estudos de casos.

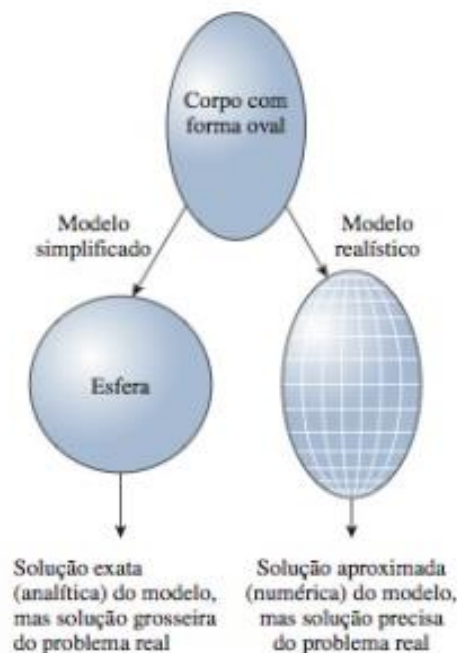


Figura 1. Ilustração de solução numérica aproximada de um problema do mundo real. (Çengel [2])

2.5 Abordagem geral sobre o Método dos Volumes Finitos

A tarefa de um método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais, substituindo as derivadas

existentes por expressões algébricas que envolvem a função incógnita. Quando não é possível encontrar uma solução analítica de uma equação diferencial, pode ser feita uma aproximação numérica via método numérico. Utilizando um número discreto de pontos e um valor de erro aceitável é encontrada uma solução suficientemente próxima da solução analítica [1].

O método dos volumes finitos satisfaz a conservação da propriedade em um volume elementar. Para obter as equações discretizadas realiza-se primeiro um balanço da propriedade para o volume e depois integra-se o volume em relação ao espaço e ao tempo.

$$\int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \right] dy dx = 0 \quad (7)$$

$$\int_s^n [\rho u|_e - \rho u|_w] dy + \int_w^e [\rho v|_n - \rho v|_s] dx = 0 \quad (8)$$

$$\rho u \Delta y|_e - \rho u \Delta y|_w + \rho v \Delta x|_n - \rho v \Delta x|_s = 0 \quad (9)$$

A equação discretizada representa então um balanço de conservação da propriedade, que é dado na forma de um sistema de equações algébricas. O balanço pode ser representado como:

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w + \dot{m}_n - \dot{m}_s = 0 \quad (10)$$

Para o caso da transferência de calor por condução bidimensional estacionária, representada pela equação 6, a forma discretizada dessa equação pode ser dada por:

$$\frac{T_E - T_W}{\Delta x} + \frac{T_N - T_S}{\Delta y} = 0 \quad (11)$$

Onde os índices E, W, N, S correspondem aos pontos nodais nas faces de cada volume (ver Fig. 2). A equação apresentada através do MVF, possui como base uma malha quadrada no plano x-y (coordenadas ortogonais), no entanto, existem diversos tipos de malhas com geometrias diferentes encontradas na literatura, como triangulares, tetraédricas etc., cada uma com sua respectiva equação diferencial.

A figura 3 ilustra melhor o fluxo no volume finito:

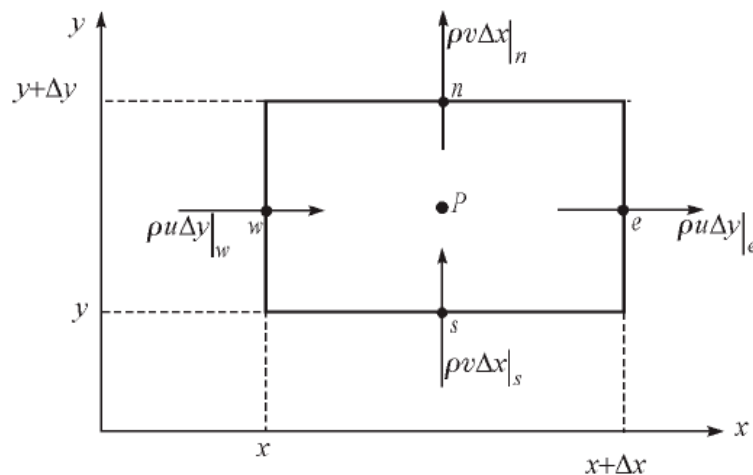


Figura 2. Volume elementar para o balanço de conservação. (Maliska [1])

2.6 Solução do sistema linear de equações

Após apresentar o método dos volumes finitos para a aproximação de equações diferenciais parciais, é necessário resolver o sistema linear originado da aplicação do método numérico. Os métodos podem ser: diretos ou iterativos.

Segundo Franco [8], os métodos diretos são aqueles que forneceriam a solução exata, se não fossem os erros de arredondamento, com um número finito de operações. Em um método direto, é utilizada a estratégia de tornar a matriz de coeficientes A, uma matriz triangular, para então usar a retro substituição e obter a solução do sistema. No entanto para determinados tipos de equações, a manipulação da matriz requer um alto gasto computacional, tornando o processo caro. No geral, raramente se usam métodos diretos para simulação de fluxo de energia, pois a maioria dos problemas envolve centenas até milhares de células, com várias variáveis por célula, o que faz com que a matriz A se torne muito longa.

Os métodos iterativos são aqueles que fornecem uma sequência de aproximações da solução, cada uma das quais obtida das anteriores pela repetição do mesmo tipo de processo. Para os métodos iterativos é preciso ter em mente se o sistema irá convergir e estabelecer critérios de parada para que o processo retorne uma aproximação considerável da solução. Escolher bem e adequadamente o sentido de varredura, partindo das condições de contorno estabelecidas é muito importante, pois a informação “viaja” de ponto a ponto no domínio da taxa de uma malha para cada iteração [8].

O método das sobre-relaxações sucessivas (SOR) é um método que procura acelerar o processo de

convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Isso é feito utilizando uma sobre-relaxação dos valores obtidos com o método de Gauss-Seidel [1].

$$T_P^{K+1} = \omega T_P^{K+1}|_{GS} + (1 - \omega)T_P^K \quad (12)$$

Na equação 12, $T_P^{K+1}|_{GS}$ representa o valor calculado para o método de Gauss-Seidel e ω é o coeficiente de relaxação, que é usado para acelerar a convergência para a solução, quando o processo está lento. Quando o valor de ω é 1, a equação 12 volta a ser Gauss-Seidel, que é dado por:

$$A_P T_P^{K+1} = \sum A_{NB} T_{NB}^{K+1} + A_E T_E^K + A_N T_N^K + B_P \quad (13)$$

A equação 13 indica que está ocorrendo um processo de varredura de norte a sul e de leste a oeste, considerando-se conhecidas as temperaturas T_W e T_S no caso 2D.

O parâmetro de relaxação é o que irá determinar a convergência desse método, esse parâmetro precisa estar maior que 1 e menor que 2, caso seja menor que 1 o método é sub-relaxado e caso seja igual ou maior que 2, a solução irá divergir (para mais informações, consultar Knaber [9]).

Vale ressaltar que todo método numérico que seja aplicado para descrição de equações mais complexas precisa convergir para a resolução correta do problema, ou seja precisa ter estabilidade e consistência. Os resultados ao longo do processo computacional acumulam erros de truncamento e/ou arredondamento, que podem causar instabilidade na convergência da solução do sistema linear. A solução numérica é convergente quando é estável e tende para a solução das equações diferenciais quando a malha é refinada [1].

2.7 Metodologia

Como visto anteriormente, o objeto de estudo consiste em implementar uma malha computacional para transferência de calor em duas dimensões através do método dos volumes finitos. O método consiste em cinco etapas:

- Discretizar a geometria (contorno) do caso escolhido para criar os volumes de controle nas regiões de interesse do domínio (ver Fig. 3), gerando assim a malha.
- Integrar a Equação Diferencial que governa o problema, nesse caso a equação da condução de calor nas direções x e y, com base na malha gerada (ver Eq. 6).
- Aproximar T e suas derivadas utilizando funções de interpolação para gerar as equações algébricas nos nós da malha.
- Aplicar as condições de contorno nos volumes de fronteira, no presente caso são temperaturas prescritas.
- Resolver o sistema de equações algébricas obtido e encontrar a solução numérica, que é o interesse quando se usa métodos numéricos.

Ilustrando a construção da matriz dos coeficientes, considera-se a seguinte malha:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Figura 3. Malha bidimensional com 9 volumes (Autoria própria)

Sabendo que o sistema da aproximação da equação geral da condução pode ser descrito na forma matricial como $[A][T] = [B]$, onde $[A]$ é a matriz dos coeficientes, $[T]$ o vetor das temperaturas e $[B]$ o vetor dos termos conhecidos. A figura 3 representa a discretização do domínio em 9 volumes finitos, onde o volume 5 representa os volumes centrais e os volumes 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 representam os volumes que estão na fronteira do domínio.

Embora o número de volumes usados na maioria dos casos sejam bem mais do que 9, esta malha serve para ilustrar qualquer caso para geometria bidimensional, pois cada volume possui condições de fluxo de energia diferente um do outro, à medida que o número de volumes cresce, os volumes das “quinas”, 1, 3, 7, 9 permanecem atendendo as mesmas condições. Os volumes das “laterais”, 2, 4, 6, 8 possuem condições de fluxo que servem

para quantos volumes existirem na malha, contanto que estejam nas “laterais”. O volume central possui condições de fluxo que também não se alteram, sendo conservadas para quaisquer volumes que estejam no “centro” da malha.

Tomando uma quantidade n_x de volumes na direção x e n_y de volumes na direção y , teremos uma discretização generalizada, tal que as condições de contorno permanecerão as mesmas para qualquer quantidade n_x e n_y de volumes, pois elas só dependem da forma como o fluxo vai se comportar na região. Tomando o volume centrado em A_p para descrever a equação discretizada, tem-se:

$$A_p T_p = A_e T_e + A_w T_w + A_n T_n + A_s T_s + B \quad (14)$$

Como o volume 1 tem apenas dois volumes que fazem fronteira, A_2 e A_4 , tomando os coeficientes dos volumes restantes iguais a zero, a equação relacionada a A_p é encontrada:

$$A_p T_p = A_e T_e + A_n T_n + B \quad (15)$$

Utilizando esse mesmo raciocínio para todos os 9 volumes, obtemos uma matriz de coeficientes 9×9 , da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_p & A_e & 0 & A_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_w & A_p & A_e & 0 & A_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_w & A_p & A_e & 0 & A_n & 0 & 0 & 0 \\ A_s & 0 & A_w & A_p & A_e & 0 & A_n & 0 & 0 \\ 0 & A_s & 0 & A_w & A_p & A_e & 0 & A_n & 0 \\ 0 & 0 & A_s & 0 & A_w & A_p & A_e & 0 & A_n \\ 0 & 0 & 0 & A_s & 0 & A_w & A_p & A_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_s & 0 & A_w & A_p & A_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_s & 0 & A_w & A_p \end{bmatrix}$$

Como pode ser observado, a matriz de coeficientes A é pentadiagonal para casos bidimensionais, tendo o resto de seus espaços preenchido com termos nulos. Para casos unidimensional e tridimensional, a matriz de coeficientes seria, respectivamente, tridiagonal e heptadiagonal.

A discretização consiste em dividir o volume de controle considerado em um número de repartições iguais. A equação usada para o fenômeno proposto é a equação 6, que é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, para obtermos uma solução numérica aproximada dessa equação, é preciso integrá-la em seu domínio. Esse processo precisa ser feito para cada volume discretizado, pois os limites da integral podem mudar de um volume para outro. Para demonstrar este processo, será feito a discretização do volume 1 (ver Fig. 3).

$$\int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] dy dx = 0 \quad (16)$$

$$\left[\frac{T_e - T_p}{\Delta x} - \frac{T_p - T_{fw}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] \Delta y + \left[\frac{T_n - T_p}{\Delta y} - \frac{T_p - T_{fs}}{\frac{\Delta y}{2}} \right] \Delta x = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} T_e - 3 \frac{\Delta y}{\Delta x} T_p + 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} T_{fw} + \frac{\Delta x}{\Delta y} T_n - 3 \frac{\Delta x}{\Delta y} T_p + 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} T_{fs} = 0 \quad (18)$$

Isolando o T_p , obtemos:

$$\left(3 \frac{\Delta y}{\Delta x} + 3 \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) T_p = \frac{\Delta y}{\Delta x} T_e + \frac{\Delta x}{\Delta y} T_n + \left(2 \frac{\Delta y}{\Delta x} T_{fw} + 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} T_{fs} \right) \quad (19)$$

O resto dos volumes na fronteira podem ser discretizados conforme feito para o volume 1. Todo volume na região de contorno apresenta um termo B , que depende das temperaturas prescritas. Agora, o volume 5 (central) será discretizado.

$$\left[\frac{T_e - T_p}{\Delta x} - \frac{T_p - T_w}{\Delta x} \right] \Delta y + \left[\frac{T_n - T_p}{\Delta y} - \frac{T_p - T_s}{\Delta y} \right] \Delta x = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} T_e - 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} T_p + \frac{\Delta y}{\Delta x} T_w + \frac{\Delta x}{\Delta y} T_n - 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} T_p + \frac{\Delta x}{\Delta y} T_s = 0 \quad (21)$$

$$\left(2 \frac{\Delta y}{\Delta x} + 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) T_p = \frac{\Delta y}{\Delta x} T_e + \frac{\Delta x}{\Delta y} T_n + \frac{\Delta y}{\Delta x} T_w + \frac{\Delta x}{\Delta y} T_s \quad (22)$$

Nota-se que nas equações discretizadas dos volumes na fronteira, o termo independente B sempre aparecerá, enquanto na equação dos volumes centrais, o termo independente é sempre zero, pois a energia sempre está sendo transportada pelos nós de um volume para o outro. Os termos que multiplicam as temperaturas nos nós são os coeficientes que preenchem a matriz.

As equações aproximadas para cada volume precisam obter uma solução também aproximada que satisfaça os critérios estabelecidos. No Método de Sobre-relaxações Sucessivas (SOR), é importante determinar o parâmetro de relaxação ω (ver eq. 12), que pode acelerar ou retardar a convergência do método. Para obter o melhor valor para esse parâmetro, uma série de testes foi realizada com diferentes valores.

Tabela 1 – Número de iterações para valores de ω (Autoria própria).

Parâmetro de relaxação - ω	Iterações
-----------------------------------	-----------

1,0	657
1,1	600
1,2	552
1,3	512
1,4	477
1,5	446
1,6	419
1,7	396
1,8	10000

Pela tabela 1, pode-se afirmar que o melhor valor de relaxação que pode ser utilizado é 1,7. Para um valor de 1,7 obteve-se 396 iterações, sendo esse o valor usado no cálculo da solução do sistema linear, de forma a reduzir o processamento. O critério de parada usado para o método foi o erro absoluto. A declaração dos parâmetros utilizados no algoritmo e as temperaturas prescritas podem ser visualizadas abaixo:

Tabela 2 – Parâmetros utilizados no algoritmo (Autoria própria).

Erro Absoluto (erro)	0,0000001
Parâmetro de relaxação (ω)	1,7
Distância da placa no eixo x (Lx)	100 mm
Distância da placa no eixo y (Ly)	100 mm
Número de volumes no eixo x da placa (nx)	20
Número de volumes no eixo y da placa (ny)	20
Distância do volume no eixo x (dx)	5 mm
Distância do volume no eixo y (dy)	5 mm

Tabela 3 – Temperaturas prescritas utilizadas no algoritmo (Autoria própria).

Temperatura vinda de baixo da placa (T_bottom)	0,0 °C
Temperatura vinda da esquerda da placa (T_left)	0,0 °C
Temperatura vinda da direita da placa (T_right)	0,0 °C
Temperatura vinda de cima da placa (T_top)	100,0 °C

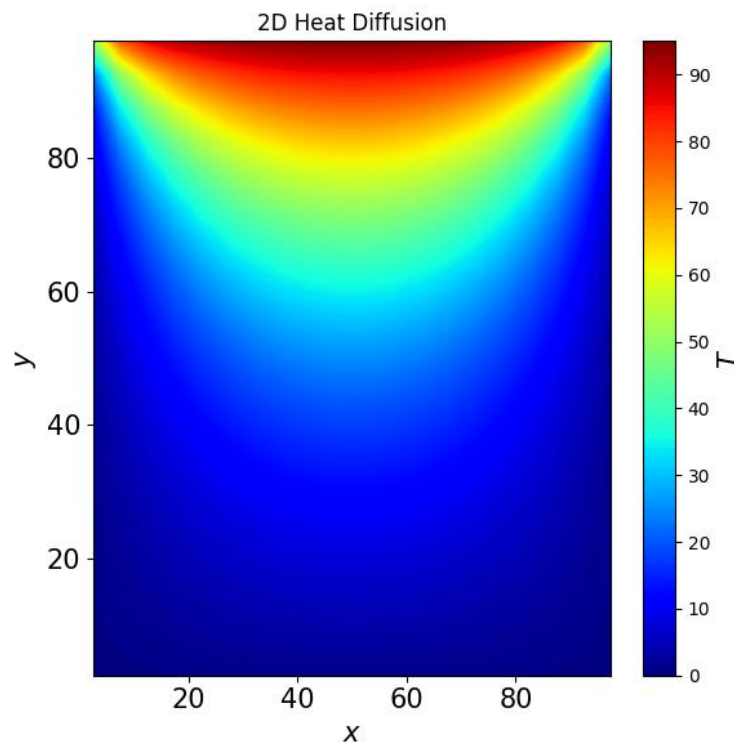


Figura 4. Gradiente de temperaturas obtido através do MVF utilizando Python, n=400 (Autoria própria).

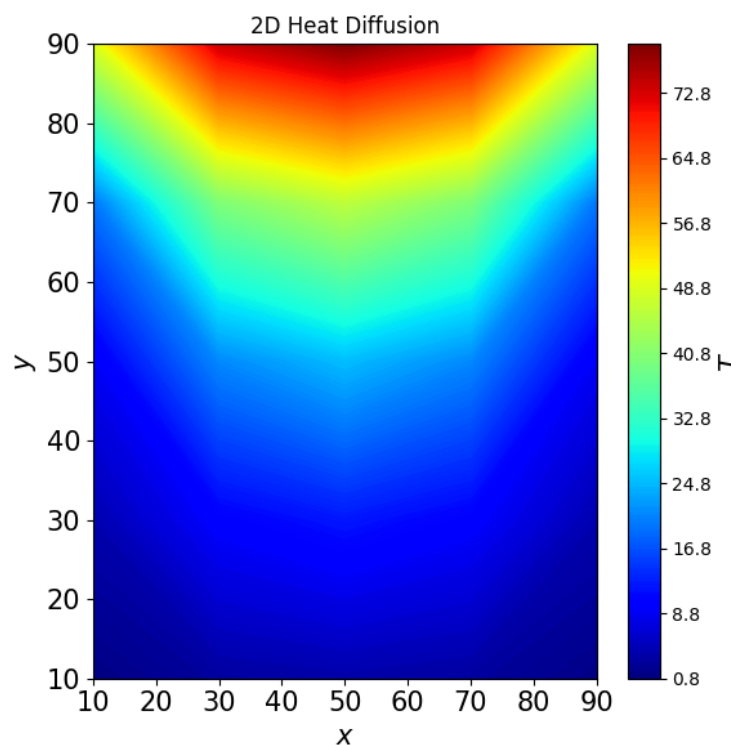


Figura 5. Gradiente de temperaturas obtido através do MVF utilizando Python, $n=25$ (Autoria própria).

Através da figura apresentada, pode-se afirmar que o MVF obteve êxito na geração de uma malha de condução de calor na placa bidimensional, descrevendo o gradiente de temperaturas na placa. É observável que a malha gerada com um número de 400 volumes se aproximou das temperaturas prescritas com maior exatidão que a malha gerada com 25 volumes. Aumentando o número de volumes, a precisão e exatidão do método aumenta, no entanto, mais memória é consumida computacionalmente. Para fins didáticos, 20 volumes já são suficientes para resultados satisfatórios.

3. CONCLUSÕES

A engenharia está cada vez mais buscando compreender os fenômenos de transporte presentes na natureza, para que possa obter resultados cada vez mais satisfatórios em suas aplicações. No caso das ciências térmicas, o transporte de energia na forma de calor é bastante utilizado na indústria em diferentes níveis e a simulação desse fenômeno é indispensável para um melhor controle e menor perda de informações sobre esse processo.

O estudo realizado nesse trabalho defende o uso do Método dos Volumes Finitos como uma boa estratégia para simular o fenômeno de condução de calor, sendo possível afirmar que a resolução de problemas de natureza conservativa utilizando este método, retornou valores satisfatórios para o exemplo em questão.

Através da análise realizada, é possível compreender o processo de discretização de uma geometria em repartições iguais, possibilitando trabalhar com uma equação mais simples e que tenha uma solução numérica e de fácil resolução, do que resolver equações diferenciais parciais, cujas soluções são mais complexas. Com o domínio de trabalho discretizado, o sistema linear gerado a partir das equações conservativas para cada volume foi resolvido por um método iterativo que se mostrou capaz de retornar soluções suficientemente próximas da solução real. Através do refinamento da malha, ou seja, do aumento da quantidade de volumes, a transferência da propriedade que se quer simular acaba sendo mais exata e os resultados se tornam mais confiáveis.

Em geral, a equação usada para condução bidimensional em regime estacionário e sem geração interna de calor é mais simples de se trabalhar, para fenômenos com mais termos, a discretização pode ser mais demorada de se fazer e o esforço computacional provavelmente será maior. Para trabalhos futuros, fica a possibilidade de aplicação de Método dos Volumes Finitos em outras equações governantes de fenômenos, utilizando da mesma estratégia, simulando casos como quando há geração de calor interna e/ou em estado transiente.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MALISKA, C. R. TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2º ed, 2017;
- [2] ÇENGEL, A. Y.; GHAJAR, A. J. Transferência de calor e massa. 4º ed. Editora McGraw-Hill, 2012.
- [3] INCROPERA, F. P. et al. Fundamentos de Transferência de Calor e Massa. 8º ed. Rio de Janeiro/RJ, 2019
- [4] MORAN, Michael J.; SHAPIRO, Howard N.. Princípios de Termodinâmica para Engenharia. 8º ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 800 p.

-
- [5] SAYMA, Naser. Computational Fluid Dynamics. 1. ed. Abdunaiser Sayma & Ventus Publishing, 2009.
- [6] SAYMA, Naser. LONG, Chris. Heat Transfer. 1° ed. Abdunaiser Sayma & Ventus Publishing, 2009.
- [7] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. Differential Equations. 10° ed. Canada, 2012.
- [8] FRANCO, Neide Bertoldi. Cálculo Numérico. 2ª edição, Prentice Hall, 2006.
- [9] KNABNER, P.; ANGERMAN, L. Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations. 1. ed. Nova Iorque: Springer-Verlag New York, 2003.
- [10] FERZIGER, J. H.; PERIC, M. Computational methods for fluid dynamics, 3rd rev. ed. New York: Springer, 2002.

APÊNDICE A

MVF – Gerador de Calor para Placa Bidimensional

Declare

Lx	(Dimensão da placa no eixo x)
Ly	(Dimensão da placa no eixo y)
nx	(Número de nós no eixo x)
ny	(Número de nós no eixo y)
dx	(Dimensão do volume no eixo x)
dy	(Dimensão do volume no eixo y)
coefAmatrix2D	(Matriz de coeficientes A)
coefB	(Vetor com as condições de contorno)
ω	(Parâmetro de relaxação)
T_init	(Variável inicial para cálculo de T)
nTotal	(Número total de nós)
it	(Número de iterações)
itmax	(Número máximo de iterações)
T_left	(Temperatura da face esquerda)
T_right	(Temperatura da face direita)
T_bottom	(Temperatura da face inferior)
T_top	(Temperatura da face superior)
T	(Matriz resposta de temperaturas)

Leia nTotal, dx, dy, Lx, Ly, T_init, T

Enquanto it **for menor que** itmax **faça**

Para j **de** 0 **até** ny **faça**

Para i **de** 0 **até** nx **faça**

 T $\leftarrow$ Equações de conservação discretizadas para cada volume

Fim para

 T $\leftarrow$ Método de sobre-relaxações sucessivas

Fim enquanto

Escreva T

Plot T