

ESTUDO DO CIRCUITO ELÉTRICO ATMOSFÉRICO GLOBAL ATRAVÉS DE SISTEMA ELÉTRICO RLC

Paulo Victor Fernandes Vieira¹, Ivan Mezzomo² (Orientador)

Resumo: O objetivo desse trabalho é estudar o Circuito Elétrico Global (CEG) que representa o modelo elétrico o qual contém o solo do planeta Terra e a ionosfera, no qual é possível chegar a uma equação diferencial ordinária através da modelagem matemática. O método que será utilizado para resolução das equações diferenciais dos problemas propostos será a Transformada de Laplace. Será mostrado o modelo original do CEG contendo duas partes importantes que representam o clima com tempestade (*Thunder Storms*) e sem tempestade (*Fair Weather*). Neste trabalho iremos estudar três problemas na condição climática *Fair Weather* em que os cálculos serão expostos, comentados e analisados graficamente.

Palavras-chave: Circuito Elétrico Global; Equações diferenciais ordinárias; *Fair Weather*; modelagem matemática.

1. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais começaram a ser estudadas por matemáticos no século XVII, mas foi no século XIX que elas se tornaram uma ferramenta fundamental para diversas áreas, como a matemática, física, engenharia e ciências aplicadas em geral. Os trabalhos notáveis dessa época foram desenvolvidos por matemáticos como Cauchy, Gauss, Laplace e Fourier, que desenvolveram métodos e técnicas importantes para resolver equações diferenciais de várias ordens e tipos. O estudo das equações diferenciais continuam sendo uma área ativa de pesquisa e desenvolvimento, com aplicações em uma variedade de áreas, desde a física quântica até a modelagem de sistemas complexos em ciências aplicadas.

A Transformada de Laplace foi criada por Pierre-Simon Laplace, no final do século XVIII. Entre os vários métodos disponíveis para resolver equações diferenciais, a Transformada de Laplace converte uma equação diferencial em uma equação algébrica mais fácil de manipular, tornando-se uma importante ferramenta analítica para a solução de problemas que envolvem equações diferenciais.

O CEG é a representação do sistema elétrico que relaciona principalmente o sistema solo-ionosfera, o qual representa um capacitor esférico com duas placas que é carregado durante as tempestades. Entre as placas do capacitor, há correntes com milhões de amperes percorrendo a coluna resistiva. O CEG vem tendo mais resultados em pesquisas relacionadas principalmente ao estudo de tempestades e raios. Esse sistema elétrico consegue representar o clima com tempestade e sem tempestade segundo [1]. Além disso, o modelo contém componentes como resistor, capacitor e indutor.

Nesse trabalho, primeiramente, no Capítulo 2, serão apresentadas definições de assuntos indispensáveis para o entendimento deste trabalho tais como EDO, Transformada de Laplace e componentes do circuito elétrico. No Capítulo 3, será apresentada a definição do CEG e a sua modelagem matemática. O Capítulo 4 detalha a metodologia utilizada no estudo e apresenta três problemas na condição *Fair Weather*. No Capítulo 5, as equações diferenciais são resolvidas e as funções obtidas são utilizadas para gerar gráficos e calcular as tensões em determinados instantes de tempo. Como também, é discutido que as tensões produzidas pelos problemas estão dentro de uma ordem de grandeza aceitável de acordo com a literatura, considerando a tensão necessária para quebrar a rigidez dielétrica do ar. Por fim, Capítulo 6 traz as considerações finais, concluindo que o *Fair Weather* do CEG pode ser modelado matematicamente.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Equações Diferenciais

Neste capítulo será introduzido alguns conceitos fundamentais para o entendimento dos objetivos deste trabalho. Iniciaremos pela definição de equações diferenciais.

Definição 1 [2]: Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais funções não conhecidas (ou variáveis dependentes), em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial (ED)**.

A equação diferencial pode ser classificada por tipo, ordem e linearidade.

Classificação por tipo: Conforme [2], quando a equação diferencial contém exclusivamente derivadas ordinárias de uma ou mais funções não conhecidas em relação a uma única variável independente é denominada como Equação Diferencial Ordinária (EDO). Sob outra perspectiva, quando se tem uma equação envolvendo derivadas parciais de uma ou várias funções em relação a duas ou mais variáveis independentes, é chamado de Equação Diferencial parcial (EDP).

Classificação por ordem: Segundo [3], a ordem de uma equação diferencial é simplesmente a ordem de maior grau da derivada que está contida na equação.

Classificação por linearidade: De acordo com [2], a linearidade de uma equação diferencial é obtida quando:

1. A variável da equação diferencial dependente y e todas as suas derivadas $y', y'', y''' \dots y^{(n)}$ são de primeiro grau, isto é, a potência de cada elemento envolvendo a variável y é 1.
2. Os coeficientes $a_1(x), \dots, a_n(x)$ das derivadas $y', \dots, y^{(n)}$ podem depender apenas da variável x ou são constantes.

Com isso, a EDO linear de ordem n tem a seguinte configuração:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

Em contrapartida uma EDO não linear é aquela que não se enquadra nos requisitos acima.

2.2. Transformada de Laplace

Conforme [2], a Transformada de Laplace pode ser definida a partir de uma função f que contém duas variáveis, então a integral definida de uma das variáveis obtém como resultado uma função em relação a segunda variável. Logo, uma integral escrita da forma $\int_a^b K(s, t)f(t)dt$ converte uma função f da variável t em uma função F da variável s . Usualmente é utilizado a transformada integral em que o intervalo de integração é $[0, \infty)$. A integral imprópria $\int_0^\infty K(s, t)f(t)dt$ é definida por limite, é porque $f(t)$ é definida por $t \geq 0$. Escrito matematicamente tem-se que:

$$\int_0^\infty K(s, t)f(t)dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s, t)f(t)dt \quad (2)$$

O resultado desse limite tem duas soluções possíveis. Primeiro, o resultado da integral existe ou é convergente, se o limite existir. Do contrário, se o limite não existe, a integral não existe e é divergente.

A função $K(s, t)$ em [2] é chamada de **núcleo** da transformação. A escolha $K(s, t) = e^{-st}$ nos dá uma transformada integral especialmente importante. Seja f uma função definida para $t \geq 0$, a integral

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

será chamada Transformada de Laplace de f , desde que a integral convirja.

Um fato histórico é que a transformada de Laplace ganhou essa denotação devido a homenagem feita ao matemático e astrônomo francês chamado Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827).

Quando a integral da Equação (2) convergir, o resultado obtido é uma função em s . Por convenção, usamos letras minúsculas para representar a função que está sendo transformada e a letra maiúscula para descrever sua transformada de Laplace. Por exemplo:

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

Definição 2 [2]: Dizemos que uma função f é de ordem exponencial se existem constantes $c, M > 0$ e $T > 0$, tal que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

Se f é uma função crescente, então a condição $|f(t)| \leq Me^{ct}, t > T$, significa que o gráfico de f no intervalo $[T, \infty)$ cresce mais lentamente que o gráfico da função exponencial Me^{ct} , onde c é uma constante positiva, como pode ser visualizado na figura abaixo:

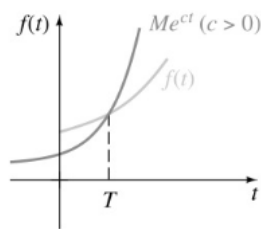


Figura 1. Função de ordem exponencial. Fonte [2]

Teorema 1 [2]: Se $f(t)$ é contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, então $L\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

Teorema 2 [2]: Se $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ forem contínuas em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $[0, \infty)$, então

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \text{ onde } F(s) = L\{f(t)\}.$$

Teorema 3 [2]: Se $L\{f(t)\} = F(s)$ e a for um número real qualquer, então

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s - a).$$

Definição 3 [2]: A função degrau unitário $U(t - a)$ é definida por

$$U(t - a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

Teorema 4 [2]: Se $F(s) = L\{f(t)\}$ e $a > 0$, então

$$L\{f(t - a)U(t - a)\} = e^{-as}F(s).$$

2.3. Circuito Elétrico RLC

Os circuitos elétricos do tipo RLC são compostos por resistores, capacitores e indutores. A bibliografia utilizada para definir os conceitos sobre esses componentes e, e outros conceitos fundamentais, foram [4] e [5].

2.3.1. Diferença de potencial elétrico

Uma carga elétrica é um elemento da matéria conhecido por ter interações eletromagnéticas. Através de seu campo eletrostático, uma carga elétrica é capaz de realizar trabalho ao deslocar uma outra carga por atração ou repulsão. A característica de uma carga realizar trabalho é denominada de potencial. Quando uma carga for diferente de outra, haverá uma diferença de potencial entre elas, além disso a soma das diferenças de potencial de todas as cargas do campo eletrostático é conhecida como força eletromotriz (fem).

A unidade de medida de diferença de potencial é Volt (V) e a diferença de potencial também é chamada de tensão elétrica.

2.3.2. Corrente elétrica

A corrente elétrica é definida como um fluxo de elétrons e para que haja esse fluxo é necessário que se tenha diferença de potencial. A corrente elétrica é representada pela letra I e a sua unidade de medida o Ampère (A) que representa o deslocamento de 1 coulomb através de um condutor elétrico em um intervalo de tempo de 1 segundo.

2.3.3. Fluxo magnético

O fluxo magnético pode ser definido a partir de linhas de campo magnético que atravessam determinada área. A unidade do fluxo magnético no Sistema Internacional é $T \cdot m^2$ (tesla-metro quadrado), que recebe a denotação Weber (Wb).

2.3.4. Resistores

Os resistores têm por finalidade controlar fluxo de corrente elétrica no condutor elétrico e este fenômeno é conhecido por resistência. Dessa forma, este elemento tem como função ajustar a tensão do circuito, limitar a corrente e constituir-se como uma carga. O símbolo de resistência é R e a unidade de medida em Ohms (Ω).

Por exemplo, quando se aplica a mesma diferença de potencial às extremidades de barras de mesmas dimensões feitas de cobre e de plástico, os resultados de valores de corrente são muito diferentes. Portanto, a característica do material que determina essa diferença é chamada de resistência elétrica. A equação que relaciona esse conceito é

$$R = \frac{V}{I} \quad (3)$$

Logo, a resistência é uma grandeza inversamente proporcional a corrente I e diretamente proporcional a tensão.

2.3.5. Indutores

O indutor é composto por um condutor elétrico que tem como finalidade induzir uma tensão à medida que a corrente varia no tempo. O símbolo desse componente é a letra L e a sua unidade de medida é Henry (H).

Tal elemento tem como característica física determinada quantidade de espiras N em formato de solenoide que quando percorrida por uma corrente I , esta corrente produz um fluxo magnético Φ_B na região central do componente e esse fenômeno é chamado de indutância, que é uma unidade de medida que pode ser definida por

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (4)$$

2.3.6. Capacitores

O capacitor é um elemento composto por duas placas metálicas condutoras que entre elas contém um material isolante chamado de dielétrico. Este componente tem como finalidade armazenar cargas elétricas em seu interior (dielétrico). O símbolo da capacitância é C e a unidade de medida é Farad (F).

Ao passo que um capacitor é submetido a uma diferença de potencial V , as placas ficam carregadas com cargas q de valor absoluto iguais, mas de sinais opostos. Como as duas placas são feitas de um único material, se tornam superfícies equipotenciais, ou seja, todos os pontos da placa do capacitor estão no mesmo potencial elétrico. O capacitor tem uma unidade de grandeza denominada capacitância que é diretamente proporcional a carga q e inversamente proporcional a diferença de potencial V , assim

$$C = \frac{q}{V} \quad (5)$$

3. MODELAGEM MATEMÁTICA DO CIRCUITO ELÉTRICO GLOBAL (CEG)

3.1. Circuito Elétrico Global (CEG)

De acordo [1], o CEG é definido através da geração de corrente na baixa atmosfera, ionosfera e magnetosfera, compondo um modelo terrestre que contém o campo elétrico. Esse modelo associa principalmente o sistema solo-ionosfera que é formado por um grandioso capacitor esférico com duas placas, as quais são representadas pelo solo do planeta terra e a ionosfera, na qual o sistema elétrico é carregado durante as tempestades.

Nesse contexto, correntes com milhões de amperes ficam transitando através da coluna resistiva da atmosfera entre as placas do capacitor esférico. Nesse modelo, existem dois elementos importantes, a parte do circuito que representa tempestades elétricas (*Thunder Storms*) e a que representa o ambiente sem tempestades (*Fair Weather*).

Em ambas situações, *Thunder Storms* e *Fair Weather*, o CEG é formado por resistores e capacitores no circuito. No entanto, o modelo que será estudado nesse trabalho será a condição *Fair Weather* que é uma extensão do modelo feito em [1], acrescentando-se a representação da magnetosfera que tem em sua composição tubos de plasmas que são representados por um indutor, definido em [6]. O sistema elétrico que representa estas duas condições pode ser visualizado na figura abaixo:

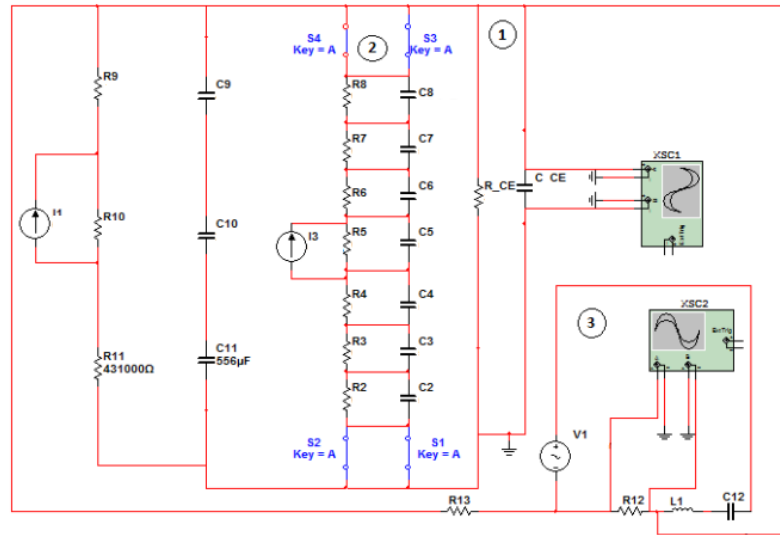


Figura 2. Extensão modelo do CEG. Fonte [6].

O número 1 na figura acima representa o *Fair Weather*, o número 2 representa *Thunder Storms*, enquanto o número 3 representa os efeitos da magnetosfera no CEG. O modelo completo do CEG acima é complexo e composto por resistores, indutores e capacitores, por isso iremos focar nesse trabalho apenas no *Fair Weather*. Além disso, iremos considerar o indutor que está contido no número 3 do circuito, desconsiderando os efeitos resistivos e capacitivos da magnetosfera. Por fim, teremos um circuito elétrico do tipo RLC em paralelo que representa o clima *Fair Weather*, conforme representado na figura abaixo

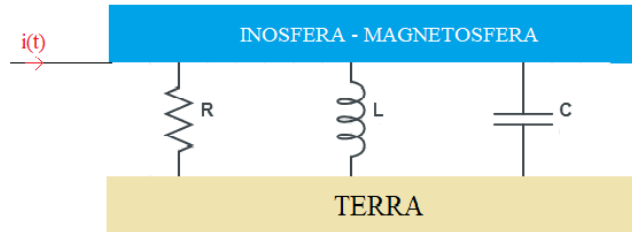


Figura 3 – Diagrama do clima *Fair Weather* do CEG. (autoria própria)

A figura acima ilustra o circuito elétrico do tipo RLC em paralelo, onde o capacitor esférico tem uma distância de 80 km entre suas placas da terra a ionosfera, o meio dielétrico é o ar que contém uma rigidez dielétrica que caracteriza a resistência elétrica. A indutância é caracterizada por tubos de plasmas da magnetosfera.

Segundo [1], para calcular o valor da capacitância utilizamos o modelo de capacitor que mais se aproxima do sistema estudado (crosta terrestre versus ionosfera) é o modelo de capacitores de esferas concêntricas, dado por

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \quad (6)$$

a constante ϵ_0 é a permissividade elétrica no vácuo, R_1 é a distância do centro da terra até a ionosfera (totalizando uma distância aproximada de 6451km), enquanto que R_2 é o raio da terra (aproximadamente 6371 km).

A resistência que é representada no CEG é encontrada com auxílio do gráfico que relaciona a condutividade elétrica e a altitude, onde o gráfico pode ser visualizado abaixo.

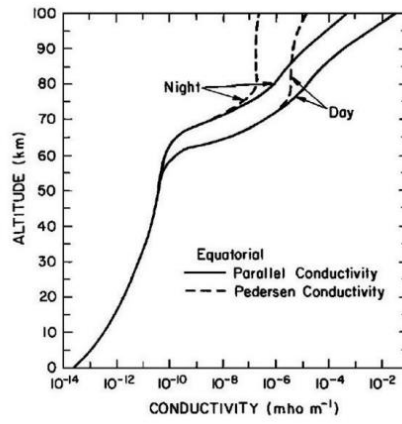


Figura 4 – Gráfico do perfil de condutividade. Fonte [7]

A partir da relação da altitude versus a condutividade elétrica do meio mostrada no gráfico da Figura 4 é possível calcular a resistência elétrica do circuito analisado com a equação abaixo.

$$R_{Ti} = \frac{1}{A_E - 1000A_T} \int_{Z_g}^{Z_{ion}} \frac{dz}{\sigma(z)} \quad (7)$$

em que A_E é a área da esfera que representa o planeta terra, aproximadamente $510 \times 10^9 \text{ km}^2$, A_T é a área de incidência de um raio, ou seja, se trata da área circular onde o raio é estudado como mostra a Figura 5, que é de aproximadamente 314 km^2 . Os extremos da integral é Z_{ion} que é 80 km (topo da ionosfera) e Z_g $0,35 \text{ km}$ (nível médio do solo). Através da imagem abaixo é possível visualizar a área em que raio elétrico é estudado, apesar deste trabalho não focar em condição de *Thunder Storms*, essa variável também é utilizada para os cálculos da resistência do *Fair Weather*.

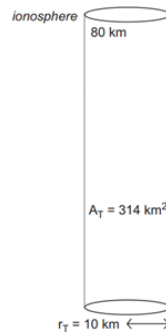


Figura 5 – Ilustração que mostra a área em que o raio é estudado. Fonte [7]

3.2. Modelagem matemática do CEG

A partir do conhecimento na mecânica, através do caso geral do sistema massa-mola, é possível resolver vários casos particulares envolvendo equações diferenciais. A lei de Hooke é dada por

$$F = ks \quad (8)$$

que representa uma força que faz parte do sistema, onde a mola exerce uma força restauradora F oposta à direção do alongamento e proporcional à distensão s , onde k é uma constante de proporcionalidade denominada constante da mola.

A segunda lei de Newton que apresenta uma força pertencente ao sistema que é definida por

$$F = ma \quad (9)$$

onde a aceleração pode ser escrita como a derivada segunda do espaço x em relação ao tempo t , denotada por $\frac{d^2x}{dt^2}$. Portanto a Equação (9) pode ser escrita por

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (10)$$

A figura abaixo se trata do sistema massa-mola que relaciona a segunda lei de Newton e a lei de Hooke.

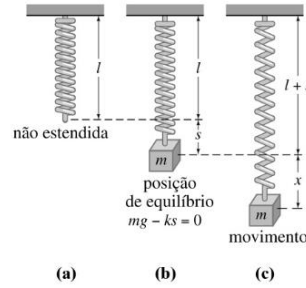


Figura 6 –Sistema massa-mola. Fonte [2].

Na Figura 6 (a), há uma mola não estendida e que posteriormente é conectada uma massa m . Com isso, provoca-se uma distensão s até que o sistema atinge a posição de equilíbrio, como mostrado na Figura 6 (b). Sabendo que a força peso é $W = mg$, a força restauradora da mola é igual a força peso do objeto, assim $mg - ks = 0$. E, se ainda, a massa for deslocada por uma quantidade x de sua posição de equilíbrio, como mostrado na Figura 6 (c), a força restauradora da mola será então $k(x + s)$. Imaginando que não haja forças externas de retardamento sobre o sistema, pode-se igualar F com a força resultante do peso e da força restauradora, assim

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg = -kx + mg - ks = -kx. \quad (11)$$

em que $-kx$ refere-se a força restauradora da mola e seu sinal negativo indica que a força restauradora da mola age no sentido oposto ao do movimento. No entanto, o modelo acima não considera forças externas, logo não é realístico, visto que no mínimo há a resistência do ar impedindo o movimento. No estudo de mecânica, as forças de amortecimento que atuam sobre um corpo são consideradas proporcionais a uma potência de velocidade instantânea, denotada por $\frac{dx}{dt}$. Acrescentando esse fator do lado direito da equação multiplicado por $-\beta$, dividindo a Equação (11) por m e reorganizando os termos, temos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{kx}{m} = 0 \quad (12)$$

onde β é a constante de amortecimento positiva que faz o produto com uma potência de velocidade e o sinal de subtração indica que a força de amortecimento atua em sentido oposto ao movimento. Substituindo as constantes de forma que $\frac{\beta}{m} = 2\lambda$ e $\frac{k}{m} = \omega^2$, temos que a Equação (12) se torna

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (13)$$

O símbolo 2λ é utilizado somente por conveniência algébrica, pois a solução da equação diferencial homogênea tem a equação auxiliar $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ tem como raízes

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Podemos obter três casos a partir da solução:

Caso 1: Quando $\lambda^2 - \omega^2 > 0$

Neste caso, o sistema é superamortecido, pois o coeficiente de amortecimento β é maior quando comparado com a constante da mola k . A solução da Equação (12) é $x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$.

Caso 2: Quando $\lambda^2 - \omega^2 = 0$

Neste caso, o sistema é criticamente amortecido, pois qualquer decréscimo na força de amortecimento resulta em um movimento oscilatório. A solução da Equação (12) é $x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 t e^{m_1 t}$.

Caso 3: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$

Neste caso, o sistema é subamortecido, pois o coeficiente de amortecimento é pequeno quando comparado com a constante da mola. As raízes agora são complexas:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} i, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} i$$

Assim, a solução da Equação (12) é:

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} t)$$

Por fim, no caso mais completo, considerando uma força externa $F(t)$ agindo sobre a massa vibrante em uma mola, com isso a inclusão desta força na formulação da segunda Lei de Newton na Equação (11), resulta na equação diferencial do movimento forçado ou induzido, dado por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t) \quad (14)$$

Problemas de circuito elétrico do tipo RLC podem ser resolvidos por uma EDO semelhante. No circuito elétrico ilustrado pela Figura 3 na qual passa uma corrente $I(t)$, pela primeira lei de Kirchoff, temos que a soma das correntes que se divide entre os componentes do circuito é igual a $I(t)$, ou seja,

$$I(t) = I_R + I_L + I_C \quad (15)$$

Segundo [5], como $I_R = \frac{V}{R}$, $I_L = \frac{1}{L} \int v(t) dt$ e $I_C = C \frac{dv}{dt}$, temos que a Equação (15) se torna

$$I(t) = \frac{V}{R} + \frac{1}{L} \int v(t) dt + C \frac{dv}{dt} \quad (16)$$

Derivando a Equação (16) em relação ao tempo, temos

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{L} V + C \frac{d^2V}{dt^2} \quad (17)$$

Dividindo a Equação (17) por C e reorganizando os termos, temos

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = \frac{dI}{dt} \quad (18)$$

4. METODOLOGIA

O objetivo desse trabalho é estudar a condição *Fair Weather* do CEG que é representado por um circuito RLC em paralelo e através da modelagem matemática chegarmos a uma equação diferencial de segunda ordem. A resolução da equação diferencial será feita pela Transformada de Laplace.

Neste trabalho será apresentado três problemas da condição *Fair Weather* do CEG em que cada um deles serão fornecidos os valores de resistência, indutância e capacitância, além da função que expressa uma força externa no sistema. Foram escolhidos comportamentos gráficos para a força externa onde indicam os diversos tipos de situações em que normalmente a corrente pode apresentar em um circuito elétrico.

De acordo com [1] e [6], os valores dos componentes do circuito são aproximadamente iguais a: resistência 330Ω , indutância $0,0127 \times 10^{-6} H$ e capacitância $0,05 F$. No entanto, neste trabalho iremos utilizar pequenas variações nos valores, de tal forma que representem a uma situação real. Além disso, em cada um dos problemas será considerado uma situação hipotética em que a força externa se trata de um momento em que há uma descarga elétrica entre as nuvens. Segundo [1], a corrente elétrica produzida no *Fair Weather* é da ordem de $950A$.

Problema 1: Dado o circuito elétrico que representa o clima equilibrado *Fair Weather* no CEG e os tubos de plasma da magnetosfera, na qual possui os valores resistência igual a 320Ω , de indutância igual $1mH$ e de capacitância igual $0,07F$. A função da variação da corrente em relação ao tempo é dada pela Figura 7. Dadas estas condições do CEG, qual é a tensão do CEG no tempo $t = 0,2$ segundos, sabendo que quando $t = 0$ a tensão é $V(0) = 300 KV$ e $V'(0) = 0$.

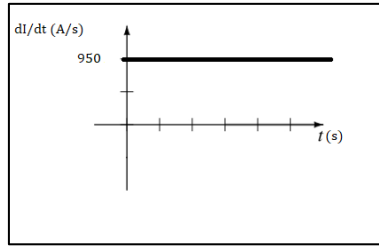


Figura 7 – Gráfico $I(t)$. (autoria própria).

Problema 2: Dado o circuito elétrico que representa o clima equilibrado *Fair Weather* no CEG e os tubos de plasma da magnetosfera, onde os valores os valores resistência igual a 340Ω , de indutância igual $1mH$ e de capacitância igual $0,04F$. A função da variação da corrente em relação ao tempo é dada pela Figura 8. Dadas estas condições do CEG, qual é a tensão do CEG no tempo $t = 1,2$ segundos, sabendo que quando $t = 0$ a tensão é $V(0) = 300 KV$ e $V'(0) = 0$.

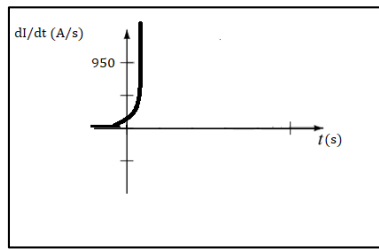


Figura 8 – Gráfico $I(t)$. (autoria própria).

Problema 3: Dado o circuito elétrico que representa o clima equilibrado *Fair Weather* no CEG e os tubos de plasma da magnetosfera, onde os valores os valores resistência igual a 330Ω , de indutância igual $1mH$ e de capacitância igual $0,05F$. A função da variação da corrente em relação ao tempo é dada pela Figura 9. Dadas estas condições do CEG, qual é a tensão do CEG no tempo $t = 2$ segundos, sabendo que quando $t = 0$ a tensão é $V(0) = 300 KV$ e $V'(0) = 0$.

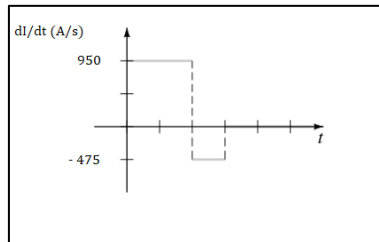


Figura 9 – Gráfico $I(t)$. (autoria própria).

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nessa seção iremos encontrar a solução da EDO dos problemas da seção anterior e discutir os resultados.

Problema 1: A função dada pela Figura 7 é representada por

$$\frac{dI}{dt} = 950 \quad (19)$$

Substituindo os valores descritos no problema e da Equação (19), na Equação (18), temos

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 0,0446 \frac{dV}{dt} + 14,28V = 950$$

Aplicando a Transformada de Laplace na EDO acima, temos

$$L\left\{\frac{d^2V}{dt^2}\right\} + 0,0446L\left\{\frac{dV}{dt}\right\} + 14,28L\{V\} = 950L\{1\}$$

$$s^2V(s) - sV(0) - V'(0) + 0,0446(sV(s) - V(0)) + 14,28V(s) = 950 \frac{1}{s}$$

$$V(s)(s^2 + 0,0446s + 14,28) = \frac{950}{s} + 300s + 13,38$$

$$V(s) = \frac{(300s^2 + 13,38s + 950)}{s(s^2 + 0,0446s + 14,28)}$$

Resolvendo a função acima, por meio de frações parciais, temos

$$V(s) = \frac{66,527}{s} + \frac{233,473s + 10,413}{(s^2 + 0,0446s + 14,28)}$$

Aplicando a Transformada de Laplace inversa, temos que

$$V(t) = 66,527 + 233,473e^{-0,0233t} \cos(3,779t) + 1,38e^{-0,0233t} \sin(3,779t) \quad (20)$$

A representação gráfica da Equação (20), é dada pela figura abaixo

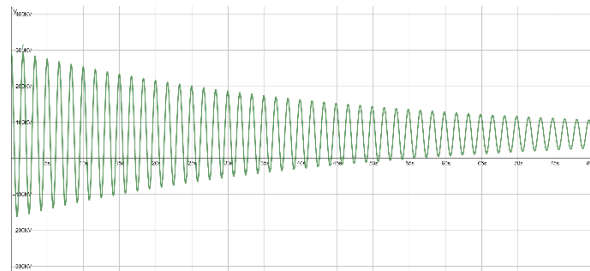


Figura 10 – Gráfico de $V(t)$ da Equação (20). (autoria própria)

Calculando a Equação (20) no tempo $t = 0,2$ segundos, temos que $V(0,2) \approx 236,59 \text{ kV}$.

Problema 2: A função dada pela Figura 8 é representada por

$$\frac{dI}{dt} = e^{2t} \quad (21)$$

Substituindo os valores descritos no problema e da Equação (21), na Equação (18), temos

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 0,0735 \frac{dV}{dt} + 25V = e^{2t}$$

Aplicando a Transformada de Laplace na EDO acima, temos

$$L\left\{\frac{d^2V}{dt^2}\right\} + 0,0735L\left\{\frac{dV}{dt}\right\} + 25L\{V\} = L\{e^{2t}\}$$

$$s^2V(s) - sV(0) - V'(0) + 0,0735(sV(s) - V(0)) + 25V(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$V(s)(s^2 + 0,0735s + 25) = \frac{1}{s-2} + 300s + 22,05$$

$$V(s) = \frac{300s^2 - 577,95s - 43,1}{(s-2)(s^2 + 0,0735s + 25)}$$

Resolvendo a função acima, por meio de frações parciais, temos

$$V(s) = \frac{0,0343}{s-2} + \frac{300s + 21,98}{(s^2 + 0,0735s + 25)}$$

Aplicando a Transformada de Laplace inversa, temos que

$$V(t) = 0,0343e^{2t} + 300e^{-0,0368t} \cos(5t) + 4,388e^{-0,0368t} \sin(5t) \quad (22)$$

temos que o resultado gráfico da Equação (22) representado por

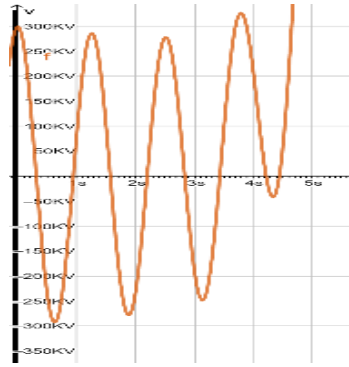


Figura 11 – Gráfico $V(t)$ da Equação (22). (autoria própria)

Calculando a Equação (22) no tempo $t = 1,2$ segundos, temos que $V(1,2) \approx 274,81 \text{ kV}$.

Problema 3: A função dada pela Figura 9 é representada por

$$\frac{dl}{dt} = 950 - 1425 U(t - 2) + 475 U(t - 3) \quad (23)$$

Substituindo os valores descritos no problema e da Equação (23), na Equação (19), temos

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 0,0606 \frac{dV}{dt} + 20V = 950 - 1425 U(t - 2) + 475 U(t - 3)$$

Aplicando a Transformada de Laplace na EDO acima, temos

$$L\left\{\frac{d^2V}{dt^2}\right\} + 0,0606L\left\{\frac{dV}{dt}\right\} + 20L\{V\} = 950L\{1\} - 1425L\{U(t - 2)\} + 475L\{U(t - 3)\}$$

$$s^2V(s) - sV(0) - V'(0) + 0,0606(sV(s) - V(0)) + 20V(s) = \frac{950}{s} - 1425\frac{e^{-2s}}{s} + 475\frac{e^{-3s}}{s}$$

$$V(s) = \frac{300s^2 + 18,18s + 950}{s(s^2 + 0,0606s + 20)} - 1425\frac{e^{-2s}}{s(s^2 + 0,0606s + 20)} + 475\frac{e^{-3s}}{s(s^2 + 0,0606s + 20)} \quad (24)$$

Resolvendo a função acima por frações parciais, temos

$$V(s) = \frac{47,5}{s} + \frac{252,5s + 15,30}{(s^2 + 0,0606s + 20)} - 1425e^{-2s}\frac{0,05}{s} - 1425e^{-2s}\frac{-0,05s - 0,003}{(s^2 + 0,0606s + 20)} + 475e^{-2s}\frac{0,05}{s} + 475e^{-2s}\frac{-0,05s - 0,003}{(s^2 + 0,0606s + 20)}$$

Aplicando a Transformada de Laplace inversa, temos que

$$\begin{aligned} V(t) = & 47,5 + 252,5e^{-0,0303t} \cos(4,47t) + 3,42e^{-0,0303t} \text{sen}(4,47t) \\ & - 71,25U(t - 2) + 71,25e^{-0,0303(t-2)} \cos(4,47(t - 2)) U(t - 2) \\ & + 10,61e^{-0,0303(t-2)} \text{sen}(4,47(t - 2)) U(t - 2) + 23,75U(t - 3) \\ & - 23,75e^{-0,0303(t-3)} \cos(4,47(t - 3)) U(t - 3) \\ & - 3,54e^{-0,0303(t-3)} \text{sen}(4,47(t - 3)) U(t - 3) \end{aligned} \quad (25)$$

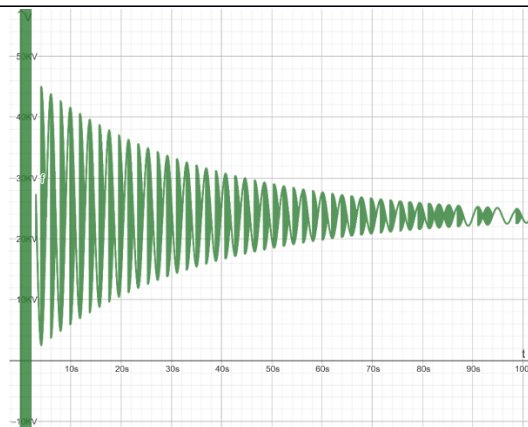


Figura 12 – Gráfico $V(t)$ da Equação (25). (autoria própria)

Calculando a Equação (25) no tempo $t = 2$ segundos, temos que $V(2) \approx -1513,26 \text{ kV}$.

Observamos em todos os problemas que se trata de sistemas subamortecidos, o que significa que a resolução dos problemas da EDO segue o Caso 3, descrito no Capítulo 3.2, devido ao fato de $\Delta < 0$. Isso ocorre porque o valor da resistência é maior do que o da capacitância e da indutância. As tensões obtidas têm valores aceitáveis, considerando que, segundo [5], é necessário aplicar aproximadamente uma tensão de 3 kV para romper a rigidez dielétrica do ar por milímetro. Portanto, conclui-se que para uma distância de 80 km no sistema solo-ionosfera que compõe o CEG, as tensões devem estar na ordem de milhões de volts.

Podemos observar que nos problemas 1 e 3, o gráfico da função $V(t)$ nos mostra um sistema subamortecido clássico, enquanto no problema 2, em que a força externa é exponencial, o gráfico de $V(t)$ indica um sistema subamortecido até certo tempo e, em seguida, a tensão aumenta abruptamente devido à influência da força externa.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho estudamos o fenômeno *Fair Weather* do CEG que pode ser adequadamente modelado matematicamente por uma EDO e utilizando o método da Transformada de Laplace para encontrar a solução da EDO e obter funções que representem a grandeza física ao longo do tempo. Os resultados obtidos revelaram que as tensões no CEG exibem características de subamortecimento, indicando que após picos de tensão elevados, a oscilação da tensão tende a se estabilizar em um ponto de equilíbrio, assemelhando-se ao movimento de um pêndulo que retorna à sua posição de equilíbrio, esse fenômeno pode ser explicado por descargas elétricas entre nuvens.

Com valores da tensão na ordem de milhões de volts, os resultados demonstraram que o CEG é um circuito robusto, apresentando grandezas físicas de elevado valor. Portanto, este trabalho contribuiu para a compreensão da importância da aplicação de equações diferenciais em questões de física e engenharia elétrica, ressaltando a relevância da modelagem matemática como uma ferramenta essencial para a solução de problemas do mundo real.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] RYCROFT, M.J. et al. New model simulation of the global atmospheric electric circuit driven by thunderstorms and electrified shower clouds: The roles of lightning and sprites. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, v. 69, p. 2485-2509, 2007.
- [2] ZILL, Dennis G. Equações diferenciais: com Aplicações em Modelagem – Tradução da 10ª edição norte-americana. Disponível em: Minha Biblioteca. 3ª Ed. Cengage Learning Brasil, 2016.
- [3] BOYCE, William E. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Disponível em: Minha Biblioteca, 11ª Ed, Grupo GEN, 2020.
- [4] GUSSOW, Milton. Eletricidade Básica. Disponível em: Minha Biblioteca, (2nd edição). Grupo A, 2009.
- [5] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos de Física - Vol. 3 - Eletromagnetismo, 9ª edição. LTC.
- [6] TURQUETTI, Gabriela N., FERREIRA, Ivan S. Um estudo do circuito elétrico atmosférico global. *Physicae Organum*, Brasília, vol. 2, n. 1, 2016.
- [7] TZUR, I., & Roble, R. G. (1985). The interaction of a dipolar thunderstorm with its global electrical environment. *Journal of Geophysical Research*, 90(D4), 5989-6000.