



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS - DCEN
PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

JOSÉ GILSON SOMBRA SARAIVA

**TRIGONOMETRIA APLICADA À FÍSICA DO ENSINO MÉDIO: COMPILAÇÃO E
ORGANIZAÇÃO SISTEMÁTICA DO VÍNCULO EPISTEMOLÓGICO ENTRE A
TRIGONOMETRIA E A FÍSICA DO ENSINO MÉDIO.**

MOSSORÓ–RN

MAIO/2016

JOSÉ GILSON SOMBRA SARAIVA

TRIGONOMETRIA APLICADA À FÍSICA DO ENSINO MÉDIO: COMPILAÇÃO E ORGANIZAÇÃO SISTEMÁTICA DO VÍNCULO EPISTEMOLÓGICO ENTRE A TRIGONOMETRIA E A FÍSICA DO ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal Rural do Semiárido, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Trigonometria aplicada à Física do Ensino Médio: Compilação e Organização Sistemática do vínculo epistemológico entre a Trigonometria e a Física do Ensino Médio.

Orientador: Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues.

MOSSORÓ–RN
MAIO/2016

FICHA CATALOGRÁFICA

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S243t Saraiva, José Gilson Sombra.
Trigonometria aplicada à física do ensino médio:
compilação e organização sistemática do vínculo
epistemológico entre a trigonometria e a física do
ensino médio. / José Gilson Sombra Saraiva. -
2016.
155 f. : il.

Orientador: Walter Martins Rodrigues.
Coorientador: Mauricio Zuluaga Martinez.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em
--Selecione um Curso ou Programa--, 2016.

1. Trigonometria e física no ensino médio. 2.
Contextualização da trigonometria. 3.
Contextualização da matemática. I. Martins
Rodrigues, Walter, orient. II. Zuluaga Martinez,
Mauricio, co-orient. III. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da Instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

JOSÉ GILSON SOMBRA SARAIVA

**TRIGONOMETRIA APLICADA À FÍSICA DO ENSINO MÉDIO: COMPILAÇÃO E
ORGANIZAÇÃO SISTEMÁTICA DO VÍNCULO EPISTEMOLÓGICO ENTRE A
TRIGONOMETRIA E A FÍSICA DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada a Universidade
Federal Rural do Semiárido – UFERSA,
Campus Mossoró para obtenção do título de
Mestre em Matemática.

APROVADO EM: 25/05/2016

BANCA EXAMINADORA

Dr. Walter Martins Rodrigues - UFERSA
Presidente

Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA
Primeiro Membro

Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN
Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 2016.

Aos meus pais, Raimundo Saraiva e Maria Alice Sombra Saraiva, aos meus irmãos que sempre me incentivaram a estudar e lutar pelos meus ideais, em especial ao professor Flávio Sombra Saraiva pelos exemplos de dedicação e muita garra que sempre contaminaram a todos nós, e às minhas filhas, Luísa Saraiva e Alice Saraiva.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, às minhas duas filhas, Luísa Saraiva e Alice Saraiva que souberam e sabem com extrema singeleza entender todos os momentos de minha ausência para dedicarme aos estudos, ao trabalho e à minha vida. Mesmo fisicamente longe, elas habitam o melhor lugar do meu coração. Obrigado princesas pela compreensão, papai ama muito vocês.

Aos meus pais e irmãos, por acreditarem sempre na minha pessoa e pelo incentivo diário, por meio das palavras de coragem, das cobranças e, especialmente, pelos inúmeros exemplos que cada um soube dar ao longo de nossas vidas.

Aos meus colegas da turma do PROFMAT, em especial Sílvia Xavier Araújo e Rafael Cavalcante, que sempre me ajudaram nas idas e vindas de Limoeiro do Norte a Mossoró nos dias de aulas presenciais e pelos debates em torno dos conteúdos tratados em nosso curso e assuntos relativos às coisas da vida, além de compartilharem comigo a mesma mesa nos almoços entre os turnos de aula.

A todos os amigos que conquistei ao longo do Curso do Mestrado, sejam meus colegas de turma, funcionários ou professores.

Ao ex-coordenador e atual vice do nosso curso de mestrado professor Antonio Ronaldo Gomes Garcia pela forma singular e competente com que conduz esse processo, além dos conselhos realistas acerca da carreira acadêmica e da vida.

Ao meu orientador professor Walter Martins Rodrigues pela dedicação e paciência. Por me incentivar bastante em nossos encontros, dando a certeza que escolhi o tema certo.

“Se as coisas são inatingíveis [...] Ora!

Não é motivo para não querê-las...

*Que tristes os caminhos, que não fora a
presença distante das estrelas [...].”*

Mário Quintana

RESUMO

A Trigonometria é utilizada de maneira ostensiva na Física Clássica do Ensino Médio, seja na elaboração das teorias ou na resolução de exercícios. Também conhecida como Física Newtoniana, ela é didaticamente subdividida em mecânica (cinemática, dinâmica, estática, hidrostática e gravitação), termologia, óptica geométrica, ondulatória e eletricidade (eletrostática, eletrodinâmica e eletromagnetismo). Entre todos esses conteúdos, apenas a termologia prescinde do uso da Trigonometria na resolução de problemas ou construções teóricas. Os demais conteúdos são absolutamente auxiliados matematicamente pela Trigonometria. Porém, essa parceria surge de forma esparsa (espalhada). O estudo objetivou fazer uma compilação e organização sistemática dessa parceria, apresentando a Trigonometria acompanhada de aplicações na Física do Ensino Médio, dando a noção dessa aproximação entre esses dois conteúdos. Portanto, trata-se de um estudo interdisciplinar, feito a partir de uma pesquisa em livros didáticos de Física e Matemática do Ensino Médio usados no Brasil, além de livros textos americanos, peruanos, indianos e russos, observando e captando os aspectos trigonométricos que unem a Física e a Trigonometria. Muitos exercícios ilustrativos dessa parceria foram colhidos dos vários vestibulares espalhados pelo Brasil, em especial os vestibulares militares ITA e IME, além do vestibular da UnB, NOVO EMEM e vários exercícios traduzidos dos livros estrangeiros. A compilação, a sistematização e a análise foram elaboradas segundo o nível de compreensão de alunos e professores do Ensino Médio. Foi obtido como resultado um material de apoio a professores do Ensino Médio de Física e de Matemática, que queiram contextualizar conteúdos ministrados em suas aulas. Alunos que vão prestar vestibulares no padrão dos militares ITA e IME podem aproveitar os exercícios mais complexos resolvidos e comentados. Já alunos que queiram prestar vestibulares mais simples como o NOVO ENEM podem aproveitar a teoria e as resoluções comentadas das questões do NOVO ENEM. É um material para pesquisa, portanto, não se trata de um livro texto didático para o Ensino Médio. Mesmo assim, o trabalho contempla os anseios pedagógicos dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, quando transforma uma perspectiva fragmentada numa perspectiva contextualizada e interdisciplinar.

Palavras-chave: Trigonometria e Física no Ensino Médio. Contextualização da Trigonometria. Contextualização da Matemática.

ABSTRACT

Trigonometry has been used conspicuously in the classical physics taught in high school, be it in the development of theories or in drills solving. Also known as Newtonian Physics, it is didactically divided into mechanics (kinematics, dynamics, static, hydrostatic and gravitation), thermology, geometrical optics, undulating and electricity (electrostatic, electrodynamics and electromagnetism). Among all these contents, only thermology dispenses the use of trigonometry to solve problems or theoretical constructs. The remaining contents are, as a whole, mathematically aided by Trigonometry. However, this partnership arises sparsely. This study aimed to make a systematic compilation and organization of this partnership, bringing up Trigonometry along with its applications to Physics as it is taught in high school, posing an approach involving these two subject matters. Therefore, it is an interdisciplinary study, based on a survey carried out in textbooks of Physics and High School Mathematics used in Brazil, as well as American, Peruvian, Indian and Russian textbooks, observing and capturing the trigonometric aspects which unite Physics and Trigonometry. Many illustrative exercises showing this partnership were collected from various vestibular throughout Brazil, especially the military vestibular of ITA and EMI, in addition to the vestibular of UNB, Novo EMEM and several exercises translated from foreign books. The compilation, systematization and analysis were carried out according to the level of understanding of students and teachers from high school. As a result it was obtained a material to support high school teachers of Physics and Mathematics, who want to contextualize content taught in their classes. Students to take vestibular of ITA and EMI can take advantage of the most complex exercises already solved and commented. Students to take more simple vestibular exams such as NOVO ENEM can take advantage of the theory and commented resolutions of questions from NOVO ENEM. It is a material designed for research. So this is not a didactic textbook for high school. Still, the work includes the educational aspirations of the National Curriculum Guidelines for Secondary Education, transforming a fragmented perspective into a contextualized and interdisciplinary perspective.

Key words: High School Trigonometry and Physics. Contextualized Trigonometry. Contextualized Mathematics.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MU	Movimento Uniforme
CESPE	Centro de Seleção e de Promoção de Eventos
MUV	Movimento Uniformemente Variado
MHS	Movimento Harmônico Simples
UnB	Universidade de Brasília
ITA	Instituto Tecnológico da Aeronáutica
IME	Instituto Militar de Engenharia
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
UNICAMP	Universidade de Campinas
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
ESPCEX	Escola Preparatória de Cadetes do Exército
AMAN	Academia Militar das Agulhas Negras
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFSCAR	Universidade Federal de São Carlos
UNESP	Universidade Estadual Paulista
PPL	Pessoa Privada de Liberdade
PAS	Programa de Avaliação Seriada
PCM	Parâmetros Curriculares Nacionais
LDB	Lei de Diretrizes e Base

LISTA DE GRANDEZAS E UNIDADES DE MEDIDA

GRANDEZA	UNIDADE	SÍMBOLO
Massa	quilograma	kg
Comprimento	metro	m
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Área	metro quadrado	m ²
Pressão	pascal	Pa
Força	newton	N
Intensidade luminosa	candela	cd
Quantidade de matéria	mol	mol
Velocidade	metros por segundo	m/s
Energia	joule	J
Tensão elétrica	volt	V
Volume	metro cúbico	m ³
Potência	watt	W

LISTA TABELAS

Tabela 1 **Incidência de Trigonometria nas questões da prova de Física dos vestibulares do 23
ITA.**

Tabela 1.1 **Valores notáveis de senos, cossenos e tangentes.**

26

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Triângulo retângulo.	24
Figura 1.2	Triângulo equilátero.	25
Figura 1.3	Quadrado e Triângulo retângulo.	25
Figura 1.4	Triângulo retângulo egípcio.	26
Figura 1.5	Vista lateral das torres Puerta de Europa.	27
Figura 1.6	Vista lateral de uma das torres P. de Europa.	27
Figura 1.7	Vista superior da situação ilustrada no texto.	28
Figura 1.8	Vista superior da situação ilustrada, já como os dados fornecidos no texto.	28
Figura 1.9	Vista lateral da situação ilustrada.	29
Figura 1.10	Vista superior da situação ilustrada no texto.	29
Figura 1.11	Planta baixa do terreno.	30
Figura 1.12	Vista superior da situação ilustrada no texto.	30
Figura 1.13	Representação do reservatório.	31
Figura 1.14	Vista de um corte diametral dado no reservatório.	31
Figura 1.15	Vista superior da situação apresentada.	32
Figura 1.16	Vista superior da situação descrita.	33
Figura 1.17	Triângulo qualquer.	34
Figura 1.18	Triângulo qualquer.	34
Figura 1.19	Um triângulo qualquer inscrito numa circunferência de raio R .	34
Figura 1.20	Um triângulo qualquer.	35
Figura 1.21	Um triângulo qualquer.	35
Figura 1.22	Um triângulo formado com um lado na ponte.	36
Figura 1.23	Um triângulo qualquer.	36
Figura 1.24	Um triângulo qualquer.	37
Figura 1.25	Um triângulo qualquer.	37
Figura 1.26	Figura 1.26 – Dois vetores quaisquer.	38
Figura 1.27	Vetor soma de dois vetores quaisquer, usando a regra do polígono.	38
Figura 1.28	Vetor soma de dois vetores quaisquer, usando a regra do paralelogramo.	38
Figura 1.29	Dois vetores quaisquer.	39

Figura 1.30	Dois vetores, sendo um deles o vetor oposto ao vetor $\vec{B}$.	39
Figura 1.31	Soma de vetores pela regra do polígono.	39
Figura 1.32	Diferença de vetores pela regra do polígono.	39
Figura 1.33	Projeções ortogonais de um vetor.	40
Figura 1.34	Ilustração da situação descrita.	40
Figura 1.35	Velocidade relativa.	41
Figura 1.36	Representação da situação descrita no texto.	41
Figura 1.37	Ilustração da mudança de referencial.	42
Figura 1.38	Ilustração da cunha e o bloco.	43
Figura 1.39	Ilustração do esquema de forças que agem na cunha e no bloco.	43
Figura 1.40	Ilustração da situação.	44
Figura 1.41	Ilustração da situação, já com a decomposição da velocidade na direção radial.	45
Figura 1.42	Ilustração da situação proposta no texto da questão.	46
Figura 1.43	Ilustração do radar.	47
Figura 1.44	Ciclo trigonométrico.	48
Figura 1.45	Ciclo trigonométrico representando a situação física.	49
Figura 1.46	Ciclo trigonométrico e as principais determinações positivas de um arco.	50
Figura 1.47	Ilustração da situação descrita no texto.	51
Figura 1.48	Representação com os dados numéricos.	52
Figura 1.49	Representação do planeta.	52
Figura 1.50	Projeção estereográfica.	53
Figura 1.51	Vista lateral da projeção estereográfica.	54
Figura 1.52	Situação num sistema ortogonal de coordenadas.	54
Figura 1.53	Representação com os dados.	55
Figura 1.54	Paralaxe.	56
Figura 1.55	Refração da Luz.	57
Figura 1.56	Refração da Onda.	58
Figura 1.57	A lente de uma lupa refratando a luz.	59
Figura 1.58	Ilustração da trajetória da pessoa na situação descrita.	60
Figura 1.59	Ilustração da trajetória da pessoa na situação descrita já como dados.	61

Figura 1.60	Lâmina de faces paralelas sendo atravessada por um raio luminoso.	61
Figura 1.61	Dioptro plano.	62
Figura 1.62	Dioptro plano ar-água.	63
Figura 1.63	Visada de um peixe num aquário.	64
Figura 1.64	Refração e Reflexão total.	65
Figura 1.65	Reflexão total e refração rasante.	66
Figura 1.66	Prisma da flexão total.	66
Figura 1.67	Ilustração da situação física apresentada.	67
Figura 1.68	Prisma isósceles.	68
Figura 1.69	Prisma isósceles refratando a luz.	69
Figura 2.1	A função $\text{sen}(x)$ representada no ciclo.	70
Figura 2.2	Os quadrantes do ciclo.	70
Figura 2.3	Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$.	71
Figura 2.4	Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ para valores reais de x .	71
Figura 2.5	A função $\text{cos}(x)$ representada no ciclo.	72
Figura 2.6	Gráfico da função $f(x) = \text{cos}(x)$.	72
Figura 2.7	Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ para valores reais de x .	73
Figura 2.8	A função $\text{tg}(x)$ representada no ciclo.	73
Figura 2.9	Gráfico da função $f(x) = \text{tg}(x)$.	74
Figura 2.10	Gráfico da função $f(x) = \text{tg}(x)$ para valores reais de x .	74
Figura 2.11	Pressão sanguínea em função do tempo.	76
Figura 2.12	Circuito elétrico.	79
Figura 2.13	Força eletromotriz em função do tempo.	79
Figura 2.14	Fluxo de ar nos pulmões em função do tempo.	80
Figura 2.15	População de peixes em função do tempo.	84
Figura 2.16	Mecanismo de um pistão.	85
Figura 2.17	Mecanismo de um pistão.	86
Figura 2.18	Duas posições do braço de um corredor em seu movimento cíclico.	87
Figura 2.19	Ciclo oscilatório da pélvis feminina.	88
Figura 2.20	Variação do ângulo em função do tempo.	89
Figura 2.21	2.21 - Corda elástica.	90

Figura 2.22	Corda oscilando em MHS.	91
Figura 3.1	Ciclo trigonométrico mostrando os ângulos a e b .	92
Figura 3.2	Planeta em perfil e a torre num corte transversal.	95
Figura 3.3	Planeta com os polos e o equador.	95
Figura 3.4	Situação descrita no texto, com os valores dos ângulos.	96
Figura 3.5	Representação do instante inicial do lançamento.	98
Figura 3.6	Decomposição do movimento em duas direções, sendo uma ao longo da rampa e a outra perpendicular à rampa.	98
Figura 3.7	Representação do instante inicial do lançamento de uma altura h .	99
Figura 3.8	Representação das possíveis trajetórias.	100
Figura 3.9	Lançamento numa rampa.	100
Figura 3.10	Bloco arrastado ao longo da rampa.	102
Figura 3.11	A força formando um ângulo α com a rampa.	102
Figura 4.1	Modos de vibração de uma onda estacionária na corda.	105
Figura 4.2	Ondas incidente e refletida da onda estacionária.	105
Figura 5.1	Exemplos clássicos de movimentos oscilatórios.	107
Figura 5.2	Corpo M em MCU e P (projeção de M) em MHS.	108
Figura 5.3	Posição de P em função do tempo.	109
Figura 5.4	Velocidade de P em função do tempo.	110
Figura 5.5	Velocidade de P em momentos importantes.	111
Figura 5.6	Aceleração de P em função do tempo.	111
Figura 5.7	Aceleração de P em momentos importantes.	112
Figura 5.8	Movimento da partícula P .	114
Figura 5.9	Sistema massa-mola.	115
Figura 5.10	Sistema massa-mola na vertical.	117
Figura 5.11	Sistema massa-mola no plano inclinado.	118
Figura 5.12	Sistema massa-mola oscilando na vertical.	119
Figura 5.13	Pêndulo simples oscilando.	121
Figura 5.14	Pêndulo de Foucault oscilando.	122
Figura 5.15	Corpo atravessando o planeta e oscilando em MHS.	123
Figura 5.16	Um trilho furando o planeta.	124
Figura 5.17	Cubo oscilando na superfície de um líquido.	125
Figura 5.18	Cubo oscilando na superf. de um líquido, com dados numéricos.	126

Figura 5.19	Barra horizontal oscilando em cilindros com atrito.	127
Figura 5.20	Barra horizontal oscilando em cilindros com atrito, com dados numéricos.	127
Figura 5.21	Corda vibrando em pequenas oscilações.	129
Figura 5.22	Corda vibrando em pequenas oscilações, com as forças atuando na massa.	129

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO.....	18
1	TRIGONOMETRIA: NOS TRIÂNGULOS E NO CICLO.....	24
1.1	Razões trigonométricas no triângulo retângulo.....	24
1.2	Cálculo de valores notáveis.....	25
1.3	Algumas relações importantes e triviais.....	26
1.4	Exercitando a Trigonometria contextualizada pelo novo ENEM.....	27
1.5	Exercitando a Trigonometria contextualizada pela UnB	32
1.6	Relações trigonométricas num triângulo qualquer.....	34
1.7	Os Vetores e a Trigonometria.....	38
1.8	Exercitando.....	44
1.9	Ciclo trigonométrico.....	48
1.10	Aplicações da Trigonometria em óptica geométrica.....	57
2	AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	70
2.1	A função seno.....	70
2.2	A função cosseno.....	72
2.3	A função tangente.....	73
2.4	Influência das constantes nas funções trigonométricas.....	75
2.5	A Física e as funções trigonométricas.....	75
2.6	O ENEM e as funções trigonométricas.....	76
2.7	As funções trigonométricas nos vestibulares de Física.....	79
2.8	Função da onda periódica unidimensional.....	90
3	SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS.	92
3.1	Soma e diferença de arcos.....	92
3.2	Exercícios resolvidos e comentados.....	94
3.3	Fórmulas de arco duplo e arco triplo.....	96

3.4	Exercícios resolvidos.....	97
4	PROSTAFÉRESE	104
4.1	As fórmulas de Prostaferese.....	104
4.2	Onda estacionária e Trigonometria.....	105
4.3	Exercitando.....	106
5	MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (MHS).	107
5.1	A posição (x) no MHS	108
5.2	A velocidade (v) no MHS.	110
5.3	A aceleração (a) no MHS.	111
5.4	Exemplificando	114
5.5	Exemplos contextualizados	115
5.5.1.	Sistema massa-mola na horizontal	115
5.5.2	Sistema massa-mola na vertical	117
5.5.3	Sistema massa-mola no Plano inclinado.	118
5.5.4	Pêndulo simples	121
5.5.5	O Pêndulo de Foucault	122
5.5.6	Gravitação e um túnel que atravessa o Planeta	123
5.5.7	Um túnel, um trilho e um vagão	124
5.5.8	O Balanço da canoa	125
5.5.9	A barra que vibra	127
5.5.10	A corda que vibra e soa	129
	CONCLUSÃO.....	130
	REFERÊNCIAS.....	132
	ANEXOS.....	134

INTRODUÇÃO

A Física já foi definida como a ciência da medida. Evidente que isso é exagero, a Física é muito mais que apenas medidas. Porém, esse tipo de afirmação fortalece a ideia de que a relação nutrida com a Matemática é íntima e muito proveitosa. Em verdade, a Matemática fornece grande parte das garantias necessárias à Física, fazendo-a avançar como uma das mais importantes ciências desenvolvidas pela humanidade.

A linguagem matemática carrega uma precisão que, por vezes, muitas conclusões físicas são tiradas dela e, só depois, interpretadas como um fenômeno físico, quando confirmadas pelos experimentos. Isso aconteceu com a Teoria da Relatividade, quando Lorentz organizou as transformadas do espaço-tempo. Ele concluiu que aquilo seria apenas uma estética e não uma Física. Einstein foi quem teve a coragem de acreditar que o mundo seria daquela forma. Portanto, mais que explicar e dar garantias às teorias físicas, a Matemática pode antecipar resultados, que posteriormente são comprovados empiricamente. É a Matemática empurrando a fronteira da Física. No Ensino Médio há uma parceira permanente da Física: a Trigonometria.

Na maioria das escolas brasileiras, a Trigonometria, mesmo que ainda de forma incipiente, é um conteúdo matemático abordado a partir do nono ano do Ensino Fundamental. Mas é no Ensino Médio, que ela se transforma numa construção teórica relativamente robusta, servindo à Matemática em geral, especialmente às Geometrias Plana e Espacial.

Também, em boa parte da Física Clássica ministrada ao longo do Ensino Médio, a Trigonometria tornou-se um instrumento poderoso, porque não dizer, uma boa e necessária companhia na resolução de uma grande quantidade de exercícios enfrentados por professores e alunos, bem como, na interpretação teórica de certos conteúdos da Física, dando respostas categóricas, definitivas, precisas e bastante seguras.

A Física Clássica, também conhecida como Física Newtoniana, é didaticamente subdividida em Mecânica (Cinemática, Dinâmica, Estática, Hidrostática e Gravitação), Termologia, Óptica Geométrica, Ondulatória e Eletricidade (Eletrostática, Eletrodinâmica e Eletromagnetismo). Entre todos esses conteúdos, apenas a Termologia prescinde do uso da Trigonometria na resolução de problemas e construções teóricas. Mesmo assim, há situações nas quais seus fenômenos podem apresentar características matemáticas trigonométricas. Os demais conteúdos são absolutamente auxiliados pela Trigonometria.

Quando há necessidade e possibilidade de seu uso, os professores de Física recorrem aos conceitos básicos da Trigonometria, às relações trigonométricas mais elaboradas, bem

como, às funções trigonométricas e suas propriedades. Porém, mesmo aparecendo em profusão, o que já dá a ela uma grande importância, a Trigonometria surge de forma esparsa, espalhada, ao longo dos conteúdos da Física distribuídos pelo Ensino Médio.

Então, o que pode ser feito para cuidar mais de perto dessa relação tão profícua entre a Trigonometria e a Física?

Nessa lacuna, em busca de uma boa resposta a essa questão, dois são os interesses maiores pretendidos nessa dissertação:

o primeiro é organizar de forma sistemática a aplicação da Trigonometria na Física do Ensino Médio, ou seja, exibir de maneira organizada essa relação tão íntima e proveitosa entre a Trigonometria e a Física;

o segundo vem como consequência, que é disponibilizar aos professores de Matemática uma forma bastante contextualizada de apresentar e aplicar a Trigonometria no Ensino Médio. Além disso, exibir aos professores de Física, um fortalecimento dessa ferramenta na resolução de exercícios que demandem sua aplicação, inclusive alguns bastante “elaborados”, que, sem o uso da Trigonometria, teriam soluções bem mais complexas. Por vezes, abdicamos do cálculo diferencial por conta do auxílio da Trigonometria.

Ao longo dessa dissertação, serão apresentados, em profusão, argumentos que sustentam a necessidade de um texto nesse viés, ilustrando com uma grande quantidade de exercícios resolvidos e na formatação da teoria da Física.

Dessa forma, temos como objetivo imediato, a apresentação de forma organizada desse vínculo epistemológico entre a Trigonometria e a Física. Como objetivo mediato, o uso, pelos professores do Ensino Médio, como material de consulta e inspiração em suas aulas de Física ou de Matemática, contextualizando as duas disciplinas e dando forma interdisciplinar a cada conteúdo.

A contextualização e a interdisciplinaridade são exigências dos PCNs¹, conforme defendem,

A aprendizagem das Ciências da Natureza, qualitativamente distinta daquela realizada no Ensino Fundamental, deve contemplar formas de apropriação e construção de sistemas de pensamento mais abstratos e ressignificados, que as trate como processo cumulativo de saber e de ruptura de consensos e pressupostos metodológicos. A aprendizagem de concepções científicas atualizadas do mundo físico e natural e o desenvolvimento de estratégias de trabalho centradas na solução de problemas é finalidade da área, de forma a aproximar o educando do trabalho de investigação científica e tecnológica, como atividades institucionalizadas de produção de conhecimentos, bens e serviços. Os estudos nessa área devem levar em conta que a Matemática é uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências. Enfim,

¹ PCN – 2000, Brasil, p. 20.

a aprendizagem na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias indica a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade.

Conforme o texto na íntegra das bases legais dos PCNs, um dos três eixos epistemológicos elencados é o das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, reforçando o fato de que a Física como uma das Ciências da Natureza está na companhia permanente da Matemática.

No capítulo 10, Trigonometria e mensuração na Grécia, do livro História da Matemática, Carl B. Boyer² diz:

A Trigonometria, como os outros ramos da Matemática, não foi obra de um só homem – ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido usados pelos antigos egípcios e babilônicos. Dada a falta no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado “trilaterometria”, ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que “trigonometria”, a medida de partes de um triângulo. Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem.

A Trigonometria (do grego *trigōnon* "triângulo" + *metron* "medida") é, numa definição simplificada, um segmento da Matemática que estuda as razões entre os comprimentos de dois lados de um triângulo retângulo (triângulo com um de seus ângulos com 90°). Isso, para diferentes valores assumidos por um dos seus ângulos agudos.

Para a realização dessa pesquisa, foi utilizada uma revisão bibliográfica, cujo propósito foi identificar estudos publicados acerca do tema tratado. Portanto, foi realizada uma pesquisa nas bases de dados online na Internet, durante o período de janeiro a maio de 2016. Nessa busca, foram utilizados os descritores: Trigonometria na Física, aplicações da Trigonometria, Física e Matemática, origens da Trigonometria.

Além dessa pesquisa na Internet, foi feita uma leitura em livros didáticos de Física adotados no Ensino Médio, em livros de História da Matemática e da Física e em livros estrangeiros, todos ligados ao tema de forma esparsa, espalhada.

Não foram encontrados livros, nem trabalhos científicos específicos com o propósito deste trabalho, cujo elemento de distinção e novidade é compilar e organizar de forma sistemática esse vínculo epistemológico entre a Trigonometria e a Física, bastante conhecido, porém apresentado sempre de forma muito espalhada e dissociada de um todo.

Havia uma questão, apresentar a Física e mostrar a Trigonometria como parceira ou apresentar a Trigonometria e mostrar a Física como contextualização? As duas possibilidades

² BOYER, p. 116

eram viáveis. Porém, o trabalho apresentado é em Matemática. Daí, a escolha pela segunda alternativa.

Na proposta do novo ENEM, com suas competências e habilidades, encontramos a necessidade iminente de contextualização e interdisciplinaridade. Basta observar a matriz apresentada a seguir, com as marcações chamando atenção para determinados termos, que saltam aos olhos os motivos para esse viés do contexto e da parceria entre disciplinas. Eis a matriz de competências e habilidades, em Matemática, do novo ENEM³.

Competências e habilidades – Matemática

Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 – Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

³ ENEM, MEC, Matriz de Competências e Habilidades, Brasil.

H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 – Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

A metodologia de trabalho inicia com a motivação para a escolha do tema, que leva em conta o fato do Curso de Mestrado do PROFMAT enveredar pela construção de conteúdos na área da Educação Básica. Outro elemento importante, nessa escolha, é o fato da Trigonometria ser uma das disciplinas obrigatórias ministradas na grade ordinária do curso. Junte-se aí a disciplina de resolução de problemas que também é ministrada na grade regular do curso. Então, a escolha do tema está fincada no interesse e no andamento do PROFMAT, considerando que ele será desenvolvido a partir da Trigonometria e justificado com resolução de problemas.

O critério foi desenvolver a teoria da Trigonometria numa sequência clássica, didática, comum aos livros textos do Ensino Médio, em capítulos. Em cada capítulo, elencar vários exercícios de Física no padrão do Ensino Médio que adotam a Trigonometria como parceira, contextualizando na Física, na medida em que os conteúdos são apresentados, e apresentar uma solução comentada para cada exercício.

Os critérios usados na escolha dos exercícios foram: exercícios de Física contextualizados, a exemplo das questões do ENEM; exercícios de Física com uso ostensivo da Trigonometria; alguns exercícios foram escolhidos pela complexidade e criatividade no uso da Trigonometria; alguns exercícios foram coletados em vestibulares de instituições

militares como ITA e IME pela forma com usam a Trigonometria, entre outros vindos de livros americanos, indianos, peruanos e russos. Sempre focando o aspecto interdisciplinar.

Vários conceitos de Física necessários à resolução de alguns exercícios são apresentados ao longo das resoluções, em notas de rodapé ou em anexos, dando ao leitor a possibilidade de rever esses conceitos, facilitando a compreensão da resolução do exercício.

O material foi desenvolvido pensando em contemplar professores do Ensino Médio, portanto, não há aplicação de cálculo diferencial. Também, na escolha dos exercícios, houve o interesse em contemplar os alunos que queiram prestar vestibulares mais complexos, a exemplo do ITA e do IME.

Nos últimos seis anos, a frequência de questões que usam a Trigonometria como parceira na prova de Física do vestibular do ITA é em torno de **26%**, conforme ilustra a estatística na tabela 1.

Tabela 1 - Incidência de Trigonometria nas questões da prova de Física dos vestibulares do ITA.

Ano	Frequência	Frequência acumulada
2010	10/30	10/30
2011	5/30	15/60
2012	9/30	24/90
2013	8/30	32/120
2014	6/30	38/150
2015	9/30	47/180

Fonte: Elaborada pelo autor

Nas provas do IME, a frequência fica mais insistente. São $33/88 = 0,375 = 37,5\%$, no período de 2010 a 2015.

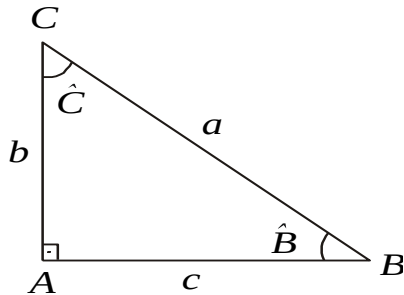
Finalmente, a metodologia para elaboração desse material não é voltada para produzir um livro didático, mas para produzir um material de pesquisa e orientação de professores e alunos em geral, tanto na Física como na Matemática. As referências são os livros-texto didáticos adotados nas escolas brasileiras de Ensino Médio e livros estrangeiros, especialmente na coleta de alguns exercícios.

1 – TRIGONOMETRIA NOS TRIÂNGULOS E NO CICLO

1.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Dado um triângulo retângulo ABC como na Figura 1.1, definem-se as razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente.

Figura 1.1 - Triângulo retângulo.



Denominações:

- b é o cateto oposto a $\hat{B}$ e o cateto adjacente a $\hat{C}$.
- c é o cateto oposto a $\hat{C}$ e o cateto adjacente a $\hat{B}$.
- a é a hipotenusa.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definem-se:

$$\checkmark \quad \text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\checkmark \quad \text{sec}(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$\checkmark \quad \text{cos}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\checkmark \quad \text{cossec}(\theta) = \frac{1}{\text{sen}(\theta)}$$

$$\checkmark \quad \text{tg}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}$$

$$\checkmark \quad \text{cotg}(\theta) = \frac{1}{\text{tg}(\theta)}$$

Portanto,

$$\checkmark \quad \text{sen}(\hat{B}) = \frac{b}{a}$$

$$\checkmark \quad \text{sec}(\hat{B}) = \frac{a}{c}$$

$$\checkmark \quad \text{sen}(\hat{C}) = \frac{c}{a}$$

$$\checkmark \quad \text{sec}(\hat{C}) = \frac{a}{b}$$

$$\checkmark \quad \text{cos}(\hat{B}) = \frac{c}{a}$$

$$\checkmark \quad \text{cossec}(\hat{B}) = \frac{a}{b}$$

$$\checkmark \quad \text{cos}(\hat{C}) = \frac{b}{a}$$

$$\checkmark \quad \text{cossec}(\hat{C}) = \frac{a}{c}$$

$$\checkmark \quad \text{tg}(\hat{B}) = \frac{b}{c}$$

$$\checkmark \quad \text{cotg}(\hat{B}) = \frac{c}{b}$$

$$\checkmark \quad \text{tg}(\hat{C}) = \frac{c}{b}$$

$$\checkmark \quad \text{cotg}(\hat{C}) = \frac{b}{c}$$

Como $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ditos ângulos complementares. Note que o complementar de um ângulo x é o ângulo $(90^\circ - x)$. Também é trivial notar que:

$$\checkmark \quad \text{sen}(x) = \cos(90^\circ - x);$$

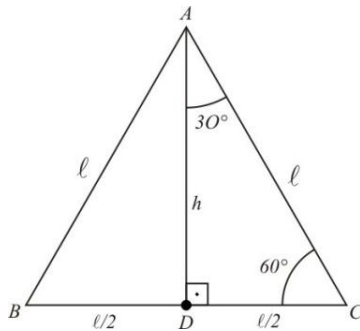
$$\checkmark \quad \text{tg}(x) = \text{cotg}(90^\circ - x);$$

$$\checkmark \quad \text{sec}(x) = \text{cossec}(90^\circ - x).$$

1.2 Cálculo de valores notáveis.

I. Note, na Figura 1.2, o triângulo equilátero ABC e o triângulo retângulo egípcio ADC.

Figura 1.2 - Triângulo equilátero.



Usando Pitágoras no triângulo ADC, vem:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Daí,

$$\checkmark \quad \sin(30^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\checkmark \quad \cos(30^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\checkmark \quad \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

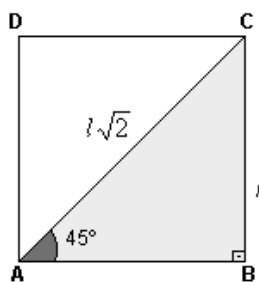
$$\checkmark \quad \sin(60^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\checkmark \quad \cos(60^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\checkmark \quad \operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$$

II. Na Figura 1.3, note o quadrado ABCD e o triângulo ABC.

Figura 1.3 – Quadrado e Triângulo retângulo.



$$\checkmark \quad \sin(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

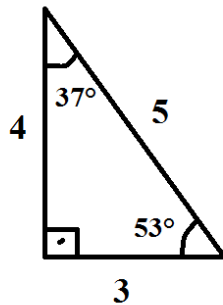
$$\checkmark \quad \cos(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\checkmark \quad \operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{l}{l} = 1 = \operatorname{cotg}(45^\circ)$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

III. Note o triângulo retângulo na Figura 1.4. É o terno pitagórico mais conhecido (3, 4 e 5). Seus ângulos são aproximadamente 37° e 53° .

Figura 1.4 - Triângulo retângulo egípcio.



$$\checkmark \quad \text{sen}(37^\circ) = \cos(53^\circ) \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\checkmark \quad \text{sen}(53^\circ) = \cos(37^\circ) \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\checkmark \quad \text{tg}(37^\circ) = \text{cotg}(53^\circ) \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\checkmark \quad \text{tg}(53^\circ) = \text{cotg}(37^\circ) \frac{4}{3} = 1,333 \dots$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em alguns países, além da tabela de senos, cossenos e tangentes para os ângulos de 30° , 45° e 60° , os alunos de Ensino Médio precisam conhecer os valores para os ângulos 37° e 53° , do triângulo 3,4 e 5 de lados.

Ao lado, a Tabela 1.1 com os valores notáveis. Eles são usados em exercícios de Matemática e Física. Em geral, eles pressupõem que os alunos a conhecem de memória.

Tabela 1.1 - Valores notáveis de senos, cossenos e tangentes.			
x	$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\text{tg}(x)$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
37°	0,6	0,8	$\frac{3}{4}$
53°	0,8	0,6	$\frac{4}{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor

1.3 Algumas relações importantes e triviais.

As relações a seguir decorrem diretamente das definições.

$$\checkmark \quad \text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\checkmark \quad \text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$\checkmark \quad \text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

$$\checkmark \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\checkmark \quad \text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

$$\checkmark \quad \text{cotg}(x) = \frac{1}{\text{tg}(x)}$$

Obs.: Os denominadores são todos não nulos, considerando que, nesse momento da teoria, x é um ângulo agudo de um triângulo retângulo, em que todas as razões são positivas.

1.4 Exercitando a Trigonometria contextualizada pelo novo ENEM

01. ENEM – 2013 - são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na Figura 1.5.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

- a) menor que 100m^2 .
- b) entre 100m^2 e 300m^2 .
- c) entre 300m^2 e 500m^2 .
- d) entre 500m^2 e 700m^2 .
- e) maior que 700m^2 .

Figura 1.5 - Vista lateral das torres Puerta de Europa.



Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012

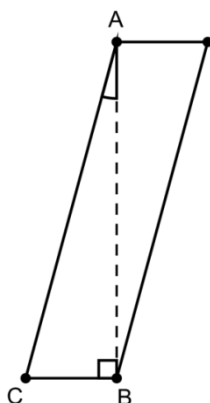
Fonte: INEP

Gabarito: e

Resolução comentada

Considere a vista lateral de uma das torres Puerta de Europa.

Figura 1.6 - Vista lateral de uma das torres P. de Europa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Do triângulo retângulo ABC da Figura 1.6, obtemos:

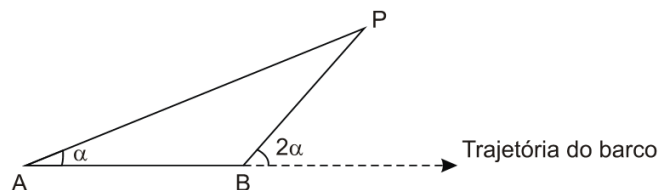
$$\operatorname{tg}(\widehat{BAC}) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \rightarrow \operatorname{tg}(15^\circ) = \frac{\overline{BC}}{114} \rightarrow$$

$$\overline{BC} \cong 114 \cdot 0,26 \rightarrow \overline{BC} \cong 29,64 \text{ m.}$$

Portanto, como a base é um quadrado, segue-se que sua área é, aproximadamente, igual a $\overline{BC}^2 \cong (29,64 \text{ m})^2 = 878,53 \text{ m}^2$.

02. ENEM – 2011 - Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α . A Figura 1.7 ilustra essa situação:

Figura 1.7 - Vista superior da situação ilustrada no texto.



Fonte: INEP.

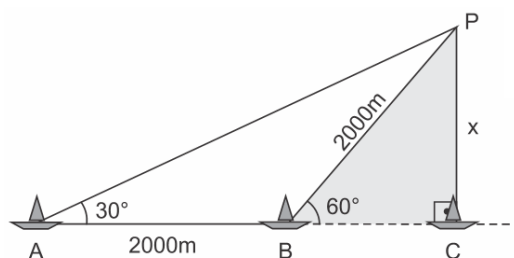
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

- a) 1000 m.
- b) $1000\sqrt{3}$ m.
- c) $2000 \frac{\sqrt{3}}{3}$ m.
- d) 2000 m.
- e) $2000\sqrt{3}$ m.

Gabarito: b

Resolução comentada

Figura 1.8 - Vista superior da situação ilustrada, já com os dados fornecidos no texto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

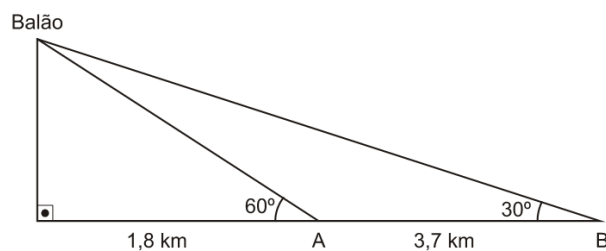
O triângulo ABP da Figura 1.8 é isósceles ($AB = BP = 2000$ m). No triângulo PBC, temos:

$$\sin(60^\circ) = \frac{d}{2000} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{2000} \rightarrow d = 1000\sqrt{3} \text{ m.}$$

03. ENEM – 2010 - Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: <http://www.correiodobrasil.com.br>. Acesso em: 02 maio 2010.

Figura 1.9 - Vista lateral da situação ilustrada.



Fonte: INEP.

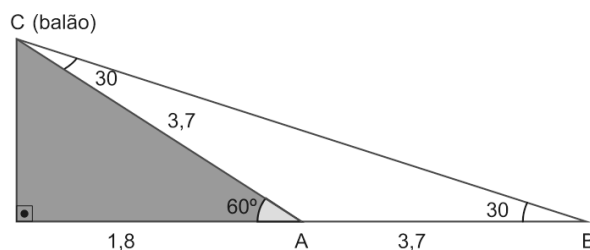
Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60° ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na Figura 1.9, e o avistou sob um ângulo de 30° . Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

- a) 1,8 km
- b) 1,9 km
- c) 3,1 km
- d) 3,7 km
- e) 5,5 km

Gabarito: c

Resolução comentada

Figura 1.10 - Vista superior da situação ilustrada no texto.



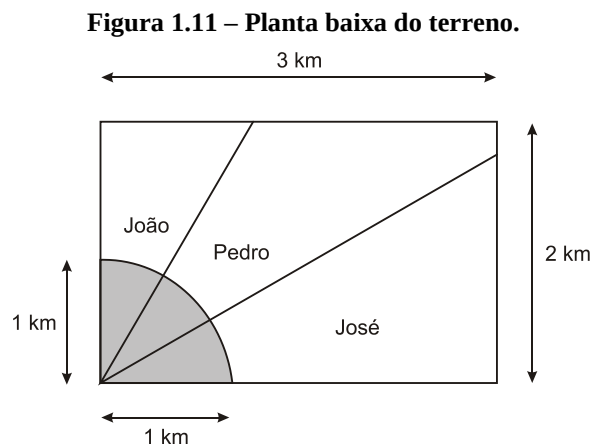
$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3} = \frac{H}{1,8} \rightarrow H = 1,8\sqrt{3} \rightarrow H \cong 3,1 \text{ m.}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

04. ENEM – 2009 - Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a Figura 1.11.

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

(Considere $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$).



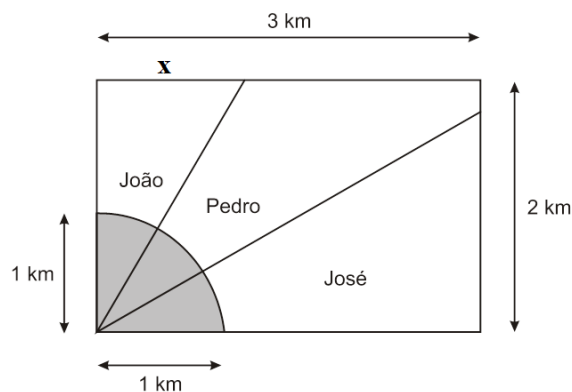
- a) 50%.
- b) 43%.
- c) 37%.
- d) 33%.
- e) 19%.

Fonte: INEP.

Gabarito: e

Resolução comentada

Figura 1.12 - Vista superior da situação ilustrada no texto.



No triângulo assinalado João, da Figura 1.12, temos:

$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} = 2,058 = 1,16 \rightarrow$$

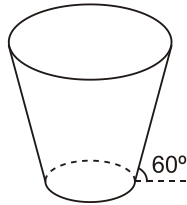
$$A = \frac{1,16 \cdot 2}{2} = 1,16.$$

$$\text{Em porcentagem: } \frac{1,16}{6} \cong 19\%.$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

05. ENEM cancelado – 2009 - Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na Figura 1.13.

Figura 13 – Representação do reservatório.



Fonte: INEP.

Considere que a base do reservatório tenha raio $r = 2\sqrt{3} \text{ m}$ e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo.

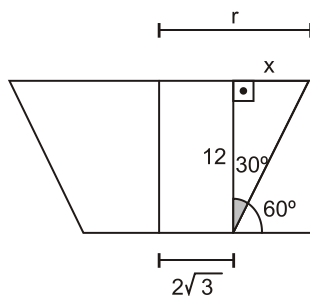
Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de

- a) $12 \pi \text{ m}^2$.
- b) $108 \pi \text{ m}^2$.
- c) $(12 + 2\sqrt{3})2\pi \text{ m}^2$.
- d) $300 \pi \text{ m}^2$.
- e) $(24 + 2\sqrt{3})2\pi \text{ m}^2$.

Gabarito: b

Resolução comentada

Figura 1.14 - Vista de um corte diametral dado no reservatório.



Fonte: Elaborada pelo autor.

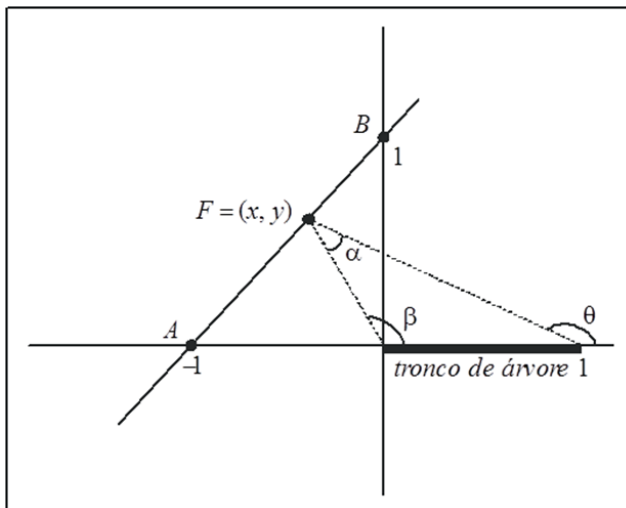
$\text{tg}(30^\circ) = \frac{x}{12} \rightarrow x = 4\sqrt{3} \rightarrow r = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, logo a área da tampa será:

$$A = \pi(6\sqrt{3})^2 = 108\pi \text{ m}^2.$$

1.5 Exercitando a Trigonometria contextualizada pela UnB

01. (PAS-UnB) Um indivíduo percorre a trajetória retilínea definida pelos pontos A e B , no sentido de A para B , observando um tronco de árvore caído no chão a sua direita, conforme representado na Figura 1.15. Ele vê o tronco sob o ângulo α , que varia com o seu deslocamento. Deseja-se determinar o maior ângulo $\alpha = \theta - \beta$ sob o qual o indivíduo, localizado no ponto F , vê o tronco. Como, nessa situação, a tangente é uma função crescente, encontrar o maior valor de α é equivalente a obter o maior valor da sua tangente. Usando-se as propriedades dessa função, obtém-se uma expressão cartesiana para $tg\alpha$ em função da abscissa x de F , dando origem à função $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$.

Figura 1.15 – Vista superior da situação apresentada.



Fonte: CESPE.

Com base nessas informações e sabendo que $tg(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $tg(45^\circ) = 1$, julgue os itens a seguir.

1. O valor de $tg(\theta)$, em função da abscissa x , é dado por $tg(\theta) = \frac{x}{x+1}$.
2. Do ponto $(-1/2, 1/2)$, o indivíduo vê o tronco sob um ângulo α menor do que 30° .
3. Se k é um número real tal que $f(x) = k$ para algum x , então $k \leq 1$.
4. O maior ângulo sob o qual o indivíduo pode ver o tronco é igual a 45° .

Gabarito: EECC

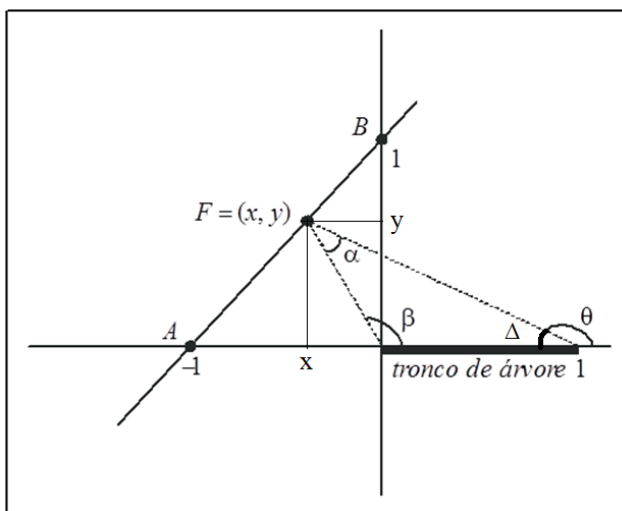
Resolução comentada

1. Errado, pois $tg(\theta) = -tg\Delta = -\frac{y}{1-x} = \frac{y}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$.

2. Errado, pois $tg(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $tg\alpha = \frac{x+1}{2x^2+x+1} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + -\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2}$.

Essa expressão foi usada porque o texto fala “Usando-se as propriedades dessa função, obtém-se uma expressão cartesiana para $tg(\alpha)$ em função da abscissa x de F , dando origem à função $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$.”

Figura 1.16 - Vista superior da situação descrita.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3. Certo, pois para $x = -1 \rightarrow f(-1) = 0$ e $x = 0 \rightarrow f(0) = 1$.

Agora, para $-1 < x < 0$, vem: $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{\frac{2x^2+x+1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{2x^2}{x+1} + \frac{x+1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{2x^2}{x+1} + 1}$.

Mas, $-1 < x < 0 \rightarrow 0 < x+1 < 1 \rightarrow \frac{2x^2}{x+1} > 0$, considerando que são dois números positivo.

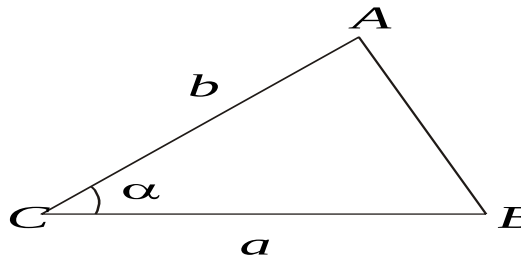
Então, $\frac{2x^2}{x+1} + 1 > 1 \rightarrow \frac{1}{\frac{2x^2}{x+1} + 1} < 1$.

4. Correto, quando o indivíduo chega ao ponto B.

1.6 Relações trigonométricas num triângulo qualquer.

I. Área de um triângulo em função de dois lados e do ângulo formado por eles.

Figura 1.17 – Triângulo qualquer.



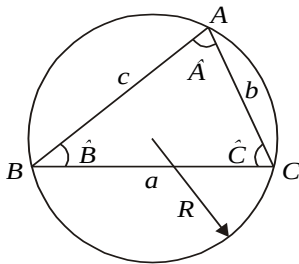
$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$$

Obs.: $\text{altura} = b \cdot \text{sen}(\alpha)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

II. Lei dos senos (teorema dos senos).

Figura 1.18 – Triângulo qualquer.



$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2 \cdot R$$

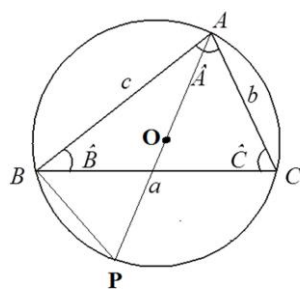
R é o raio da circunferência circunscrita.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Usando, novamente $\text{altura} = b \cdot \text{sen}(\hat{C}) = c \cdot \text{sen}(\hat{B})$, torna-se imediata a demonstração.

Agora, a prova que essa igualdade vale $2R$.

Figura 1.19 – Um triângulo qualquer inscrito numa circunferência de raio R .



O é o centro da circunferência

P é um ponto na circunscrita

O ângulo APB é $\hat{C}$

O segmento AP é $2R$

O ângulo PBA é reto

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que no triângulo ABP da Figura 1.19, que é retângulo, vale $\text{sen}(\hat{C}) = \frac{c}{2R} \rightarrow \frac{c}{\text{sen} \hat{C}} = 2R$.

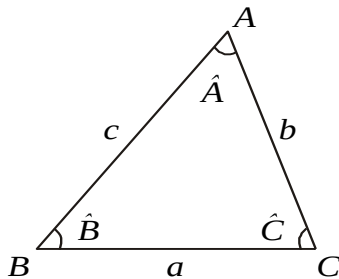
A demonstração é análoga para os demais lados e ângulos.

III) Lei dos cossenos (teorema dos cossenos).

A lei dos cossenos relaciona o cosseno de um dos ângulos de um triângulo com as medidas dos seus lados.

Na sequência, serão definidos senos, cossenos e tangentes de ângulos quaisquer pertencentes aos reais, e o cosseno de um ângulo de 90° é nulo. Por conta disso, o teorema de Pitágoras é um caso particular da lei dos cossenos, basta fazer o cosseno nulo.

Figura 1.20 – Um triângulo qualquer.



$$\checkmark \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A})$$

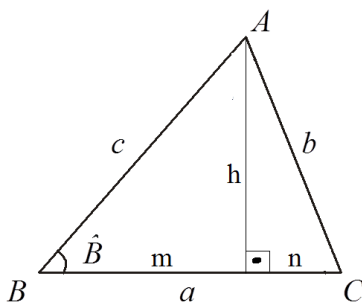
$$\checkmark \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B})$$

$$\checkmark \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C})$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Basta demonstrar uma delas, considerando que as demais são de mesmo procedimento. Vamos à demonstração de uma delas.

Figura 1.21 – Um triângulo qualquer.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Do triângulo ao lado, vem:

$$h^2 = c^2 - m^2; h^2 = b^2 - n^2; a = m + n; \cos(\hat{B}) = \frac{m}{c}.$$

Desenvolvendo, vem:

$$b^2 - n^2 = c^2 - m^2 \rightarrow b^2 - c^2 = n^2 - m^2 \rightarrow b^2 - c^2 =$$

$$(n + m)(n - m) \rightarrow$$

$$b^2 - c^2 = a(a - m - m) \rightarrow$$

$$b^2 - c^2 = a(a - 2m) \rightarrow b^2 - c^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot m \rightarrow$$

$$b^2 - c^2 = a^2 - 2a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}) \rightarrow$$

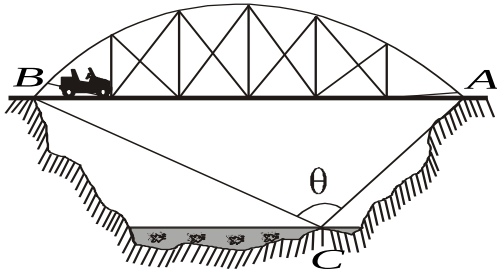
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}).$$

As outras duas relações são demonstradas da mesma maneira.

Contextualizando com exercício

01. Uma ponte deve ligar os pontos A e B indicados na Figura 1.22. Para executar esse projeto, o engenheiro responsável obteve as seguintes medidas: $AC = 30\text{ m}$, $BC = 50\text{ m}$ e $\theta = 120^\circ$. Calcule, em metros, a extensão da ponte.

Figura 1.22 – Um triângulo formado com um lado na ponte.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução comentada

Basta aplicar diretamente a lei dos cossenos.

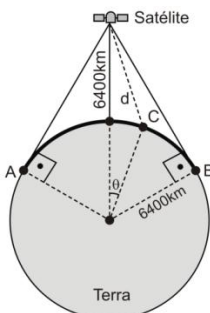
$$x^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\theta) \rightarrow x^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \cos(120^\circ) \rightarrow$$

$$x^2 = 900 + 2500 - 3000 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow x^2 = 3400 + 1500 = 4900 \rightarrow x = 70\text{ m}.$$

Note que o tamanho da ponte foi obtido sem precisar medir diretamente. Eis a importância da Trigonometria numa situação contextualizada.

02. (UNICAMP 2013) Um satélite orbita a 6.400 km da superfície da Terra. A Figura 1.23 representa uma seção plana que inclui o satélite, o centro da Terra e o arco de circunferência AB . Nos pontos desse arco, o sinal do satélite pode ser captado. Responda às questões abaixo, considerando que o raio da Terra também mede 6.400 km.

Figura 1.23 – Um triângulo qualquer.



Fonte: Elaborada pelo autor.

- a) Qual o comprimento do arco AB indicado na figura?
- b) Suponha que o ponto C da figura seja tal que $\cos(\theta) = 3/4$. Determine a distância d entre o ponto C e o satélite.

Resolução comentada:

a) No triângulo assinalado, Figura 1.24:

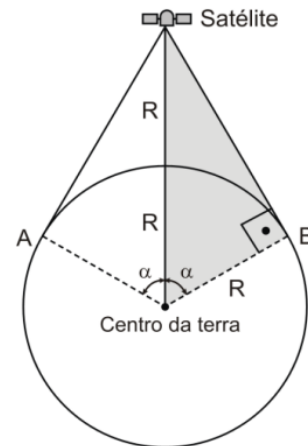
R é a medida do raio da terra.

$$\cos(\alpha) = \frac{R}{R+R} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Portanto, o arco AB mede 120° e seu comprimento será dado por:

$$\frac{2\pi R}{3} = \frac{2\pi \cdot 6400}{3} = \frac{12800\pi}{3} \text{ km}.$$

Figura 1.24 – Um triângulo qualquer.



Fonte: Elaborada pelo autor.

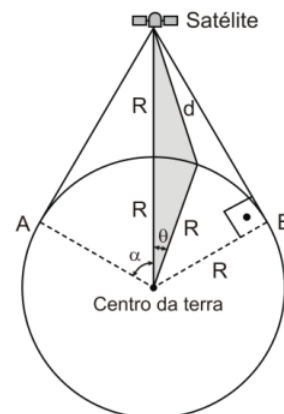
b) Aplicando o teorema dos cossenos no triângulo assinalado na Figura 1.25, temos:

$$d^2 = R^2 + (2R)^2 - 2 \cdot R \cdot 2R \cdot \cos(\theta) \rightarrow$$

$$d^2 = 5R^2 - 4R^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \rightarrow$$

$$d = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = 6400\sqrt{2} \text{ km}.$$

Figura 1.25 – Um triângulo qualquer.



Fonte: Elaborada pelo autor.

1.7 Os Vetores⁴ e a Trigonometria

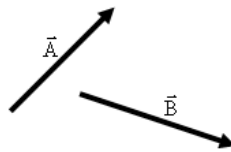
Em qualquer curso de Física no Ensino Médio, é inevitável operar com os vetores. São dois os tipos mais comuns de grandezas físicas: as escalares e as vetoriais. Por conta disso, os vetores ganham muita importância quando são tratadas grandezas como velocidade, aceleração, força, momento de uma força, quantidade de movimento, alguns campos, entre outras.

As grandezas vetoriais são aquelas que, para uma total compreensão, necessitam da inclusão de módulo, direção e sentido, ou seja, além da magnitude exibida numa unidade de medida, elas possuem como um dos elementos fundamentais a orientação.

I) Adição de vetores

Observe os dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ da Figura 1.26.

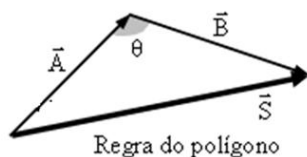
Figura 1.26 – Dois vetores quaisquer.



Fonte: Elaborada pelo autor.

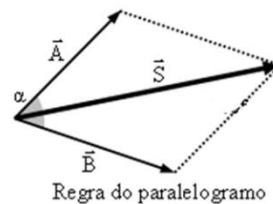
Para encontrar a direção e o sentido do vetor soma ou vetor resultante da operação $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$, usam-se as regras do paralelogramo e do polígono, conforme nas Figuras 1.27 e 1.28.

Figura 1.27 – Vetor soma de dois vetores quaisquer, usando a regra do polígono.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 1.28 – Vetor soma de dois vetores quaisquer, usando a regra do paralelogramo.



Fonte: Elaborada pelo autor

Da Lei dos cossenos (observe o triângulo na regra do polígono), o módulo de $\vec{S}$ é dado por: $S^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(\theta)$.

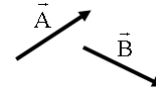
Observe que os ângulos α e θ são suplementares e, portanto, podemos reescrever da seguinte maneira: $S^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(\alpha)$.

⁴ RAMALHO JÚNIOR, cap. 9

II) Diferença de vetores

Dados dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ quaisquer, conforme a Figura 1.29.

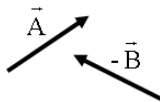
Figura 1.29 – Dois vetores quaisquer.



Fonte: Elaborada pelo autor.

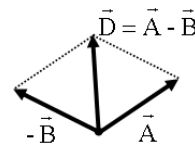
Para subtrair os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ da Figura 1.29, basta somar os vetores $\vec{A}$ e $-\vec{B}$, em que o vetor $-\vec{B}$ é o vetor oposto de $\vec{B}$, como na Figura 1.30. Vetor oposto é aquele que tem mesmo módulo, mesma direção e sentido contrário.

Figura 1.30 – Dois vetores, sendo um deles o vetor oposto ao vetor $\vec{B}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

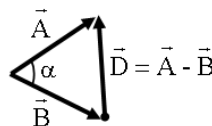
Figura 1.31 – Soma de vetores pela regra do polígono.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem posicionados de forma a terem suas origens coincidentes, conforme a Figura 1.32, o vetor diferença ($\vec{D}$) pode ser encontrado ligando-se as extremidades dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Figura 1.32 – Diferença de vetores pela regra do polígono.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando as leis dos cossenos a esse triângulo, tem-se:

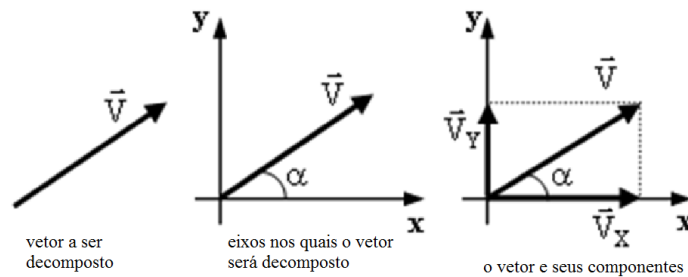
$$D^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos(\alpha).$$

A subtração de vetores é utilizada no cálculo da variação de uma grandeza vetorial, por exemplo, calcular a variação da velocidade de um corpo provocada pela aplicação de uma força; ou para calcular um vetor relativo, por exemplo, calcular a velocidade de um móvel em relação a outro.

III) Decomposição de vetores

Em algumas situações físicas, vale a pena encontrar os componentes horizontal e vertical de um vetor inclinado. A intenção é tornar mais simples, com tal procedimento, o problema que se quer resolver. Além disso, um vetor pode ser decomposto num par de eixos quaisquer, principalmente ortogonais, conforme a Figura 1.33.

Figura 1.33 – Projeções ortogonais de um vetor.



Fonte: Elaborada pelo autor.

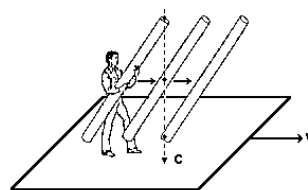
$$\checkmark \quad \cos(\alpha) = \frac{V_x}{V} \rightarrow V_x = V \cdot \cos(\alpha)$$

$$\checkmark \quad \sin(\alpha) = \frac{V_y}{V} \rightarrow V_y = V \cdot \sin(\alpha).$$

Contextualizando, com exercícios, operação com vetores.

01. UNESP - Um homem, em pé sobre uma plataforma que se move horizontalmente para a direita com velocidade constante $v = 4,0 \text{ m/s}$, observa que, ao inclinar de 45° um tubo cilíndrico oco, permite que uma gota de chuva, que cai verticalmente com velocidade c constante em relação ao solo, atravesse o tubo sem tocar em suas paredes, conforme Figura 1.34. Determine a velocidade c da gota da chuva, em m/s .

Figura 1.34 – Ilustração da situação descrita.

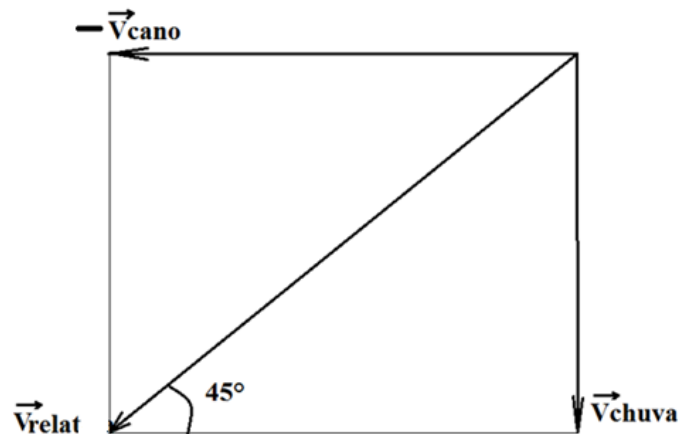


Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução comentada

A velocidade da chuva em relação ao cano é dada por $\vec{V}_{chuva-cano} = \vec{V}_{chuva} - \vec{V}_{cano}$. Dessa forma, os vetores velocidade ficam representados como na Figura 1.35.

Figura 1.35 – Velocidade relativa.

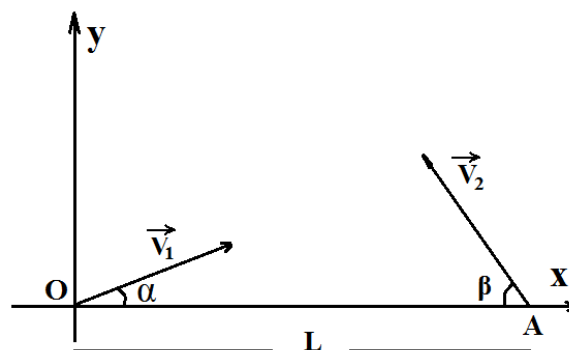


Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{V_{chuva}}{V_{cano}} = \frac{v}{c} = 1 \rightarrow c = v = 4,0 \text{ m/s}.$$

02⁵. Duas partículas (1) e (2), simultaneamente, deixam dois pontos O e A separados por uma distância L, com velocidades de módulos V_1 e V_2 , respectivamente. A direção na qual a primeira partícula viaja forma um ângulo α com o eixo X e a direção na qual a segunda partícula viaja forma ângulo β com o X, como mostrado na Figura 1.36. Qual será a menor distância entre as partículas e o instante em que isso ocorre?

Figura 1.36 – Representação da situação descrita no texto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

⁵ SINGH, p.10 (traduzido)

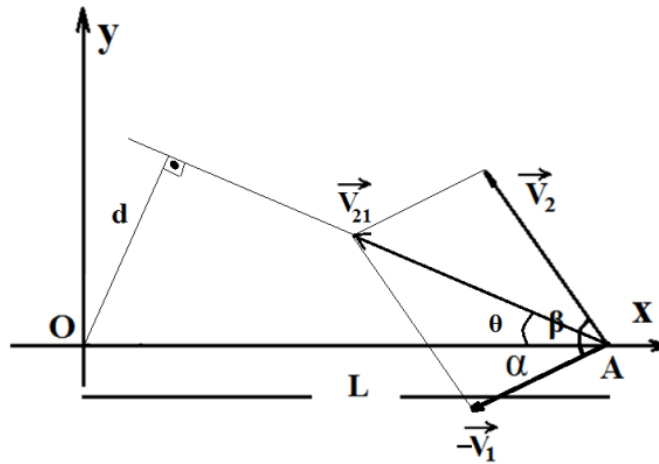
Resolução comentada

Para facilitar, basta botar o referencial numa partícula, parando-a, e analisar o movimento da outra. Essa análise permite o cálculo da distância mínima sem qualquer prejuízo no resultado, assim como, no cálculo do tempo.

Tomando a partícula (1) como referencial, a velocidade dela passa a ser nula e a velocidade da partícula (2) em relação à partícula (1) é dada pela diferença vetorial $\vec{V}_{21} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$, com módulo dado por $V_{21} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1^2V_2^2\cos(\alpha + \beta)}$ e está representada no gráfico a seguir.

A menor distância é aquela cuja direção da reta-suporte forma 90° com a direção da velocidade relativa, conforme a Figura 1.37.

Figura 37 – Ilustração da mudança de referencial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo assim, vem: $V_{21}\sin(\theta) = V_2\sin(\beta) - V_1\sin(\alpha)$ e $V_{21}\cos(\theta) = V_2\cos(\beta) + V_1\cos(\alpha)$. Portanto, $\sin(\theta) = \frac{V_2\sin(\beta) - V_1\sin(\alpha)}{V_{21}}$ e $\cos(\theta) = \frac{V_2\cos(\beta) + V_1\cos(\alpha)}{V_{21}}$.

Agora o cálculo da distância mínima d .

$$d = L\sin(\theta) = L\sin(\theta) = L \left(\frac{V_2\sin(\beta) - V_1\sin(\alpha)}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1^2V_2^2\cos(\alpha + \beta)}} \right).$$

O tempo é dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{V} = \frac{L\cos\theta}{V_{21}} = \frac{\frac{V_2\cos(\beta) + V_1\cos(\alpha)}{V_{21}}}{V_{21}} = \frac{V_2\cos(\beta) + V_1\cos(\alpha)}{V_{21}^2} = \frac{V_2\cos(\beta) + V_1\cos(\alpha)}{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1^2V_2^2\cos(\alpha + \beta)}.$$

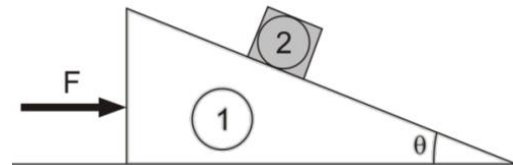
O uso ostensivo da Trigonometria permite a solução abdicando do cálculo diferencial, num problema de máximos e mínimos.

03. (Esc. Naval 2013) Considere uma força horizontal F aplicada sobre a cunha **1**, de massa $m_1 = 8,50 \text{ kg}$, conforme mostra a Figura 1.38. Não há atrito entre a cunha e o chão, e o coeficiente de atrito estático entre a cunha e o bloco **2**, de massa $m_2 = 8,50 \text{ kg}$, vale 0,200. O maior valor de F , em newtons, que pode ser aplicado à cunha, sem que o bloco comece a subir a rampa é

Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\sin(\theta) = 0,600$, $\cos(\theta) = 0,800$.

- a) 85,0
- b) 145
- c) 170
- d) 190
- e) 340

Figura 1.38 – Ilustração da cunha e o bloco.



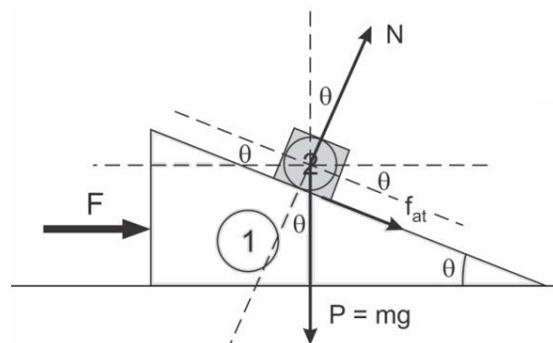
Fonte: Elaborada pelo autor.

Gabarito: d

Resolução comentada

Considerando a Figura 1.39, podemos trabalhar com as forças nas direções vertical e horizontal, estabelecendo os equilíbrios:

Figura 1.39 – Ilustração do esquema de forças que agem na cunha e no bloco.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Forças e suas componentes atuantes na vertical:

$$P + f_{at}\sin(\theta) = N\cos(\theta) \rightarrow mg = N[\cos(\theta) - \mu\sin(\theta)].$$

Na direção horizontal: $F = N\sin(\theta) + f_{at}\cos(\theta) \rightarrow ma = N[\sin(\theta) + \mu\cos(\theta)].$

Dividindo uma equação pela outra, ficamos com: $\frac{ma}{mg} = \frac{N[\sin(\theta) + \mu\cos(\theta)]}{N[\cos(\theta) - \mu\sin(\theta)]}.$

Da segunda lei de Newton, extraímos a aceleração: $F = (m_1 + m_2).a \rightarrow F = 17a \rightarrow a = \frac{F}{17}.$

Substituindo (4) em (3) e os valores: $\frac{F}{17 \cdot 10} = \frac{(0,6 + 0,2 \cdot 0,8)}{(0,8 - 0,2 \cdot 0,6)} \rightarrow F = 190 \text{ N}.$

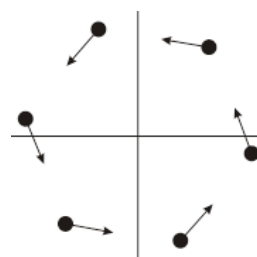
1.8 Exercitando

01. Um problema clássico da Cinemática considera objetos que, a partir de certo instante, movem-se conjuntamente com velocidade de módulo constante a partir dos vértices de um polígono regular, cada qual apontando a posição instantânea do objeto vizinho em movimento.

A Figura 1.40 mostra a configuração desse movimento múltiplo no caso de um hexágono regular.

Considere que o hexágono tinha 10,0 m de lado no instante inicial e que os objetos se movimentam com velocidade de módulo constante de 2,00 m/s, conforme a Figura 1.40. Após quanto tempo estes se encontrarão e qual deverá ser a distância percorrida por cada um dos seis objetos?

Figura 1.40 – Ilustração da situação.



Fonte: Elaborada pelo autor.

- A) 5,8 s e 11,5 m
- B) 11,5 s e 5,8 m
- C) 10,0 s e 20,0 m
- D) 20,0 s e 10,0 m

(Exercício traduzido e adaptado do livro 200 Puzzilig Physics Problems).⁶

Gabarito: c

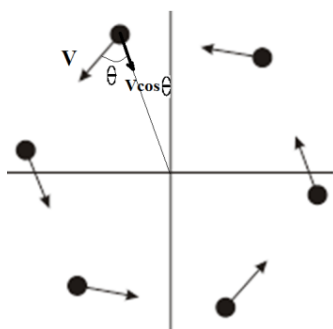
Resolução comentada.

Observe a Figura 1.41, em que v é o módulo da velocidade de cada objeto e $v \cdot \cos\theta$ é o módulo da projeção de v em cada instante do movimento. Dois aspectos devem ser observados, um é que os objetos sempre estão posicionados como vértices de um hexágono regular.

⁶ GNADIG, p.1

Por conta disso, a medida de θ é constante e vale metade do ângulo interno do hexágono formado com vértices nos objetos. Então $\theta = \frac{1}{2} \hat{\text{ângulo}}_{\text{interno}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-2)180^\circ}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(6-2)180^\circ}{6} = 60^\circ$.⁷

Figura 1.41 – Ilustração da situação, já com a decomposição da velocidade na direção radial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que o componente $v \cos(\theta) = 2,00 \cdot \cos(60^\circ) = 2,00 \cdot \frac{1}{2} = 1,00 \frac{m}{s}$.

Como esse componente aponta, em todos os instantes, para o centro da Figura 1.41, local onde ocorrerá o encontro, o espaço percorrido pelo objeto é radial, ou seja, $10,0 \text{ m}$. Daí, $v \cos(\theta) = \frac{R}{T} \rightarrow T = \frac{R}{v \cos \theta} = \frac{10,0}{1,00} = 10,0 \text{ s}$.

Mas, cada objeto descreve um espiral que vai fechando, com velocidade constante de $2,00 \text{ m/s}$. Então, ele percorrerá:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t = 2,00 \cdot 10,0 = 20,0 \text{ m}.$$

02. E o gato alcança o cachorro? Um gato corre em um lugar plano e horizontal com velocidade de módulo constante V_g , em linha reta, quando é perseguido por um cachorro que corre com velocidade de módulo constante $V_c > V_g$, sempre orientada para a posição do gato, em cada instante. Sabendo que, inicialmente, a distância entre os dois animais é L e suas velocidades iniciais são perpendiculares entre si, determine o instante T que o cachorro alcança o gato. Após encontrar esse tempo, comente o que ocorreria se $V_c = V_g$ ou se $V_c < V_g$.
Gabarito: $T = L \frac{V_c}{(V_c^2 - V_g^2)}$; se $V_c = V_g$, o cachorro precisaria de um tempo infinito para

alcançar o gato e se $V_c < V_g$, jamais alcançaria, ao contrário, afastar-se-ia permanentemente. (Exercício traduzido).⁸

Resolução comentada

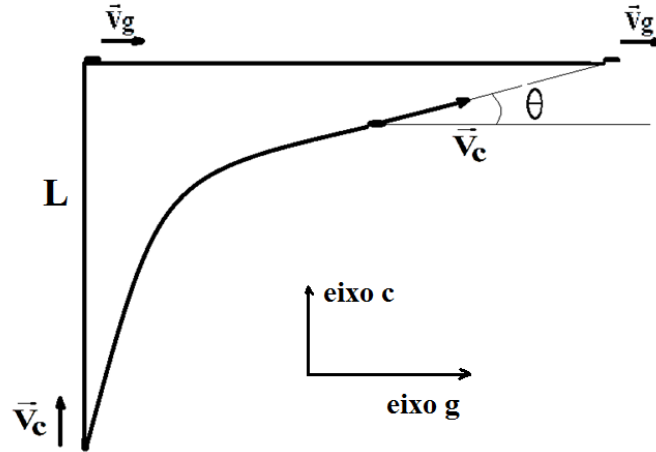
Esse problema tem uma solução curiosa, aparece uma integral que não precisa ser resolvida. Isso é possível com a decomposição de vetores que é uma operação muito recorrente na Física e feita com o auxílio das razões trigonométricas.

⁷ A soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo é dada por $S_n = (n - 2)180^\circ$. Isso ocorre porque todo polígono convexo pode ser dividido em $(n - 2)$ triângulos.

⁸ KUMAR, p.89

Observe a Figura 1.42. Nela, o vetor velocidade do cachorro ($\vec{v}_c$) e o vetor velocidade do gato ($\vec{v}_g$).

Figura 1.42 – Ilustração da situação proposta no texto da questão.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere T o tempo total até o momento de encontro, quando o cachorro alcança o gato.

Note que a velocidade relativa de aproximação é dada por

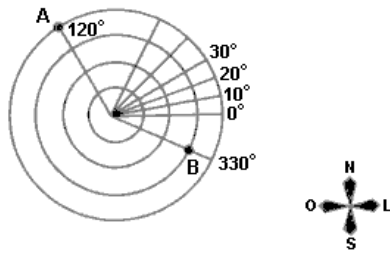
$V_{\text{relativa de aproximação}} = V_c - V_g \cos(\theta)$. Lembrando que espaço é velocidade vezes tempo⁹, o espaço relativo de aproximação é dado por $L = V_c \cdot T - V_g \cdot \int \cos(\theta) dt$. Note que só θ varia, por isso V_c e V_g saem das integrais. Agora, no eixo paralelo a $\vec{V}_g$, a velocidade média desde o instante inicial e o encontro é a mesma para o gato e o cachorro, pois o espaço percorrido e o tempo são os mesmos, logo $V_{g \text{ média}} = V_{c \text{ média}}$. O espaço é o mesmo, e dado por $V_g \cdot T = V_c \cdot \int \cos(\theta) dt \rightarrow \frac{V_g \cdot T}{V_c} = \int \cos(\theta) dt$. Substituindo $\int \cos(\theta) dt$ na primeira equação, vem:

$$L = V_c \cdot T - V_g \cdot \frac{V_g \cdot T}{V_c} = \frac{V_c^2 \cdot T - V_g^2 T}{V_c} = \frac{(V_c^2 - V_g^2) T}{V_c} \rightarrow T = L \frac{V_c}{(V_c^2 - V_g^2)}.$$

⁹ $v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = v dt \rightarrow s = \int v dt$. Essa relação diz que a velocidade instantânea de um corpo em movimento é a derivada da função horária da posição (s) do móvel. É um resultado muito conhecido, desenvolvido por Isaac Newton, quando da elaboração do cálculo diferencial. Ao contrário de Leibniz, Newton desenvolveu a ideia de limite, e como consequência o cálculo, apoiado em fenômenos físicos que demandavam essa ideia. Note que na resolução da questão, a integração não foi resolvida. Na resolução do sistema, ela apareceu nas duas equações e foi cancelada sem resolução direta.

03. Vestibular da UnB - O radar é um aparelho que usa o princípio da reflexão de ondas para determinar a posição de um objeto que se encontra distante ou encoberto por nevoeiro ou nuvem. A posição do objeto é indicada sob a forma de um ponto luminoso que aparece na tela do radar, que apresenta ângulos e círculos concêntricos, cujo centro representa a posição do radar, conforme ilustra a Figura 1.43.

Figura 1.43 – Ilustração do radar.



Considere que os pontos A e B da Figura 1.43 sejam navios detectados pelo radar, o navio A está a 40 km do radar e o navio B, a 30 km. Com base nessas informações e desconsiderando as dimensões dos navios, julgue os itens que se seguem.

Fonte: CESPE.

- a () A distância entre os navios A e B é maior que 69 km.
- b () A partir da posição detectada pelo radar, caso B se movimente sobre um círculo de raio igual a 30 km, no sentido anti-horário, com velocidade constante de 40 km/h então, em 10 min, o navio B percorrerá um arco correspondente a $\left(\frac{40}{\pi}\right)^o$.

Gabarito: FV

Resolução comentada

a) Unindo A e B, com o centro (posição do radar), tem-se um triângulo. Usando a lei dos cossenos, vem: $d^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos(150^\circ)$.

Seguindo as contas, considerando $\cos(150^\circ) = -\cos(30^\circ)$,

$$d^2 = 1600 + 900 - 2400 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow d = 67,7 \text{ km.}$$

b) Como $\Delta s = v \cdot \Delta t$ (espaço é velocidade vezes tempo) $= \frac{40 \text{ km}}{h} \cdot \frac{1h}{6} = \frac{20 \text{ km}}{3}$.

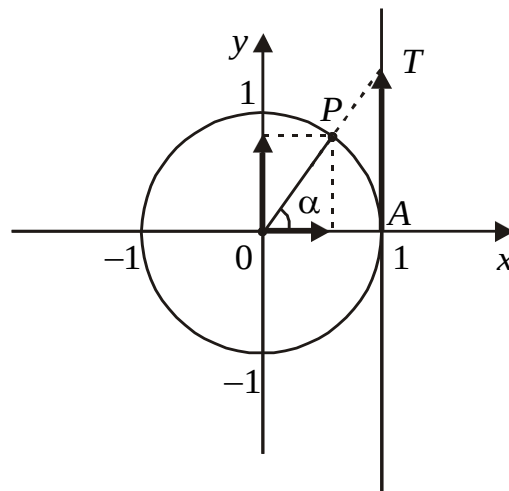
Da definição de radiano, $\alpha = \frac{\text{arco}}{\text{raio}} = \frac{\frac{20}{3}}{30} = \frac{20}{90} \text{ rad} = \frac{20 \cdot 180^\circ}{90 \cdot \pi \text{ rad}} \text{ rad} = \left(\frac{40}{\pi}\right)^o$.

1.9 Ciclo trigonométrico.

Com a contagem de ângulos num ciclo orientado, a Trigonometria passa a lidar com ângulos reais que vão de menos infinito a mais infinito. Assim, a Trigonometria passa a ser escrita e resultados são obtidos, muito além do triângulo retângulo.

Por construção, Figura 1.44, o raio do Ciclo Trigonométrico tem valor 1. Como o ângulo central é o arco dividido pelo raio e o raio é 1, o arco coincide com o mesmo valor numérico do ângulo central, em radiano.

Figura 1.44 – Ciclo trigonométrico.¹⁰



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo α a medida do arco $\widehat{AP}$, definem-se:

- ✓ $\text{sen}(\alpha) = \text{ordenada de } P.$
- ✓ $\text{cos}(\alpha) = \text{abscissa de } P.$
- ✓ $\text{tg}(\alpha) = \text{ordenada de } T.$

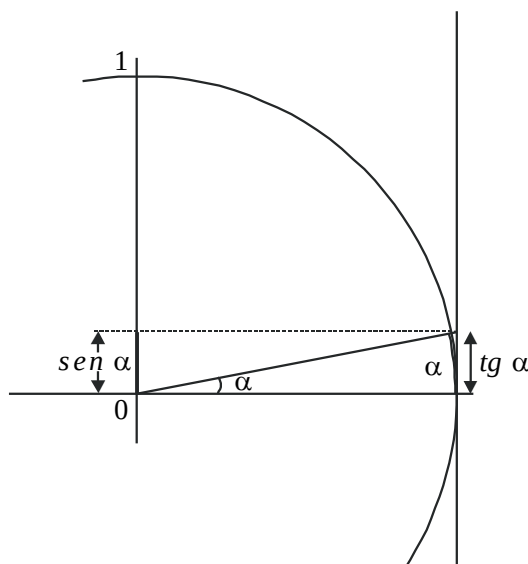
Dessa forma, as razões seno, cosseno e tangente assumam valores positivos e negativos, conforme o quadrante onde esteja o ponto P da Figura 1.44.

¹⁰ PAIVA, p. 109-111

I) Contextualizando: a altura do edifício.

A Figura 1.45 mostra uma propriedade muito utilizada no dia-a-dia de um físico.

Figura 1.45 – Ciclo trigonométrico representando a situação física.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para arcos α muito pequenos (*abaixo de 4°*), verifica-se que $\text{sen}(\alpha) \cong \text{tg}(\alpha) \cong \alpha^{11}$, para α em radianos. Use esse fato para calcular, em metros, a altura de um edifício que tem "altura aparente" de $0,5^\circ$, situado a 1200 m do observador.

Resolução comentada

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{h}{R} \rightarrow h = R \cdot \text{tg}(\alpha) = R \cdot \alpha \rightarrow h = 1200\text{m} \cdot \frac{0,5^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \rightarrow h = 1200 \cdot \frac{0,5 \cdot 3,14\text{m}}{180} \rightarrow h \cong 10,5\text{ m}.$$

¹¹ Para ângulos pequenos e não nulos, a aproximação do seno pela tangente ou pelo próprio ângulo é uma simplificação muito útil das leis da Trigonometria. Ela é exata no limite em que o ângulo se aproxima de zero. Ela envolve a linearização das funções trigonométricas (truncamento de suas séries de Taylor) de forma que, quando o ângulo x é medido radianos, têm-se:

✓ $\text{sen}(x) \cong x$

✓ $\cos(x) \cong 1$ ou $\cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2}$

✓ $\text{tg}(x) \cong x$

A aproximação para ângulos pequenos é útil em muitas áreas da Física, incluindo Eletromagnetismo, óptica (onde ela é a base da aproximação paraxial), Cartografia, Astronomia, entre outras.

A aproximação $\text{sen} x \cong x$ chega a um erro de 1% em cerca de 14° , que corresponde a cerca de 0,244 radianos.

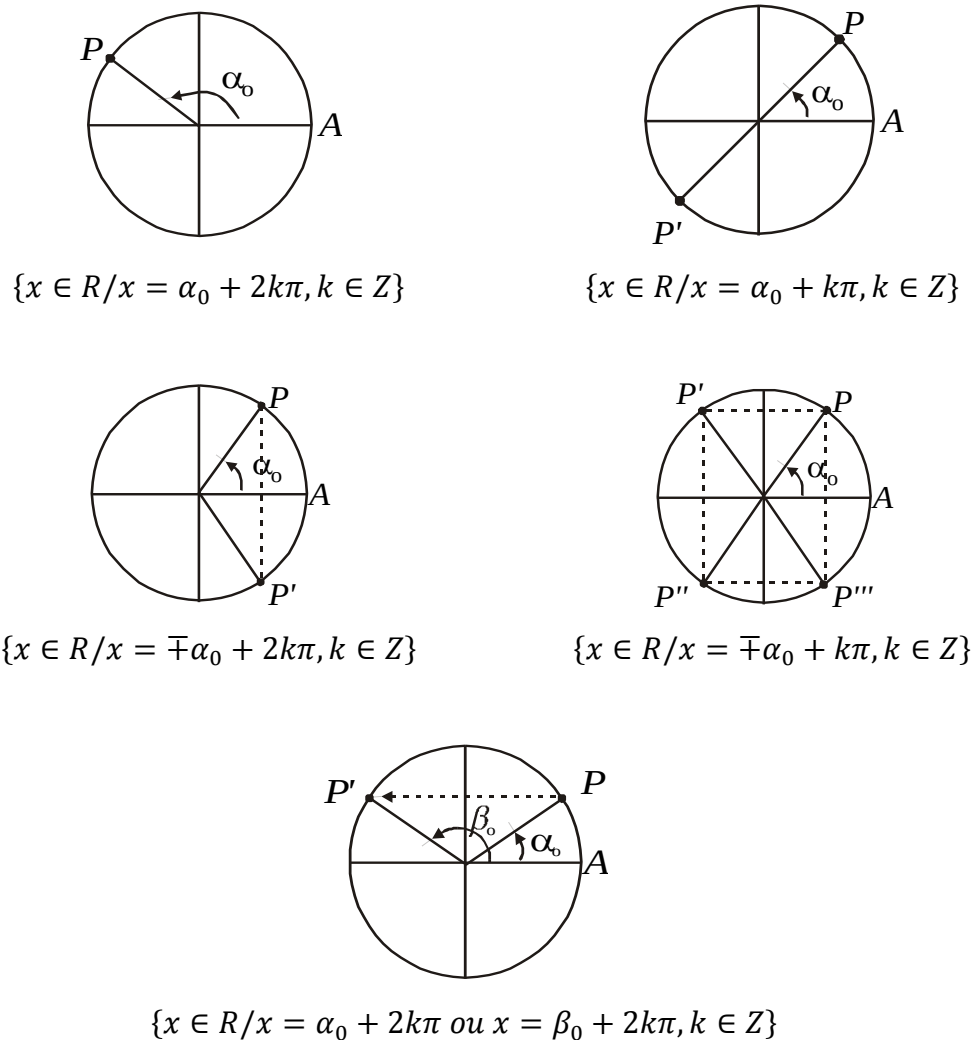
II) Conjunto das determinações de um arco.

Os arcos do ciclo trigonométrico podem de ir de menos infinito a mais infinito, contando positivamente no sentido anti-horário e negativamente no sentido horário. Portanto, a contagem dos ângulos em Trigonometria sai da redoma do triângulo retângulo, quando os ângulos eram agudos, para todo domínio dos números reais, onde os ângulos, agora chamados de arcos, podem variar de menos infinito a mais infinito.

Com isso, a Trigonometria amplia sobremaneira seu raio de ação.

Eis os casos principais, na Figura 1.46:

Figura 1.46 – Ciclo trigonométrico e as principais determinações positivas de um arco.

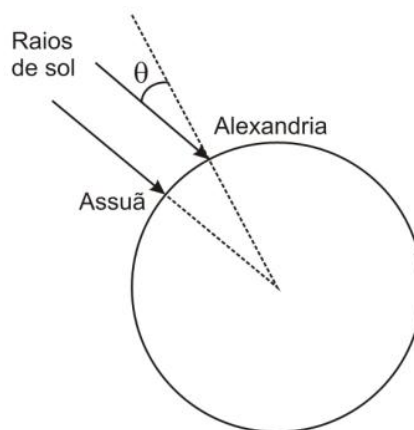


Fonte: Elaborada pelo autor.

III) Trigonometria e as medidas do planeta Terra.

01. Vestibular da FUVEST - Uma das primeiras estimativas do raio da Terra é atribuída a Eratóstenes, estudioso grego que viveu, aproximadamente, entre 275 a.C. e 195 a.C. Sabendo que em Assuã, cidade localizada no sul do Egito, ao meio dia do solstício de verão, um bastão vertical não apresentava sombra, Eratóstenes decidiu investigar o que ocorreria, nas mesmas condições, em Alexandria, cidade no norte do Egito. O estudioso observou que, em Alexandria, ao meio dia do solstício de verão, um bastão vertical apresentava sombra e determinou o ângulo θ entre as direções do bastão e de incidência dos raios de sol. O valor do raio da Terra, obtido a partir de θ e da distância entre Alexandria e Assuã foi de, aproximadamente, 7500 km.

Figura 1.47 – Ilustração da situação descrita no texto.



Fonte: FUVEST.

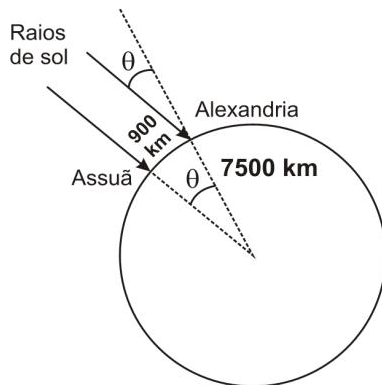
(Note e adote: distância estimada por Eratóstenes entre Assuã e Alexandria ≈ 900 km; $\pi = 3$).

O mês em que foram realizadas as observações e o valor aproximado de θ são:

- a) junho; 7° .
- b) dezembro; 7° .
- c) junho; 23° .
- d) dezembro; 23° .
- e) junho; $0,3^\circ$.

Resolução comentada

Figura 1.48 – Representação com os dados numéricos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, como Assuã e Alexandria estão situadas no hemisfério norte, e o solstício de verão ocorre no mês de junho nesse hemisfério, segue que as observações foram realizadas em junho. Portanto, o gabarito é a letra a.

Uma forma bem simples de responder a essa questão da FUVEST é observar que os raios solares que atingem a Terra são praticamente paralelos, de modo que o ângulo central é θ também.

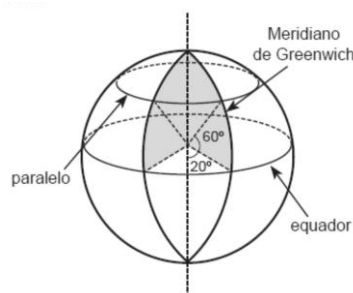
$$\text{Daí, } \theta = \frac{\text{arco}}{\text{raio}} = \frac{900}{7500} = \left(\frac{360^\circ}{2\pi}\right) \frac{900}{7500} = 7,2^\circ.$$

02. VESTIBULAR DA UnB - Admita que a Terra seja esférica, com raio 6.300 km . Dois navios encontram-se sobre o mesmo paralelo, a 60° de latitude norte, estando um deles sobre o meridiano de Greenwich e o outro sobre o meridiano a 20° de longitude oeste. Calcule, em quilômetros, a menor distância entre os navios, medida sobre a superfície da Terra, ao longo do paralelo. Considere o valor de π igual a $\frac{22}{7}$.

Resolução comentada

Para resolver esse problema, perceba que os dois navios estão sobre um mesmo círculo horizontal. Vamos calcular o raio desse círculo.

Figura 1.49 – Representação do planeta.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela figura, é possível observar que o raio desse círculo (r) forma um triângulo retângulo com o raio da Terra (R) e com a vertical. Nesse triângulo, o raio da terra é a hipotenusa e o raio do círculo é o cateto oposto ao ângulo de 60° . Portanto, podemos escrever $r = R \cos(60^\circ)$. Fazendo $R = 6300 \text{ km}$ e $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$, temos $r = 3150 \text{ km}$.

A distância entre os dois navios é um arco de 20° sobre esse círculo. Como o círculo todo tem 360° , 20° representam $20/360 = 1/18$ do círculo total. Portanto, a distância entre os navios será $1/18$ do comprimento do círculo. Assim, a distância é $\frac{2\pi R}{18} = \frac{2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 3150}{18} = 1100 \text{ km}$.

03. Vestibular - UnB - Uma das maneiras de se representar a Terra em uma região plana para o traçado de mapas geográficos é a "projeção estereográfica", que consiste em projetar os pontos de uma esfera sobre um plano perpendicular ao eixo norte-sul da esfera e que passa por seu polo Sul. Mais precisamente, a projeção de um ponto P da esfera é um ponto P' de α , obtido pela interseção com o plano α da reta determinada por P e pelo polo Norte. Essa construção está representada na Figura 1.50, em que O é o centro da esfera, M e Q são pontos sobre um mesmo paralelo, A é o ponto médio do segmento $M'Q'$, sendo M' e Q' as projeções dos pontos M e Q , respectivamente.

Figura 1.50 – Projeção estereográfica.



Fonte: CESPE.

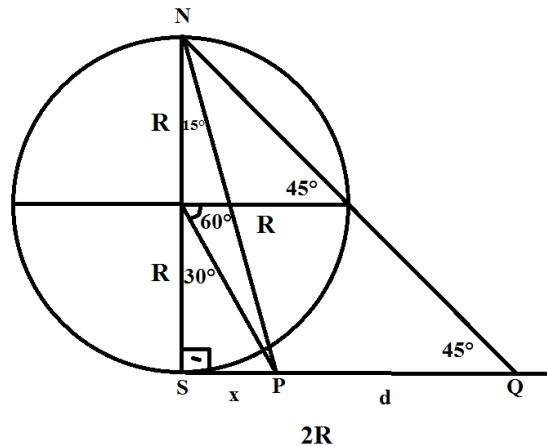
Considere que a Terra seja uma esfera de raio igual a 6.400 km e que um barco percorra, ao longo de um meridiano, um caminho correspondente a uma diferença de latitude de 60° , a partir da latitude 60° sul, no sentido sul-norte. Considerando um mapa da superfície terrestre feito a partir da projeção estereográfica da Terra e com escala $1:10^8$, calcule, em centímetros, o comprimento da projeção do percurso desse barco no mapa. Para isso, considere, ainda, $\text{tg}(15^\circ) = 0,27$.

Gabarito: 9,344 *cm*.

Resolução comentada

Veja a figura 1.51.

Figura 1.51 – Vista lateral da projeção estereográfica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

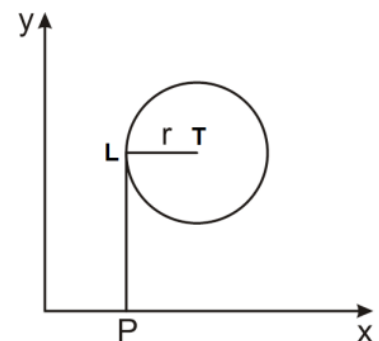
A distância que queremos encontrar é d .

$$\begin{aligned} \text{Ela vale } d &= 2R - x = 2R - 2R \cdot \operatorname{tg}(15^\circ) = 2R(1 - \operatorname{tg}(15^\circ)) \rightarrow d = 2R(1 - 0,27) \rightarrow \\ d &= 2.6400 \text{ km} \cdot 0,73 = 9344 \text{ km} = 9,344 \cdot 10^8 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Usando a escala $1:10^8$, a distância no mapa é de 9,344 *cm*.

04. ENEM – adaptada - Considere a Lua girando em torno da Terra num Movimento Circular e Uniforme (MCU¹²), conforme ilustra a figura a seguir, onde a Lua está representada pelo ponto L e a Terra por um ponto T no centro de uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja P a projeção ortogonal de L sobre o eixo x , como mostra a Figura 1.52, e suponha que o ponto L percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.

Figura 1.52 – Situação num sistema ortogonal de coordenadas.



Fonte: INEP.

¹² Ver anexo MCU.

Então, o ponto P percorrerá, no eixo x , uma distância dada por

a) $r \left[1 - \operatorname{sen} \left(\frac{d}{r} \right) \right]$.

b) $r \left[1 - \cos \left(\frac{d}{r} \right) \right]$.

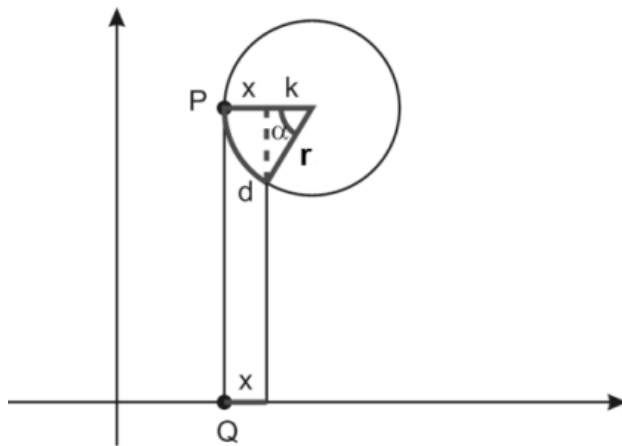
c) $r \left[1 - \operatorname{tg} \left(\frac{d}{r} \right) \right]$.

d) $r \operatorname{sen} \left(\frac{d}{r} \right)$.

e) $r \cos \left(\frac{d}{r} \right)$.

Resolução comentada

Figura 1.53: Representação com os dados.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que a medida que o ponto P se movimenta ao longo da circunferência, o ponto Q, sua projeção movimenta-se em linha reta ao longo do eixo das abscissas, conforme a Figura 1.53.

$$\alpha = \frac{d}{r}; k = r \cdot \cos \left(\frac{d}{r} \right); x = r - k;$$

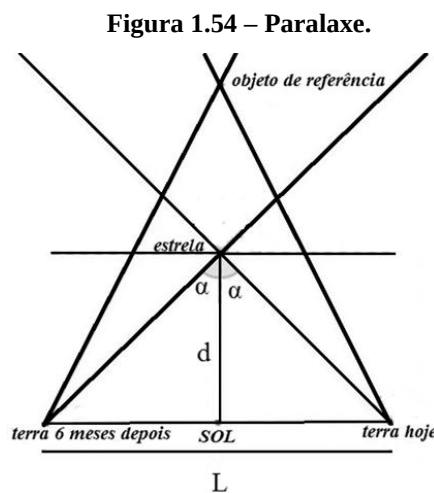
$$x = r - r \cdot \cos \left(\frac{d}{r} \right) \rightarrow x = r \left[1 - \cos \left(\frac{d}{r} \right) \right].$$

Gabarito: e

IV) O método de paralaxe.

O método de paralaxe foi e ainda é muito usado em Astrofísica. Ele possibilita a determinação da distância entre uma estrela e o Sol, com o uso da Trigonometria básica no triângulo retângulo. Portanto, permite o mapeamento das distâncias entre as estrelas visíveis a olho nu ou até com equipamentos mais sofisticados. A tática é observar essa estrela em duas posições defasadas com seis meses de intervalo e medir o seu deslocamento aparente em relação a outras estrelas muito mais distantes.

Com essas observações, é possível construir a Figura 1.54, onde o ângulo (α) de paralaxe da estrela é definido como metade da amplitude do ângulo formado entre as linhas que ligam a estrela aos extremos da base de observação.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A distância d da estrela ao Sol pode ser determinada assim: $tg(\alpha) = \frac{\frac{L}{2}}{d} \rightarrow d = \frac{L}{2tg(\alpha)}$.

A distância da Terra ao Sol é definida como unidade astronômica (ua) e vale $ua = \frac{L}{2} = 1,4959 \cdot 10^{11} m$.

Por exemplo, a estrela mais próxima do Sol, Alfa Centauri, tem um paralaxe de 0,750" (0,750 segundos, medido na unidade grau). Portanto, ela está a uma distância de $d = \frac{L}{2tg(\alpha)} = \frac{1,4959 \cdot 10^{11}}{tg(0,750'')} = \frac{1,4959 \cdot 10^{11}}{0,000003729} = 0,11464 \cdot 10^{16} m = 4,24 \text{ anos-luz}$. Obs.: um ano-luz¹³ corresponde a $9,461 \cdot 10^{15} m$, uma distância impressionante.

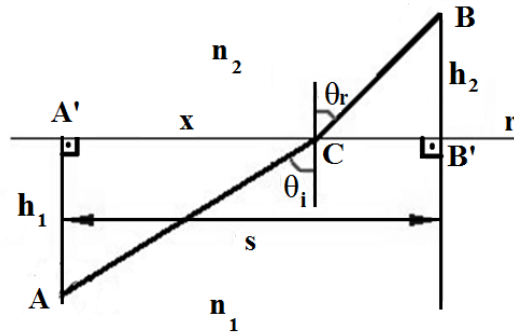
¹³ Ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano no vácuo com uma velocidade de 300.000 km/s. A estrela mais próxima do Sol encontra-se a aproximadamente 4,24 anos-luz, ou seja, a luz demora 4,2 anos para chegar ao sistema solar. Resultados como esse servem para o homem perceber que o Céu que vemos todas as noites são imagens de um passado, até remoto em alguns casos. Com essa velocidade impressionante, a luz realiza 7,5 em torno da Terra em apenas 1s. A luz é o que há de mais rápido em nosso Universo.

1.10 Aplicações da Trigonometria em óptica geométrica.

I) Lei de Snell-Descartes (Princípio de Fermat¹⁴).

Observe a Figura 1.55, em que: ABC é o raio de luz; θ_i e θ_r são os ângulos de incidência e refração; n_1 e n_2 são os índices de refração dos meios (1) e (2) e r é a fronteira de separação dos meios. Para os demais elementos, a figura é autoexplicativa.

Figura 1.55 – Refração da Luz.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O princípio de Fermat garante que *o caminho percorrido por um raio de luz entre dois pontos é tal que o tempo de percurso é o menor possível.*

$$V = \frac{\Delta S}{T} \rightarrow T = \frac{\Delta S}{V} = \frac{\Delta S_1}{V_1} + \frac{\Delta S_2}{V_2}.$$

Usando essa relação e o teorema de Pitágoras, vem:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(s-x)^2 + h_2^2}}{V_2}.$$

Mas, $V_1 = \frac{c}{n_1}$ e $V_2 = \frac{c}{n_2}$, com $n_1, n_2 \geq 1$.

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{\frac{c}{n_1}} + \frac{\sqrt{(s-x)^2 + h_2^2}}{\frac{c}{n_2}}.$$

Derivando essa função e igualando a zero, obtém-se um mínimo.

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{x \cdot n_1}{2c \sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{(s-x) \cdot n_2}{2c \sqrt{(s-x)^2 + h_2^2}} = 0. \text{ Cancelando } 2c \text{ e tomando os senos, obtém-se a lei de}$$

Snell-Descartes:

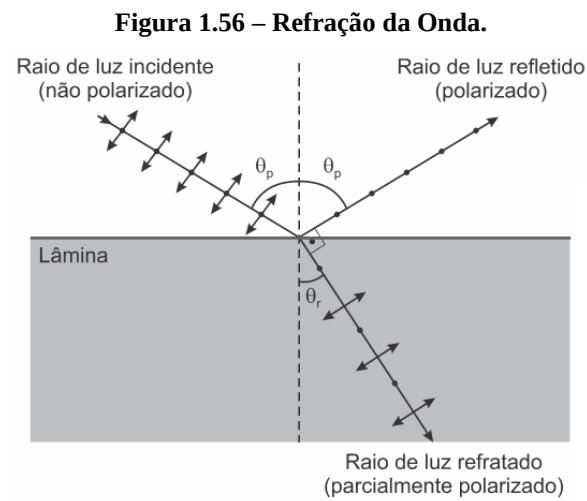
$$n_1 \cdot \text{sen}(\theta_i) = n_2 \cdot \text{sen}(\theta_r).$$

¹⁴ Pierre de Fermat, nascido na primeira década do século XVII, foi um matemático e cientista francês.

O Princípio de Fermat, em ótica é um princípio do tipo extremo e estabelece que: "A trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto a outro é tal que o tempo gasto em percorrê-la é um mínimo."

Exercícios contextualizando a Lei de Snell-Descartes

01. (ENEM PPL 2015) A fotografia feita sob luz polarizada é usada por dermatologistas para diagnósticos. Isso permite ver detalhes da superfície da pele que não são visíveis com o reflexo da luz branca comum. Para se obter luz polarizada, pode-se utilizar a luz transmitida por um polaroide ou a luz refletida por uma superfície na condição de Brewster, como mostra a Figura 1.56. Nessa situação, o feixe da luz refratada forma um ângulo de 90° com o feixe da luz refletida, fenômeno conhecido como Lei de Brewster. Nesse caso, o ângulo da incidência θ_p , também chamado de ângulo de polarização, e o ângulo de refração θ_r estão em conformidade com a Lei de Snell.



Fonte: INEP.

Considere um feixe de luz não polarizada proveniente de um meio com índice de refração igual a 1, que incide sobre uma lâmina e faz um ângulo de refração $\theta_r = 30^\circ$.

Nessa situação, qual deve ser o índice de refração da lâmina para que o feixe refletido seja polarizado?

- a) $\sqrt{3}$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- c) 2
- d) $\frac{1}{2}$
- e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Gabarito: a

Resolução comentada

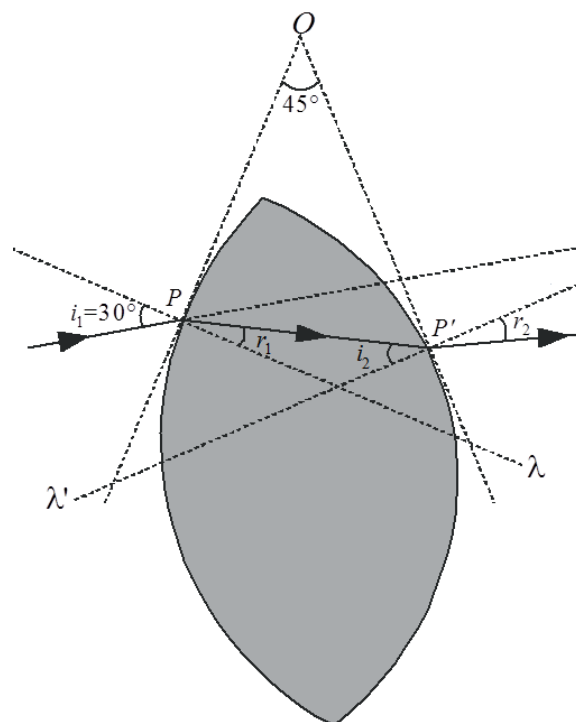
Dados: $n_m = 1$; $\theta_p = 60^\circ$; $\theta_r = 30^\circ$.

Aplicando a Lei de Snell:

$$n_m \cdot \sin(\theta_p) = n_L \cdot \sin(\theta_r) \rightarrow 1 \cdot \sin(60^\circ) = n_L \cdot \sin(30^\circ) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = n_L \cdot \frac{1}{2} \rightarrow n_L = \sqrt{3}.$$

02. (PAS-UnB) Quando a luz passa de um meio para outro, ocorre o chamado fenômeno da refração. Na Figura 1.57, que ilustra esse fenômeno, um raio de luz incide sobre a superfície de uma lupa no ponto P , é refratado e volta para o ambiente pelo ponto P' . As retas λ e λ' são perpendiculares às faces da lupa nos pontos P e P' , respectivamente, i_1 e i_2 são os ângulos de incidência e r_1 e r_2 são os ângulos de refração. Além disso, as retas perpendiculares a λ e λ' pelos pontos P e P' são concorrentes em O , determinando um ângulo de 45° .

Figura 1.57 – A lente de uma lupa refratando a luz.



Fonte: CESPE.

Sabendo que, segundo a lei de Snell, $\frac{\text{sen}(i_1)}{\text{sen}(r_1)} = \frac{\text{sen}(r_2)}{\text{sen}(i_2)} = n$, em que $n \cong 1,5$ é o índice de refração do vidro que constitui a lupa, calcule o valor de $\text{sen}r_2$.

Resolução comentada

$$\frac{\text{sen}(30^\circ)}{\text{sen}(r_1)} = \frac{\text{sen}(r_2)}{\text{sen}(i_2)} = n \rightarrow \frac{1/2}{\text{sen}(r_1)} = \frac{\text{sen}(r_2)}{\text{sen}(i_2)} = 1,5 \rightarrow \frac{1}{2\text{sen}(r_1)} = \frac{\text{sen}(r_2)}{\text{sen}(i_2)} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Logo, } \text{sen}(r_1) = \frac{1}{3} \rightarrow \cos(r_1) = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ e } \text{sen}(r_2) = \frac{2\text{sen}(i_2)}{3}.$$

Infere-se da figura que $r_1 + i_2 = 45^\circ$. Logo,

$$\text{sen}(r_1 + i_2) = \text{sen}(45^\circ) \rightarrow \text{sen}(r_1) \cdot \cos(i_2) + \text{sen}(i_2) \cdot \cos(r_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{3} \cos(i_2) + \text{sen}(i_2) \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(i_2) + 2\sqrt{2} \cdot \text{sen}(i_2) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos(i_2) = -2\sqrt{2} \cdot \text{sen}(i_2) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

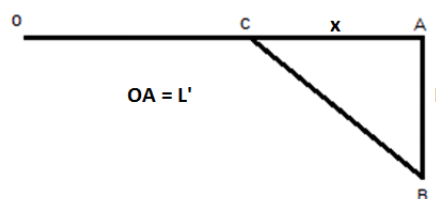
$$\cos^2(i_2) = 8 \cdot \text{sen}^2(i_2) - 12 \cdot \text{sen}(i_2) + \frac{9}{2} \rightarrow 1 - \text{sen}^2(i_2) = 8\text{sen}^2(i_2) - 12\text{sen}(i_2) + \frac{9}{2} \rightarrow$$

$$9\text{sen}^2(i_2) - 12\text{sen}(i_2) + 3,5 = 0 \rightarrow \text{sen}(i_2) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow$$

$$\text{sen}(i_2) = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 9 \cdot 3,5}}{18} = \frac{12 \pm 3\sqrt{2}}{18} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{6}. \text{ Mas, } \text{sen}(r_2) = \frac{2\text{sen}(i_2)}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{6} \right) \cong 0,29.$$

03. Minimizando distâncias - A partir do ponto **O**, ao longo da estrada **OB**, uma pessoa é desafiada a chegar ao ponto **B** localizado num campo lateral de uma estrada a uma distância **L** de **A**, de modo a gastar o menor tempo possível. A velocidade da pessoa no campo é n vezes menor que a velocidade que ele vai desenvolver quando deixar a estrada, a fim de alcançar o ponto **B**, com $n > 1$, conforme a Figura 1.58. Calcule a distância AC (**x**) para que ele consiga seu intento.

Figura 1.58 – Ilustração da trajetória da pessoa na situação descrita.



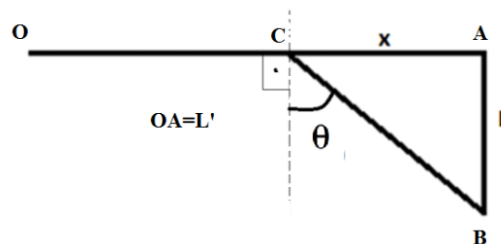
Fonte: Elaborada pelo autor.

Gabarito: $x = \frac{L}{\sqrt{n^2-1}}$.

Resolução comentada

Vamos usar o princípio de Fermat e assumir que é o caminho que a luz faria. Assim sendo, vamos usar a lei de Snell-Descartes: $\frac{\text{sen}(\theta_1)}{v_1} = \frac{\text{sen}(\theta_2)}{v_2}$.

Figura 1.59 – Ilustração da trajetória da pessoa na situação descrita já como dados.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Basta fazer $v_1 = v$, $v_2 = \frac{v}{n}$, $\theta_2 = \theta$ e $\theta_1 = 90^\circ$.

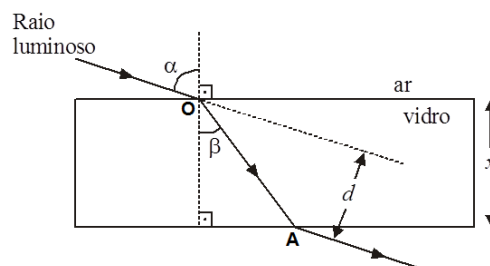
$$\frac{\text{sen}(90^\circ)}{v} = \frac{\text{sen}(\theta)}{\frac{v}{n}} \rightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{1}{n} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}} = \frac{1}{n} \rightarrow \frac{x^2}{x^2+L^2} = \frac{1}{n^2} \rightarrow n^2 x^2 = x^2 + L^2 \rightarrow$$

$$n^2 x^2 - x^2 = L^2 \rightarrow x^2(n^2 - 1) = L^2 \rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

II) Lâminas de Faces Paralelas

Quando um raio luminoso incide em uma lâmina de índice de refração n e de espessura x colocada no ar formando um ângulo α com a normal, o desvio lateral d sofrido pelo raio está mostrado na Figura 1.60, onde β é o ângulo formado pelo raio com a normal no interior da lâmina.

Figura 1.60 – Lâmina de faces paralelas sendo atravessada por um raio luminoso.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Lei Física: Pela *Lei de Snell - Descartes*, sabe-se que $n_{AR} \cdot \text{sen}(\alpha) = n \cdot \text{sen}(\beta)$, em que n_{AR} é o índice de refração do ar e n é o índice de refração do vidro.

Sabendo disso, encontre o deslocamento lateral d , em função de n , n_{AR} , α , β e x .

$$\cos(\beta) = \frac{x}{OA} \rightarrow OA = \frac{x}{\cos(\beta)}.$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{d}{OA} \rightarrow d = OA \cdot \text{sen}(\alpha - \beta).$$

$$\text{Finalmente: } d = x \cdot \frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\beta)}.$$

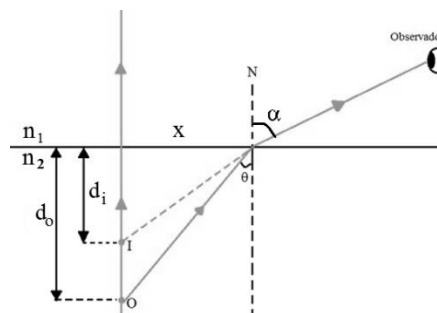
III) Dióptro Plano

Um objeto dentro de uma piscina não parece estar no lugar que efetivamente está. Uma colher dentro de um copo com água parece estar torta. Esses dois fenômenos ocorrem por um mesmo motivo: a refração da luz. E é justamente o que ocorre com um dióptro plano.

O dióptro plano apresenta dois meios transparentes e homogêneos separados por uma superfície plana. Como exemplo, podemos citar a superfície de lagos ou piscinas que separa a água do ar. Se estivermos em um dos dois meios que formam o dióptro plano, a visualização que teremos do objeto no outro meio será afetada pela refração da luz.

A relação entre a posição do objeto e a posição da imagem visualizada pode ser obtida se os índices de refração dos dois meios forem conhecidos. Observe a Figura 1.61.

Figura 61 – Dióptro plano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando Snell, vem: $n_2 \cdot \text{sen}(\theta) = n_1 \cdot \text{sen}(\alpha)$. Para $\theta \cong 0$, bem pequeno, numa visada próxima à normal (N), $\text{sen}(\theta) \cong \text{tg}(\theta)$ e $\text{sen}(\alpha) \cong \text{tg}(\alpha)$, logo, $n_2 \cdot \text{tg}(\theta) \cong n_1 \cdot \text{tg}(\alpha)$. Portanto, $n_2 \cdot \frac{x}{d_o} \cong n_1 \cdot \frac{x}{d_i}$. Cancelando x , tem-se: $d_i = d_o \frac{n_1}{n_2}$.

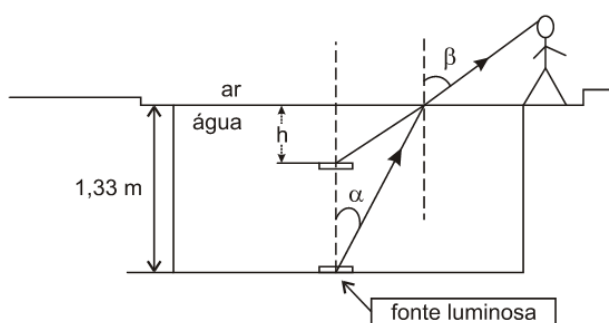
Na demonstração dessa relação houve uma restrição, que são os ângulos pequenos, próximos de zero, numa visada próxima à normal.

Exercícios de Dióptro Plano

01. (Espcex (Aman) 2014) Uma fonte luminosa está fixada no fundo de uma piscina de profundidade igual a 1,33 m.

Uma pessoa na borda da piscina observa um feixe luminoso monocromático, emitido pela fonte, que forma um pequeno ângulo α com a normal da superfície da água, e que, depois de refratado, forma um pequeno ângulo β com a normal da superfície da água, conforme a Figura 1.62.

Figura 1.62 – Dióptro plano ar-água.



desenho ilustrativo - fora de escala

Fonte: Elaborada pelo autor.

A profundidade aparente “h” da fonte luminosa vista pela pessoa é de:

Dados: sendo os ângulos α e β pequenos, considere $\operatorname{tg}(\alpha) \cong \operatorname{sen}(\alpha)$ e $\operatorname{tg}(\beta) \cong \operatorname{sen}(\beta)$.

índice de refração da água: $n_{\text{água}}=1,33$, índice de refração do ar: $n_{\text{ar}}=1$.

- a) 0,80 m
- b) 1,00 m
- c) 1,10 m
- d) 1,20 m
- e) 1,33 m

Gabarito 1: b

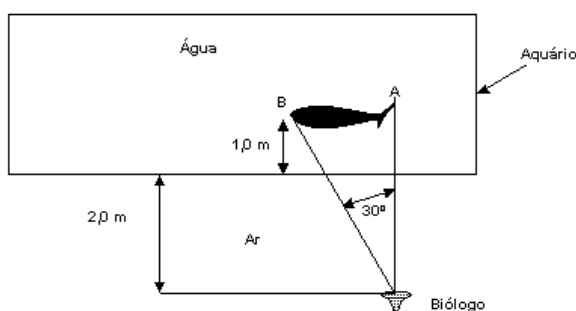
Resolução comentada

Aplicando a equação do dióptro plano para pequenos ângulos:

$$\frac{d_i}{d_o} = \frac{n_{\text{obs}}}{n_{\text{obj}}} \rightarrow \frac{d_i}{1,33} = \frac{1}{1,33} \rightarrow d_i = 1 \text{ m.}$$

2. (UFMS 2008) Um biólogo, na tentativa de obter o comprimento de um tubarão que está no interior de um grande aquário de vidro, observa-o atentamente do lado externo. Em um dado instante, o tubarão permanece em repouso na posição horizontal, paralelo e a uma distância de 1 m de uma das paredes de vidro transparente do aquário. Nesse momento, o biólogo está a 2 m de distância dessa parede e em frente do ponto A que está na extremidade da barbatana caudal. O biólogo permanece nessa mesma posição e gira a cabeça de um ângulo de 30° para a esquerda, e a nova linha de visada coincide com o ponto B que está na cabeça do tubarão, veja a figura. Considere o índice de refração do ar e da água iguais a 1,0 e 1,33, respectivamente, e despreze a espessura e os efeitos de refração do vidro. Com fundamentos nos fenômenos da propagação da luz em meios diferentes, assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S). (Dados: $\sin(22^\circ) = 0,37$; $\cos(22^\circ) = 0,93$; $\sin(30^\circ) = 0,50$; $\cos(30^\circ) = 0,87$).

Figura 1.63 – Visada de um peixe num aquário.



Fonte: Elaborada pelo autor.

- 01) A velocidade da luz vermelha é menor que a velocidade da luz violeta na água.
- 02) Se o tubarão for nadando lentamente para a esquerda e na horizontal, devido ao fenômeno de reflexão total, a imagem da cabeça dele, vista pelo biólogo, desaparecerá primeiro que a imagem da cauda dele vista pelo biólogo.
- 04) O fenômeno de refração da luz não acontece em meio dispersivo.
- 08) O índice de refração na água, para a luz violeta, é maior que o índice de refração na água para a luz vermelha.
- 16) O comprimento real do tubarão é menor que 1,60 m.

Gabarito 1: (02 + 08 + 16) = 26.

Resolução comentada

Leve em consideração que:

O fenômeno da refração ocorre em quaisquer meios transparentes, salvo se o ângulo de incidência for maior que ângulo limite.

O índice de refração é inversamente proporcional à velocidade da luz no meio.

O tamanho da imagem do peixe $\rightarrow tg(30^\circ) = \frac{AB}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow AB = \sqrt{3} = 1,7 \text{ m}$. O tamanho real é menor devido ao efeito da refração.

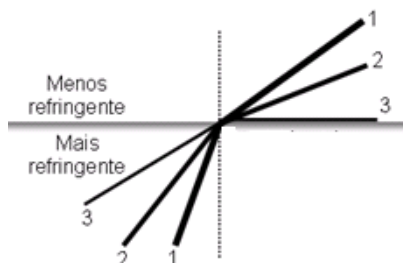
Pela lei de Snell: $1 \cdot \sin(30^\circ) = 1,33 \cdot \sin(\theta) \rightarrow \sin(\theta) = 0,38 \rightarrow \theta = 22^\circ$. Como este ângulo é menor que 30° o tubarão terá um comprimento um pouco menor que sua imagem. De fato o comprimento do tubarão será

$$L = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{0,37}{0,93} = 1,13 + 0,40 = 1,53 \text{ m}.$$

IV) Reflexão Total

Um raio de luz ao passar de um meio mais refringente¹⁵ para um meio menos refringente, com incidência oblíqua, afasta-se da normal. Observe a figura 1.64.

Figura 1.64 – Refração e Reflexão total.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que quanto mais o raio incidente se afasta da normal, o respectivo raio refratado também vai se afastando da normal também (consequência direta da Lei de Snell). O raio refratado **3** saiu rasante (ou seja, o ângulo de refração é 90°) ao dióptro. Se um raio de luz incidir no dióptro com um ângulo maior que o ângulo de incidência do raio de luz **3**, esse raio não sofrerá refração (pois não terá como se afastar mais do que 90° da normal), o que se observa é que esse raio de luz (cujo ângulo de incidência é maior que o ângulo de incidência do raio **3**) sofre reflexão, tal fenômeno é denominado REFLEXÃO TOTAL.

¹⁵ Um meio é dito mais refringente quando é maior seu índice de refração, portanto, menor velocidade da luz.

O maior ângulo de incidência para o qual um raio de luz (que está se propagando num meio mais refringente) ainda sofra refração é denominado ÂNGULO LIMITE ($\hat{L}$). Na figura anterior, esse seria o ângulo de incidência associado ao raio de luz 3.

Se aplicarmos a lei de Snell para o raio de luz 3, temos:

$$n_{\text{menos refrig.}} \cdot \text{sen}(\hat{i} = 90^\circ) = n_{\text{meio mais refring.}} \cdot \text{sen}(\hat{L}). \text{ Logo,}$$

$$\text{sen}(\hat{L}) = \frac{n_{\text{menor}}}{n_{\text{maior}}}.$$

Essa expressão permite calcular o maior ângulo de incidência para o qual um raio de luz que está se propagando num meio de índice de refração maior ainda sofra refração.

Assim, concluímos que para ocorrer o fenômeno de REFLEXÃO TOTAL, um raio de luz deve obedecer a duas condições:

1. O raio de luz deve estar se propagando no meio mais refringente; e
2. O ângulo de incidência deve ser maior que o ângulo limite, ou seja, $\hat{i} > \hat{L}$.

Figura 1.65 – Reflexão total e refração rasante.

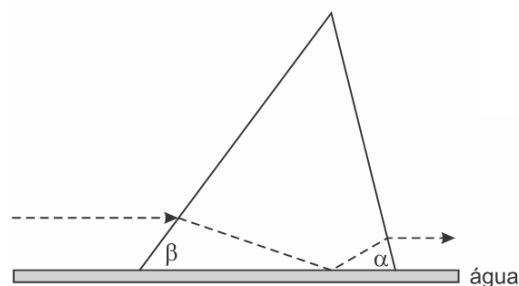


Fonte: Elaborada pelo autor.

Exercícios

01. (Ita 2015)

Figura 1.66 – Prisma da flexão total.



Fonte: Elaborada pelo autor.

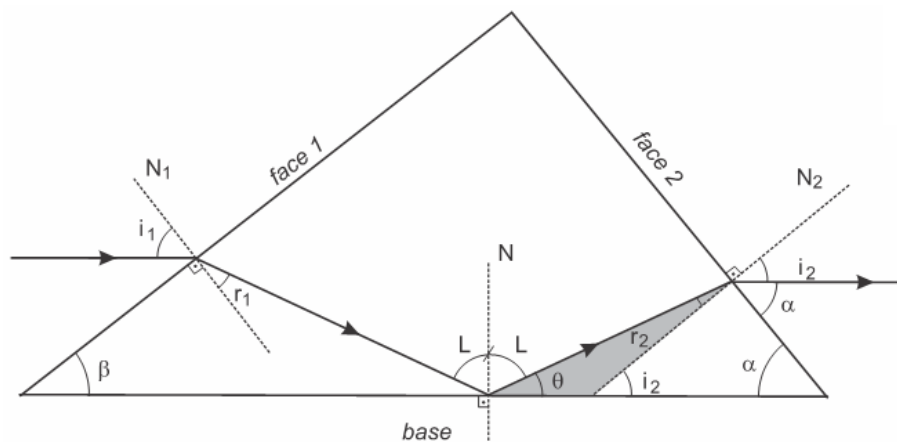
A base horizontal de um prisma de vidro encontra-se em contato com a superfície da água de um recipiente. A figura mostra a seção reta triangular deste prisma, com dois de seus ângulos, α e β . Um raio de luz propaga-se no ar paralelamente à superfície da água e perpendicular ao eixo do prisma, nele incidindo do lado do ângulo β , cujo valor é tal que o raio sofre reflexão total na interface da superfície vidro-água. Determine o ângulo α tal que o raio emergja horizontalmente do prisma. O índice de refração da água é $4/3$ e, o do vidro, $\sqrt{19}/3$.

Resolução comentada

Dados: $n_{ar} = 1$; $n_{\text{água}} = 4/3$.

A Figura 1.67 ilustra a trajetória do raio até imergir do prisma, destacando os ângulos relevantes para a resolução da questão.

Figura 1.67 – Ilustração da situação física apresentada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Consideremos que a reflexão na interface prisma-água, base do prisma, se dê muito próximo do ângulo limite (L). Assim: $\text{sen}(L) = \frac{n_{\text{água}}}{n_v} = \frac{4/3}{\sqrt{19}/3} \rightarrow \text{sen}(L) = \frac{4}{\sqrt{19}}$ e

$$\cos(L) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(L)} = \sqrt{1 - \frac{16}{19}} \rightarrow \cos(L) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

Os ângulos L e θ são complementares:

$$\text{sen}(\theta) = \cos(L) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \text{ e } \cos(\theta) = \text{sen}(L) = \frac{4}{\sqrt{19}}.$$

Aplicando a lei de Snell na face 2:

$$n_{ar} \cdot \sin(i_2) = n_v \cdot \sin(r_2) \rightarrow \sin(i_2) = \frac{\sqrt{19}}{3} \cdot \sin(r_2) \rightarrow \sin(r_2) = \frac{3}{\sqrt{19}} \cdot \sin(i_2).$$

No triângulo destacado, i_2 é ângulo externo: $i_2 = r_2 + \theta \rightarrow r_2 = i_2 - \theta \rightarrow$

$$\sin(r_2) = \sin(i_2 - \theta) \rightarrow \sin(r_2) = \sin(i_2)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(i_2).$$

Substituindo os valores e expressões calculados acima:

$$\sin(r_2) = \sin(i_2) \cdot \sin(L) - \cos(L)\cos(i_2) \rightarrow \frac{3}{\sqrt{19}}\sin(i_2) = \sin(i_2) \frac{4}{\sqrt{19}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\cos(i_2) \rightarrow$$

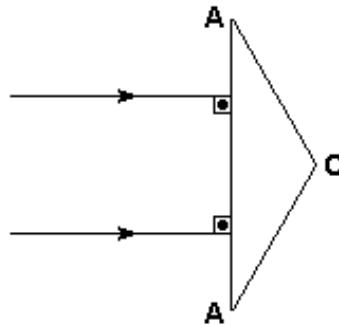
$$3\sin(i_2) = 4\sin(i_2) - \sqrt{3}\cos(i_2) \rightarrow \sin(i_2) = \sqrt{3}\cos(i_2) \rightarrow \frac{\sin(i_2)}{\cos(i_2)} = \sqrt{3} \rightarrow$$

$$\tan(i_2) = \sqrt{3} \rightarrow i_2 = 60^\circ.$$

Mas i_2 e α são complementares: $\alpha + i_2 = 90^\circ \rightarrow \alpha + 60^\circ = 90^\circ \rightarrow \alpha = 30^\circ$.

02. UFSCAR - O prisma da Figura 1.68 está colocado no ar e o material de que é feito tem um índice de refração igual a $\sqrt{2}$. Os ângulos A são iguais a 30° . Considere dois raios de luz incidentes perpendiculares à face maior.

Figura 1.68 - Prisma isósceles.



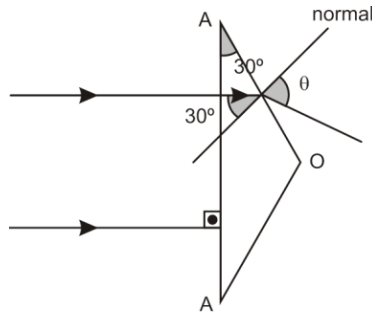
Fonte: Elaborada pelo autor.

- Calcule o ângulo com que os raios emergem do prisma.
- Qual deve ser o índice de refração do material do prisma para que haja reflexão total nas faces OA?

Resolução comentada

a) A Figura 1.69 mostra o trajeto seguido pelos raios luminosos.

Figura 1.69 - Prisma isósceles refratando a luz.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando-se Snell na passagem do material para o ar, vem:

$$n \cdot \sin(30^\circ) = n_{ar} \cdot \sin(\theta) \rightarrow \sqrt{2} \cdot 0,5 = 1 \cdot \sin(\theta) \rightarrow \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = 45^\circ.$$

b) Determinação do ângulo limite.

$$n \cdot \sin(30^\circ) = n_{ar} \cdot \sin(\theta) \rightarrow n \cdot 0,5 = 1 \cdot \sin(\theta) \rightarrow \sin(\theta) = \frac{n}{2}.$$

Para não haver raio emergente a equação acima não pode ter solução. Portanto:

$$\sin(\theta) = \frac{n}{2} > 1 \rightarrow n > 2.$$

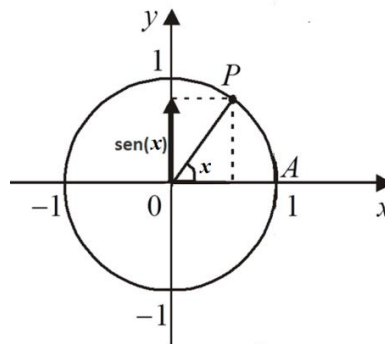
Obs.: Nas estradas, são usados pequenos prismas como o desse exercício na sinalização noturna. A luz retorna para o condutor do veículo, indicando as curvas ou até mesmo numa estrada reta. Em geral, colocados no meio ou nas laterais das pistas.

2 - AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

2.1. A função seno.

Chamamos de função seno a função $f(x) = \text{sen}(x)$. O domínio dela é o conjunto dos números reais R e a imagem é $\text{Im}(f) = [-1,1]$, visto que, no ciclo trigonométrico o raio é unitário por construção e, pela definição do seno, tem-se que $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, ou seja, $D[\text{sen}(x)] = R$ e $\text{Im}[\text{sen}(x)] = [-1,1]$. Observando a Figura 2.1 a seguir percebe-se que o seno oscila de -1 a $+1$ e que o ângulo x pode variar de menos infinito a mais infinito, tomando como origem o ponto A e considerando o sentido anti-horário como o positivo.

Figura 2.1 - A função $\text{sen}(x)$ representada no ciclo.



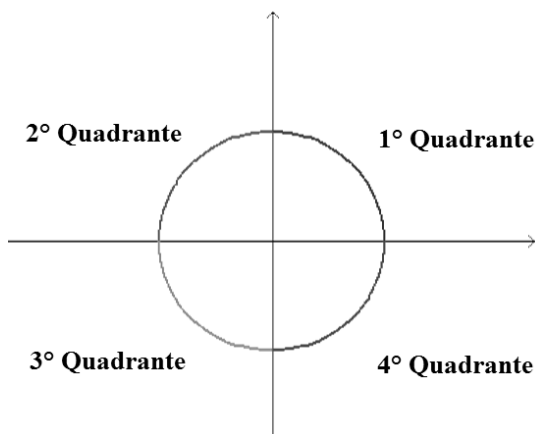
Fonte: Elaborada pelo autor.

Como $\text{sen}(x)$ é a ordenada do ponto-extremidade do arco:

$f(x) = \text{sen}(x)$ é positiva no 1º e no 2º quadrantes (ordenada positiva).

$f(x) = \text{sen}(x)$ é negativa no 3º e no 4º quadrantes (ordenada negativa).

Figura 2.2 - Os quadrantes do ciclo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 1º quadrante, o valor de $\text{sen}(x)$ cresce de 0 a 1.

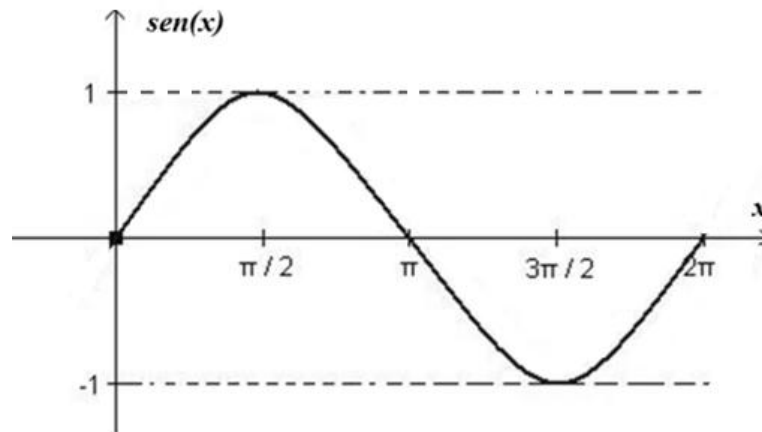
Quando $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 2º quadrante, o valor de $\text{sen}(x)$ decresce de 1 a 0.

Quando $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, 3º quadrante, o valor de $\text{sen}(x)$ decresce de 0 a -1.

Quando $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, 4º quadrante, o valor de $\text{sen}(x)$ cresce de -1 a 0.

Sendo assim, no intervalo $[0, 2\pi]$, o gráfico da função seno tem o seguinte formato:

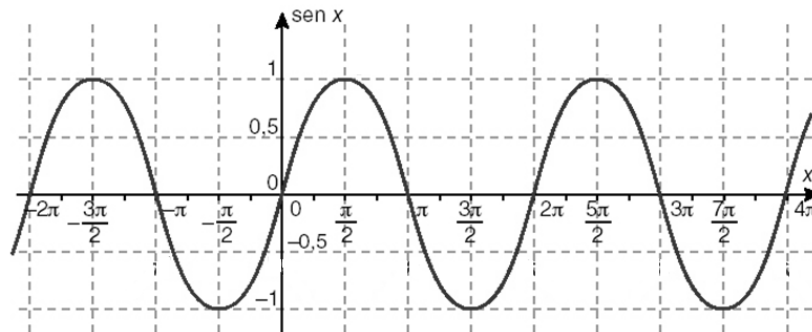
Figura 2.3 - Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}(x)$. Ela oscila periodicamente, tanto para valores positivos como para valores negativos de x .

Figura 2.4 - Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ para valores reais de x .



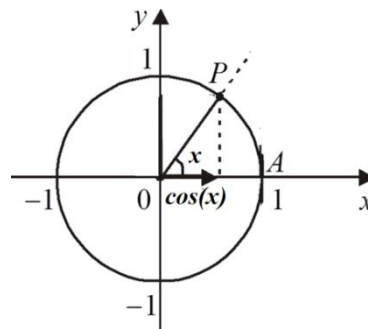
Fonte: Elaborada pelo autor.

É uma função periódica de período $T = 2\pi$.

2.2 A função cosseno.

Chamamos de função cosseno a função $f(x) = \cos(x)$. O domínio dela é o conjunto dos números reais R e a imagem é $Im(f) = [-1,1]$, visto que, na circunferência trigonométrica o raio é unitário e, pela definição do cosseno, tem-se que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, ou seja, $D[\cos(x)] = R$ e $Im[\cos(x)] = [-1,1]$.

Figura 2.5 - A função $\cos(x)$ representada no ciclo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como $\cos(x)$ é a abscissa do ponto-extremidade do arco:

$f(x) = \cos(x)$ é positiva no 1º e no 4º quadrantes (abscissa positiva).

$f(x) = \cos(x)$ é negativa no 2º e no 3º quadrantes (abscissa negativa).

Quando $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 1º quadrante, o valor de $\cos(x)$ decresce de 1 a 0.

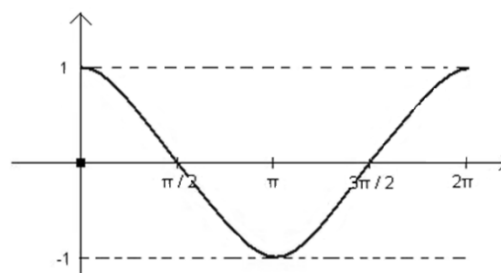
Quando $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, 2º quadrante, o valor de $\cos(x)$ decresce de 0 a -1.

Quando $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, 3º quadrante, o valor de $\cos(x)$ cresce de -1 a 0.

Quando $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, 4º quadrante, o valor de $\cos(x)$ cresce de 0 a 1.

Sendo assim, no intervalo $[0, 2\pi]$, o gráfico da função cosseno tem o seguinte formato:

Figura 2.6 - Gráfico da função $f(x) = \cos(x)$.

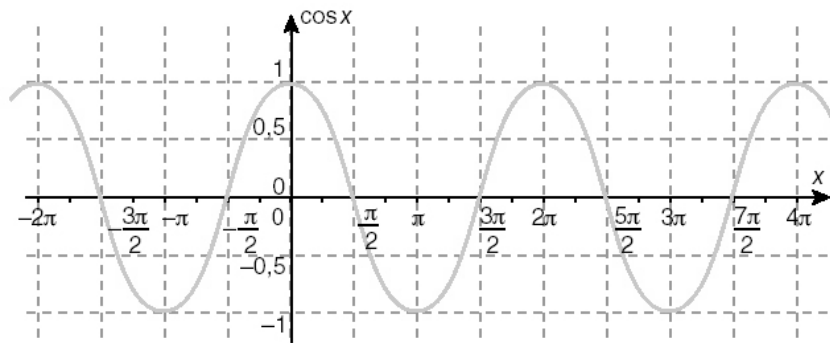


Fonte: Elaborada pelo autor.

Para $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x)$. Ela oscila periodicamente, tanto para valores positivos como para valores negativos de x .

É uma função periódica de período $T = 2\pi$.

Figura 2.7 - Gráfico da função $f(x) = \sin(x)$ para valores reais de x .

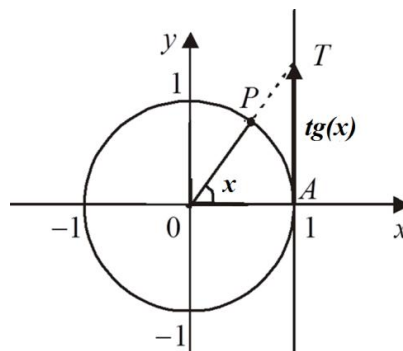


Fonte: Elaborada pelo autor.

2.3 A função tangente.

A tangente de um ângulo x , (tgx) é obtida prolongando o segmento OP até interceptar no ponto T da reta tangente ao ciclo no ponto A. A tangente é o tamanho do segmento AT, agregando o sentido (o sinal), conforme a Figura 2.8. Note que ela não existe para determinados ângulos que formam com o segmento OP paralelo à reta tangente.

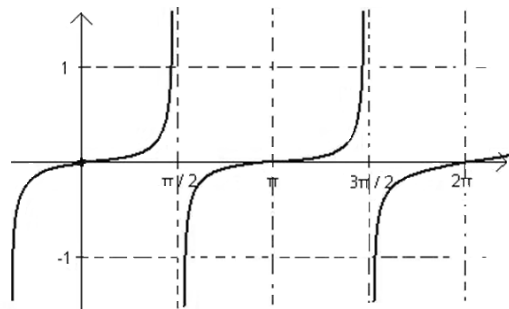
Figura 2.8 - A função $tg(x)$ representada no ciclo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Define-se função tangente a função $f(x) = tg(x)$. O domínio dela é o conjunto dos números reais R , exceto os arcos que zeram o cosseno, levando em conta que $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$. Portanto, $D[tg(x)] = R - \left\{x \in R/x = \frac{\pi}{2} + K\pi, K \in Z\right\}$, pois o cosseno é nulo para os valores de $x = \frac{\pi}{2} + K\pi, K \in Z$. A imagem é $Im[tg(x)] = R =]-\infty, +\infty[$, visto que a função tangente assume todos os valores reais.

Figura 2.9 – Gráfico da função $f(x) = tg(x)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ela é nula onde o seno é nulo e não existe onde o cosseno é nulo e é uma função periódica de período $T = \pi$.

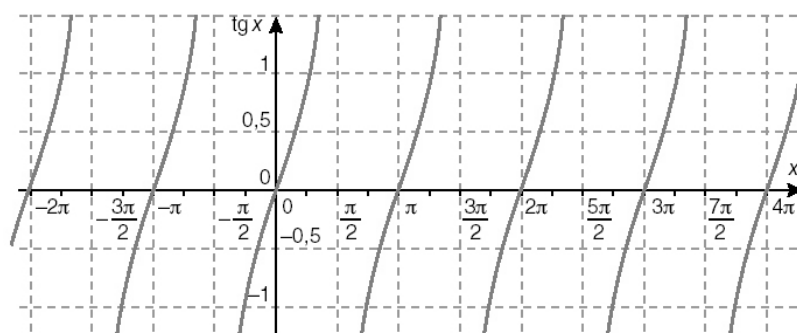
Como a $tg(x)$ é a ordenada do ponto T, interseção da reta que passa pelo centro de uma circunferência trigonométrica e o ponto-extremidade do arco, com o eixo das tangentes então:

$f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ é positiva no 1º e no 3º quadrantes (quociente da ordenada positiva pela abscissa positiva ou da ordenada negativa pela abscissa negativa).

$f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ é negativa no 2º e no 4º quadrantes (quociente da ordenada positiva pela abscissa negativa ou da ordenada negativa pela abscissa positiva).

É uma função periódica de período $T = \pi$.

Figura 2.10 – Gráfico da função $f(x) = tg(x)$ para valores reais de x .



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4 Influência das constantes nas funções trigonométricas.

A função $f(x) = a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d$ tem o mesmo formato da função $f(x) = \text{sen}(x)$. Porém, cada uma das constantes a, b, c, d produz algum tipo de alteração específica na função original $\text{sen}(x)$.

Como $-1 \leq \text{sen}(b \cdot x + c) \leq 1$, então $-a \leq a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) \leq a$. Logo, a modifica a amplitude da função, alongando ou encolhendo o gráfico da função ao longo do eixo y . Alias, a é denominada a amplitude da função. Somando d , vem $-a + d \leq a \cdot \text{sen}(b \cdot x + c) + d \leq a + d$. Note que d apenas traslada a imagem da função ao longo do eixo das ordenadas. Já o c , por motivo parecido, traslada a função na horizontal. Agora, o b modifica o período da função, alongando ou encolhendo o gráfico ao longo do eixo x . Dependendo de b , a função se repete mais rapidamente ou não. No caso, a função passa a se repetir quando $b \cdot T = 2\pi$, logo, período da função é dado por $T = \frac{2\pi}{b}$.

Essa análise pode ser estendida para a função $f(x) = a \cdot \text{cos}(b \cdot x + c) + d$ na íntegra. Para a função $f(x) = a \cdot \text{tg}(b \cdot x + c) + d$, o período é dado por $T = \frac{\pi}{b}$.

2.5 A Física e as funções trigonométricas.

Após essa explanação teórica acerca das funções trigonométricas básicas, vamos a um elenco de aplicações desse conteúdo na Física. São muitos os fenômenos físicos que podem ser tratados matematicamente por uma ou várias funções trigonométricas. O jornal Folha de São Paulo popularizou um exemplo desses quando publicou um artigo com o título Trigonometria de olho na sua pressão. Veja a seguir parte dessa reportagem.

Trigonometria de olho na sua pressão¹⁶

(JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO)

Folha de S.Paulo-09/10/2007- Fovest pág.06

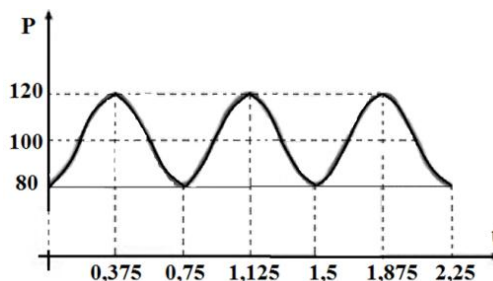
A palavra Trigonometria vem do grego e significa medida (metria) em triângulos (trigon). De fato, a Trigonometria se ocupa dos métodos de resolução de triângulos, contudo, seu campo de estudo também abrange a investigação e uso das funções trigonométricas. Veremos a seguir uma aplicação desse nobre uso da Trigonometria. Muitos fenômenos físicos e sociais de comportamento cíclico podem ser modelados com auxílio de funções trigonométricas, daí a enorme aplicação do estudo desse conteúdo em campos da ciência como acústica, astronomia, economia, engenharia, medicina etc.

Um exemplo de relação que pode ser modelada por uma função trigonométrica é a variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos de um certo indivíduo em função do instante de coleta dessa medida. O gráfico da figura 2.11 representa uma

¹⁶ Veja a matéria completa em assinantes da folha em:
<http://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo0910200706.htm>

investigação desse tipo onde se analisa a situação clínica de um paciente, sendo P a pressão nas paredes dos vasos sanguíneos (em milímetros de mercúrio: mmHg) e t o tempo (em segundos).

Figura 2.11 – Pressão sanguínea em função do tempo.



Fonte: folha de São Paulo.

2.6. O ENEM e as funções trigonométricas.

A prova de Matemática do ENEM vem prestigiando as funções trigonométricas. Eis alguns exemplos colhidos ao longo dos anos.

1. (Enem PPL 2014) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot \text{sen}[b(x + c)]$, em que os parâmetros a, b, c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda.

O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são)

- a) a.
- b) b.
- c) c.
- d) a e b.
- e) b e c.

Gabarito: b

Resolução comentada

Reescrevendo a equação da onda, temos $y = a \cdot \text{sen}(bx + bc)$. Logo, o período da onda é dado por $\frac{2\pi}{b}$, dependendo, portanto, apenas do parâmetro b .

2. ENEM – 2010 - Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot \cos(0,06t)}.$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r , no *apogeu* e no *perigeu*, representada por S .

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

- a) 12 765 km.
- b) 12 000 km.
- c) 11 730 km.
- d) 10 965 km.
- e) 5 865 km.

Gabarito b.

Resolução comentada

Maior valor: $\cos(0,06t) = -1 \rightarrow r(t) = \frac{5865}{1+0.15(-1)} = 6900.$

Menor valor: $\cos(0,06t) = +1 \rightarrow r(t) = \frac{5865}{1+0.15(+1)} = 5100.$

Somando, temos: $6900 + 5100 = 12000.$

3. ENEM – 2015 - Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

- a) janeiro.
- b) abril.
- c) junho.
- d) julho.
- e) outubro.

Gabarito: d.

Resolução comentada

A produção é máxima quando preço é mínimo, ou seja, quando $\cos\left(\frac{\pi \cdot x - \pi}{6}\right) = -1$. O menor valor positivo de x para o qual se tem o preço mínimo é tal que

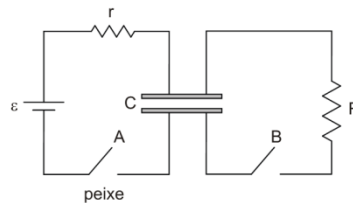
$$\frac{\pi \cdot x - \pi}{6} = \pi + 2k\pi \rightarrow \frac{x-1}{6} = 1 + 2k \rightarrow x = 12k + 7, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, para $k = 0$, segue que $x = 7$ e o mês de produção máxima desse produto é julho. Qualquer outro valor de k conduz a um absurdo.

2.7. As funções trigonométricas nos vestibulares de Física.

01. UnB

Figura 2.12 - Circuito elétrico.



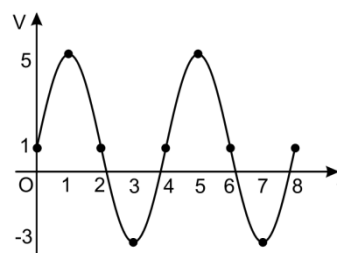
Fonte: CESPE.

O circuito elétrico ilustrado na Figura 2.12 permite modelar a descarga elétrica produzida por um peixe elétrico. Esse circuito é formado por uma *fem* ε , um capacitor de capacitância C e uma resistência interna r . A parte externa é representada pelo capacitor ligado a um resistor de resistência R , o qual representa um objeto que eventualmente sofre uma descarga do peixe elétrico. Quando a chave A é fechada, o capacitor carrega-se, se estiver descarregado. Nesse caso, a carga q armazenada no capacitor em função do tempo é dada por

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{rc}}).$$

O capacitor, quando está completamente carregado, com a chave A aberta e a chave B fechada, descarrega-se. Nesse caso, a carga q armazenada no capacitor, em função do tempo, é expressa por: $q(t) = C\varepsilon e^{-\frac{t}{rc}}$.

Figura 2.13 - Força eletromotriz em função do tempo.



Fonte: CESPE.

Considere que a *fem* do circuito em questão seja dada pela função $V = V(t) = \alpha \cdot \text{sen}(\beta t) + \gamma$, $0 \leq t \leq 8$, cujo gráfico é ilustrado na Figura 2.13. Nesse caso, o valor de $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ é igual a

- a) $\pi/2$.
- b) π .
- c) $3\pi/2$.
- d) π .

Gabarito: d

Resolução comentada

$V = V(t) = \alpha \cdot \text{sen}(\beta t) + \gamma \rightarrow V(0) = \alpha \cdot \text{sen}(\beta \cdot 0) + \gamma \rightarrow 1 = \gamma \rightarrow$
 $V(2) = \alpha \cdot \text{sen}(\beta \cdot 2) + 1 = 1 \rightarrow \alpha \cdot \text{sen}(2\beta) = 0 \rightarrow \text{sen}(2\beta) = 0 \rightarrow 2\beta = \pi \rightarrow$
 $\beta = \pi/2$, que é o período da função.
 $V(1) = \alpha \cdot \text{sen}(\pi/2) + 1 = 5 \rightarrow \alpha \cdot 1 = 4 \rightarrow \alpha = 4.$
 Portanto, a resposta é $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 4 \cdot (\pi/2) \cdot 1 = 2\pi$.

02. UnB - Volume de ar em um ciclo respiratório

O volume total de ar, em litros, contido nos dois pulmões de um adulto em condições físicas normais e em repouso pode ser descrito como função do tempo t , em segundos, por

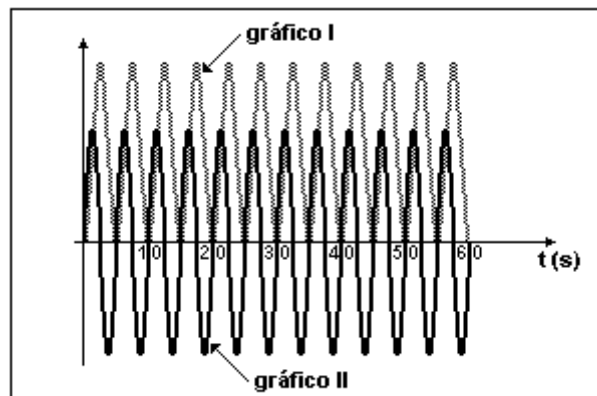
$$V(t) = \frac{3}{2\pi} \cdot [1 - \cos(0,4 \cdot \pi t)].$$

O fluxo de ar nos pulmões, em litros por segundo, é dado por

$$v(t) = 0,6 \cdot \text{sen}(0,4 \cdot \pi t).$$

Os gráficos dessas funções estão representados na Figura 2.14.

Figura 2.14 - Fluxo de ar nos pulmões em função do tempo.



Fonte: CESPE.

Com base nas informações do texto, julgue os itens a seguir, com respeito ao fluxo de ar nos pulmões.

- a () O gráfico I representa $v(t)$ e o gráfico II, $V(t)$.
 b () O volume máximo de ar nos dois pulmões é menor que um litro.

- c () O período de um ciclo respiratório completo (*inspiração e expiração*) é de 5 segundos.
- d () A frequência de $V(t)$ é o dobro da frequência de $v(t)$.
- e () Para $t = 0,8333 \dots$ segundos, o volume de ar contido nos dois pulmões é superior a 250 mL.
- f () O fluxo de ar nos pulmões é igual a zero quando o volume é máximo ou mínimo.
- g () Os valores de t (*em segundos*), para os quais o fluxo de ar nos pulmões é igual a 0,3 L/s, são dados pelos termos da sequência (a_k) em que $a_k = (-1)^k \cdot \frac{5}{12} + \frac{5k}{2}, k \in \mathbb{N}$.

Gabarito: F, V, V, F, V, V, V

Resolução comentada

a) F, pois $V(t) \geq 0$, para todo valor de t .

b) V, o volume máximo ocorre para $\cos(0,4 \cdot \pi t) = -1$, logo

$$V(t)_{\text{máximo}} = \frac{3}{2\pi} \cdot (1 - (-1)) = \frac{3}{\pi} < 1.$$

c) V, o período é o mesmo para as duas funções e vale $T = \frac{2\pi}{0,4\pi} = 5,0 \text{ s}$.

d) F, a frequência é a mesma para $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ Hz}$.

e) $t = 0,8333 \dots \text{ s} = 25/3 \text{ s}$, $v(t) = 0,6 \cdot \sin(0,4 \cdot \pi t)$.

$$V(t) = \frac{3}{2\pi} \cdot (1 - \cos(0,4 \cdot \pi t)) \rightarrow V(25/3) = \frac{3}{2\pi} \cdot \left(1 - \cos\left(0,4 \cdot \pi \cdot \frac{25}{3}\right)\right) \rightarrow$$

$$V(25/3) = \frac{3}{2\pi} \cdot \left(1 - \cos\left(\pi \frac{10}{3}\right)\right) \rightarrow V(25/3) = \frac{3}{2\pi} \cdot \left(1 - \cos\left(\pi \frac{4}{3}\right)\right) \rightarrow$$

$$V(25/3) = \frac{3}{2\pi} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow V(25/3) = \frac{9}{4\pi} \cong 0,72 \text{ L} = 720 \text{ mL} > 250 \text{ mL}.$$

f) V, pois na função $V(t) = \frac{3}{2\pi} \cdot (1 - \cos(0,4 \cdot \pi t))$, o volume máximo ocorre para $\cos(0,4 \cdot \pi t) = -1$. Sendo assim, $\sin(0,4 \cdot \pi t) = 0$. Logo, o fluxo de ar nos pulmões, em litros por segundo, que é dado por $v(t) = 0,6 \cdot \sin(0,4 \cdot \pi t) = 0$.

g) V, pois $v(t) = 0,6 \cdot \sin(0,4 \cdot \pi t) = 0,3 \rightarrow \sin(0,4 \cdot \pi t) = 1/2$. Daí, $0,4 \cdot \pi t = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k$. Daí, $0,4 \cdot t = (-1)^k \frac{1}{6} + k \rightarrow t = (-1)^k \frac{1}{2,4} + \frac{1}{0,4} \cdot k \rightarrow t = (-1)^k \frac{5}{12} + \frac{5}{2} \cdot k, k \in \mathbb{N}$.

03. UnB - Em um modelo para descrever o processo respiratório, considera-se que o fluxo de ar F na traqueia, em ambos os sentidos - inspiração e expiração -, e a pressão interpleural P - pressão existente na caixa torácica produzida pelo diafragma e por músculos intercostais - são funções periódicas do tempo t , havendo entre elas uma diferença de fase. Essas funções são

descritas, para $t > 0$, por $F(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t)$ e $P(t) = C - B \cdot F\left(t + \frac{k}{\omega}\right)$, em que k , A , B e C são constantes reais positivas e ω é a frequência respiratória.

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

- (a) O fluxo máximo de ar na traqueia é igual a A .
- (b) $P(t) = C - B \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + k)$.
- (c) As funções P e F têm o mesmo período.
- (d) Sempre que o fluxo de ar na traqueia for nulo, a pressão interpleural será máxima.

Gabarito: VVVV

Resolução comentada

(a) Verdadeiro, pois a função $\text{sen}(\omega t)$ é no máximo 1.

(b) Verdadeiro, pois

$$P(t) = C - B \cdot F\left(t + \frac{k}{\omega}\right) = C - B \cdot A \cdot \text{sen}\left[\omega\left(t + \frac{k}{\omega}\right)\right] = C - B \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + k).$$

(c) Verdadeiro, os períodos são iguais a $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

(d) Falso, pois se fluxo é nulo, $F(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t) = 0$, logo $\text{sen}(\omega t) = 0$. Usando a letra (b), vem $P(t) = C - B \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + k)$. O valor dessa função vai depender de k , que é uma defasagem que não foi dada. Portanto, depende do valor de k . Veja, $P(t) = C - B \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + k) = C - BA[\text{sen}(\omega t) \cdot \cos k + \text{sen} k \cos(\omega t)]$. $P(t) = C - BA \text{sen}(k)$.

04. Vestibular da UnB - Supondo que, em determinada região, a temperatura média semanal T (em $^{\circ}\text{C}$) e a quantidade de energia solar média semanal Q que atinge a região (em kcal/cm^2) possam ser expressas em função do tempo t , em semanas, por meio das funções $T(t) = 10 + 12 \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t-15}{52}\right)\right]$ e $Q(t) = 400 + 200 \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t-11}{52}\right)\right]$, julgue os itens a seguir.

- a () A maior temperatura média semanal é de 22°C .
- b () Na 50.^a semana, a quantidade de energia solar média semanal é mínima.
- c () Quando a quantidade de energia solar média é máxima, a temperatura média semanal também é máxima.

Gabarito: VVF.

Resolução comentada

a) Verdadeiro, pois $T(t) = 10 + 12 \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t-15}{52}\right)\right]$ e $\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t-15}{52}\right)\right]$ é no máximo 1. Logo,

o valor máximo é dado por $T = 10 + 12.1 = 22^\circ\text{C}$.

b) Verdadeiro, pois $Q(50) = 400 + 200.\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{50-11}{52}\right)\right] = 400 + 200.\text{sen}\left[\pi\left(\frac{39}{26}\right)\right] \rightarrow Q(50) = 400 + 200.\text{sen}\left[\frac{3}{2}\pi\right]$. Mas $\text{sen}\left[\frac{3}{2}\pi\right] = -1$, que é o valor que faz a função assumir o valor mínimo.

c) Falso, pois a quanto a quantidade de energia é máxima quando $\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t-11}{52}\right)\right] = 1 \rightarrow 2\pi\left(\frac{t-11}{52}\right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \left(\frac{t-11}{26}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow t - 11 = 13 \rightarrow t = 24 \text{ semanas}$. Agora, substituindo, vem: $T(24) = 10 + 12.\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{24-11}{52}\right)\right] = 10 + 12.\text{sen}\left[\pi\left(\frac{9}{26}\right)\right]$. Este, não é o valor mínimo, pois o valor mínimo ocorre quando o seno é -1 , que não é o caso.

05. Considere um gerador de corrente alternada que aplica nas extremidades de uma resistência (R) de 20Ω uma diferença de potencial (E) do tipo: $E = 220\text{sen}(100\pi t)$, com E em volts e t em segundos.

Sabendo-se que essa corrente alternada i é tal que $I = \frac{E}{R}$ e sendo I ampères o valor máximo dessa corrente, calcule $I + F$, em que F hertz é a frequência dessa corrente.

Resolução comentada

$I = \frac{E^{17}}{R} = \frac{220\text{sen}(100\pi t)}{20} = 10\text{sen}(100\pi t)$. Daí, o valor máximo de I é 10 A (ampères), considerando que o seno máximo é 1 . E a frequência é dada por $f = \frac{1}{\text{período}} = \frac{1}{\frac{2\pi}{100\pi}} = 50 \text{ Hz}$. Então, a resposta é dada por: $10 + 50 = 60$.

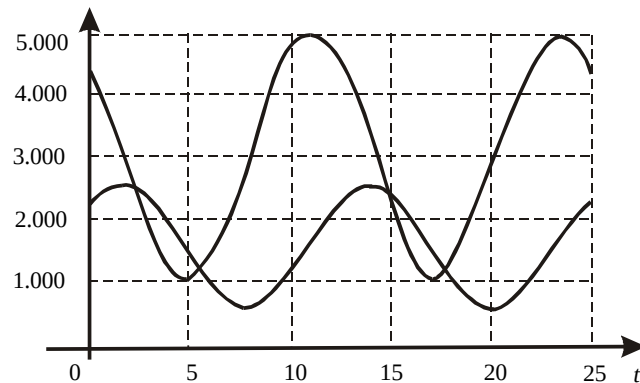
06. (PAS-UnB) Um exemplo da relação ecológica conhecida como predador-presa é a população de garças que se alimenta de peixes. Espera-se que um aumento na população de garças provoque uma diminuição da população de peixes, enquanto que um aumento no número de peixes acarrete um aumento no número de garças. Essa relação ecológica é objeto de vários estudos matemáticos, e as populações de presa e de predador podem ser descritas pelas funções seno e cosseno. Suponha que as populações de garças $G(t)$ e de peixes $P(t)$, no

¹⁷ A primeira lei de Ohm da eletrodinâmica diz que a corrente elétrica que percorre um condutor é o quociente entre a tensão elétrica e resistência elétrica do condutor: $i = \frac{\text{tensão}}{\text{resistência}}$.

tempo t medido em anos, sejam dadas por $G(t) = 1000\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 1500$ e $P(t) = -2000\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 30500$.

As curvas do gráfico a seguir, Figura 2.15, ilustram a dinâmica das populações de garças e de peixes ao longo do tempo, durante aproximadamente 25 anos.

Figura 2.15 - População de peixes em função do tempo.



Fonte: CESPE.

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

- 1.() A população de peixes diminui durante o primeiro ano.
- 2.() Quando a população de peixes é máxima, a de garças também é máxima.
- 3.() Transcorridos 4π anos, as duas populações são iguais às respectivas populações iniciais.
- 4.() Entre os tempos $\frac{5\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$, ambas as populações estão crescendo.

Gabarito: CECE

Resolução comentada

Item 1. A curva da população de peixes é a de maior amplitude. E ela decresce no início, nos 5 primeiros anos, tornando o item correto.

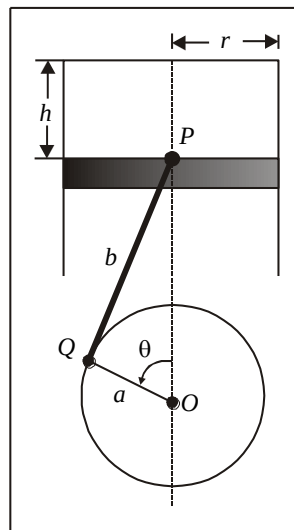
Item 2. Errado, pois os máximos não são coincidentes, conforme os gráficos.

Item 3. As funções são periódicas e os períodos são iguais a $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$. O que torna o item correto.

Item 4. Se o período é 4π , e esses valores são próximos, percebe-se no gráfico que em 4π a curva $P(t)$ é decrescente. Item errado.

07. UnB - A Figura 2.16 ilustra o mecanismo de um pistão que desliza dentro de um cilindro. O ponto P do pistão está ligado ao ponto Q de uma roda metálica, com raio a e centro O , por meio de uma haste de comprimento b . A roda gira no sentido anti-horário, em torno de seu centro.

Figura 2.16 - Mecanismo de um pistão.



Fonte: CESPE.

Considere r o raio do cilindro, h o deslocamento do pistão em relação à tampa superior do cilindro e θ o ângulo que o segmento $\overline{OQ}$ faz com a vertical $\overline{OP}$, medido no sentido anti-horário.

Supondo que $h = 0$, quando $\theta = 0$, julgue os itens que se seguem.

1. Quando $h = 0$, o comprimento do segmento $\overline{OP}$ é igual a $2a + b$.
2. O valor máximo de h depende somente do raio a da circunferência.
3. O volume máximo dentro do cilindro limitado pelo pistão é igual a $\pi r^2(b - 2a)$.
4. O valor do deslocamento h , em função do ângulo θ , é dado pela expressão $h(\theta) = a + b - (a \cos \theta + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta})$.

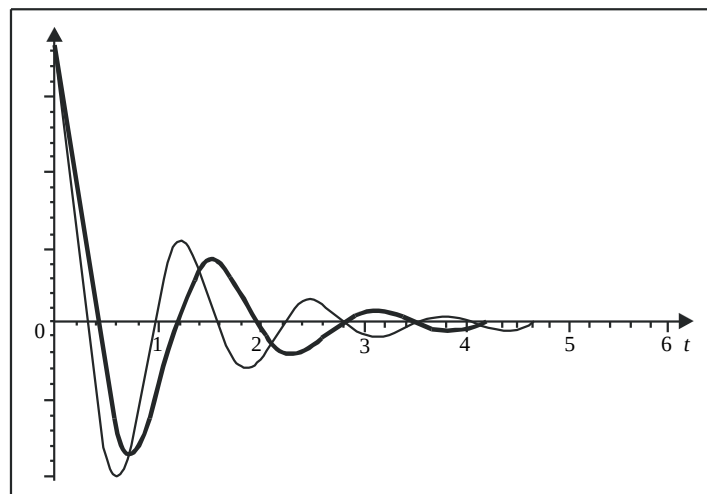
Gabarito: ECEC

08. (PAS-UnB) Uma porta de vaivém, de um típico saloon de filmes de faroeste americano, é composta das partes esquerda (E) e direita (D). A partir do ponto de abertura máxima, os ângulos orientados, em radianos, que essas partes da porta fazem com a posição de repouso são dados pelas funções seguintes.

$$E(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-t} \cos(4t) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{11\pi}{8}, \\ 0 & \text{para } t > \frac{11\pi}{8}, \end{cases}$$

$$D(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-t} \cos(5t) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 0 & \text{para } t > \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Figura 2.17 – As funções citadas no texto representadas no gráfico.



Fonte: CESPE.

Em que t representa o tempo, em segundos. Os gráficos dessas funções estão representados na Figura 2.17.

Com base nessas informações, julgue os itens abaixo.

1. A parte D para de oscilar antes que a parte E .
2. Antes de parar, a porta E passa pela posição de repouso mais vezes que a parte D .
3. Antes de pararem completamente, as partes D e E estarão por 7 vezes, incluindo o instante inicial, igualmente afastadas da posição de repouso e do mesmo lado do salão, ou seja, de fora ou de dentro.

Gabarito: EEC

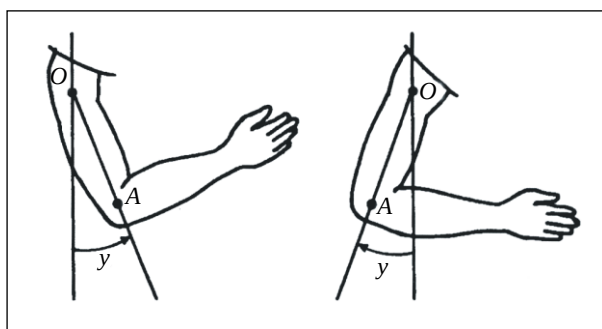
Resolução comentada

1. Como $\frac{3\pi}{2} = \frac{12\pi}{8} > \frac{11\pi}{8}$, então D para depois de E . Item errado.
2. Se a D para depois de E , percebe-se do gráfico que ele passa mais vezes na posição equilíbrio (7 vezes) antes de parar, pois a E para apenas 5 vezes. Item errado.
3. Verdade, pois observa-se do gráfico que eles se encontram 7 vezes.

09. O ritmo oscilatório dos braços.

Um praticante do método de corridas, popularmente conhecido como método de Cooper, balança cada um de seus braços ritmicamente, enquanto corre, segundo a equação $y = f(t) = \frac{\pi}{9} \sin \left[\frac{8\pi}{3} \left(t - \frac{3}{4} \right) \right]$, em que y é o ângulo em radianos compreendido entre a posição do braço e o eixo vertical e t é o tempo medido em segundos.

Figura 2.18 – Duas posições do braço de um corredor em seu movimento cíclico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O braço oscila para frente e para trás em torno do ponto O . Sua posição é estimada pelo ângulo y , medido em radianos, compreendido entre o braço propriamente dito e o eixo vertical.

Com base no texto e nos seus conhecimentos em trigonometria, julgue os itens que se seguem.

1. Para $t = 0,875$ s, o ângulo y é inferior a 17° .
2. O período é igual a $1,333\dots$ s.
3. O valor máximo de y corresponde a 20° .
4. O gráfico cartesiano de $y = f(t)$ contém a origem $(0, 0)$.

Gabarito: EECC

Resolução comentada

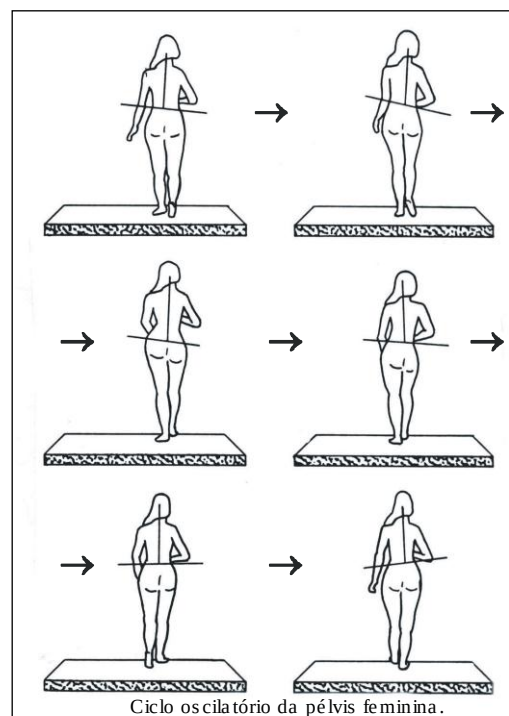
1. $y = f(0,875) = \frac{\pi}{9} \sin \left[\frac{8\pi}{3} \left(0,875 - \frac{3}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{9} \sin \left[\frac{8\pi}{3} \left(\frac{3,5}{4} - \frac{3}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{9} \sin \left[\frac{8\pi}{3} \left(\frac{0,5}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{180^\circ}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,32^\circ$. Item errado.
2. O período é igual a $T = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75$ s. Que é o valor inverso do fornecido no enunciado, item errado.
3. O valor máximo de y corresponde a $\frac{\pi}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$. Item correto.
4. $y = f(0) = \frac{\pi}{9} \sin \left[\frac{8\pi}{3} \left(0 - \frac{3}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{9} \sin 2\pi = 0$. Item correto.

10. O balanço pélvico do andar feminino

É por todos nós conhecido o balançar rítmico da pélvis feminina, bem distinto do andar “rígido” masculino. Isso acontece, basicamente, devido a certas diferenças anatômicas entre os dois sexos. A rotação pélvica do andar feminino é exagerada quando comparada ao marchar masculino, em passos de igual amplitude. Pode-se avaliar tal movimento oscilatório supondo uma haste (*na verdade uma linha imaginária*) passando pelas duas cristas ilíacas, perpendicular a uma outra linha, representada pela coluna vertebral.

Quando a mulher se desloca, a haste oscila em torno de seu centro para cima e para baixo, acompanhando o ritmo da pélvis.

Figura 2.19 – Ciclo oscilatório da pélvis feminina.



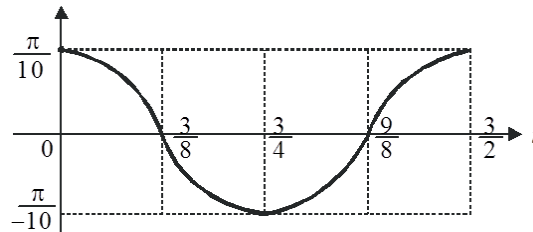
Fonte: Elaborada pelo autor.

Suponha que o ângulo θ , formado pela haste e o eixo vertical, seja dado por $\theta(t) = \frac{\pi}{10} \cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) t$, em que t é dado em segundos e θ em radianos.

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

1. Transcorridos 3 s, a haste estará na mesma posição que a inicial.
2. Para t compreendido entre 0 e $\frac{3}{2}$ s, o gráfico de θ versus t é dado por:

Figura 2.20 - Variação do ângulo em função do tempo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3. O primeiro valor de t , $t > 0$, para o qual $\theta = 9^\circ$ é $t = 1,0$ s.
4. Seja φ a função definida por $\varphi(t) = \frac{200}{\pi^2} [\theta(t)]^2 - 1$. O gráfico da função φ se repete de 0,75 em 0,75 segundos.

Gabarito: CCEC

Resolução comentada

1. Correto. A função $\theta(t) = \frac{\pi}{10} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)t$ tem período $T = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{2}$ s. Portanto, transcorridos 3 s, a haste estará na mesma posição que a inicial, pois são $2T$ completos nesse intervalo de tempo.
2. Correto. A função tem período $\frac{3}{2}$ s, tempo suficiente para uma oscilação, amplitude $\frac{\pi}{10}$ e formato de cosseno.
3. Errado. $\theta(1) = \frac{\pi}{10} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \cdot 1 = \frac{\pi}{10} \cdot \cos(240^\circ) = \frac{\pi}{10}(-1) = -9^\circ$. Note que não é 9° , mesmo assim, está ocorrendo pela segunda vez.
4. Correto. $\varphi(t) = \frac{200}{\pi^2} [\theta(t)]^2 - 1 = \frac{200}{\pi^2} \left[\frac{\pi}{10} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)t \right]^2 - 1$. O período dessa função é $T = \frac{\pi}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75$ s. Portanto, o gráfico da função φ se repete de 0,75 em 0,75 segundos.

11. A energia elétrica é disponibilizada em nossas residências na forma de tensão alternada. Isso significa que entre os dois conectores de uma tomada há uma diferença de potencial elétrico que varia com o tempo conforme uma função do tipo $U = (200\sqrt{2}).\text{sen}(2.\pi.60.t)$, onde U é a diferença de potencial e t é o tempo. A constante $(200\sqrt{2})$ é válida para Estados em que o fornecimento de energia elétrica monofásica é de 200V nominal, como na maioria das residências do Ceará. É correto afirmar que essa diferença de potencial tem um valor máximo e uma frequência, respectivamente, de

- a) $200\sqrt{2}$ volts e 60 Hz.
- b) $200\sqrt{2}$ volts e 60 kHz.
- c) 200 volts e 60 Hz.
- d) 200 volts e 60 kHz.

Gabarito: a

Resolução comentada

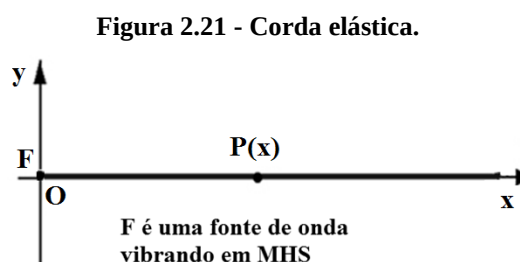
Para uma tensão alternada senoidal, tem-se a seguinte equação que descreve o seu comportamento em função do tempo: $v(t) = V_p.\text{sen}(2.\pi.f + \theta_0)$, onde $V_p = \text{valor de pico}$, $f = \text{frequência}$, $\theta_0 = \text{fase inicial}$.

Comparando com a equação dada na questão, pode-se concluir que: $V_p = 200.\sqrt{2}$ volts; $f = 60$ hertz e $\theta_0 = 0^\circ$.

Logo, a alternativa correta é a [A].

2.8 Função da onda periódica unidimensional.

Considere uma corda elástica esticada ao longo do eixo Ox , como na Figura 2.21 a seguir.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O ponto **F** da corda é a fonte emissora de ondas periódicas transversais; o ponto **O** é a origem de um sistema cartesiano xOy e **N** é um ponto da corda de abscissa x , escolhido aleatoriamente.

Agora, vamos supor que a fonte **F** passe a executar, em $t = 0$, um MHS de amplitude A e fase inicial φ_0 , de modo que a ordenada y de **F** variará como o tempo, seguindo a equação:

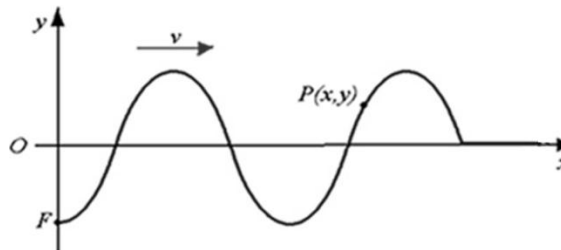
$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Vamos admitir que não há perda de energia na propagação da onda. Dessa forma, passado um intervalo de tempo Δt , o ponto **P** da corda, de abscissa x , passará a executar um MHS de amplitude A , porém, atrasado Δt em relação a **F**. É o movimento de **P** que vamos estudar.

Sendo assim, considerando v a velocidade da onda, vem:

$$v = \frac{x(\text{abscissa de } P)}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{x(\text{abscissa de } P)}{v}.$$

Figura 2.22 - Corda oscilando em MHS.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O atraso Δt faz o ponto $P(x, y)$ vibrar como ordenada $y(x, t)$ variando, portanto, em função da abscissa e do tempo, da seguinte forma: $y = A \cdot \cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi_0]$. Substituindo $\Delta t = \frac{x}{v}$, vem:

$$y = A \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] \rightarrow y = A \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] \rightarrow$$

$$y = A \cdot \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT} \right) + \varphi_0 \right] \rightarrow y = A \cdot \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right].$$

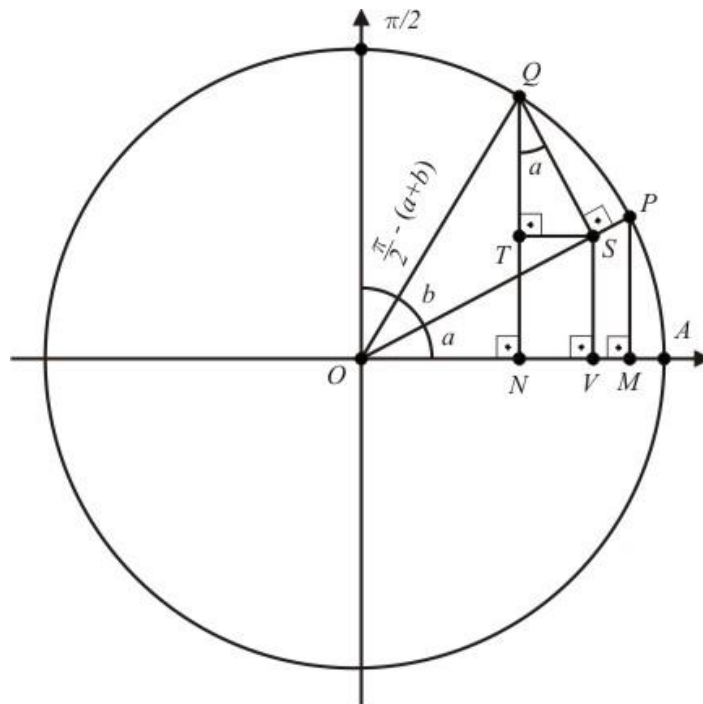
Portanto, a equação da onda é uma função trigonométrica de duas variáveis $y = f(x, t)$.

3 - SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS

3.1 Soma e diferença de arcos

Observe a Figura 3.1, lembrando que o ciclo trigonométrico, por construção e conveniência, possui raio 1 (uma unidade).

Figura 3.1 - Ciclo trigonométrico mostrando os ângulos a e b .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sejam o arco $\widehat{AP}$ com determinação a e o arco $\widehat{PQ}$ com determinação b . O arco $\widehat{AQ}$ tem determinação $(a + b)$.

Observando as construções geométricas no círculo trigonométrico acima, podemos deduzir que os triângulos OMP , OVS e QTS são triângulos retângulos e semelhantes. Então, podem ser construídas as seguintes relações: (1) $\overline{OM} = \cos(a)$; (2) $\overline{OS} = \cos(b)$; (3) $\overline{MP} = \sin(a)$; (4) $\overline{SQ} = \sin(b)$; (5) $\overline{ON} = \cos(a + b)$; (6) $\overline{NQ} = \sin(a + b)$; (7) $\overline{OP} = 1$.

Os triângulos OVS e OMP são semelhantes, logo: $\frac{\overline{OV}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}}$.

Substituindo as relações (1), (2), (7) na igualdade acima, obtemos: $\frac{\overline{OV}}{\cos(a)} = \frac{\cos(b)}{1} \rightarrow$

(8) $\overline{OV} = \cos(a) \cdot \cos(b)$. Os triângulos QTS e OMP são semelhantes, logo: $\frac{\overline{TS}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{OP}}$.

Substituindo as relações (3), (4) e (7) na igualdade acima, obtemos: $\frac{\overline{TS}}{\overline{sen(a)}} = \frac{\overline{sen(b)}}{1} \rightarrow$
 (9) $\overline{TS} = \overline{sen(a)} \cdot \overline{sen(b)}$.

Observando o círculo trigonométrico da figura, notamos que: $\overline{ON} = \overline{OV} - \overline{NV}$.
 Podemos concluir também que: $\overline{NV} = \overline{TS}$.

Se substituirmos as relações (5) e (8) na igualdade acima, obteremos:

$$(10) \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \overline{sen(a)} \overline{sen(b)}.$$

Se quisermos determinar $\cos(a - b)$, podemos escrever a relação acima como:

$$\cos(a + (-b)) = \cos(a) \cos(-b) - \overline{sen(a)} \overline{sen(-b)}.$$

Mas, se observarmos o círculo trigonométrico da figura, deduzimos que:

$$\cos(-b) = \cos b \text{ e } \overline{sen(-b)} = -\overline{sen(b)}.$$

$$\text{Então: } (11) \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \overline{sen(a)} \overline{sen(b)}.$$

Sabemos que: (12) $\cos(\theta) = \overline{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. Se fizermos $\theta = (a + b)$, teremos:

$$\overline{sen}(a + b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] \text{ e } \overline{sen}(a + b) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right].$$

Temos aqui um cosseno da diferença entre dois arcos e é dado pela relação (11), logo:

$$(13) \overline{sen}(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos(b) + \overline{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \overline{sen}(b).$$

Mas, observando a relação (12), vemos algumas similaridades coma relação (13) e podemos escrevê-la assim: (14) $\overline{sen}(a + b) = \overline{sen}(a) \cos(b) + \overline{sen}(b) \cos(a)$.

Se quisermos determinar $\overline{sen}(a - b)$, podemos escrever a relação acima como:

$$\overline{sen}(a + (-b)) = \overline{sen}(a) \cos(-b) + \overline{sen}(-b) \cos(a).$$

$$\text{No entanto: } \cos(-b) = \cos b \text{ e } \overline{sen}(-b) = -\overline{sen}(b).$$

$$\text{Fazemos: } (15) \overline{sen}(a - b) = \overline{sen}(a) \cos(b) - \overline{sen}(b) \cos(a).$$

Sabemos que a tangente de um ângulo é dada pela divisão entre o seno e o cosseno deste ângulo:

$$tg(\theta) = \frac{\overline{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}. \text{ Então, a tangente de } (a + b) \text{ será dada por:}$$

$$tg(a + b) = \frac{\overline{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} \rightarrow \overline{sen}(a) \cos(b) + \overline{sen}(b) \cos(a) / \cos(a) \cos(b) - \overline{sen}(a) \overline{sen}(b)$$

Manipulando a igualdade acima, vamos dividir o numerador e o denominador do segundo membro por: $\cos(a) \cdot \cos(b) \neq 0$.

$$tg(a + b) = \frac{\frac{\overline{sen}(a) \cos(b) + \overline{sen}(b) \cos(a)}{\cos(a) \cos(b)}}{\frac{\cos(a) \cos(b) - \overline{sen}(a) \overline{sen}(b)}{\cos(a) \cos(b)}} \rightarrow tg(a + b) = \frac{\frac{\overline{sen}(a)}{\cos(a)} + \frac{\overline{sen}(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\overline{sen}(a) \overline{sen}(b)}{\cos(a) \cos(b)}} \rightarrow$$

$$(16) \quad tg(a + b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a)tg(b)}.$$

Sabemos que a tangente de um ângulo é dada pela divisão entre o seno e o cosseno deste ângulo:

$$tg(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.$$
 Então, a tangente de $(a + b)$ será dada por:

$$tg(a - b) = \frac{\text{sen}(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)}.$$
 Manipulando a igualdade acima, vamos dividir o numerador e o denominador do segundo membro por: $\cos(a) \cdot \cos(b) \neq 0$.

$$tg(a - b) = \frac{\frac{\text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\frac{\text{sen}(a)}{\cos(a)} \frac{\cos(b)}{\cos(b)} - \frac{\text{sen}(b)}{\cos(b)} \frac{\cos(a)}{\cos(a)}}{1 + \frac{\text{sen}(a)\text{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}}.$$

$$(17) \quad tg(a - b) = \frac{tg(a) - tg(b)}{1 + tg(a)tg(b)}.$$

Em resumo:

- ✓ $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a);$
- ✓ $\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a)\cos(b) - \text{sen}(b)\cos(a);$
- ✓ $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b);$
- ✓ $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b);$
- ✓ $tg(a + b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a)tg(b)};$
- ✓ $tg(a - b) = \frac{tg(a) - tg(b)}{1 + tg(a)tg(b)}.$

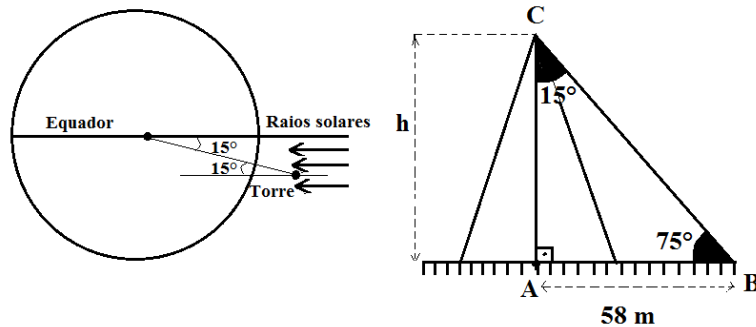
3.2 Exercícios resolvidos e comentados

01. UnB - Eratóstenes foi um grande matemático grego que viveu no século II a.C. e conseguiu calcular a medida da circunferência da Terra, medindo comprimentos das sombras de uma estaca. Um procedimento semelhante pode ser usado para calcular a altura da Torre de Televisão de Brasília, a partir de sua sombra. Suponha que, no dia 23 de setembro, os raios solares, que são considerados paralelos, incidem, ao meio-dia, perpendicularmente sobre a superfície da Terra ao longo da linha do Equador. Nessa data, que marca o equinócio da primavera, a sombra projetada pela Torre, ao meio dia, mede 58 m. Sabe-se que a Torre está situada no paralelo 15 de latitude sul, isto é, a 15° ao sul do Equador. Tomando $\frac{26}{15}$ como valor aproximado para $\sqrt{3}$, calcule, **em decâmetros**, a altura da Torre e desconsidere a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

Resolução comentada

Observe a Figura 3.2.

Figura 3.2 - Planeta em perfil e a torre num corte transversal.



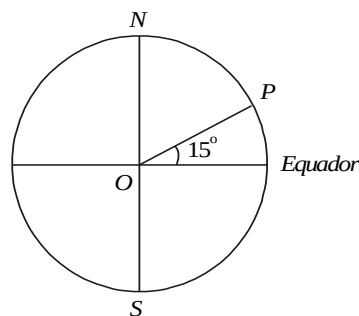
Fonte: Elaborada pelo autor.

No triângulo ABC da figura acima, h representa a altura da Torre. Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(75^\circ) &= \frac{h}{58} \rightarrow \operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{h}{58} \rightarrow \frac{\operatorname{tg}(30^\circ) + \operatorname{tg}(45^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(30^\circ) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ)} = \frac{h}{58} \rightarrow \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} &= \frac{h}{58} \rightarrow \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{h}{58} \rightarrow \frac{\frac{26}{15} + 3}{3 - \frac{26}{15}} = \frac{h}{58} \rightarrow \\ \frac{71}{19} &= \frac{h}{58} \rightarrow h = \frac{58 \cdot 71}{19} \rightarrow h = 216,7 \text{ m.} \end{aligned}$$

02. A latitude de um ponto P da superfície da Terra é o ângulo que a reta $\overrightarrow{OP}$ forma com o plano do Equador (O é o centro da Terra), Figura 3.3. No dia 21 de março, os raios solares são paralelos ao plano do Equador. Se, ao meio-dia do dia 21 de março, a sombra projetada por um edifício localizado sobre um paralelo 15 de latitude norte mede 20 m, calcule, aproximadamente a altura desse edifício.

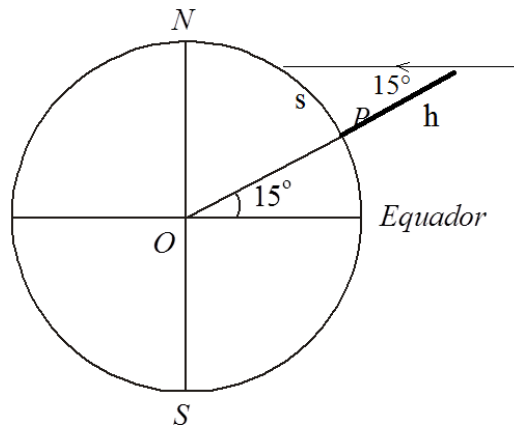
Figura 3.3 – Planeta com os polos e o equador.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução comentada

Figura 3.4 – Situação descrita no texto, com os valores dos ângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 3.4, considerando a Terra praticamente plana, pode-se fazer $tg15^\circ = \frac{s}{h}$, aproximadamente. Mas, $tg15^\circ = tg(45^\circ - 30^\circ) = \frac{tg45^\circ - tg30^\circ}{1 + tg45^\circ \cdot tg30^\circ} = 2 - \sqrt{3}$.

Substituindo, vem: $tg15^\circ = \frac{s}{h} \rightarrow 2 - \sqrt{3} = \frac{20}{h} \rightarrow h = \frac{20}{2 - \sqrt{3}} = 20(2 + \sqrt{3})m$.

3.3 Fórmulas de arco duplo e arco triplo.

Tomando as relações $sen(a + b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$; $cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$ e $tg(a + b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a)tg(b)}$, e fazendo $b = a$, obtém-se:

- ✓ $sen(2a) = 2 \cdot sen(a) \cdot cos(a)$;
- ✓ $cos(2a) = cos^2 a - sen^2 a = 2 \cdot cos^2 a - 1 = 1 - sen^2 a$;
- ✓ $tg(2a) = \frac{2 \cdot tg(a)}{1 - tg^2 a}$.

Repetindo as operações anteriores para $b = 2a$, têm-se:

- ✓ $sen(3a) = 3 \cdot sen(a) - 4 \cdot sen^3 a$;
- ✓ $cos(3a) = 4 \cdot cos^3 a - 3 \cdot cos(a)$;

3.4 Exercícios resolvidos

1. NOVO ENEM (FÍSICA) - Um garoto foi à loja comprar um estilingue e encontrou dois modelos: um com borracha mais “dura” e outro com borracha mais “mole”. O garoto concluiu que o mais adequado seria o que proporcionasse maior alcance horizontal, D , para as mesmas condições de arremesso, quando submetidos à mesma força aplicada. Sabe-se que a constante elástica K_d (do estilingue mais “duro”) é o dobro da constante elástica K_m (do estilingue mais “mole”).

A razão entre os alcances $\frac{D_d}{D_m}$, referentes aos estilingues com borrachas “dura” e “mole”, respectivamente, é igual a

- a) $\frac{1}{4}$.
- b) $\frac{1}{2}$.
- c) 1.
- d) 2.
- e) 4.

Resposta: b

Resolução comentada

Dados: $k_d = 2k_m$; $F_d = F_m$.

Calculando a razão entre as deformações:

$$F_d = F_m \rightarrow k_d x_d = k_m x_m \rightarrow 2k_m x_d = k_m x_m \rightarrow x_m = 2x_d.$$

Comparando as energias potenciais elásticas¹⁸ armazenadas nos dois estilingues:

$$E_d^{pot} = \frac{k_d x_d^2}{2} = \frac{2k_m x_d^2}{2} = k_m x_d^2; E_m^{pot} = \frac{k_m x_m^2}{2} = \frac{2k_m (2x_d)^2}{2} = 2k_m x_d^2 \rightarrow E_m^{pot} = 2E_d^{pot}$$

Considerando o sistema conservativo, toda essa energia potencial é transformada em cinética para o objeto lançado. Assim:

$$E_m^{cin} = 2E_d^{cin} \rightarrow \frac{mv_m^2}{2} = 2 \frac{mv_d^2}{2}.$$

Supondo lançamentos oblíquos, sendo θ o ângulo com a direção horizontal, o

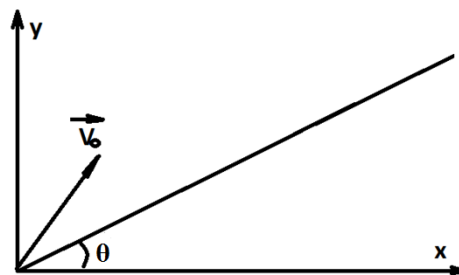
¹⁸ O princípio da conservação da Energia Mecânica de um sistema mecânico garante que, desprezando os atritos, a energia mecânica é constante. E a energia mecânica é dada pela soma entre energia cinética ($E_c = \frac{mv^2}{2}$) e as energias potenciais elástica ($E_p = \frac{kx^2}{2}$) e gravitacional ($E_p = mgh$).

alcance horizontal (D) é dado pela expressão: $D = \frac{v_0^2}{g} 2\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$. Logo,

$$D_d = \frac{v_d^2}{g} \sin(2\theta) \text{ e } D_m = \frac{2v_0^2}{g} \sin(2\theta) \rightarrow \frac{D_d}{D_m} = \frac{1}{2}.$$

02¹⁹. Determine o ângulo formado entre a velocidade de lançamento e o eixo x (horizontal) para que a partícula arremessada com velocidade $\vec{V}_0$ atinja o máximo alcance ao longo da rampa que forma um ângulo θ com a horizontal. Negligencie a resistência do ar e considere constante o campo gravitacional $\vec{g}$ no local do lançamento.

Figura 3.5 – Representação do instante inicial do lançamento.

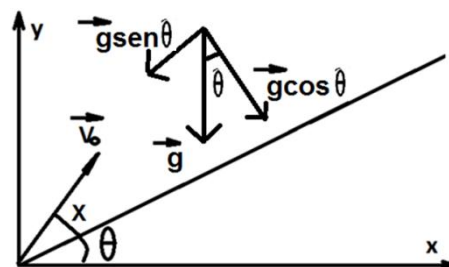


Fonte: Elaborada pelo autor.

1ª Resolução:

Denominando por x o ângulo entre $\vec{v}_0$ e a rampa e decompondo a gravidade, tem-se.

Figura 3.6 – Decomposição do movimento em duas direções, sendo uma ao longo da rampa e a outra perpendicular à rampa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Decompondo o movimento em dois componentes, um ao longo da rampa e outro perpendicular a ela. São dois movimentos uniformemente variáveis.

Tempo perpendicular à rampa: $v = v_0 + a \cdot t$. Na subida, vem:

$$0 = v_0 \cdot \text{sen} x - g \cdot \text{cos} \theta \cdot t_{\text{subida}} \rightarrow t_{\text{subida}} = \frac{v_0 \cdot \text{sen} x}{g \cdot \text{cos} \theta} \rightarrow t_{\text{total}} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \text{sen} x}{g \cdot \text{cos} \theta}.$$

Agora o alcance ao longo da rampa:

$$\begin{aligned}
\Delta s &= v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \rightarrow A = v_0 \cdot \cos x \cdot t_{total} - \frac{g \cdot \sin \theta \cdot t_{total}^2}{2} \rightarrow \\
A &= v_0 \cdot \cos x \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin x}{g \cdot \cos \theta} - \frac{g \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin x}{g \cdot \cos \theta} \right)^2}{2} \rightarrow \\
A &= v_0 \cdot \cos x \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin x}{g \cdot \cos \theta} - \frac{g \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin x}{g \cdot \cos \theta} \right)^2}{2} \rightarrow \\
A &= \frac{v_0^2}{g \cdot \cos \theta} (2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos \theta + \sin \theta \cdot (-2 \sin^2 x)) \rightarrow \\
A &= \frac{v_0^2}{g \cdot \cos \theta} (\sin 2x \cdot \cos \theta + \sin \theta \cdot (-2 \sin^2 x)) \rightarrow \\
A &= \frac{v_0^2}{g \cdot \cos \theta} (\sin 2x \cdot \cos \theta + \sin \theta \cdot (\cos 2x - 1)) \rightarrow \\
A &= \frac{v_0^2}{g \cdot \cos \theta} (\sin 2x \cdot \cos \theta + \sin \theta \cdot \cos 2x - \sin \theta) \rightarrow \\
A &= \frac{v_0^2}{g \cdot \cos \theta} (\sin(2x + \theta) - \sin \theta).
\end{aligned}$$

Agora, basta fazer $\sin(2x + \theta)$ assumir valor máximo, ou seja, valer 1. Para isso, basta fazer $2x + \theta = \frac{\pi}{2}$.

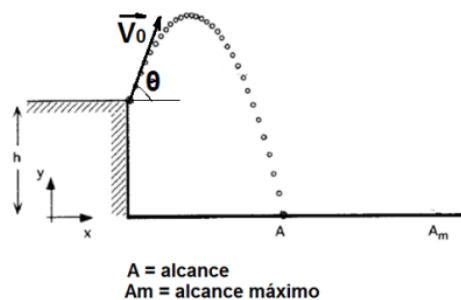
O ângulo que se pede é entre o vetor velocidade e o plano horizontal, ou seja, $x + \theta$.

$$\text{Como } 2x + \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x + 2\theta = \frac{\pi}{2} + \theta \rightarrow x + \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + \theta}{2} \rightarrow x + \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}.$$

2ª Resolução.²⁰

Imagine uma pedra lançada no vácuo de uma altura inicial h sob influência única e exclusiva da aceleração da gravidade local $\vec{g}$.

Figura 3.7: Representação do instante inicial do lançamento de uma altura h .



Fonte: MENDONÇA.

²⁰ MENDONÇA

Na horizontal o movimento é uniforme, logo: $x = v_0 \cos \theta \cdot t$.

Na vertical o movimento é uniformemente variado, logo: $y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$.

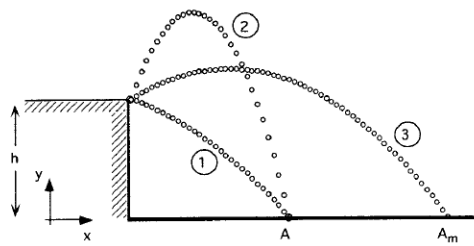
Isolando o tempo na primeira e substituindo na segunda, vem a equação da trajetória dada por: $y = h + tg\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$.

Para $x = A \rightarrow y = 0$.

Substituindo na equação da trajetória e organizando, tem uma equação do segundo grau em $tg\theta$. $tg^2\theta - \frac{2v_0^2}{gA} tg\theta + 1 - \frac{2v_0^2 h}{gA^2} = 0$.

O gráfico a seguir mostra lançamentos para possíveis valores de Δ .

Figura 3.8 – Representação das possíveis trajetórias.



Fonte: MENDONÇA.

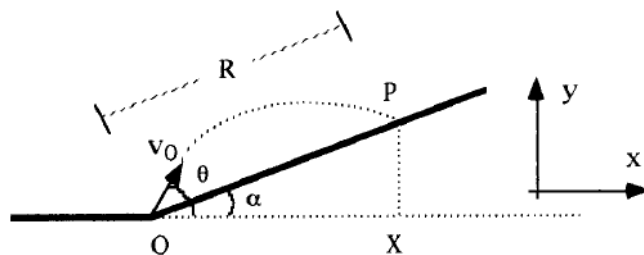
Para uma velocidade inicial v_0 e o alcance A predefinido, são três as possibilidades: duas raízes complexas ($A > A_m$), duas raízes distintas ($A < A_m$), ou duas raízes reais e idênticas ($A = A_m$).

Fazendo $\Delta = 0 \rightarrow A = A_m$. Daí, $A_m = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ e $tg\theta_m = \frac{v_0^2}{gA_m} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$.

Note que se $h = 0 \rightarrow tg\theta_m = 1 \rightarrow \theta = 45^\circ$ (resultado bastante conhecido).

Agora, imagine o lançamento sendo feito ao longo de uma rampa conforme a figura.

Figura 3.9: Lançamento numa rampa.



Fonte: MENDONÇA.

O ponto P, local onde bate o projétil, tem coordenadas $(x, x \cdot tg\alpha)$. R é o alcance ao longo da rampa, que se torna máximo com x máximo. A pergunta é: qual o valor de θ (ângulo formado entre $\vec{v}_0$ e a horizontal), que permite que isso ocorra.

Lembremos que:
$$\begin{cases} y = h + tg\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \\ y = tg\alpha \end{cases}.$$

Substituindo, vem:

$$tg\alpha = h + tg\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \rightarrow tg\alpha = h + tg\theta \cdot x - \frac{g(tg^2 \theta + 1)}{2v_0^2} x^2.$$

$$tg^2 \theta - \frac{2v_0^2}{gx} tg\theta + \frac{2v_0^2}{gx} tg\alpha + 1 = 0. \text{ Fazendo } \Delta = 0 \rightarrow x = x_m.$$

$$\text{Logo } tg\theta_m = \frac{\frac{2v_0^2}{gx_m}}{2} = \frac{v_0^2}{gx_m}.$$

$$\Delta = \left(\frac{2v_0^2}{gx_m}\right)^2 - 4 \left[\frac{2v_0^2}{gx} tg + 1\right] = 0 \rightarrow x_m^2 + 2 \frac{v_0^2 tg\alpha}{g} x_m - \left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 = 0.$$

Agora, qual o valor de x_m ?

$$\Delta = \frac{4v_0^4 tg^2 \alpha}{g^2} + \frac{4v_0^4}{g^2} = \frac{4v_0^4}{g^2} (tg^2 \alpha + 1) \rightarrow \Delta = \frac{4v_0^4}{g^2} sec^2 \alpha.$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} (-tg\alpha + sec\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{1-sen\alpha}{cos\alpha}\right).$$

Agora, um pequeno truque para melhorar essa equação:

$$\text{Fazendo } \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ (completar de } \alpha)$$

Substituindo, vem:

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{1-cos\beta}{sen\beta}\right) = \frac{v_0^2}{g} \left(\frac{2sen^2(\beta/2)}{2sen(\beta/2).cos(\beta/2)}\right) \rightarrow x_m = \frac{v_0^2}{g} tg(\beta/2) \rightarrow$$

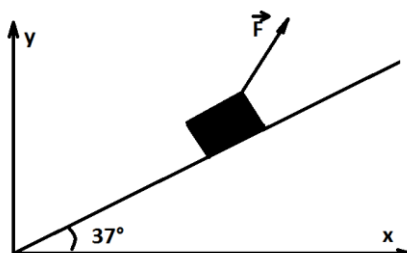
$$cotg\left(\beta/2\right) = \frac{v_0^2}{g.x_m}. \text{ Mas, } tg\theta_m = \frac{v_0^2}{g.x_m}.$$

$$\text{Logo: } tg\theta_m = cotg\left(\beta/2\right) \rightarrow \theta_m = \frac{\pi}{2} - \beta/2 \rightarrow \theta_m = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \rightarrow$$

$$\theta_m = \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2} \rightarrow \theta_m = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

03. A Figura 3.10 mostra um bloco de massa m que sobe sobre a superfície inclinada áspera (coeficiente de atrito cinético μ), sendo o módulo da força $\vec{F}$ igual a F . Qual o valor da máxima aceleração do bloco e qual a direção que a força $\vec{F}$ forma com a horizontal (x) nesse instante? Considere g a aceleração da gravidade local.

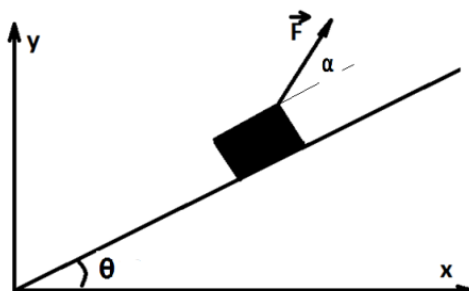
Figura 3.10 – Bloco arrastado ao longo da rampa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Resolução comentada

Figura 3.11 – A força formando um ângulo α com a rampa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando a segunda lei de Newton, vem:

$$\begin{aligned}
 m \cdot a &= F_R \rightarrow m \cdot a = F \cos \alpha - P \sin \theta - f_{at} \rightarrow m \cdot a = F \cos \alpha - P \sin \theta - \mu \cdot N \rightarrow \\
 m \cdot a &= F \cos \alpha - mg \sin \theta - \mu \cdot (mg \cos \theta - F \sin \alpha) \rightarrow \\
 m \cdot a &= F \cos \alpha - mg \sin \theta - \mu \cdot mg \cos \theta + \mu F \sin \alpha \rightarrow \\
 a &= \frac{F}{m} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - g (\sin \theta + \mu \cdot \cos \theta).
 \end{aligned}$$

Note que a segunda parcela é fixa, então basta fazer a primeira máxima.

Então, basta fazer $f(\alpha) = \cos \alpha + \mu \sin \alpha$ máximo.

$$f(\alpha) = \cos \alpha + \mu \sin \alpha.$$

$$f(\alpha) = 1 \cdot \cos\alpha + \mu \sin\alpha \rightarrow$$

$$f(\alpha) = \sqrt{1 + \mu^2} \cdot \left(\frac{1 \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}} + \frac{\mu \sin\alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right).$$

Agora, imagine um ângulo β , tal que

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{e} \quad \cos\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Daí, nossa função fica:

$$f(\alpha) = \sqrt{1 + \mu^2} \cdot (\sin\beta \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\beta) \rightarrow f(\alpha) = \sqrt{1 + \mu^2} \cdot \sin(\beta + \alpha)$$

Assume valor máximo para

$$\beta + \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Logo:

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

O valor máximo da função é: $f(\alpha) = \sqrt{1 + \mu^2}$.

Portanto, o valor máximo da aceleração é:

$$a = \frac{F}{m} (\cos\alpha + \mu \sin\alpha) - g(\sin\theta + \mu \cdot \cos\theta) \rightarrow$$

$$a = \frac{F}{m} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} + \mu \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right) - g(\sin\theta + \mu \cdot \cos\theta) \rightarrow$$

$$a = \frac{F}{m} \left(\frac{1 + \mu^2}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right) - g(\sin\theta + \mu \cdot \cos\theta) \rightarrow$$

$$a = \frac{F}{m} (\sqrt{1 + \mu^2}) - g(\sin\theta + \mu \cdot \cos\theta).$$

4 – PROSTAFÉRESE

As relações de Prostaferese transformam soma de senos e cossenos em produtos de senos e cossenos. Isso pode ser útil em algumas operações de simplificação, de máximos e mínimos entre outras.

4.1 As fórmulas de Prostaferese.

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right); \\ \checkmark \quad \operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q &= 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right); \\ \checkmark \quad \operatorname{cosp} + \operatorname{cos} q &= 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right); \\ \checkmark \quad \operatorname{cosp} - \operatorname{cos} q &= -2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right). \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cos(a) \quad (a)$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(b) \cos(a) \quad (b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) \quad (c)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a) \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) \quad (d)$$

Somando-se (a) e (b) tem-se:

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos b \quad (e)$$

Subtraindo-se (a) de (b) tem-se:

$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} b \cdot \cos a \quad (f)$$

Somando-se (c) e (d) teremos

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b \quad (g)$$

E por fim, subtraindo-se (c) de (d)

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \quad (h)$$

Fazendo $a+b = \alpha$ e $a-b = \beta$, teremos que $a = \frac{\alpha+\beta}{2}$ e $b = \frac{\alpha-\beta}{2}$, cujos valores substituídos nas relações (e), (f), (g) e (h) fornecerão as seguintes relações:

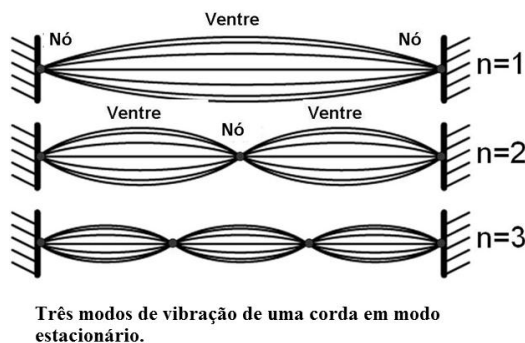
$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right); \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right);$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right); \cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right), \text{ que são as conhecidas Fórmulas de Transformação de soma em produto ou Fórmulas de Prostaferese.}$$

4.2 Onda estacionária e Trigonometria

Há um padrão de vibração ondulatória, que normalmente ocorre em ambientes confinados, como uma corda esticada ou a pele de um tambor ou um tubo sonoro, resultado da superposição de duas ondas semelhantes, de mesma frequência, mesma amplitude, mesma direção de propagação e mesmo comprimento de onda, porém defasadas de meia oscilação e se propagando em sentidos opostos. Esse padrão é tal que estaciona a energia da onda e produz pontos fixos de vibração nula denominados nodos e pontos de vibração máxima denominados ventres ou antinodos, estacionados ao longo do meio de propagação, conforme a Figura 4.1. Nela, estão representados os três primeiros modos de vibração. Podem ser gerados infinitos modos.

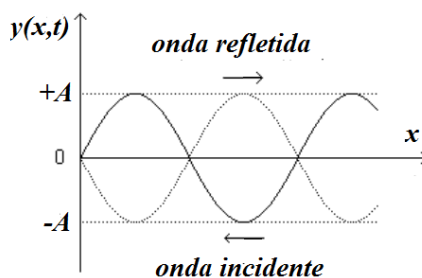
Figura 4.1 - Modos de vibração de uma onda estacionária na corda.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura 4,2, têm-se representadas as ondas originárias da onda estacionária numa corda.

Figura 4.2: Ondas incidente e refletida da onda estacionária.



Fonte: elaborada pelou autor.

As equações que as descrevem as ondas progressivas, incidente e refletida, são escritas como $y_i(x, t) = A \cdot \text{sen}(kx + \omega t)$ e $y_r(x, t) = A \cdot \text{sen}(kx - \omega t)$.

A superposição gera uma onda com equação

$$y(x, t) = y_i(x, t) + y_r(x, t) \rightarrow y(x, t) = A \cdot \text{sen}(kx + \omega t) + A \cdot \text{sen}(kx - \omega t).$$

Usando a relação: $\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, vem:

$$y(x, t) = 2A \cdot \text{sen}(kx) \cdot \cos(\omega t).$$

É uma onda de amplitude variável, $2A \cdot \text{sen}(kx)$, portanto, que depende da posição x . Por outro lado, é uma onda que não progride no espaço, pois não apresenta o termo $kx - \omega t$. Existem pontos que $y(x, t) = 0$ são sempre nulos, onde $kx = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ (nós). Como também há pontos em que $y(x, t) = A$, onde $kx = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$ (ventres).

4.3 Exercitando

01. UnB. O movimento ondulatório manifesta-se em diversos fenômenos naturais, como, por exemplo, a propagação da luz e do som. Dá-se o nome de interferência ao fenômeno resultante da superposição de duas ou mais ondas, sendo que, se duas delas são representadas pelas equações $y_1 = f(t)$ e $y_2 = g(t)$, a onda resultante durante a superposição é dada pela equação $y = f(t) + g(t)$.

Um movimento ondulatório é chamado amortecido, quando a amplitude da sua onda decresce com o tempo. Fenômenos ondulatórios que despertam particular interesse são aqueles em que ocorre a interferência de duas ondas que estão vibrando em frequências muito próximas. O fenômeno de interferência destrutiva total de ondas se dá quando o encontro de duas ondas em oposição de fase faz que uma aniquile completamente a outra, não restando qualquer movimento ondulatório posterior.

Com relação ao movimento ondulatório e com o auxílio do texto acima, encontre a equação que representa as ondas da superposição das ondas dadas pelas equações $y_1(t) = 3\cos(11t)$ e $y_2(t) = 3\cos(9t)$.

Resolução comentada

Sabe-se que $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. E que a superposição é dada por:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 3\cos(11t) + 3\cos(9t) = 3[\cos(11t) + \cos(9t)] \rightarrow$$

$$y(t) = 3 \cdot 2\cos\left(\frac{11t+9t}{2}\right) \cos\left(\frac{11t-9t}{2}\right) = 6 \cdot \cos(10t) \cdot \cos t.$$

Portanto, $y(t) = 6\cos(10t) \cdot \cos(t)$ representa a superposição.

5 – MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (MHS).²¹

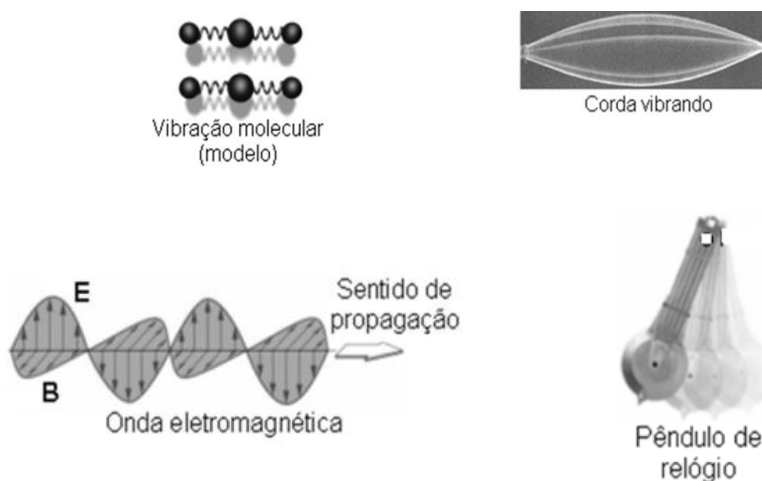
O MHS (Movimento Harmônico Simples) tem sua estrutura teórica toda derivada das funções trigonométrica. Vários resultados são obtidos após uma análise das funções trigonométricas que o descrevem. Além disso, são muitos os exemplos de situações físicas reveladas pela Natureza que oscilam em MHS. Por conta disso, será dedicado um capítulo para o estudo do MHS.

Antes de tratar matematicamente o MHS, vamos a algumas denominações e definições. Todo movimento que se repete em intervalos de tempo iguais é dito um movimento periódico. O Movimento Circular e Uniforme (MCU) é um bom exemplo de um movimento periódico. No caso de uma partícula movendo-se periodicamente para frente e para trás, numa mesma trajetória, tem-se um movimento do tipo oscilatório (vibratório).

Um movimento periódico do tipo vibratório, que pode ser interpretado por meio de funções horárias (funções do tempo) do tipo senos e cossenos, é denominado Movimento Harmônico.

Um pondo numa corda de violão que ao ser tocado vibra em pequenas oscilações; um pêndulo balançando em pequenas oscilações; um sistema massa-mola oscilando; as moléculas do ar quando atingidas por uma onda sonora; os campos elétricos e magnéticos oscilando na propagação de uma onda eletromagnética; o movimento de uma rolha no interior de um tanque contendo água; onde se provocou uma onda mecânica e muitos outros movimentos são exemplos de movimentos do tipo oscilatórios.

Figura 5.1 - Exemplos clássicos de movimentos oscilatórios.



²¹ RAMALHO, P.375-379

Fonte: Elaborada pelo autor.

Negligenciando o atrito, ou seja, desprezando todo tipo de perda de energia mecânica pelos sistemas, os movimentos supracitados citados são ditos Movimentos Harmônicos Simples (MHSs). Se existir atrito e, portanto, dissipação de parte da energia mecânica do sistema oscilatório, o movimento será denominado Harmônico Amortecido. Estes não são abordados pela Física estudada no Ensino Médio.

O estudo descritivo (cinemático) do MHS é feito com a montagem das funções trigonométricas da posição, da velocidade e da aceleração e suas propriedades. Com o uso dessas funções trigonométricas, serão encontradas várias outras equações que, aparentemente, não tem caráter trigonométrico, porém são oriundas das formulações trigonométricas.

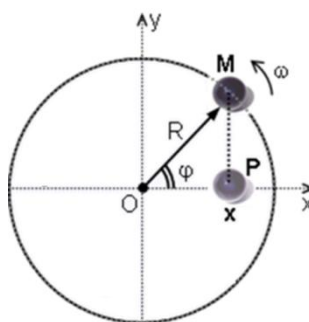
Por vezes, quando um exercício de MHS for resolvido, as relações trigonométricas podem não aparecer explicitamente. Isso não significa que o MHS tenha abdicado delas. Na verdade, a Trigonometria foi usada como rito de passagem na demonstração dessas outras relações facilitadoras. Veremos esses aspectos na sequência.

Vamos ao modelo teórico do MHS, a partir da projeção do MCU (Movimento Circular e Uniforme) e na, sequência, serão apresentados vários exemplos, contextualizando sobremaneira esse modelo teórico.

5.1. A posição (x) no MHS

Observe um móvel (**M**) executando um Movimento Circular e Uniforme (MCU), como mostra a Figura 5.2. Note que o ângulo φ cresce no sentido anti-horário, com origem no eixo Ox , conforme a Trigonometria.

Figura 5.2 – Corpo M em MCU e P (projeção de M) em MHS.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\text{Define-se } \omega = \frac{\text{variação do ângulo}}{\text{intervalo de tempo}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T(\text{período=tempo para uma repetição})}.$$

ω é a *velocidade angular ou frequência angular*.

A função horária angular, ou seja, a função que descreve como o ângulo (φ) é “varrido” pelo móvel **M** em função do tempo é dada por:

$$\omega = \frac{\text{variação do ângulo}}{\text{intervalo de tempo}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t} \rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t.$$

Vamos encontrar todas as equações do movimento oscilatório apenas fazendo a projeção (a decomposição) dos vetores associados ao movimento circular, como foi feito com a função horária da posição.

Da figura, a posição x da projeção (sombra) horizontal (**P**) do móvel **M** pode ser dada, em qualquer instante, pela relação:

$$x = R \cdot \cos(\varphi).$$

Substituindo φ , vem:

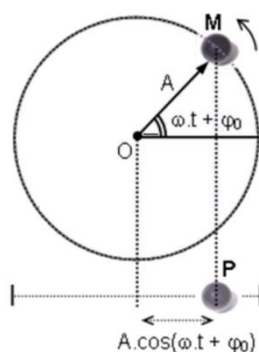
$$x = R \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Finalmente, definindo $A = R$ a amplitude do movimento, chegamos à função horária da posição do móvel em MHS.

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Esta é a função horária dos espaços (posições) da projeção **P**. Como ela é expressa em função do cosseno, diz-se que o movimento é do tipo Harmônico. Além disso, é periódico, sendo seu período o mesmo do movimento circular uniforme realizado pelo móvel **M**. Como a amplitude (maior distância a partir da origem – 0) é constante, dizemos que o movimento é Simples. Portanto, é um MHS (Movimento Harmônico Simples).

Figura 5.3 - Posição de P em função do tempo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Da análise da função trigonométrica da posição $f(t) = \cos(\omega.t + \varphi_0)$, concluímos que sua imagem vai de -1 e $+1$, portanto, pode-se afirmar que:

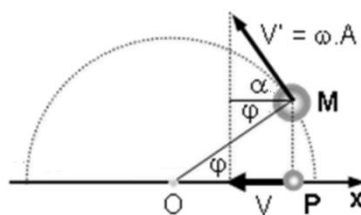
$$-A \leq x \leq +A.$$

O MHS é periódico. Observando a função da posição, $x(t) = A\cos(\omega.t + \varphi_0)$, nota-se que o período, a exemplo de outras funções trigonométricas, não depende da amplitude, A . Na verdade, o período é dado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Esse resultado alerta para um aspecto físico relevante e surpreendente, que é o período não depender da amplitude.

5.2. A velocidade (v) no MHS.

Observe a Figura 5.4.

Figura 5.4 - Velocidade de P em função do tempo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os ângulos α e φ são complementares (a soma é igual a 90°), assim, $\cos\alpha = \sin\varphi$.

Decompondo a velocidade do móvel **M** no eixo Ox , tem-se:

$$v = -v'.\cos\alpha \rightarrow v = -\omega.A.\sin\varphi.$$

O vetor $\vec{v}$ possui sentido oposto ao sentido positivo de x , o que justifica o sinal negativo nas expressões acima. Então, pode-se escrever a função horária da velocidade do MHS:

$$v = -\omega.A.\sin(\omega.t + \varphi_0).$$

A velocidade máxima da projeção **P** ocorre para $\sin\varphi = -1$, ou seja, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ e, vale:

$$v_{\max} = \omega.A.$$

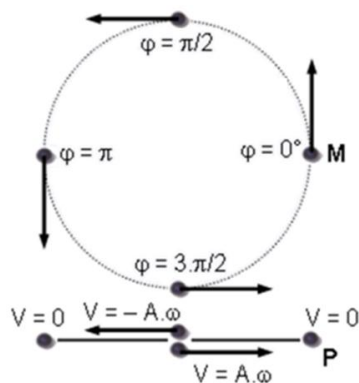
Se $\sin\varphi = +1$ ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), a velocidade da projeção **P** é negativa, porém de módulo igual à velocidade máxima, diz-se, então, que, nesse ponto, a velocidade escalar é mínima.

Se $\sin\varphi = 0$ ($\varphi = 0^\circ$ ou $\varphi = \pi$), a velocidade da projeção **P** é nula.

Em verdade, $-\omega.A \leq v \leq \omega.A$. Isso ocorre porque $-1 \leq \sin(\omega.t + \varphi_0) \leq 1$.

Observe a Figura 5.5.

Figura 5.5 - Velocidade de P em momentos importantes.



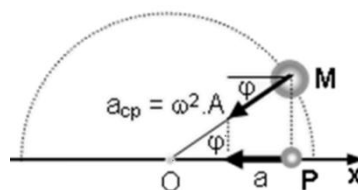
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 A aceleração (a) no MHS.

Observe a Figura 5.6. Sabe-se, da Física, que a aceleração desse movimento é do tipo centrípeta²², voltada para o centro, e dada por:

$$a_{centrípeta} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R, \text{ pois a velocidade angular } \omega = \frac{v}{r}.$$

Figura 5.6 - Aceleração de P em função do tempo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Decompondo a aceleração centrípeta do móvel **M** no eixo Ox , tem-se:

$$a = -a_{centrípeta} \cdot \cos\varphi \rightarrow$$

²² A aceleração centrípeta é uma aceleração que aparece em todos os movimentos curvilíneos. Ela é voltada para o centro da trajetória, por isso centrípeta, e tem módulo dado pela expressão $a_{centrípeta} = \frac{v^2}{R}$, sendo v a velocidade do móvel e R o raio da curva. Como a velocidade angular $\omega = \frac{v}{R}$, substituindo, vem: $a_{centrípeta} = \omega^2 R$.

$$a = -\omega^2 \cdot R \cdot \cos\varphi.$$

O vetor $\vec{a}$ possui sentido oposto ao sentido positivo do eixo Ox , o que explica o sinal negativo na expressão acima. Então, pode-se escrever:

$$a = -\omega^2 \cdot R \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

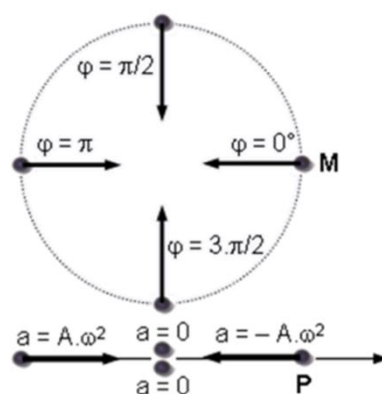
A aceleração máxima da projeção **P** ocorre para $\cos\varphi = -1$, ou seja, $\varphi = \pi$ e, vale: $a_{\text{máxima}} = \omega^2 \cdot A$. Se $\cos\varphi = +1$ ($\varphi = 0^\circ$), a aceleração da projeção **P** é negativa, porém de módulo igual à aceleração máxima, diz-se, então, que, nesse ponto, a aceleração escalar é mínima.

Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$ e, portanto, a aceleração da projeção **P** é nula.

Em verdade, $-\omega^2 \cdot A \leq a \leq \omega^2 \cdot A$.

Observe a Figura 5.7.

Figura 5.7 - Aceleração de P em momentos importantes.



Fonte: Elaborada pelo autor

Juntando as equações $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ e $a = -\omega^2 \cdot R \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, obtém-se:

$$a = -\omega^2 \cdot x.$$

Todo movimento cuja aceleração pode ser representada por esse tipo de equação é um MHS.

Agora, usando as equações $x = A.\cos(\omega.t + \varphi_0)$, $v = -\omega.A.\text{sen}(\omega.t + \varphi_0)$ e a equação fundamental da Trigonometria, $\text{sen}^2(\omega.t + \varphi_0) + \cos^2(\omega.t + \varphi_0) = 1$, obtém-se imediatamente:

$$v^2 = \omega^2.(a^2 - x^2).$$

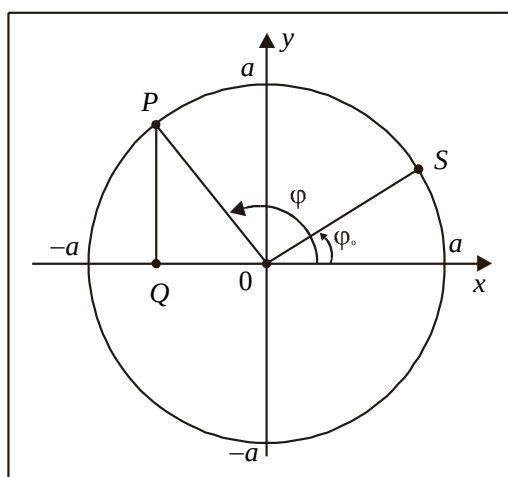
Que é denominada equação de Torricelli para o MHS, devido à independência da variável tempo.

Ao chegar às equações $a = -\omega^2.x$ e $v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$, o tempo é eliminado e somem as funções horárias trigonométricas, dando a impressão que a Trigonometria esgota sua contribuição para o MHS. Não é verdade! Muitos exercícios da Cinemática do MHS são resolvidos com o uso das funções trigonométricas. Porém quando usamos apenas as duas equações supracitadas, vem junto toda carga demonstrativa para chegar a elas, que, em verdade, foi toda de base trigonométrica. Para cravar se um movimento é um MHS, é muito comum procurar verificar se ele se adapta à equação $a = -\omega^2.x$.

5.4. Exemplificando.

01. Uma partícula P percorre, em sentido anti-horário, a circunferência de centro na origem de um sistema cartesiano ortogonal e raio a , partindo, no instante $t = 0$, do ponto S (veja Figura 5.8). Sua velocidade angular constante é ω , em radianos por segundo, isto significa que essa partícula percorre um arco de ω radianos em um segundo. Seja Q a projeção ortogonal da partícula no eixo das abscissas. O movimento do ponto Q é dito um *movimento harmônico simples* e o ângulo φ_0 indicado na Figura 5.8 é chamado fase inicial e o ângulo $\varphi = \omega t + \varphi_0$ é chamado ângulo de fase.

Figura 5.8 - Movimento da partícula P.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com base no texto, julgue os itens seguintes.

1. A posição do ponto Q , no instante t , é dada por $x = a \cos(\omega t + \varphi_0)$.
2. O período desse movimento é igual a $\frac{\pi}{\omega}$.
3. A amplitude desse movimento vale a .

Gabarito: CEC

Resolução comentada

1. Correto, Q realiza um MHS e a posição dele, no instante t , é dada pela equação do MHS, logo $x = a \cos(\omega t + \varphi_0)$.

2. Errado, o período desse movimento é igual ao período da função, que vale $\frac{2\pi}{\omega}$.
3. A amplitude desse movimento é a amplitude da função, que vale a .

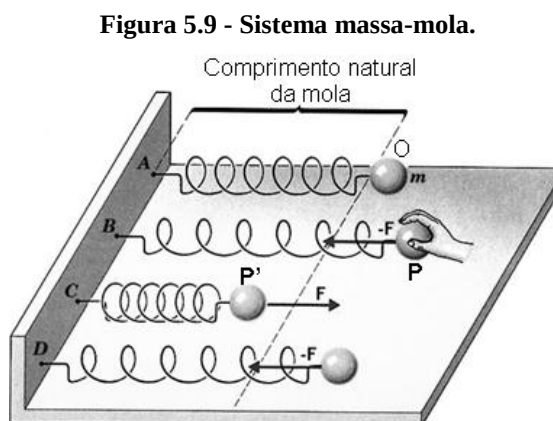
5.5 Exemplos contextualizados

Na sequência, serão apresentados vários exemplos de MHSs, adotando como critério verificar se o caso concreto recebe a equação $a = -\omega^2 \cdot x$, em que ω assume características físicas particulares, contextualizando esse modelo teórico. São muitos os exemplos que a natureza revela-se um Movimento Harmônico Simples.

Por conta desses muitos exemplos e sabendo que vários deles são bem interessantes, a proposta é deixar aqui um bom elenco desses casos.

5.5.1. Sistema massa-mola na horizontal

Como demonstrado anteriormente, no estudo cinemático do MHS percebe-se que a aceleração (a) depende linearmente da posição (x). Um dos exemplos clássicos de MHS é o sistema massa-mola. Observe a Figura 5.9.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O bloco de massa m está preso a uma mola ideal de constante elástica K , num plano horizontal. Na posição O ($x = 0$), a mola se encontra na posição de equilíbrio. Se deslocarmos o bloco até a posição P ($x = A$) e soltarmos, este passará a oscilar entre as

posições **P** e **P'**. Despregando todo tipo de atrito, o bloco jamais diminuirá sua amplitude de oscilação.

Seu movimento é mantido por uma força dita restauradora: força elástica, conhecida como Lei de Hooke²³. A força peso é equilibrada pela força normal e, desprezando qualquer tipo de força de atrito, a força elástica torna-se a força resultante, assim:

$$F_{\text{Resultante}} = F_{\text{Elástica}}.$$

Aplicando a segunda lei de Newton ($F_{\text{Resultante}} = m \cdot a$) e a lei de Hooke para molas ($F_{\text{Elástica}} = -K \cdot x$), tem-se: $m \cdot a = -K \cdot x \rightarrow a = -\frac{K}{m} x$.

Isto, aceleração ser proporcional à posição, com uma constante negativa, é o que precisava acontecer para ser um MHS.

Vamos ao cálculo do período desse movimento.

Compara-se esse resultado com a equação $a = -\omega^2 \cdot x$, a pulsação (ω) para o sistema massa-mola é dada por: $\omega^2 = \frac{K}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

Do Movimento Circular e Uniforme (MCU), $\omega = \frac{2\pi}{T(\text{período de oscilação})}$, assim:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}.$$

O período não depende da amplitude. Mas afinal, esquecendo a Física, usando só conceitos de funções trigonométricas, qual o período dessa função $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$?

Bom, basta lembrar que o período do cosseno só é afetado pelo termo que multiplica a variável da função (t), no caso o ω , da seguinte maneira:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

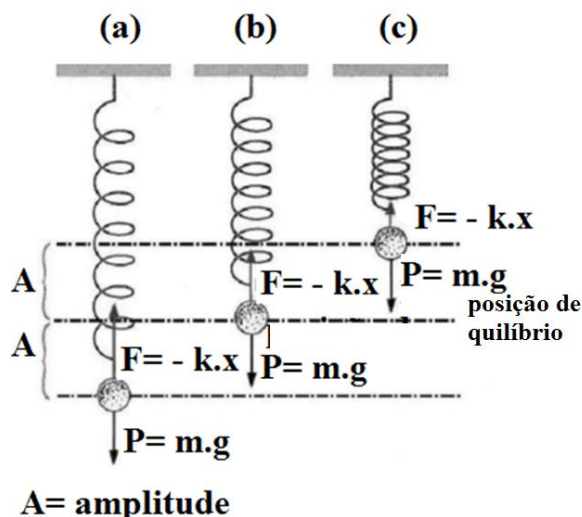
Agora, lembrando-se da Física que $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, vem: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$.

Esse resultado mostra que dois caminhos distintos chegam ao mesmo resultado. Um deles mais afetado pelos conceitos da Física e o outro mais Matemático. Utilizando-se desse resultado, os professores de Física e de Matemática podem brincar com a contextualização e a interdisciplinaridade.

²³ O físico inglês Robert **Hooke** estudou como a deformação (x) varia com a força (F) que expande ou contrai um corpo elástico. Ele foi o primeiro a demonstrar que a deformação é diretamente proporcional a uma força elástica, resistente ao alongamento ou à contração produzida no corpo, que pode ser uma mola. Traduzindo matematicamente, $F = -k \cdot x$. O sinal negativo indica que a força é oposta à deformação.

5.5.2 Sistema massa-mola na vertical

Figura 5.10 - Sistema massa-mola na vertical.



(a) a mola alongada e abaixo da posição de equilíbrio;

(b) a mola na posição de equilíbrio;

(c) a mola acima da posição de equilíbrio.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Suponha L o comprimento inicial da mola e x_e a deformação da mola na posição de equilíbrio.

$$\text{Na posição de equilíbrio } mg = Kx_e \rightarrow x_e = \frac{mg}{K}.$$

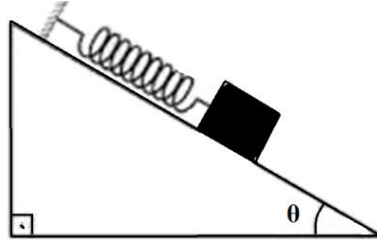
Assim sendo, a força resultante no bloco, fora da posição de equilíbrio x' , é dada por:

$$\begin{aligned} F_R &= mg - Kx \rightarrow ma = mg - K(x_e + x') \rightarrow ma = mg - Kx_e - Kx' \rightarrow \\ ma &= -Kx' \rightarrow \\ a &= -\frac{K}{m}x'. \end{aligned}$$

Note que a equação obedece ao mesmo formato do sistema massa-mola na horizontal, apenas muda a posição de equilíbrio. Na horizontal, a posição de equilíbrio ocorre com a mola não deformada. Na vertical, ela ocorre com a mola já distendida de $x_e = \frac{mg}{K}$. Mas continua a ser um MHS com o mesmo ω e, portanto, com o mesmo período $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$.

5.5.3 Sistema massa-mola no Plano inclinado.

Figura 5.11 - Sistema massa-mola no plano inclinado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na posição de equilíbrio $mg\sin\theta = Kx_e \rightarrow x_e = \frac{mg\sin\theta}{K}$.

Assim sendo, a força resultante no bloco, fora da posição de equilíbrio x' , é dada por:

$$\begin{aligned} F_R &= mg\sin\theta - Kx \rightarrow \\ ma &= mg\sin\theta - K(x_e + x') \rightarrow \\ ma &= mg\sin\theta - Kx_e - Kx' \rightarrow \\ ma &= -Kx' \rightarrow \\ a &= -\frac{K}{m}x'. \end{aligned}$$

Note que a equação obedece ao mesmo formato do sistema massa-mola na vertical, apenas muda a posição de equilíbrio. Na horizontal, a posição da equação de equilíbrio ocorre com a mola não deformada, na vertical, ela ocorre com a mola já distendida de $x_e = \frac{mg}{K}$, e no plano inclinado na vertical, ela ocorre com a mola já distendida de $x_e = \frac{mg\sin\theta}{K}$.

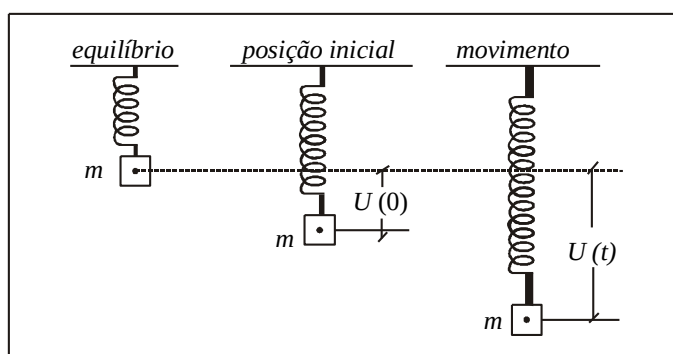
Mesmo assim, continua a sendo um MHS com o mesmo ω e, portanto, com o mesmo período T .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}.$$

Exercitando

01. (UnB) A função U , definida por $U(t) = r \cdot \cos(\omega t - \theta)$, descreve o deslocamento, no tempo t , de um bloco de massa m , preso na extremidade de uma mola, em relação à posição de equilíbrio, conforme a Figura 5.12. A posição de equilíbrio, nesse caso, é aquela em que $U(t) = 0$. A constante ω depende apenas da mola e da massa m . As constantes r e θ dependem da maneira como o sistema é colocado em movimento.

Figura 5.12 - Sistema massa-mola oscilando na vertical.



Fonte: CESPE.

Com base na situação apresentada, julgue os itens abaixo.

1. A função U tem período igual a $(2\theta - \pi)$.
2. No instante $t = \frac{2\pi}{\omega}$, o bloco está novamente na posição inicial.
3. O maior deslocamento do bloco, em relação à posição de equilíbrio, é igual a r .
4. Em qualquer intervalo de tempo que tenha duração igual a $\frac{4\pi}{3\omega}$, o bloco passa pela posição de equilíbrio.

Gabarito: ECCC

Resolução comentada

1. Errado, pois o período da função $U(t) = r \cdot \cos(\omega t - \theta)$ não depende de θ . Ele é dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

2. Correto, pois conforme o item anterior, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ é o período, que corresponde ao momento em que a função completa uma oscilação pela primeira vez.
3. Correto, pois o máximo da função $U(t) = r \cdot \cos(\omega t - \theta)$ é r e a posição de equilíbrio ocorre em $U(t) = 0$.
4. Correto, pois o móvel passa pela posição de equilíbrio de forma periódica, num intervalo de meio período do movimento. $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{4\pi}{4\omega} < \frac{4\pi}{3\omega}$. Sendo assim, é impossível o móvel ficar nesse intervalo de tempo sem passar pela posição de equilíbrio.

02. A massa oscilante de um oscilador harmônico realiza um *MHS* (*movimento harmônico simples*), cuja equação é $x = 5\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$, com x em *cm* e t em segundos.

Com base nisso, julgue os itens que se seguem.

1. Para $t = 0,333\dots s$, o valor de x é $\frac{\sqrt{3}}{2} cm$.
2. Se $t \geq 0$, então o primeiro valor de t , para o qual x é máximo, é $0,5s$.
3. A velocidade média, no intervalo de 0 a $3s$, é igual a $1,0 cm/s$.
4. O período de oscilação desse *MHS* vale $1,0s$.
5. A pulsação desse *MHS* vale $2\pi rad/s$.

Gabarito: EEEEE

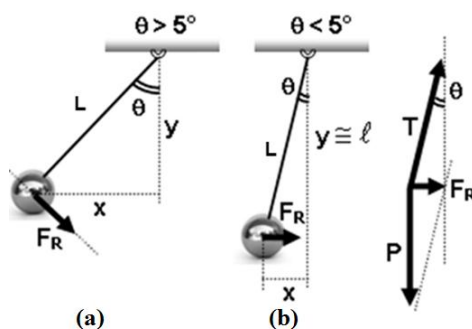
Resolução comentada

1. Errado, pois para $t = 0,333\dots s = \frac{2}{3}s$, $x = 5\cos\left(\pi\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = 5\cos\left(\pi\frac{5}{6}\right) = 5 \cdot -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$.
2. Errado, pois $x = 5\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$ é máximo se $\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow \pi t + \frac{\pi}{2} = 2\pi \rightarrow t = 1,5s$.
3. Errado, pois se $t = 0$, $x = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e se $t = 3s$, $x = 5\cos\left(\pi 3 + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, logo a velocidade média é nula.
4. Errado, pois o período é dado por $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$.
5. Errado, pois a pulsação é dada por $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{rad}{s}$.

5.5.4 Pêndulo simples

Outro exemplo clássico de MHS é o pêndulo simples para pequenas oscilações. Observe a Figura 5.13.

Figura 5.13 - Pêndulo simples oscilando.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para $\theta > 5^\circ$, Figura 5.13(a), não há como relacionar a posição x com a força resultante de forma a obter uma relação que define o movimento harmônico simples, ou seja, se o ângulo de oscilação do pêndulo simples for grande, desprezando-se qualquer perda de energia, o movimento será periódico, porém não será um MHS.

Para $\theta < 5^\circ$, Figura 5.13(b), podem ser escritas duas expressões para a tangente de θ :

a) Para o triângulo formado entre o fio do pêndulo, a vertical e a horizontal, tem-se:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{y} \cong \frac{x}{L}.$$

b) Para o diagrama de forças, tem-se: $\operatorname{tg} \theta = \frac{F_R}{P} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g}$.

Quanto menor for o ângulo θ , melhor será a aproximação manifesta na expressão (a).

Igualando as expressões (a) e (b), vem que: $\frac{x}{L} = \frac{a}{g} \rightarrow a = -\frac{g}{L} \cdot x$.

O sinal é um ajuste necessário, pois a e x sempre estão em sentidos opostos.

Compara-se esse resultado com a equação $a = -\omega^2 \cdot x$, assim, a pulsação (ω) para o

sistema pêndulo simples é dada por: $\omega^2 = \frac{g}{L} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Do Movimento Circular Uniforme, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, assim: $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$.

Também não depende da amplitude e essa é uma propriedade do MHS. Isso torna o pêndulo simples um bom marcador do tempo (relógio), a exemplo do sistema massa-mola.

5.5.5 O Pêndulo de Foucault

A Terra é uma esfera girando em torno de um eixo? A resposta a é essa pergunta deu muito que falar. Em certas épocas passadas, sabemos que mostrar que a Terra girava não era uma tarefa muito fácil, até porque sua rotação tem uma frequência muito baixa, de apenas 0,0007 rotações por minuto.

Dando sua contribuição, Foucault, astrônomo francês, realizou, em 1851, um dos mais importantes experimentos na história da Física. Ele teve uma ideia simples e montou um experimento surpreendentemente belo e simples.

Fixou no teto do Panton de Paris uma corda com 67 m de comprimento e suspendeu em sua extremidade inferior uma esfera de massa igual a 28 kg. Em seguida botou essa esfera pra balançar num movimento pendular.

A ideia era mostrar que se a Terra gira em baixo da esfera, o pêndulo vai mudando de direção. 12 h depois, desprezando todos os atritos, ele passaria a pendular na mesma direção do início do movimento. Foi o que aconteceu e o experimento tornou-se conclusivo: a Terra gira em torno do seu eixo e isso determina o dia de 24h.

Figura 5.14 - Pêndulo de Foucault oscilando.



Fonte: Real Observatório Astronômico de Madrid.

Este experimento ficou mais conhecido como Pêndulo de Foucault, tendo sido considerado, pelos leitores da revista *Physics World*, um dos dez (10) mais belos experimento da Física.

Vale lembrar que Em 1600, por acreditar que a Terra se movia em torno do seu eixo e se movia em torno do Sol, Giordano Bruno foi condenado à fogueira pela “Santa Inquisição”. Trinta e três anos depois, se não renunciasse às suas convicções científicas, Galileu Galilei teria o mesmo destino. Mesmo tendo renunciado, ainda foi confinado à sua

casa pelos cinco últimos anos de sua vida e teve seus livros queimados e elencados no index da “Santa Inquisição”.

a) Aproveitando essa contextualização, pergunta-se: quanto tempo durava uma oscilação do Pendulo de Foucault de pequenas oscilações?

Simples, basta aplicar a fórmula anteriormente apresenta para o período do pêndulo simples e substituir os valores?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2.3,14 \sqrt{\frac{67}{9,8}} = 16,42 \text{ s.}$$

b) Outra pergunta: se oscilar nos polos terrestres, quantas vezes ele oscila até voltar à direção inicial?

$$\text{Basta fazer } \frac{24 \text{ h}}{16,42 \text{ s}} = \frac{24.3600 \text{ s}}{16,42 \text{ s}} = 5261,88 \text{ vezes.}$$

5.5.6. Gravitação e um túnel que atravessa o Planeta

Deixa-se cair um corpo de massa m da boca de um poço que atravessa a Terra, passando pelo seu centro. Sendo R o raio da Terra e x a distância da pedra à boca do poço, desprezando atritos e a rotação da Terra, para $|x| \leq R$, o corpo fica submetido à ação de uma força gravitacional dada por $F = -\frac{m \cdot g}{R} x$, em que a aceleração gravitacional na superfície da Terra é $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, o raio da Terra é $R = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$ e x é a distância do corpo ao centro da Terra (origem de x). Nessas condições, vamos encontrar o tempo de trânsito da boca do poço ao centro da Terra e a velocidade do corpo ao passar pelo centro do planeta.

Note que foi dada a expressão da força resultante que atua sobre o corpo e, importante, a força depende da posição (x) do corpo. Pela 2ª Lei de Newton podemos escrever:

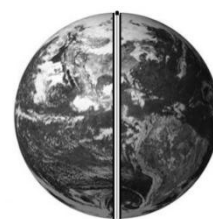
$$F_R = F \rightarrow m \cdot a = -\frac{m \cdot g}{R} x \rightarrow a = -\frac{g}{R} x.$$

Retomando a equação fundamental do MHS, $a = -\omega^2 \cdot x$ e comparando, vem:

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

$$\text{Mas, do MCU, } \omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ assim: } \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{R}} \rightarrow T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Figura 5.15 - Corpo atravessando o planeta e oscilando em MHS.



Fonte: Adaptada pelo autor.

Substituindo os dados, finalmente, encontramos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{6,4 \cdot 10^6}{10}} \rightarrow T = 5026,55 \text{ s} \cong 84 \text{ min.}$$

O tempo que procuramos é um quarto desse valor, ou seja, 21 min. Já, a velocidade no centro é a máxima e dada por $v = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$.

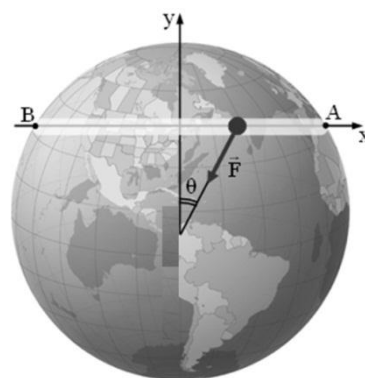
Mas o valor máximo ocorre se $\text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) = -1$.

$$\text{Então: } v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A = 6,4 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\frac{10}{6,4 \cdot 10^6}} = 8,0 \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{\text{s}}.$$

5.5.7 Um túnel, um trilho e um vagão.

Essa questão é uma variação da anterior. Imagine um túnel muito longo e retilíneo, que vai do ponto A até outro ponto B distante centenas de quilômetros. Nesse túnel é feito um trilho (sem atrito) e se soltarmos um vagão em A ele desliza até B. Se ninguém segurá-lo em B, ele volta para A. Evidente que isso se ocorre se todos os atritos são negligenciado.

Figura 5.16 - Um trilho furando o planeta.



Fonte: Adaptada pelo autor.

Eis um modo legal de mandar carga entre dois pontos distantes sem gastar energia, usando só a força da gravidade, não é? A pergunta é: quanto tempo o vagão levará para ir de A até B, usando só a gravidade? Despreze todos os atritos.

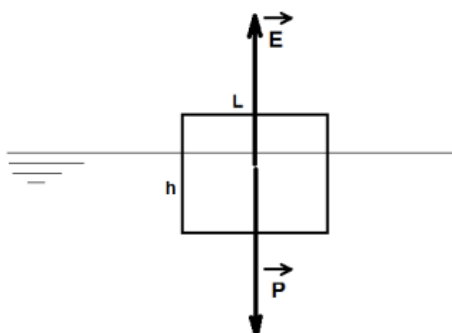
No interior do túnel a força que impulsiona o vagão é o componente da gravitação na direção do trilho. O movimento do vagão, como o da pedra no problema anterior, é um movimento harmônico simples, de ida e volta. Só que agora a constante k será menor por um fator cosseno, pois a força agora é só a componente cosseno. Mas, a distância entre A e B também diminuiu exatamente para o mesmo fator cosseno, em relação ao poço do problema anterior. Logo, o período será o mesmo de antes, 84 minutos e 24 segundos. Para ir de A a B gasta-se meio período. Note que em todo M.H.S. o período independe da amplitude do movimento.

5.5.8 O Balanço da canoa

Um cubo de madeira, de densidade ρ e aresta L , flutua em um líquido de densidade ρ' (sendo $\rho < \rho'$), com suas faces superior e inferior horizontais. O cubo é empurrado para baixo, de modo que sua face superior permaneça fora do líquido. Abandonando-se o cubo e desprezando-se os atritos, vamos mostrar, matematicamente, que o cubo passará a executar um MHS e calcule o período de oscilação do cubo.

Vamos à resolução: duas forças agem no bloco, o peso ($\vec{P}$) e o empuxo²⁴ ($\vec{E}$).

Figura 5.17 - Cubo oscilando na superfície de um líquido.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na situação de equilíbrio, $F_R = 0$. Logo,

$$E = P \rightarrow \rho' v_{\text{submerso}} g = \rho V g \rightarrow \rho' L^2 h g = \rho L^3 g \rightarrow \rho' h = \rho L.$$

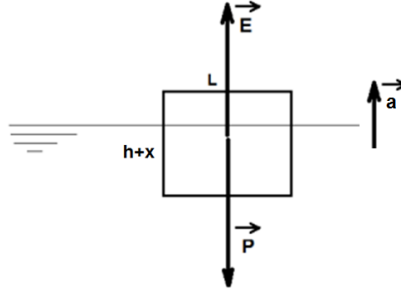
Agora, empurrando o bloco para baixo de uma profundidade $h + x$, a força resultante não é mais nula, ou seja, o bloco sai do equilíbrio, o que ocorreria se ele fosse deslocado para cima de uma distância x .

²⁴ Quando um corpo está total ou parcialmente imerso em um fluido em equilíbrio, ficará sob a ação de uma força vertical para cima que dependerá da porção do corpo que está imersa, ou seja, da porção de líquido deslocado. Ela é denominada de Empuxo do fluido sobre o corpo. O princípio de Arquimedes quantifica o valor desta força, como o peso do líquido deslocado. Assim,

$$E = P_{\text{líquido deslocado}} = m_{\text{líquido deslocado}} \cdot g \rightarrow E = d_{\text{líquido deslocado}} \cdot V_{\text{submerso}} \cdot g.$$

Dessa forma, o bloco adquiriu uma aceleração ($\vec{a}$), não nula.

Figura 5.18 -Cubo oscilando na superfície de um líquido, com dados numéricos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Então,

$$F_R = E - P \rightarrow ma = -(\rho' L^2 (h+x)g - \rho L^3 g) \rightarrow \rho L^3 a = -(\rho' L^2 (h+x)g - \rho L^3 g) \rightarrow$$

$$\rho L^3 a = -(\rho' \frac{L^3}{L} (h+x)g - \rho L^3 g) \rightarrow \rho a = -(\rho' \frac{1}{L} (h+x)g - \rho g) \rightarrow$$

$$\rho a = -\left(\frac{\rho' (h+x)g - \rho g L}{L}\right) \rightarrow$$

$$\rho a = \frac{(-\rho' h - \rho' x + \rho L)g}{L}$$

Mas, $\rho' h = \rho L$, então:

$$\rho a = -\frac{\rho' x g}{L} \rightarrow$$

$$a = -\left(\frac{\rho' g}{\rho L}\right)x.$$

Que é a forma da equação característica de um MHS.

Como, $a = -\omega^2 x$ e $\omega = \frac{2\pi}{T}$, vem $a = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$. Igualando, vem

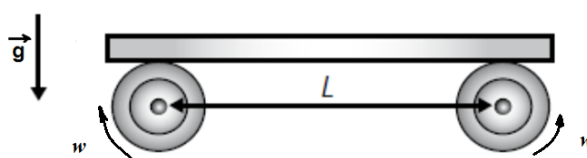
$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(\frac{\rho' g}{\rho L}\right) \rightarrow$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho L}{\rho' g}}.$$

5.5.9. A barra que vibra

Uma barra de massa m repousa simétrica e horizontalmente sobre dois cilindros idênticos que giram em velocidades angulares w , contrárias, constantes e de mesmo módulo, conforme a figura. A distância entre os centros dos cilindros é L e o coeficiente de atrito entre este e a barra é μ . Ache a frequência das oscilações, sabendo que a barra foi sutilmente deslocada para a direita de uma distância x .

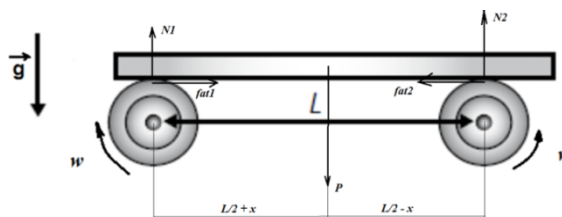
Figura 5.19 -Barra horizontal oscilando em cilindros com atrito.



Fonte: Elaborada pelo autor.

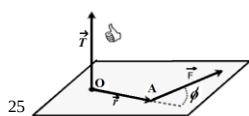
Note que as forças que agem na barra são 5 (cinco): o peso da barra (P); as duas normais, N_1 e N_2 , sendo uma em cada apoio e as duas forças de atrito, fat_1 e fat_2 , uma em cada apoio, conforme a Figura 5.20, com a barra já ligeiramente deslocada, de uma distância x , para a direita.

Figura 5.20 - Barra horizontal oscilando em cilindros com atrito, com dados numéricos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando a condição de equilíbrio de rotação em torno do apoio (1), na qual o torque²⁵ resultante em torno deste apoio é nulo, pois a barra está sem qualquer rotação.



25

Torque $\vec{T}$ ou momento de uma força $\vec{F}$ é uma grandeza física definida pelo produto vetorial entre a força aplicada em relação a um determinado ponto (polo) pela "distância vetorial" $\vec{r}$ que separa o ponto de aplicação dessa força ao ponto (polo), conforme a figura a seguir. Ou seja, $\vec{T} = \vec{F} \times \vec{r}$. Se $\phi = 90^\circ$, interpretaremos o módulo de $\vec{T}$ pela expressão matemática $T = F \cdot r$, na qual T será positivo se a rotação ocorrer no sentido horário, pois se ocorrer no anti-horário, será negativo.

As forças N_1 , fat_1 e fat_2 não exercem torque em relação ao apoio (1). Então, o torque total dá-se apenas pela ação das forças N_2 e P . Logo,

$$N_2 \cdot L = P \cdot \left(\frac{L}{2} + x \right) \rightarrow N_2 = P \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right).$$

Mas,

$$N_1 = P - N_2 = P - P \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) = P \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right).$$

Logo,

$$N_2 > N_1 \rightarrow \mu \cdot N_2 > \mu \cdot N_1 \rightarrow fat_2 > fat_1.$$

Logo a força resultante na placa é diferente de zero. Aplicando a Segunda Lei de Newton²⁶, vem:

$$F_{Resultante} = fat_2 - fat_1 \rightarrow ma = \mu \cdot N_2 - \mu \cdot N_1 \rightarrow ma = \mu \cdot N_2 - \mu \cdot N_1 \rightarrow$$

$$ma = \mu(N_2 - N_1) \rightarrow ma = \mu \left[P \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) - P \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L} \right) \right] \rightarrow ma = \mu 2P \frac{x}{L}.$$

Como, a e x possuem sentidos opostos, tem-se:

$$ma = -\mu 2mg \frac{x}{L} \rightarrow a = -\mu 2g \frac{x}{L} \rightarrow$$

$$a = -\left(\frac{2\mu g}{L} \right) x.$$

Que é exatamente o formato da expressão da aceleração do MHS ($a = -\omega^2 \cdot x$).

$$\text{Sendo assim, } \omega^2 = \frac{2\mu g}{L} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{L}} \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2\mu g}{L}}.$$

Finalmente,

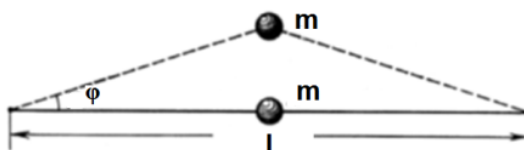
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2\mu g}}.$$

²⁶ A Segunda Lei de Newton afirma que a força resultante ($\vec{F}_{Resultante}$) em um corpo é o produto da massa (m) desse corpo pela aceleração ($\vec{a}$) que ele adquire nessa situação. Ou seja, $\vec{F}_{Resultante} = m \cdot \vec{a}$.

5.5.10. A corda que vibra e soa

(SARAEVA) – Uma corda fixa nos extremos, Figura 5.21, é distendida com uma força de tração f . No meio da corda é fixada uma esfera de massa m . Determine o período das pequenas oscilações do bloco fixo na corda. Desconsidere a massa da corda e a gravidade local.

Figura 5.21 - Corda vibrando em pequenas oscilações.

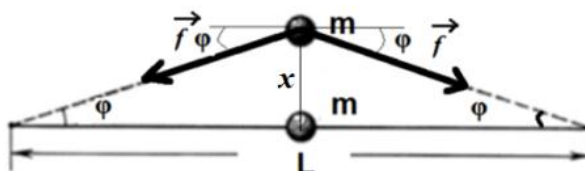


Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução comentada

Observe na Figura 5.22 as forças que agem na esfera.

Figura 5.22 - Corda vibrando em pequenas oscilações, com as forças atuando na massa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A força resultante na esfera é perpendicular à corda, contrária à deformação x e dada por

$$F_{\text{resultante}} = 2f \sin(\varphi) \rightarrow m \cdot a = 2f \frac{(-x)}{\frac{L}{2}} \rightarrow a = - \left[\frac{4f}{m \cdot L} \right] x.$$

Que é exatamente o formato da expressão da aceleração do MHS ($a = -\omega^2 \cdot x$).

Comparando, vem:

$$\omega^2 = \frac{4f}{m \cdot L} \rightarrow \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{4f}{m \cdot L} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot L}{4f}}.$$

CONCLUSÃO

Esse trabalho revela a importância de um professor de Física do Ensino Médio dominar bem a Trigonometria, dada sua importância ostensiva no desenvolvimento teórico e na resolução de grande quantidade de problemas matemáticos que se apresentam nos fenômenos naturais observados em nosso dia-a-dia. Com ela disponível, um aluno do Ensino Médio terá mais tranquilidade para aprender grande parte da Física e obter bons resultados em provas de Física e Matemática de diversos vestibulares, ou mesmo do ENEM. Mas é, sobretudo, nos vestibulares militares, a exemplo do ITA e do IME, que o vestibulando e os seus professores de Física podem fazer uso imediato da Trigonometria reescrita de forma contextualizada nesse material.

Aparentemente, alguns professores de Matemática poderão encontrar dificuldade para utilizar várias das questões aqui propostas, devido ao simples desconhecimento de alguns conceitos utilizados na Física. Porém, são conceitos de domínio de grande parte dos estudantes do Ensino Médio. São, sobretudo, conteúdos cobrados pelo ENEM. Portanto, a professor de Matemática que queira utilizar essa compilação, contextualizando sua Matemática com a Física, e que não estiver com alguns conceitos físicos em dia, precisar de uma pequena atualização, lembrando ou adquirindo esses conteúdos. Muitos desses conteúdos estão aqui apresentados em notas de rodapé, bem como nos anexos 1 e 2. Fora isso, o professor pode buscar esses conceitos em qualquer manual didático de Física do Ensino Médio.

Uma forma bem interessante de usar essa compilação seria marcar com os alunos aulas interdisciplinares, juntando turmas e professores, eles funcionam. O diálogo entre a Física e a Matemática está pronto nessa compilação sistemática, evidenciando esse vínculo epistemológico entre a Trigonometria e a Física e disponibilizando bons e variados exemplos. Num azulão desses, pode ser usado o conteúdo de um capítulo a cada vez ou uma mescla de fragmentos de todos os capítulos.

O Ministério da Educação do Brasil define um perfil, para o currículo do Ensino Médio, apoiado em competências básicas para a inserção de nossos jovens na vida adulta. Além disso, partindo de princípios definidos na LDB, os PCNs pregam o abandono do ensino compartimentalizado e baseado no acúmulo de informações, substituindo-o por um ensino que dá significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização e mediante a interdisciplinaridade, incentivando o raciocínio e a capacidade de aprender. Eles propõem uma reorganização curricular em áreas de conhecimento, com o objetivo de facilitar o

desenvolvimento dos conteúdos, numa perspectiva de interdisciplinaridade, transdisciplinaridade e contextualização. Portanto, nesse viés, esse estudo contribui sobremaneira com a apresentação de duas disciplinas de conhecimento, quando entrega aos professores de Física e Matemática do Ensino Médio um material que compila as situações que aproximam de forma contundente a Trigonometria e a Física.

Mesmo sendo conteúdos já tratados pelos livros didáticos, porém de forma esparsa, espalhada, esse trabalho fornece aos professores de Matemática e de Física do Ensino Médio, no mínimo, uma fonte de pesquisa focada, especialmente na colheita de exercícios ou situações problemas contextualizadas de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme já foi observado na introdução, um quinto das questões de Física do Vestibular do ITA pressupõe o uso da Trigonometria em suas resoluções. Também são usados muitos conceitos físicos na prova de Matemática. Essa estatística ajuda a entender esse trabalho de organização desse vínculo entre Trigonometria e Física. No vestibular do IME, os dados são mais contundentes, as questões com uso de Trigonometria chegam a 37% da prova de Matemática.

O NOVO ENEM inverte o processo, usa pouca Trigonometria na prova de Física e muita Física nas questões contextualizadas de Trigonometria da prova de Matemática. Ele contextualiza a Trigonometria com a Física, foram dados exemplos. Então, a Trigonometria serve à Física e a Física serve à Matemática. E esse trabalho serve aos professores e aos alunos dessas duas disciplinas.

REFERÊNCIAS

BASTOS NETO, R. B. **Fundamentos de mecânica trabalho e energia, sistemas de partículas, dinâmica do centro de massa, sistema com massa variável**. 2. ed. Fortaleza: Editora Vestseller, 2010. v. 2.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Estados Unidos da América: Editora Edgard Blucher LTDA, 1974.

DOCA, RICARDO SELON. **Tópicos de Física, 1**. Mecânica. São Paulo: Saraiva, 2007.

ENEM, Matriz do Competências e Habilidades, Brasil, 2009.

GNADIG, P.; HONEYEK, G. **200 Puzzling physics problems**. Inglaterra Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

HALLIDAY, D.; RESNIK, R.; MERRILL, J. Fundamentos De Física Eletromagnetismo. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos. 1994.

KUMAR, ARUM. **Problems in physics**. New Delhi: Atlantic Publishers and Distributors, 2003.

LIMA; E. L. CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Temas e problemas elementares. Coleção do Professor de Matemática**. Brasil: SBM, 2005.

KITTEL, C.; KNIGHT, W. D.; RUDERMAN, M. A. **Mechanics**. 2. ed. New York: Berkeley Physics Course, 1965.

MENDONÇA, C.; RINO, J. P. O alcance máximo de um projétil: uma derivação algébrica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 19, n. 2, jun. 1997.

NEWTON, H. G. **Tópicos de física mecânica incluem hidrodinâmica**. Brasil: Editora Saraiva, 2007.

OKUNO, E.; CALDAS, I. L.; CHOW, C. **Física para ciências biológicas e biomédicas**. São Paulo: Editora Harbra, 1892.

PAIVA, MANOEL. Matemática, Vol.2. 3ª Edição. São Paulo: Moderna, 2015.

PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), Ensino Médio, Brasil, 2010.

PRAKADHAN, A. **A problem book in physics**. Editora D C Pandey.

RAMALHO JÚNIOR, FRANCISCO; FERRARO, NICOLAU GILBERTO; SOARES, PAULO ANTÔNIO TOLEDO. Os Fundamentos da Física, Vol. 2: São Paulo. Editora Moderna, 2007.

SINGH, A. K. **Problems in physics**. New Delhi: New Age International Publishers, 2007.

SRIVASTAVA, S. L. New Delhi: Atlantic, Vol.1, 2004.

<http://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo0910200706.htm>

ANEXOS

ANEXO A¹

MOVIMENTO UNIFORME E MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

1 INTRODUÇÃO

A Física, a mais essencial das ciências, lida com modelos teóricos que explicam uma grande variedade de fenômenos naturais. Entre eles, os movimentos dos corpos. Denomina-se MECÂNICA, a parte da Física dedicada ao estudo dos movimentos dos corpos. Por conveniência epistemológica e uma boa acomodação didática, a MECÂNICA é subdividida em três flancos teóricos: CINEMÁTICA, DINÂMICA e ESTÁTICA.

A CINEMÁTICA é a parte da MECÂNICA que se empenha no estudo descritivo dos movimentos dos corpos. É o estudo de como os movimentos ocorrem. A preocupação básica é a de equacionar os movimentos, sem, no entanto, ocupar-se com a descoberta e a justificativa de suas causas. Conhecidas a posição (s_0) e a velocidade (v_0) de um móvel num dado instante (t_0), devemos ser capazes de encontrar a posição (s) e a velocidade (v) num instante posterior (t). Portanto, a tarefa primordial da Cinemática é a determinação das funções horárias dos espaços (posições) e das velocidades [$s = f(t)$ e $v = f(t)$] do móvel. Entenda-se por função horária aquela que descreve como varia uma determinada grandeza física em função do tempo (t).

Já a DINÂMICA estuda as causas, as justificativas, dos movimentos e a ESTÁTICA estuda os corpos em repouso, em equilíbrio estático. Afinal, o repouso é um estado de movimento.

2. CONCEITOS BÁSICOS

2.1 Ponto material e corpo extenso

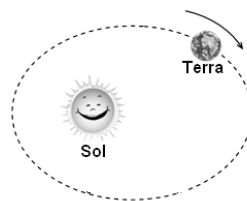
Os corpos, a exemplo do espaço, são tridimensionais. Porém, corpos cujas dimensões são desprezíveis quando comparadas às outras dimensões envolvidas no fenômeno estudado são considerados e denominados pontos materiais. Ao contrário, quando suas dimensões são

¹ DOCA, Tópicos 1, 2, 3 e 4.

significativas, ele é considerado e denominado corpo extenso. São claramente conceitos relativos.

Não faz sentido pensar em rotação de um ponto. Sendo, então, ponto material um conceito elaborado para descrever e analisar estritamente movimentos de translação de um corpo.

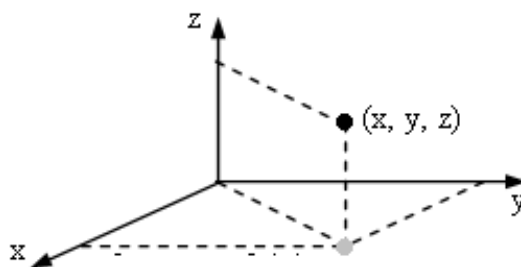
Por exemplo, quando se estuda o movimento de translação da Terra em torno do Sol, a Terra pode ser considerada um ponto material. No entanto, ao se estudar o movimento de rotação da Terra em torno do seu eixo, ela deve ser abordada como um corpo extenso.



2.2 REFERENCIAL

Referencial é um sistema de coordenadas ortogonais, fixo numa dada posição, a partir do qual as observações e medidas físicas serão efetuadas no estudo de um determinado movimento.

Para identificar a posição de um ponto no espaço, são necessárias três coordenadas (x , y , z), indicando que se trata de uma tridimensionalidade.



Além disso, há três graus de liberdade para girar um corpo extenso.

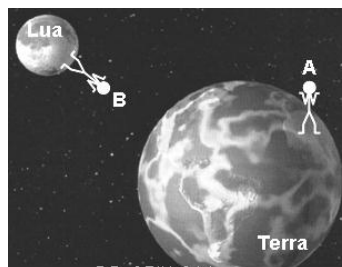
É fato pacífico que não há referencial absoluto, não há o referencial dos referenciais. No momento oportuno, os referenciais serão classificados em duas categorias: inerciais e não inerciais. Essa classificação só se fará necessária no estudo da Dinâmica.

2.3 REPOUSO E MOVIMENTO

Um corpo está em repouso, em relação a um determinado referencial, se, e somente se, todas as suas coordenadas (x , y , z) permanecem as mesmas no decorrer do tempo. Caso contrário, um corpo está em movimento, em relação a um determinado referencial, se pelo menos uma de suas coordenadas (x , y , z) variar no decorrer do tempo.

Note que os conceitos de movimento e repouso, bem como suas aplicações, são dependentes da adoção de um referencial, portanto, são classificações relativas, dependentes do referencial adotado. Não há repouso e movimento absolutos.

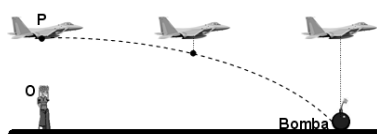
Na figura, o observador **A** fixo na Terra percebe a Terra em repouso e a Lua em movimento; porém, o observador **B** fixo na Lua percebe a Lua em repouso e a Terra em movimento.



2.4 TRAJETÓRIA

Denomina-se trajetória o conjunto das sucessivas posições ocupadas por um móvel no decorrer do tempo em relação a um determinado referencial. Da definição, é imediato inferir que a trajetória de um determinado móvel também do referencial.

Na figura, exemplo clássico, um avião voando horizontalmente com velocidade constante, em relação ao solo, solta uma bomba. Desprezando efeitos dissipativos como a resistência do ar e considerando a gravidade terrestre uniforme, a trajetória da bomba em relação a um observador (**O**) fixo na Terra é um arco de parábola; porém, em relação ao piloto (**P**) do avião, a trajetória da bomba é um segmento de reta.



2.5 POSIÇÃO E DESLOCAMENTO (ESCALAR E VETORIAL)

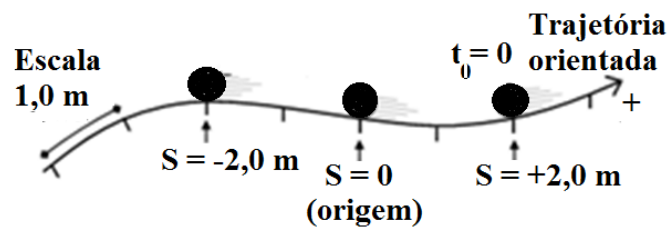
Posição (ou espaço) é uma grandeza física intrinsecamente vetorial, porém, é conveniente fazer uma análise escalar pela grande possibilidade de aplicação, além de ser uma análise facilitada em relação à vetorial.

Análise escalar



Na figura anterior, a posição escalar do carro **A** é igual a 20 km e a posição escalar do carro **B** é igual a 40 km.

A origem dos espaços é a posição onde o espaço é nulo ($S = 0$). Espaço *inicial* (S_0) é a posição que o móvel ocupa no instante em que o cronômetro é zerado, ou seja, na origem dos tempos ($t = 0$).



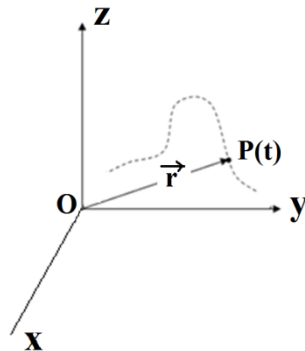
Quando o móvel desloca-se de uma posição (S_0) para outra (S), define-se o deslocamento vetorial (ΔS), que é fornecido pela diferença entre S e S_0 , ou seja,

$$[\Delta S = S - S_0].$$

Análise vetorial

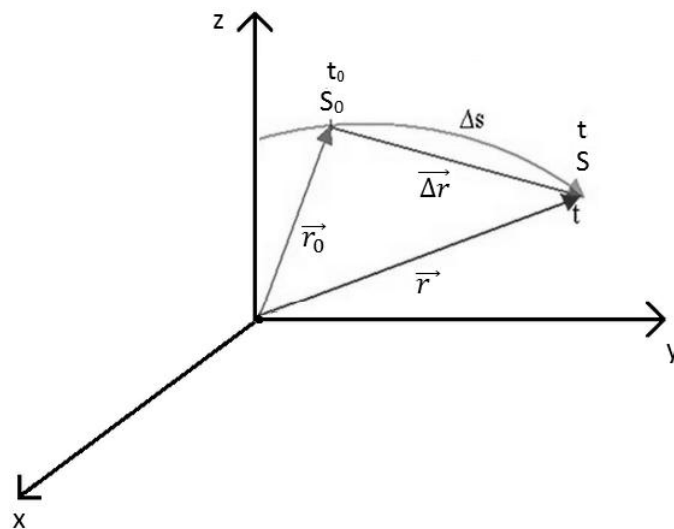
A posição vetorial $\vec{r}$ de corpo, num determinado instante t , pode ser fornecida por um vetor com origem no sistema de referência (O) e extremidade no ponto (P), local onde

corpo se encontra no instante em questão. Assim, em cada ponto, o corpo será localizado pelo vetor posição $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.



Quando o móvel desloca-se de uma posição ($\vec{r}_0$) para outra ($\vec{r}$), define-se o deslocamento vetorial ($\Delta\vec{r}$), que é fornecido pela diferença entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{r}_0$, ou seja,

$$[\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0].$$



Note que, em qualquer movimento $|\Delta s| \geq |\Delta\vec{r}|$.

3 VELOCIDADE

Define-se velocidade como a medida da rapidez com que a posição (espaço) do móvel varia. Deve-se considerar que foram definidos dois tipos de deslocamento (escalar e vetorial), assim, far-se-á necessário definir dois “tipos” de velocidade: a escalar e a vetorial.

A exemplo da **posição** (espaço), a **velocidade** é uma grandeza essencialmente vetorial. A velocidade escalar é definida como artifício de simplificação. Sua extrema aplicação na maioria dos problemas envolvendo contextualização com o dia-a-dia torna-a fundamental e necessária.

3.1 VELOCIDADE ESCALAR MÉDIA (V_m)

É analiticamente definida como sendo a razão entre o deslocamento escalar (Δs) e o intervalo de tempo (Δt) necessário para realizar o deslocamento, ou seja:

$$\left[V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \right].$$

3.2 VELOCIDADE VETORIAL MÉDIA ($\overrightarrow{V_m}$)

A velocidade vetorial média é analiticamente definida pela razão entre o deslocamento vetorial $\overrightarrow{\Delta r}$ e o tempo Δt gasto para executar tal deslocamento, ou seja:

$$\left[\overrightarrow{V_m} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \right].$$

A direção e o sentido da velocidade vetorial média são os mesmos do deslocamento vetorial. Conforme citado anteriormente, $|\Delta s| \geq |\Delta \vec{r}|$, assim, conclui-se que $|V_m| \geq |\overrightarrow{V_m}|$, sendo que a igualdade dá-se em trajetórias retilíneas.

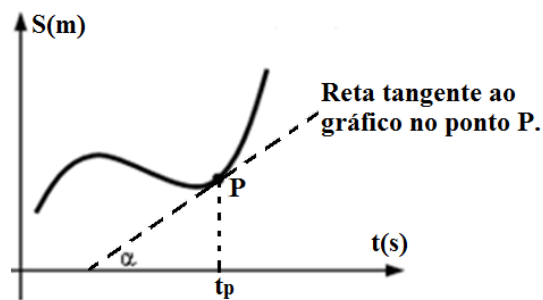
3.3 VELOCIDADE ESCALAR INSTANTÂNEA (V)

Da definição de velocidade escalar média, notamos que podemos calcular a média das velocidades desenvolvidas por um móvel num certo intervalo de tempo Δt . Afinal, o que nós calcularíamos se fizéssemos este intervalo de tempo muito pequeno, ou seja, tendendo a zero? Neste caso, estaríamos calculando a velocidade em um determinado instante, ou seja, a velocidade instantânea. Aqui é utilizada a ideia de limite.

Assim, pode-se escrever:

$$\left[V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\partial s}{\partial t} (\textit{derivada}) \right].$$

Num gráfico $S \times t$, a declividade da reta tangente à curva em cada ponto fornece a velocidade escalar do móvel neste ponto, e, este cálculo é feito por meio da aplicação da “derivada” da função no ponto.



A tangente do ângulo α é numericamente igual à velocidade escalar do móvel no instante $t = t_p$. Caso haja a função analítica $s = s(t)$, a tangente é calculada por meio da operação “derivada”.

Se o espaço é crescente, a velocidade escalar é positiva e o movimento será classificado como **movimento progressivo**. E, se o espaço é decrescente, a velocidade escalar é negativa, e o movimento será classificado como **movimento regressivo** ou **retrógrado**.

Veja o esquema a seguir



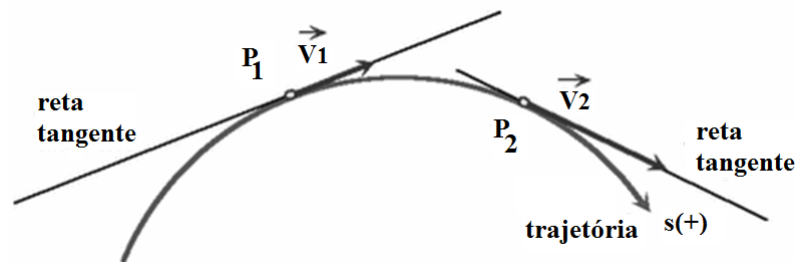
3.4 VELOCIDADE VETORIAL INSTANTÂNEA ($\vec{V}$)

Com $\Delta t \rightarrow 0$, $|\Delta s| \rightarrow |\Delta \vec{r}|$, de onde se conclui que $|V_m| \rightarrow |\vec{V}_m|$, ou seja, em módulo, as velocidades escalar e vetorial instantâneas são coincidentes. O que é um resultado absolutamente esperado, sobretudo, porque um móvel não poderia mesmo apresentar dois valores para sua velocidade em um determinado instante.

Mas por ser uma grandeza vetorial, $\vec{V}$ apresenta direção e sentido e a escalar (V) apresenta um sinal indicando se o movimento é progressivo ou retrógrado.

A direção do vetor velocidade em cada ponto do movimento é sempre tangente à trajetória do móvel e o sentido é sempre o mesmo do movimento.

Na figura estão representados em dois pontos os vetores velocidade para um móvel descrevendo um movimento curvilíneo no sentido indicado.



4 MOVIMENTO UNIFORME (MU)

Movimento Uniforme (M.U.) é aquele em que o módulo da velocidade permanece constante. Assim, a velocidade escalar média deve ser igual à velocidade escalar instantânea.

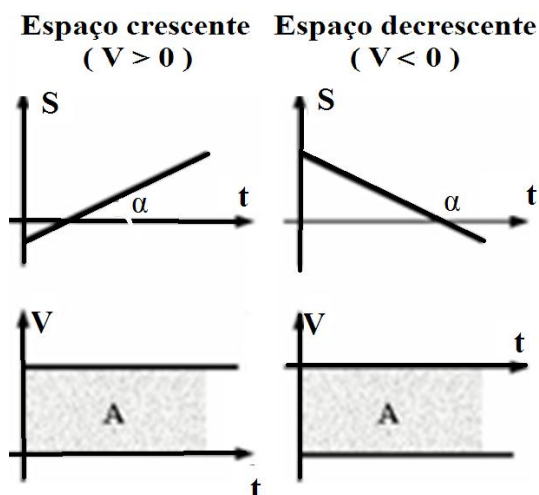
Portanto, podemos escrever: $V = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s-s_0}{t-t_0}$, logo:

$$[S = S_0 + V \cdot t].$$

Esta é a função horária dos espaços (posições) que traduz matematicamente o movimento uniforme, indicando a posição do móvel em cada instante. Basta conhecer a posição inicial do móvel e a sua velocidade, para que se possa determinar sua posição em qualquer instante subsequente.

Como a função horária dos espaços é do primeiro grau, o gráfico $s \times t$ é uma reta. Isso não significa que sua trajetória deva ser uma reta. Podemos ter MU em uma trajetória qualquer. Portanto, não há de se confundir trajetória com o gráfico $s \times t$.

Eis os possíveis gráficos da posição e da velocidade escalares para todo MOVIMENTO UNIFORME.



Do conceito de derivada, a tangente do ângulo α fornece o valor da velocidade do móvel.

Observe o gráfico da velocidade escalar em função do tempo. Se calcularmos a área hachurada (**A**), obteremos o valor do deslocamento escalar (ΔS) do móvel até o instante em questão. Assim como o cálculo da tangente do ângulo de inclinação da reta no gráfico do espaço em função do tempo nos dá a velocidade escalar (ou seja, a velocidade escalar é a derivada do espaço em função do tempo), o cálculo da área sob o gráfico da velocidade escalar fornece o deslocamento escalar (ou seja, a integral da velocidade escalar em função do tempo é o deslocamento escalar). Portanto, integrar uma função em função de uma variável nada mais é do que o cálculo da área sob o gráfico desta função versus variável. Podemos dizer que a integral é o caminho inverso ao da derivada. Esse conceito pode ser útil em algum momento.

5 ACELERAÇÃO

A aceleração é a medida da rapidez com que a velocidade varia. Como foram definidos dois tipos de velocidade (escalar e vetorial), também serão definidos dois tipos de aceleração: a escalar e a vetorial. Aceleração é uma grandeza essencialmente vetorial. Porém, a adoção do conceito de aceleração escalar é muito útil na interpretação da maioria dos problemas ligados ao dia-a-dia.

Uma forma de entender o conceito de aceleração é aceitar a ideia de que a aceleração é a variação da velocidade.

5.1 ACELERAÇÃO ESCALAR MÉDIA (a_m)

É analiticamente definida como a razão entre a variação da velocidade escalar (ΔV) e o intervalo de tempo gasto para ocorrer tal variação (Δt), ou seja:

$$\left[a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} \right].$$

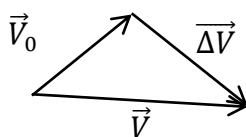
Observe que a variação da velocidade escalar é apenas uma subtração de dois números, a velocidade escalar final e a inicial, portanto, pode assumir valores positivos e negativos, sem, no entanto, haver preocupação com a direção.

5.2 ACELERAÇÃO VETORIAL MÉDIA ($\vec{a}_m$)

É analiticamente definida pela razão entre o módulo da variação da velocidade vetorial $\Delta \vec{V}$ e o intervalo de tempo (Δt) em que ocorreu tal variação.

$$\left[\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \right].$$

Possui mesma direção e sentido do vetor que representa a variação da velocidade. O vetor variação de velocidade deve ser calculado pela subtração de dois vetores.



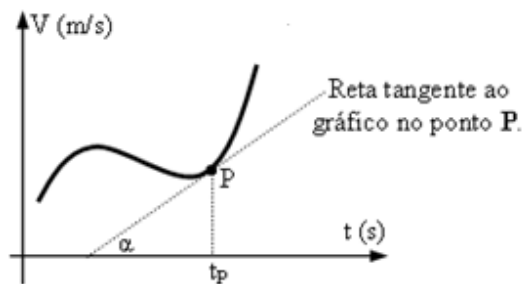
$$[\Delta \vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_0].$$

5.3 ACELERAÇÃO ESCALAR INSTANTÂNEA (a)

A partir do conceito de aceleração escalar média, notamos que podemos calcular a média das acelerações desenvolvidas por um móvel num certo intervalo de tempo Δt . O que nós calcularíamos se fizéssemos este intervalo de tempo muito pequeno, ou seja, tendendo a zero? Neste caso, estaríamos calculando a aceleração escalar em um determinado instante, ou seja, a aceleração escalar instantânea. Assim, podemos escrever:

$$\left[a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\partial V}{\partial t} (\textit{derivada}) \right].$$

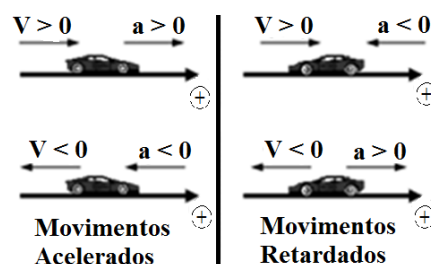
Num gráfico $V \times t$, a declividade da reta tangente em cada ponto fornece a aceleração escalar do móvel no instante correspondente, e, este cálculo é feito analiticamente por meio da aplicação da “derivada”.



A tangente do ângulo α é numericamente igual à aceleração escalar do móvel no instante $t = t_p$.

5.4 Classificação dos movimentos com aceleração escalar (movimentos variados)

Para acelerar um móvel deve-se ter a aceleração “a favor” da velocidade, ou seja, ou ambas para direita (ambas positivas), ou ambas para esquerda (ambas negativas) e, se quisermos frear, deve-se ter a aceleração “contra” a velocidade, ou seja, velocidade e aceleração em sentidos contrários (sinais contrários).



Obs.: Um movimento acelerado não é aquele que tem aceleração positiva, e sim, aquele em que velocidade e aceleração possuem o mesmo sinal, o mesmo sentido.

Movimento acelerado

É aquele cujo módulo da velocidade do móvel aumenta, e, neste caso, velocidade e aceleração escalares têm o mesmo sinal (mesmo sentido).

Movimento retardado

É aquele cujo módulo da velocidade do móvel diminui, e, neste caso, velocidade e aceleração têm sinais contrários (sentidos opostos).

Se o móvel mantiver o módulo da velocidade constante, não apresenta aceleração escalar e seu movimento é denominado uniforme, conforme estudado no módulo anterior.

5.5 ACELERAÇÃO VETORIAL INSTANTÂNEA ($\vec{a}$)

Mais uma vez, aplicando o limite, na situação em que $\Delta t \rightarrow 0$, uma grandeza média tende à instantânea. Isso, naturalmente, ocorre com a aceleração também. Então, tem-se:

$$\left[\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} (\textit{derivada}) \right].$$

Por outro lado, não é muito adequado, especialmente num curso de ensino médio, dar continuidade a esse conceito utilizando-se de derivações vetoriais. Há uma maneira de tratar esse tema de forma mais contextualizada e mais simples, pensando o vetor aceleração $\vec{a}$ como tendo dois componentes, cada um cumprindo uma tarefa específica e de grande aplicabilidade. Com isso, vamos abandonar a definição acima para efeito de desenvolvimento do conceito de aceleração instantânea e considerar a tática da decomposição de vetores.

O vetor velocidade pode mudar de módulo ou de direção. O componente da aceleração tangencial ao movimento modifica o módulo do vetor velocidade e componente normal ao movimento modifica a direção. O componente normal ao movimento é centrípeto, ou seja, voltado para o centro da curva que descreve a trajetória do móvel.

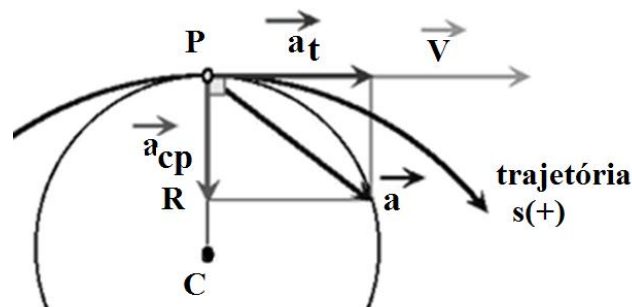
5.5.1 Componente tangencial ($\vec{a}_T$) da aceleração instantânea

Ele modifica o módulo da velocidade, ou seja, ele cumpre o papel da aceleração escalar, são iguais em módulo. A aceleração tangencial é apenas o módulo da escalar acrescido da direção tangencial e sentido do movimento, se acelerado e sentido oposto ao do movimento, se retardado. $[|\vec{a}_T| = |a_{\text{ESCALAR}}|]$

5.5.2 Componente centrípeto ($\vec{a}_C$) da aceleração instantânea

Ele modifica a direção do vetor velocidade. Apresenta direção radial e sentido voltado para o centro da curva. Seu módulo é dado por: $|\vec{a}_C| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$.

Eis uma ilustração de como se comportam os vetores no caso de um móvel executando um movimento circular acelerado.



Observe que o ângulo entre os componentes tangenciais e centrípetos da aceleração, quando não nulos, é de 90° . Deve-se utilizar o Teorema de Pitágoras para calcular o módulo da aceleração instantânea de um móvel. Assim: $[a^2 = a_T^2 + a_C^2]$.

Quadro resumo

	$\vec{a}_T$	$\vec{a}_C$
Módulo	Dado pelo módulo da derivada da velocidade escalar em função do tempo.	$\frac{v^2}{R}$
Direção	Tangente à trajetória do móvel.	Radial
Sentido	Sentido de $\vec{V}$ (acelerado) ou sentido contrário ao de $\vec{V}$ (retardado)	Aponta para o centro da trajetória.

6 MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO (MUV)

O MUV ocorre quando o móvel possui aceleração escalar constante e não nula. Sua trajetória pode ser qualquer uma. Considerando que a aceleração é a segunda derivada da função horária dos espaços, vale supor que a função horária dos espaços, para este movimento, será do segundo grau, do tipo: $S = A + B \cdot t + C \cdot t^2$, sendo **A**, **B** e **C** constantes que precisam ser determinadas.

6.1 FUNÇÃO HORÁRIA DA POSIÇÃO

Sabe-se que o espaço inicial (S_0) é a posição do móvel quando $t = 0$, logo concluímos que: $S_0 = A + B \cdot 0 + C \cdot 0^2 \rightarrow A = S_0$.

Se derivarmos o espaço em função do tempo (dS/dt), encontraremos a equação da velocidade instantânea do móvel, ou seja: $V = \frac{dS}{dt} = B + 2 \cdot C \cdot t$.

A velocidade do móvel está variando com o tempo (o que já esperávamos, pois estamos supondo que o movimento possui aceleração escalar) de maneira linear (equação é do primeiro grau), logo podemos dizer que a velocidade varia uniformemente, característica que dá nome ao movimento (movimento uniformemente variado). Já que a velocidade varia, faz sentido falar de uma velocidade inicial (V_0), que é a velocidade do móvel no instante $t = 0$, vemos que: $V_0 = B + 2 \cdot C \cdot 0 \rightarrow B = V_0$.

Derivando duas vezes a função do espaço, obtém-se a aceleração escalar instantânea do móvel, ou seja: $a = \frac{dv}{dt} = 2 \cdot C \rightarrow C = \frac{a}{2}$. A aceleração escalar, como era de se esperar, não possui dependência com o tempo, o que mostra que ela é constante e diferente de zero ($\gamma = 2C$). Substituindo os resultados encontrados para **A**, **B** e **C** na equação, obtém-se, finalmente, a função horária dos espaços para o M.U.V.

$$\left[S = S_0 + V_0 t + \frac{a}{2} t^2. \right]$$

6.2 FUNÇÃO HORÁRIA DA VELOCIDADE ESCALAR

A função horária das velocidades do móvel (que vai nos dar a velocidade do móvel em cada instante) é dada por:

$$V = \frac{dS}{dt} = V_0 + a \cdot t \rightarrow [V = V_0 + a \cdot t].$$

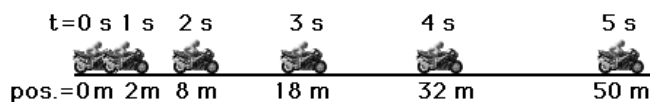
6.3 EQUAÇÃO DE TORRICELLI

Isolando o tempo na equação anterior e substituindo na do espaço, obtém-se uma equação independente do tempo, conhecida como **a equação de Torricelli**. A razão que encontrada é: $[V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S]$.

6.4 VELOCIDADE MÉDIA NO MUV

Como a função horária da velocidade é do primeiro grau, a velocidade escalar média do móvel ($V_m = \Delta S / \Delta t$) é igual à média aritmética das velocidades inicial e final neste intervalo de tempo, ou seja: $\left[\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{V + V_0}{2} \right]$.

A figura a seguir mostra uma motocicleta sendo acelerada uniformemente. Esse movimento é uniformemente variado?



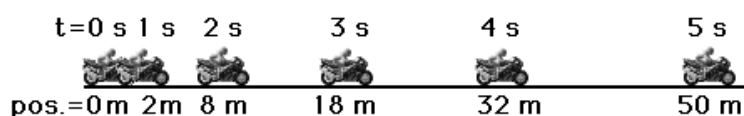
Vejam os. Tomando dois instantes separados por uma unidade de tempo como $n-1$ e n e fazendo a variação do espaço, vem:

$$S_n = S_0 + V_0 n + \frac{a}{2} n^2 \rightarrow S_{n-1} = S_0 + V_0 (n-1) + \frac{a}{2} (n-1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Fazendo } \Delta S_n = S_n - S_{n-1}, \text{ tem-se: } \Delta S_n &= S_0 + V_0 n + \frac{a}{2} n^2 - S_0 - V_0 (n-1) - \\ &\frac{a}{2} (n-1)^2 \rightarrow \Delta S_n = S_0 + V_0 n + \frac{a}{2} n^2 - S_0 - V_0 n + V_0 - \frac{a}{2} n^2 + an - \frac{a}{2} \rightarrow \Delta S_n = V_0 + an - \\ &\frac{a}{2} = V_0 + \frac{a}{2} + an - a \rightarrow \Delta S_n = (V_0 + \frac{a}{2}) + a(n-1). \end{aligned}$$

Esse resultado é idêntico ao termo geral $[a_n = a_1 + (n-1) \cdot r]$ de uma PA (progressão aritmética) de razão r igual a aceleração a .

Esse resultado responde a pergunta feita anteriormente, em relação ao movimento.

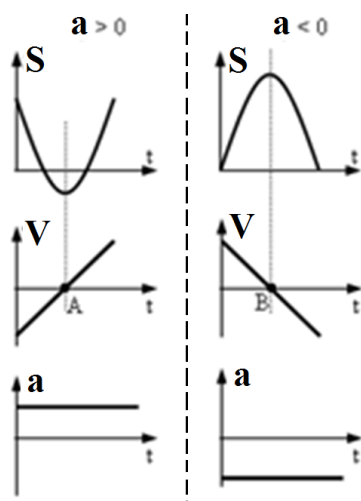


Basta fazer:

$50 - 32 = 18$; $32 - 18 = 14$; $18 - 8 = 10$ e $8 - 2 = 6$, para perceber que 18, 14, 10 e 6 forma uma PA de razão -4. Logo, o movimento é um MUV de aceleração igual -4 m/s^2 . Note que o resultado é obtido nas unidades que são fornecidos os dados tabelados.

6.5 OS DIAGRAMAS HORÁRIOS DO MUV

Como a aceleração escalar é constante e diferente de zero, graficamente há duas possibilidades ($a > 0$ e $a < 0$). O gráfico do espaço versus tempo será uma parábola (equação do segundo grau) de concavidade para cima (se $a > 0$) ou de concavidade para baixo (se $a < 0$) e o gráfico da velocidade versus tempo será uma reta inclinada (equação do primeiro grau) crescente (se $a > 0$) ou decrescente (se $a < 0$).



Enquanto o espaço é crescente, a velocidade escalar é positiva (movimento progressivo) e, enquanto o espaço é decrescente a velocidade escalar é negativa (movimento retrógrado).

Os pontos A e B, em destaque na figura, representam o ponto em que o móvel inverte o seu sentido de movimento. Vamos observar o conjunto de gráficos para o móvel que

possui $a > 0$, observe que inicialmente ele possui velocidade negativa (espaço está diminuindo – movimento retrógrado) e ($a > 0$ e $V < 0$) está freando (movimento retardado) até parar no ponto A, onde inverte o sentido de movimento (sua velocidade passa a ser positiva – espaço começa a aumentar – movimento progressivo) e, agora, está acelerando ($a > 0$ e $V > 0$ – movimento acelerado).

Para o móvel que possui $a < 0$, observe que inicialmente ele possui velocidade positiva (espaço está aumentando – movimento progressivo) e ($a < 0$ e $V > 0$) está freando (movimento retardado) até parar no ponto B, onde inverte o sentido de movimento (sua velocidade passa a ser negativa – espaço começa a diminuir – **movimento retrógrado**) e, agora, está acelerando ($a < 0$ e $V < 0$ – **movimento acelerado**).

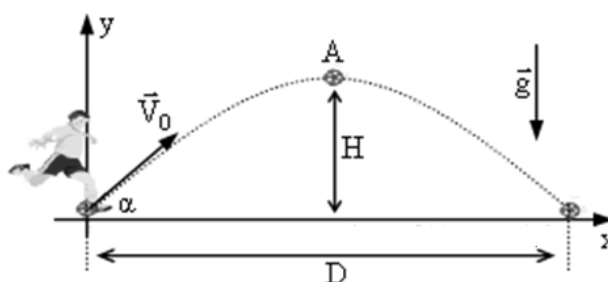
Um M.U.V. muito estudado é o movimento de objetos sob ação exclusiva (desprezando a resistência do ar) da gravidade. Tanto pode ser a queda livre (objetos partem do repouso – $V_0 = 0$) quanto o lançamento vertical (objetos são arremessados com uma certa velocidade – $V_0 \neq 0$), mas, nos dois casos podemos utilizar as equações do M.U.V. pois a aceleração da gravidade é constante e diferente de zero. Portanto, não dedicaremos esforços teóricos na análise desses movimentos, ficando ser tratamento exclusivamente para os exercícios.

ANEXO B²

MOVIMENTO BALÍSTICO (LANÇAMENTO OBLÍQUO)

Uma composição de movimentos muito peculiar e de ampla aplicação ocorre no movimento de um projétil, quando lançado num campo gravitacional uniforme. Por exemplo, o movimento de uma flecha ao abandonar o arco; o movimento de uma bala ao abandonar a arma; o movimento de uma bola de futebol ao se cobrar uma falta na intenção de cobrir uma barreira; o movimento de uma bola de basquete ao ser arremessada em direção à cesta etc. Em todos esses exemplos, se desprezada a resistência do ar, o modelo teórico que descreve cada um deles é denominado balístico ou lançamento oblíquo no vácuo, nas proximidades da Terra, onde o campo gravitacional é praticamente uniforme.

A figura a seguir ilustra um atleta cobrando uma falta, comunicando à bola uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ que faz um ângulo α com o plano horizontal.

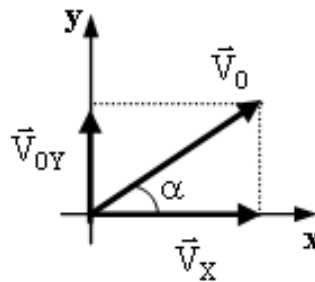


Observe que, após a bola sair do pé do atleta, se desprezar a resistência do ar, a única aceleração que atua sobre a bola, após o chute, é a da gravidade, ou seja, só existe aceleração vertical (eixo $0y$), o que nos faz concluir que o movimento da bola no eixo horizontal (eixo $0x$) é *uniforme* (aceleração escalar nula) e o movimento da bola no eixo vertical (eixo $0y$) é *uniformemente variado* (aceleração escalar constante e não nula), $a = -g$, negativa, considerando para cima o sentido positivo da trajetória vertical.

Vamos estudar este movimento balístico como uma composição de um **movimento uniforme no eixo $0x$** com um **movimento uniformemente variado no eixo $0y$** . Para isso, devemos decompor a velocidade inicial $\vec{v}_0$ nestes eixos. Note que a Trigonometria já entra na decomposição do vetor velocidade inicial ($\vec{v}_0$).

² RAMALHO JÚNIOR, cap. 9

Assim:



Observe que o componente vertical ($\vec{v}_{0y}$) vai variar devido à ação da gravidade e, portanto vamos denominá-lo velocidade inicial no eixo 0y. O componente horizontal ($\vec{v}_x$) não varia, pois não existe aceleração no eixo 0x e, portanto, vamos denominá-lo velocidade no eixo 0x que será constante durante todo o movimento. Quais serão, então, as equações que descrevem esse movimento? A resposta está na tabela seguir.

MU ³ (eixo x) Formulação matemática	MUV ⁴ (eixo y) Formulação matemática
$\Delta s_x = v_x \cdot t$	$\Delta s_y = v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$
	$v_y = v_{0y} - g \cdot t$
	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta s$
	$\frac{\Delta s_y}{\Delta t} = \frac{v_y + v_{0y}}{2}$

A primeira providência neste tipo de movimento é encontrar o valor da velocidade inicial, no nosso caso, devemos encontrar $\vec{v}_{0y}$ e $\vec{v}_x$, observe que sem estes valores nenhuma das equações acima se torna eficiente para encontrarmos outras grandezas, como altura máxima, tempo de subida, alcance horizontal máximo.

Vamos calcular o tempo de subida da bola. Observe que neste caso, a velocidade final no ponto de altura máxima é nula, $v_y = 0$. Assim:

$$0 = v_{0y} - g \cdot t_{subida}$$

$$t_{subida} = \frac{v_0 \cdot \text{sen} \alpha}{g}.$$

³Vide anexo MU, onde estão apresentados os princípios físicos que norteiam esse tipo de movimento e as equações que o descrevem matematicamente.

⁴Vide anexo MUV, onde estão apresentados os princípios físicos que norteiam esse tipo de movimento e as equações que o descrevem matematicamente.

O tempo total de voo é o dobro deste valor, ou seja,

$$T_{total} = 2t_{subida} = 2 \frac{v_0 \cdot \text{sen} \alpha}{g}.$$

Vamos calcular o alcance horizontal máximo da bola ($D = \Delta S_x$). Assim:

$$\Delta x = v_x \cdot T_{total} = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot 2 \frac{v_0 \cdot \text{sen} \alpha}{g} \rightarrow D = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \rightarrow \frac{v_0^2 \cdot \text{sen} 2\alpha}{g}.$$

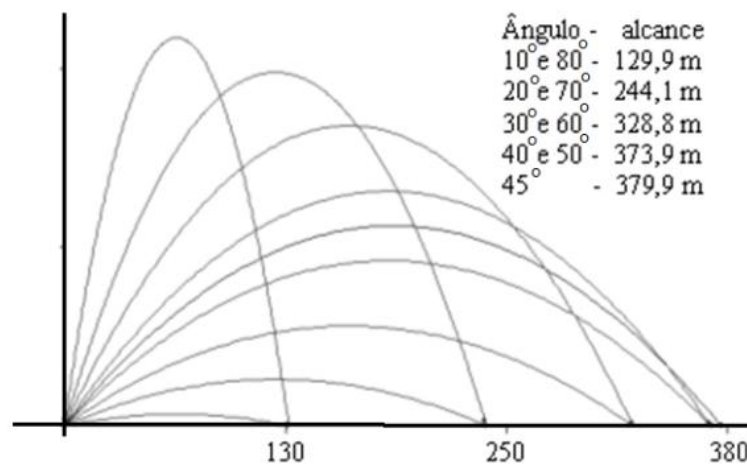
Note o uso do arco duplo.

O alcance horizontal de projéteis para lançamentos cujos ângulos de tiro são complementares (ângulos cuja soma é igual a 90°) é o mesmo, pois para ângulos complementares, o seno de um é igual ao cosseno do outro.

O alcance horizontal máximo ocorre quando $\text{sen}(2\alpha)$ for máximo, ou seja:

$$\text{sen} 2\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Portanto, um atleta no arremesso de peso, não basta ser forte para alcançar o melhor resultado, deve treinar sua técnica de arremesso de forma a arremessar seu “peso” segundo um ângulo de tiro igual a 45° . Tais conclusões são esquematizadas a seguir:



Um fato curioso é que essas parábolas formam uma região, cujo contorno é uma parábola também, denominada parábola de segurança.

Equação da Trajetória

Como $x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$ e $y = v_0 \cdot \text{sen} \alpha \cdot t - g \frac{t^2}{2}$, substituindo, vem:

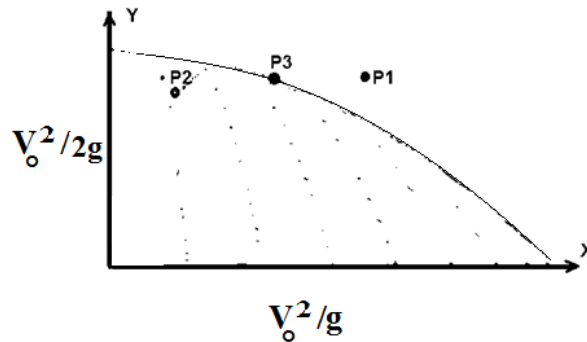
$$y = v_0 \cdot \text{sen} \alpha \cdot t - g \frac{t^2}{2} \rightarrow y = v_0 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} - g \frac{\frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}}{2} \rightarrow$$

$$y = (tg \alpha) \cdot x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x^2.$$

Esse resultado garante que a trajetória tem a expressão algébrica de uma função do segundo grau de y em x , portanto, o formato de uma parábola.

Parábola de segurança

Para uma mesma velocidade inicial de módulo v_0 , fixo, e permitindo todas as possibilidades para a variação do ângulo de lançamento α , observamos que para cada α , podemos construir uma parábola diferente. Todas elas estarão dentro de outra parábola envolvente denominada parábola de segurança.



Evidente que fazendo x negativo, a parábola passa a apresentar o ramo da esquerda.

Agora, tomando um ponto P de coordenadas (x_P, y_P) , vem:

$$y_P = (tg\alpha) \cdot x_P - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x_P^2 \rightarrow y_P = (tg\alpha) \cdot x_P - \left(\frac{1 + tg^2 \alpha}{2v_0^2} \right) x_P^2 \rightarrow$$

$$(tg\alpha)^2 - \left(\frac{2 \cdot v_0^2}{g \cdot x_P} \right) \cdot tg\alpha + \left(1 + \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot y_P}{g \cdot x_P^2} \right) = 0.$$

Como apenas α varia, temos uma equação do segundo grau, cuja variável é $(tg\alpha)$. Sendo assim, ficam três possibilidades para o discriminante (Δ) dessa equação:

a) $\Delta > 0 \rightarrow$ duas raízes reais e distintas. Ocorre quando o ponto P está na região parabolar (região delimitada pela parábola e o eixo X). É a zona de risco ou zona interna à parábola. P é alcançado por dois lançamentos distintos, por dois α distintos, para, naturalmente, um determinado v_0 .

b) $\Delta < 0 \rightarrow$ duas raízes imaginárias. Ocorre quando o ponto P está fora da região parabolar. É a zona de segurança ou zona externa à parábola. P não é alcançado pelos lançamentos, seja qual for α , para um determinado v_0 .

c) $\Delta = 0 \rightarrow$ duas raízes reais e iguais. Ocorre quando o ponto P está no limite da região parabolar. É a situação em que P é alcançado por um único lançamento, ou seja, existe um α , para um determinado v_0 , que o lançamento alcança o ponto P , que está, portanto, na linha da parábola de segurança.

Calculando $\Delta = 0$, vem:

$$b^2 - 4.a.c = 0 \rightarrow \left(\frac{2.v_0^2}{g.x_P}\right)^2 - 4.\left(1 + \frac{2.v_0^2.y_P}{g.x_P^2}\right) = 0 \rightarrow y_P = \frac{v_0^2}{2.g} - \frac{g}{2.v_0^2}x_P^2.$$

Sendo assim, $y_P = f(x_P)$ é uma função do segundo grau, que é representada por uma parábola no espaço bidimensional ou a casca de um parabolóide no espaço tridimensional. É, portanto, a expressão da função da parábola de segurança.

Eis, portanto, mais uma demonstração da convivência frutífera entre a Trigonometria e a Física.