



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CAMPUS CARAÚBAS
CURSO BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

THÂMARA DAYANE BATISTA ALVES

**UTILIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA MODELAGEM DE
SISTEMAS DE ENGENHARIA DA UFERSA CAMPUS CARAÚBAS.**

Caraúbas/RN

2018

THÂMARA DAYANE BATISTA ALVES

**UTILIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA MODELAGEM DE
SISTEMAS DE ENGENHARIAS DA UFERSA CAMPUS CARAÚBAS.**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Conselho do Bacharelado
em Ciência e Tecnologia da Universidade
Federal Rural do Semi-Árido, como pré-
requisito para obtenção do título de
Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Luís Felipe Couto
Rodrigues França - UFERSA

Caraúbas/RN

2018

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

A474u Alves, Thâmara Dayane Batista .
UTILIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA
MODELAGEM DE SISTEMAS DE ENGENHARIAS DA UFRSA
CAMPUS CARAÚBAS. / Thâmara Dayane Batista Alves. -
2018.
63 f. : il.

Orientador: Luís Felipe Couto Rodrigues
França. Monografia (graduação) -
Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2018.

1. Modelagem. 2. Equações Diferenciais.
3. Engenharia. 4. Aplicações. I. França,
Luís Felipe Couto Rodrigues, orient. II.
Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas

da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

THÂMARA DAYANE BATISTA ALVES

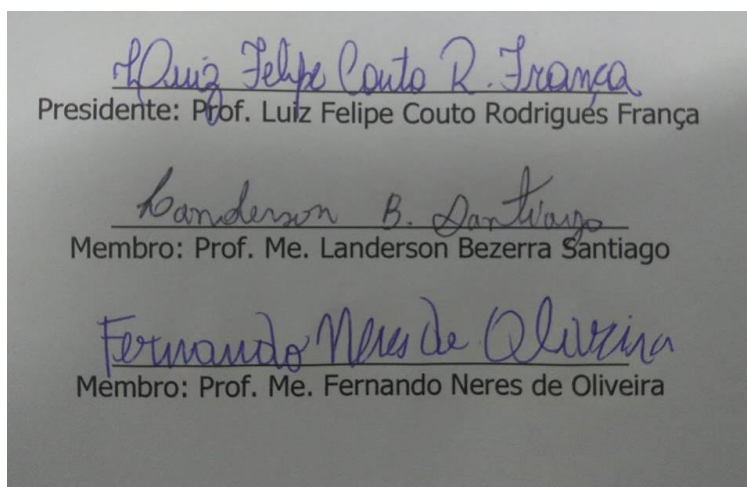
**UTILIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA MODELAGEM DE
SISTEMAS DE ENGENHARIAS DA UFERSA CAMPUS CARAÚBAS.**

Monografia apresentada ao Conselho do Bacharelado em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como pré-requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Luiz Felipe Couto Rodrigues França - UFERSA

APROVADO EM __/__/__

BANCA EXAMINADORA



CARAÚBAS – RN
2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me guiar durante essa trajetória, me ofertando proteção, saúde, força e determinação para alcançar meus objetivos.

A minha avó, Maria das Neves (In Memoriam) por todas as orações.

Aos meus pais, Aderaldo e Antonieta por não medirem esforços para que eu chegasse até aqui, sempre me apoiando, incentivando e dando suporte no que precisei.

As minhas irmãs, Thassila e Thifanny que torcem pelo meu sucesso.

A Thayrone Oliveira que além de namorado é meu melhor amigo e maior incentivador estando ao meu lado em todos os momentos, com todo amor, carinho e atenção.

Ao meu orientador, professor e amigo Luiz Felipe Couto Rodrigues França pela inspiração, confiança, e ajuda desde suas monitorias até a conclusão desse trabalho.

Aos companheiros de viagens e amigos de graduação, Ianna, Mateus, Mara e Gesley pela convivência diária, aguentando todo o meu estresse e mal humor.

Agradecimentos também a todo o corpo docente do curso de ciência e tecnologia da UFERSA campus Caraúbas pelos ensinamentos passados por eles que foram indispensáveis para minha formação acadêmica.

Por fim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para essa caminhada, obrigado!

“Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas.”

O Pequeno Príncipe

RESUMO

As equações diferenciais são equações cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma das respectivas derivadas, utilizadas na construção de modelos matemáticos de fenômenos físicos, por isso seu estudo é um campo extenso da matemática pura e aplicada. A modelagem de muitos problemas do mundo real, utilizando as equações diferenciais ordinárias (EDO), é uma ferramenta importante que tem grande potencial e pode descrever inúmeros fenômenos. Desta forma, este trabalho tem como objetivo apresentar e estudar modelos matemáticos descritos por equações diferenciais presentes na área das engenharias. As engenharias escolhidas foram civil, elétrica e mecânica por serem os cursos de segundo ciclo ofertados pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido campus Caraúbas. Os fenômenos modelados foram deflexão de vigas, resfriamento de blocos cerâmicos, circuitos elétricos RC e LRC, suspensões mecânicas automotivas, e válvulas de segurança e alívio de pressão. A modelagem dos métodos foi feita a partir das técnicas de resolução de EDO's, onde ao final de cada modelagem foi apresentado um problema para cada fenômeno.

Palavras-chave: Modelagem. Equações Diferenciais. Engenharia. Aplicações.

ABSTRACT

Differential equations are equations whose unknown is a function that appears in the equation in the form of their derivatives, used in the construction of mathematical models of physical phenomena, so your study is an extensive field of pure mathematics and applied. The modeling of many real-world problems using ordinary differential equations (ODE), is an important tool that has great potential and can describe many phenomenons. In this way, this work aims to present and study mathematical models described by differential equations present in the area of engineering. The chosen were civil, electrical engineering and mechanics for being the second-cycle courses offered by Universidade Federal Rural do Semi-Árido campus Caraúbas. The phenomena were modeled beam deflection, cooling of ceramic blocks, electric RC circuits and LRC, mechanical, automotive suspensions and safety valves and pressure relief. The modeling of the method.

Key-words: Modeling. Differential Equations. Engineering. Applications.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 – (a) Eixo de simetria; (b) Curva de deflexão	36
Figura 02 – Viga com extremidade esquerda engastada	36
Figura 03 – Viga engastada em ambas as extremidades	38
Figura 04 – Associação em série	42
Figura 05 – Associação em paralelo	42
Figura 06 – Circuito RC simples.....	43
Figura 07 – Circuito LRC simples.....	45

LISTA DE TABELAS

Tabela 01 – Tentativas de soluções particulares	28
Tabela 02 – Transformadas de algumas funções básicas	31
Tabela 03 – Transformadas inversas de algumas funções básicas	32
Tabela 04 – Disciplinas do segundo ciclo da engenharia civil	54
Tabela 05 – Disciplinas do segundo ciclo da engenharia elétrica	56
Tabela 06 – Disciplinas do segundo ciclo da engenharia mecânica	58

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 01 – Utilização das equações diferenciais nas disciplinas da engenharia civil	56
Gráfico 02 – Utilização das equações diferenciais nas disciplinas da engenharia elétrica.....	58
Gráfico 03 – Utilização das equações diferenciais nas disciplinas da engenharia mecânica.....	60

LISTA DE EQUAÇÕES

- (1) – Expressão geral para edo's de variáveis separáveis;
- (2) – Expressão geral para edo's de equações lineares;
- (3) – Solução geral para primeiro caso de edo's de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes;
- (4) – Solução geral para segundo caso de edo's de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes;
- (5) – Solução geral para terceiro caso de edo's de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes;
- (6) – Solução geral para edo's de segunda ordem não-homogêneas;
- (7) – Wronskiano;
- (8) – Expressão da transformada de Laplace por definição;
- (9) – Expressão da transformada inversa de Laplace;
- (10) – Expressão geral de edo para deflexão de viga;
- (11) – Expressão geral de edo para blocos cerâmicos através da lei do resfriamento de Newton;
- (12) – Expressão geral de edo para circuitos RC;
- (13) – Expressão geral de edo para circuitos LRC;
- (14) – Expressão geral de edo para vibrações amortecidas.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 OBJETIVOS	17
2.1 Objetivo Geral	17
2.2 Objetivos Específicos	17
3 REFERENCIAL TEÓRICO	18
3.1 Modelagem Matemática	18
3.2 Conceitos e Definições	19
3.3 Classificação	19
3.3.1 Classificação quanto ao tipo	19
3.3.2 Classificação quanto a origem	20
3.3.3 Classificação quanto a linearidade	20
3.4 Problema de Valor Inicial (PVI)	20
3.4.1 PVI em equações de primeira ordem	20
3.4.2 PVI em equações de segunda ordem	21
3.5 Problema de Valor de Contorno (PVC)	22
3.6 Equações Diferenciais de Primeira Ordem	22
3.6.1 Variáveis Separáveis	22
3.6.2 Equações lineares	23
3.7 Equações Diferenciais de Segunda Ordem	24
3.7.1 Equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes	24
3.7.2 Equações lineares de segunda ordem não-homogêneas	27
3.7.2.1 Princípio da superposição	27
3.7.2.2 Variação dos parâmetros	29
3.8 Transformada de Laplace	31
3.8.1 Transformada inversa	32
4 METODOLOGIA	34
5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADA AS ENGENHARIAS	35
5.1 Equações Diferenciais na Engenharia Civil	35
5.1.1 Deflexão de viga	35
5.1.2 Aplicação	37
5.1.3 Blocos cerâmicos	39

5.1.4 Aplicação	40
5.2 Equações Diferenciais na Engenharia Elétrica.....	41
5.2.1 Circuito RC	41
5.2.2 Aplicação	43
5.2.3 Circuito LRC	45
5.2.4 Aplicação	46
5.3 Equações Diferenciais na Engenharia Mecânica.....	48
5.3.1 Suspensões mecânicas automotivas	48
5.3.2 Aplicação	49
5.3.3 Válvulas de segurança e alívio de pressão	51
5.3.4 Aplicação	51
6 UTILIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NAS ENGENHARIAS.....	54
6.1 Utilização na Engenharia Civil.....	54
6.2 Utilização na Engenharia Elétrica	56
6.3 Utilização na Engenharia Mecânica	58
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	62

1 INTRODUÇÃO

No grande processo de desenvolvimento social e tecnológico mundial, a matemática é considerada por muitos, a mãe de todas as ciências, pois pode ser usada em diversas áreas e com suas inúmeras formas de aplicações, sempre foi uma peça chave, e sempre contribuiu no desenvolvimento de muitos estudos, ela também está presente em quase todos os momentos das nossas vidas e sem dúvida de vital importância, pois é utilizada em atividades que envolvem desde um simples troco na padaria ou no supermercado, a cálculos complexos como, por exemplo, na construção de um prédio ou de um moderno avião.

As equações diferenciais é um exemplo de conteúdo matemático que pode ser aplicado em diversas áreas das ciências. São equações cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma das respectivas derivadas, utilizadas na construção de modelos matemáticos de fenômenos físicos, por isso seu estudo é um campo extenso da matemática pura e aplicada. Suas aplicações são inúmeras, indo desde a medicina a engenharia, onde suas soluções são usadas para projetar pontes ou automóveis por exemplo.

Segundo Boyce e DiPrima (2012) o estudo das equações diferenciais começou durante o século XVII por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Newton, apesar de ter atuado pouco na área das equações diferenciais propriamente ditas, teve seu desenvolvimento do cálculo como base para as equações diferenciais no século seguinte; já Leibniz descobriu o método de separação de variáveis, a redução das equações homogêneas, e o processo de resolução das equações lineares de primeira ordem.

O estudo das equações diferenciais está historicamente ligado ao desenvolvimento da física atuando como ferramenta para o cálculo das equações de movimento da mecânica newtoniana, ou das equações de onda da física ondulatória, por exemplo.

Atualmente o uso das equações diferenciais foi estendido, englobando as mais diversas áreas do conhecimento, desde aplicações nas ciências naturais, envolvendo problemas de dinâmica populacional e a propagação de epidemias, à aplicações na economia, ligada a questões financeiras, e ao comportamento das populações humanas.

A extensão dessas equações é de extrema importância, pois até em sua forma mais simples elas são capazes de representar sistemas úteis. Com isso, ao resolver uma equação diferencial que caracteriza determinado conjunto pode-se extrair informações relevantes sobre os mesmos, e provavelmente, a previsão de seu comportamento.

Uma ferramenta significativa no acesso de informações sobre o comportamento geral de vários tipos de sistemas é a modelagem através das equações diferenciais, pois esta fornece, quase sempre, uma descrição aproximada e simplificada do processo real. Deste modo, o desenvolvimento da área de modelagem de sistemas através de equações diferenciais é de suma relevância para a compreensão de problemas reais, apresentando aplicações em todas as áreas, em particular, nas ciências naturais.

Em virtude de sua vasta aplicabilidade, o ensino dessas expressões e de caráter obrigatório nos cursos de engenharias e tecnologias do nosso país, onde sua instrução se dá através da apresentação de métodos de resolução de vários tipos de equações diferenciais integráveis.

No curso de ciência e tecnologia, bacharelado interdisciplinar para estudantes de engenharia com formação em dois ciclos, oferecido pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido, a disciplina de Equações Diferenciais é componente obrigatório na estrutura curricular, de modo que seu ensino é feito mediante a apresentação de várias técnicas de solução de tipos de equações diferenciais.

Toda via, além do conhecimento acerca dos métodos de resolução de equações diferenciais, é de extrema importância o estudo de suas aplicações e modelagens aos fenômenos físicos. Deste modo, os conteúdos aprendidos em sala podem ser compreendidos em sua totalidade quando associados a problemas práticos.

2 OBJETIVOS

Estão listados abaixo o objetivo geral desta pesquisa e os objetivos específicos, de acordo com a sequência.

2.1 Objetivo Geral

Em uma esfera global este trabalho procura investigar a existência de aplicações das equações diferenciais para sistemas de engenharias do campus Caraúbas; como também, validar a importância das modelagens de equações diferenciais para engenharias.

2.2 Objetivos Específicos

Este trabalho possui os seguintes objetivos específicos:

- Definir os tipos de equações diferenciais aplicados aos problemas de engenharia;
- Identificar através das modelagens as equações diferenciais em problemas práticos;
- Aproximar os discentes matriculados na disciplina de equações diferenciais as questões realistas da engenharia, facilitando sua escolha para segundo ciclo.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

São apresentados abaixo os conceitos relevantes desse trabalho, com base nos estudos de diversos autores acerca de modelagem matemática e equações diferenciais.

3.1 Modelagem Matemática

Para Bassanezi (2002) modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto de estudo. Esse modelo pode ser considerado uma síntese de reflexão sobre alguma parte da realidade, onde seu objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente poder agir sobre ela e, mesmo as situações mais simples fornecem motivações para uma iniciação científica.

A obtenção de um modelo matemático é dada por meio das seguintes etapas: experimentação, abstração, formulação do modelo, resolução, validação, modificação e aplicação.

Na experimentação, é realizado o levantamento de dados a partir de experimentos que por sua vez são bastante relevantes na estruturação, formulação e modificações que possam vir a acontecer nos modelos e consequentemente na sua validação.

A abstração é o estudo onde são levantadas hipóteses a serem testadas no modelo, verificando assim as variáveis essenciais para sua evolução.

Na formulação do modelo a linguagem matemática é de fato utilizada substituindo a linguagem usual anteriormente usada para a formulação das hipóteses.

A resolução é dada analiticamente ou numericamente, a depender do quão complexo é o fenômeno estudado e modelado.

Na validação a comparação é feita por meio dos resultados obtidos com a solução do modelo com os dados reais experimentais. Nessa etapa é importante verificar a proximidade dos dados com o que foi estabelecido inicialmente por meio das hipóteses.

A modificação depende da etapa anterior, pois se a proximidade dos dados não está de acordo com o que foi estabelecido inicialmente, então novas variáveis

devem ser inseridas no modelo ou até mesmo modificando sua lei de formação, iniciando, assim, novamente o processo.

A aplicação do modelo permite um estudo da situação de acordo com as variáveis selecionadas, permitindo, o entendimento, a tomada de decisões, e previsões, fornecendo ferramentas para criação de estratégias de trabalho para determinar melhoras em diversas situações modeladas.

Um modelo matemático pode traduzir fenômenos que se assemelham a acontecimentos reais, sendo que o estudo de tais modelos permite que façamos previsões futuras de situações que ocorrem no presente. Desta forma, a modelagem matemática propicia aos alunos oportunidades de questionamentos em inúmeras situações utilizando conceitos matemáticos sem a necessidade de procedimentos preestabelecidos.

3.2 Conceitos e Definições

“Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED)”. (ZILL, 2001, pág. 2).

“Qualquer função f definida em um intervalo I , que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo”. (ZILL, 2001, pág. 4).

3.3 Classificação

As equações diferenciais podem ser classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

3.3.1 Classificação quanto ao tipo

De acordo com ZILL (2001) se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente, ela é uma equação diferencial ordinária (EDO), ou seja, tem como

solução uma função de apenas uma variável, e pode ser resolvida por apenas derivada simples.

A equação diferencial parcial contém funções de mais de uma variável, com isso, envolve derivadas parciais. Segundo ZILL (2001) uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial (EDP).

3.3.2 Classificação quanto à ordem

A ordem de uma equação diferencial é determinada de acordo com a ordem da derivada mais alta que aparece na equação.

“A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação”. (ZILL, 2001, pág. 3).

3.3.3 Classificação quanto à linearidade

De acordo com Boyce E DiPrima (2012) a EDO $F(t, y, y', \dots, y^n) = 0$ é dita linear se F for uma função linear das variáveis $y, y', \dots, y^n$, onde, nessa notação, y' se refere a derivada primeira, y'' a derivada segunda, y^n a n -ésima derivada de y em relação a variável independente t . Assim, a EDO linear geral de ordem n é: $a_0(t)y^n + a_1(t)y^{n-1} + \dots + a_n(t)y = g(t)$.

ZILL (2001) caracteriza as equações diferenciais lineares por duas propriedades:

- A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.
- Cada coeficiente depende apenas da variável independente t .

3.4 Problema de Valor Inicial (PVI)

3.4.1 PVI em equações de primeira ordem

Conforme ZILL (2001) o problema

$$y' = f(x, y)$$

sujeito a $y(x_0) = y_0$ é chamado de problema de valor inicial, com isso, nas equações diferenciais ordinárias quando todas as condições iniciais do problema são conhecidas no valor inicial da variável dependente temos um problema de valor inicial (PVI).

Geometricamente procurasse uma solução para a equação diferencial, definida em algum intervalo I tal que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado a priori.

“Teorema 2.1 (Existência de uma única solução) Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\partial f / \partial y$ são contínuas em R , então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial.” (ZILL, 2001, pág. 40).

Esse teorema nos da condições suficientes para garantir existência e unicidade de soluções, já que, em geral antes de considerar um problema de valor inicial deseja-se saber se uma solução existe e, quando existe, se é a única solução para o problema.

3.4.2 PVI em equações de n -ésima ordem

Para uma equação diferencial de n -ésima ordem, o problema

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

em que $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ são constantes arbitrárias, e chamado de um problema de valor inicial. Os valores específicos $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ são chamados de condições iniciais. Procuramos uma solução em algum intervalo I contendo x_0 .

No caso de uma equação linear de segunda ordem, uma solução para o problema de valor inicial

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

sujeito a

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$$

É uma função que satisfaça a equação diferencial em I cujo gráfico passa pelo ponto (x_0, y_0) com inclinação igual a y_0' .

“Teorema 4.1 (Existência de uma única solução) Sejam $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ contínuas em um intervalo I com $a_n(x) \neq 0$ para todo x neste intervalo. Se $x = x_0$ é algum ponto deste intervalo, então existe uma solução única $y(x)$ para o problema de valor inicial neste intervalo.” (ZILL, 2001, pág. 143).

Esse teorema nos garanti condições suficientes para a existência de uma única solução para um problema de valor inicial de n -ésima ordem.

3.5 Problema de Valor de Contorno (PVC)

Outro tipo de problema consiste em resolver uma equação diferencial de ordem dois ou maior na qual a variável dependente y ou suas derivadas são especificadas em pontos diferentes.

Um problema como

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

sujeito a

$$y(a) = y_0 \text{ e } y(b) = y_1$$

é chamado de problema de valor de contorno. Os valores especificados $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$ são chamados condições de contorno ou de fronteira. Uma solução para o problema em questão é uma função que satisfaça a equação diferencial em algum intervalo I , contendo a e b , cujo gráfico passa pelos pontos (a, y_0) e (b, y_1) .

3.6 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

3.6.1 Variáveis separáveis

Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada separável ou tem variáveis separáveis.

Essa equação pode ser escrita como

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

Se $y = f(x)$ denota uma função para a equação acima, temos que

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

logo,

$$\int h(f(x))f'(x) dx = \int g(x) dx + C$$

Mas $dy = f'(x) dx$, assim podemos reescrever a equação anterior

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx + C \quad (1)$$

Deste modo, uma família a um parâmetro de soluções, em geral dada implicitamente, é obtida integrando ambos os lados de $h(y) dy = g(x) dx$.

3.6.2 Equações lineares

Sabendo que a forma geral de uma equação diferencial linear de ordem n é dada por $a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x)y = g(x)$, onde a linearidade significa que todos os coeficientes são funções somente de x e que y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Quando $n = 1$, obtemos uma equação linear de primeira ordem.

Uma equação diferencial da forma

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

é chamada de equação linear.

Dividindo a equação pelo coeficiente $a_1(x)$, temos uma forma mais útil desta equação

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Buscamos uma solução para esta equação diferencial em um intervalo I no qual as funções $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas. Usando diferenciais podemos escrevê-la como

$$dy + [P(x)y - f(x)] dx = 0$$

Equações lineares possuem a propriedade através da qual podemos sempre encontrar uma função $\mu(x)$ em que

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)] dx = 0$$

é uma diferencial exata, se

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x) dx$$

Será uma equação separável em que podemos determinar $\mu(x)$

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x) dx$$

$$\ln |\mu| = \int P(x) dx$$

assim

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

A função $\mu(x)$ definida anteriormente é um fator integrante para a equação linear, onde $\mu(x) \neq 0$ para todo x em I , e é contínua e diferenciável.

Sabendo que

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)] dx = 0$$

e

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

podemos reescrever a equação anterior

$$e^{\int P(x) dx} dy + e^{\int P(x) dx} [P(x)y - f(x)] dx = 0$$

$$e^{\int P(x) dx} dy + e^{\int P(x) dx} P(x)y dx = e^{\int P(x) dx} f(x) dx$$

com isso, verificamos que

$$d[e^{\int P(x) dx} y] = e^{\int P(x) dx} f(x) dx$$

Integrando esta equação, temos

$$e^{\int P(x) dx} y = e^{\int P(x) dx} f(x) dx + C$$

$$y = e^{-\int P(x) dx} \int e^{\int P(x) dx} f(x) dx + C e^{-\int P(x) dx} \quad (2)$$

Portanto, se uma equação diferencial linear tiver uma solução, ela deverá ser no formato apresentado, e de imediato a fórmula desenvolvida constitui uma família a um parâmetro de soluções.

3.7 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

3.7.1 Equações diferenciais de segunda ordem lineares homogêneas com coeficientes constantes

Uma equação linear de primeira ordem $dy/dx + ay = 0$, em que a é uma constante, possui a solução exponencial $y = c_1 e^{-ax}$ em $(-\infty, \infty)$. Com isso, é natural procurar determinar se soluções exponenciais existem em $(-\infty, \infty)$ para equações de ordem maior.

No caso de equações de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0$$

se tentarmos uma solução da forma $y = e^{mx}$, então $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$, assim a equação acima, torna-se

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

ou

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

como e^{mx} nunca se anula para valores reais de x , então a única maneira de fazer essa função exponencial satisfazer a equação diferencial é escolher m de tal forma que ele seja raiz da equação quadrática

$$am^2 + bm + c = 0$$

essa última equação é chamada de equação característica da equação diferencial. A partir desta equação podemos considerar três casos, onde as soluções para a equação característica correspondem a um conjunto de soluções em que existem raízes reais distintas; raízes reais iguais; e raízes complexas conjugadas.

Qualquer conjunto $y_1, y_2, \dots, y_n$ de n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n – ésima ordem em um intervalo I é chamado de conjunto fundamental de soluções no intervalo.

O primeiro caso, onde encontramos duas raízes reais e distintas, m_1 e m_2 , obtemos duas soluções

$$y_1 = e^{m_1 x}$$

e

$$y_2 = e^{m_2 x}$$

Essas funções são linearmente independentes, portanto formam um conjunto fundamental de modo que a solução geral para esse intervalo é

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad (3)$$

O segundo caso, onde encontramos duas raízes reais e iguais, $m_1 = m_2$, obtemos somente uma solução exponencial

$$y_1 = e^{m_1 x}$$

desta primeira solução, podemos obter uma segunda solução dada por

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{\frac{-b}{a}x}}{e^{2m_1 x}} dx$$

porém, da forma quadrática, temos que $m_1 = -b/2a$, pois a única maneira de ter $m_1 = m_2$ é ter $b^2 - 4ac = 0$. Pelo fato de que $2m_1 = -b/a$, a segunda solução torna-se

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{\frac{-b}{a}x}}{e^{2m_1 x}} dx = y_2 = e^{m_1 x} \int dx = y_2 = x e^{m_1 x}$$

e a solução geral para essa singularidade é

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} \quad (4)$$

O terceiro caso, onde encontramos duas raízes complexas e conjugadas, $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, em que α e $\beta > 0$ são reais e $i^2 = -1$, obtemos duas soluções como no primeiro caso

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

no entanto, é preferível trabalhar-se com funções reais em vez de exponenciais complexas, por isso, utilizando a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

em que θ é qualquer número real. Obtemos

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

e

$$e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x$$

somando e depois subtraindo essas duas equações, respectivamente, temos

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2 \cos \beta x$$

e

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \sin \beta x$$

Como $y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ é uma solução para a equação para qualquer escolha das constantes c_1 e c_2 , fazendo $c_1 = c_2 = 1$, $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$, temos duas soluções

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x}$$

e

$$y_2 = e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x}$$

mas,

$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x} \cos \beta x$$

e

$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x} \sin \beta x$$

logo, a solução geral para este caso é

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (5)$$

3.7.2 Equações diferenciais de segunda ordem lineares não-homogêneas

Uma equação linear de segunda ordem do tipo

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

em que a, b e c são constantes é chamada de equação de segunda ordem linear não homogênea, e sua solução geral em um intervalo é dada por

$$y = y_c + y_p \quad (6)$$

onde, y_c é solução para da homogênea associada e y_p é solução para a parte não homogênea, de modo que y_p pode ser encontrada através do princípio da superposição, ou por um método conhecido como variação dos parâmetros.

3.7.2.1 Princípio da superposição

“TEOREMA 4.9 (Princípio da Superposição – Equações Não-homogêneas)
Sejam $y_{p1}, y_{p2}, \dots, y_{pk}$ k soluções particulares para a equação diferencial linear de n-ésima ordem em um intervalo I, correspondendo a k funções distintas $g_1, g_2, \dots, g_k$. Isto é, suponha que y_{p1} seja uma solução particular para a equação diferencial correspondente $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x)$, em que $i = 1, 2, \dots, k$. Então, $y_p = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \dots + y_{pk}(x)$. É uma solução particular para $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x)$.” (ZILL, 2011, pág. 161).

Esse método da superposição é limitado a equações lineares não-homogêneas que têm coeficientes constantes, e em que $g(x)$ é uma constante k,

uma função polinomial, uma função exponencial $e^{\alpha x}$, $\sin \beta x$, $\cos \beta x$, ou somas e produtos dessas funções.

O conjunto de funções que consiste em constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha x}$, senos, cossenos, tem a notável propriedade: derivadas de suas somas e produtos são ainda somas e produtos de constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha x}$, senos, cossenos. Como a combinação linear das derivadas $ay''_p + by'_p + cy_p$ tem de ser identicamente igual a $g(x)$, parece razoável supor então que y_p tem a mesma forma que $g(x)$.

Para a solução desse princípio podem ser considerados dois casos.

No primeiro caso, nenhuma função da suposta solução particular é uma solução para a equação diferencial associada, como os exemplos específicos de $g(x)$ mostrados na Tabela 01.

Tabela 01. Tentativas para soluções particulares.

$g(x)$	Forma de y_p
1 (qualquer constante)	A
$5x + 7$	$Ax + B$
$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
$\sin 4x$	$A \cos 4x + B \sin 4x$
$\cos 4x$	$A \cos 4x + B \sin 4x$
e^{5x}	Ae^{5x}
$(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
$x^2 e^{5x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
$e^{3x} \sin 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \sin 4x$
$5x^2 \sin 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos x + (Dx^2 + Ex$

	+ F) sen 4x
$xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + D)e^{3x}$ sem 4x

Fonte: Zill e Cullen (2001).

No segundo caso, uma função na solução particular escolhida é também uma solução para a equação diferencial homogênea associada.

3.7.2.2 Variação dos parâmetros

Considerando a equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

podemos escreve-la na forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

dividindo por a. Supondo que $P(x)$, $Q(x)$ e $f(x)$ são contínuas em algum intervalo I . Quando $P(x)$ e $Q(x)$ são constantes, podemos escrever facilmente y_c .

Admitindo que y_1 e y_2 formem um conjunto fundamental de soluções em I da forma homogênea associada, isto é,

$$y''_1 + P(x)y'_1 + Q(x)y_1 = 0$$

e

$$y''_2 + P(x)y'_2 + Q(x)y_2 = 0.$$

Podemos encontrar duas funções u_1 e u_2 tais que

$$y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

Seja uma solução particular para nossa EDO não homogênea.

Vemos que a suposição para y_p é a mesma que $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$, onde c_1 e c_2 foram substituídos pelos parâmetros variáveis u_1 e u_2 .

Além de $y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$, para simplificar a primeira derivada, e consequentemente a segunda derivada de y_p , iremos impor que

$$u_1(x)' y_1(x) + u_2(x)' y_2(x) = 0.$$

Derivando y_p , obtemos

$$y_p' = u_1(x) y_1'(x) + u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x) + u_2(x) y_2'(x)$$

$$y_p' = u_2(x) y_2'(x) + u_1(x) y_1'(x)$$

logo

$$y_p'' = u_1(x) y_1''(x) + u_1'(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2'(x) + u_2(x) y_2''(x).$$

Substituindo esses valores na EDO, temos que

$$u_1'(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2'(x) = f(x).$$

Resolvendo um sistema entre

$$u_1(x) y_1'(x) + u_2(x) y_2'(x) = 0.$$

e

$$u_1'(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2'(x) = f(x)$$

a solução pode ser expressa em termos de determinantes

$$u_1' + \frac{w_1}{w}$$

e

$$u_2' + \frac{w_2}{w}$$

em que

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

o determinante W é o Wronskiano de y_1 e y_2 . Pela independência linear de y_1 e y_2 em I , sabemos que $W(x) \neq 0$ para todo x no intervalo.

3.8 Transformada de Laplace

Se $f(t)$ estiver definida para $t \geq 0$, então a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} k(s, t) f(t) dt$$

é definida por um limite

$$\int_0^{\infty} k(s, t) f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s, t) f(t) dt.$$

se esse limite existe, dizemos que a integral existe ou é convergente; se o limite não existe, dizemos que a integral não existe ou é divergente. O limite em questão

existirá somente para certos valores da variável s . A escolha $k(s, t) = e^{-st}$ fornece uma transformada integral especialmente importante.

Seja uma função definida por $t \geq 0$, então a integral

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (8)$$

é chamada de transformada de Laplace de f , desde que a integral convirja. Quando a integral imprópria converge, o resultado é uma função de s .

Para uma soma de funções, podemos escrever

$$\int_0^{\infty} e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt$$

quando ambas as integrais convergem. Segue-se então que

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\}$$

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

devido essa propriedade L é uma transformada linear.

“Definição 7.2 (Ordem Exponencial) Dizemos que uma função é de ordem exponencial se existem c , $M > 0$ e $T > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{-t}$ para todo $t > T$.” (ZILL, 2001, pág. 353).

“Teorema 7.1 (Condições Suficientes de Existência) Seja $f(t)$ uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$; então, sua transformada de Laplace existe para todos $s > c$.” (ZILL, 2001, pág. 354).

A partir das definições apresentadas podemos obter as transformadas de algumas funções básicas como mostrado na tabela 02.

Tabela 02. Transformadas de algumas funções básicas.

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$

sen kt	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
cos kt	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
e^{at} sen kt	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$
e^{at} cos kt	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$

Fonte: Zill e Cullen (2001), adaptado.

3.8.1 Transformada inversa

Vimos que $F(s)$ é a função transformada de $f(t)$ pelo operador $L\{f(t)\}$, então podemos dizer que $f(t)$ é a transformada inversa de Laplace de $F(s)$ e escrevemos $L^{-1}\{F(s)\}$, logo

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \quad (9)$$

A transformada de Laplace inversa é uma transformada linear, isto é, para constantes a e b ,

$$L^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = aL^{-1}\{F(s)\} + bL^{-1}\{G(s)\}$$

em que F e G são as transformadas de algumas funções f e g .

Análogo às transformadas apresentadas na tabela 02, podemos escrever a transformada inversa de algumas funções básicas como mostrado na tabela 03.

Tabela 03. Transformadas inversas de algumas funções básicas.

$f(t)$	$L^{-1}\{f(t)\}$
1	$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

t^n	$L^{-1} \left\{ \frac{n!}{s^{n+1}} \right\}$
e^{at}	$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\}$
$\text{sen } kt$	$L^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2 + k^2} \right\}$
$\cos kt$	$L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + k^2} \right\}$
$e^{at} \text{ sen } kt$	$L^{-1} \left\{ \frac{k}{(s-a)^2 + k^2} \right\}$
$e^{at} \cos kt$	$L^{-1} \left\{ \frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2} \right\}$

Fonte: Zill e Cullen (2001), adaptado.

4 METODOLOGIA

Este estudo apresenta dados qualitativos, onde serão investigados e analisados aspectos que não podem ser mensurados numericamente, sendo fundamentada teoricamente em referências bibliográficas de livros, teses, artigos e dissertações; com caráter exploratório devido o levantamento de informações acerca das equações diferenciais e suas modelagens aplicadas às engenharias, e explicativo registrando e analisando essas informações por meio da matemática.

Realizou-se a pesquisa no bacharelado interdisciplinar para estudantes de engenharia com formação em dois ciclos da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, campus Caraúbas, de modo que foram desenvolvidas modelagens de equações diferenciais para as engenharias civil, elétrica e mecânica, existentes na instituição, apresentando sua importância e aproximando o público alvo a sua área de afinidade.

5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADA AS ENGENHARIAS

A aplicação das equações diferenciais para criação de modelos de estudo de problemas reais é ferramenta essencial que tem o poder para visualizar e descrever vários fenômenos dentro da engenharia e suas técnicas.

Em se tratando da engenharia civil, sua aplicação pode analisar desde a produção de um simples tijolo até a construção de grandes obras como pontes, edifícios, barragens etc.

Na engenharia elétrica, sua aplicabilidade engloba desde conceitos básicos como corrente elétrica e força eletromotriz até a análise de circuitos mais complexos como no caso dos circuitos RLC.

No ramo da engenharia mecânica, as equações diferenciais norteiam o estudo das vibrações de sistemas, como máquinas rotativas e até mesmo vibrações com grande escala, como terremotos, além de atuar no estudo da termodinâmica.

5.1 Equações Diferenciais na Engenharia Civil

5.1.1 Deflexão de viga

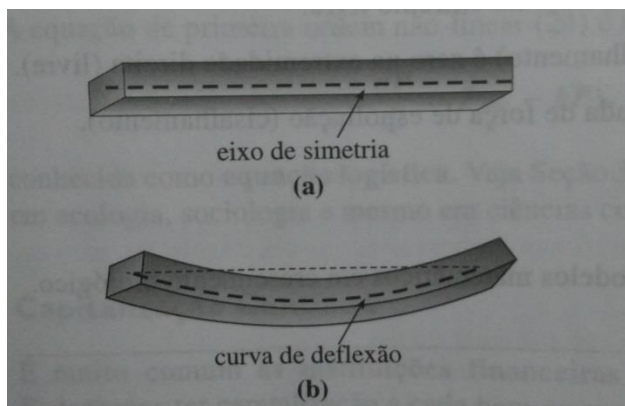
Para a execução de qualquer edificação ou qualquer outro elemento, é necessário a realização de um estudo das estruturas em si e as partes que a compõem, essas partes devem ser dimensionadas de acordo com os esforços que serão aplicados e calculados para as condições de uso que as mesmas serão submetidas.

Neste processo serão investigadas nas estruturas, as tensões a qual estarão expostas e as propriedades mecânicas dos materiais que deverão ser utilizados. Esse estudo é importante para a viabilidade da execução de um projeto resistente, seguro e durável, portanto, a determinação da deflexão estática de uma viga elástica causada por seu peso ou por uma carga externa, é de fundamental importância.

Suponhamos que uma viga homogênea tem seções transversais uniformes ao longo do seu comprimento L , na ausência de carga na viga, a curva ligando os centroides de todas as seções transversais é uma linha reta, denominada eixo de simetria (Figura 01(a)).

Se uma carga for aplicada à viga em um plano vertical contendo o eixo de simetria, então, a viga sofre uma distorção e a curva ligando os centroides de todas as seções transversais é chamada de curva de deflexão (Figura 01(b)), que é representada pelo deslocamento de qualquer ponto no eixo da viga. A curva que representa o eixo da viga após da deformação é chamada de linha elástica.

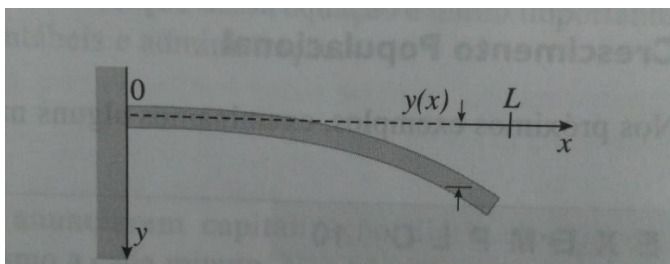
Figura 01. Eixo de simetria e curva de deflexão de uma viga.



Fonte: Zill e Cullen (2001).

Considerando uma viga engastada em sua extremidade esquerda e solta em sua extremidade direita, como na Figura 02. O extremo esquerdo da viga coincide com o ponto $x = 0$, e o extremo direito com o ponto $x = L$. O eixo x coincide com o eixo de simetria, e a deflexão $y(x)$ é medida a partir desse eixo e considerada positiva se estiver para baixo.

Figura 02. Viga com extremidade esquerda engastada.



Fonte: Zill e Cullen (2001).

Quando a viga é flexionada, ocorre em cada ponto ao longo do eixo uma deflexão (V) e uma rotação (θ). O ângulo de rotação " θ " é o ângulo entre o eixo x e a tangente a curva da linha elástica, e pode ser representado por

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

a inclinação da linha elástica pode ser dada por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}$$

logo

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}$$

quando o ângulo de rotação da viga é muito pequeno, ou seja, $\theta \rightarrow 0$, $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$, com isso

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

O momento defletor $M(x)$ em um ponto x ao longo da viga está relacionado com a carga por unidade de comprimento $w(x)$ através da equação

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x)$$

este momento é proporcional à curvatura k da curva elástica:

$$M(x) = EIk$$

em que E e I são constantes.

Do cálculo, sabemos que a curvatura é dada por

$$k = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

quando a deflexão é pequena, a inclinação $y' \approx 0$ e daí $[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}} \approx 1$. Se $k = y''$, a equação se torna $M = Ely''$. A segunda derivada desta ultima expressão é

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^2}{dx^2} y'' = EI \frac{d^4y}{dx^4}$$

Com isso,

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^4y}{dx^4} = w(x). \quad (10)$$

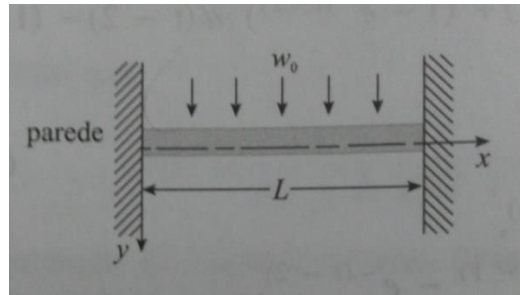
é satisfeita pela deflexão $y(x)$ da viga.

5.1.2 Aplicação

Problema 1: (Zill e Cullen, pág. 406) Uma viga de comprimento L está fixa em ambos os extremos (engastada). Veja a figura 03. E as condições $y(0) = 0$, $y(L) = 0$,

$y'(0) = 0$ e $y'(L) = 0$. As duas primeiras condições indicam que não há deflexão vertical nas extremidades; as outras duas significam que a linha de deflexão é horizontal nos extremos. Encontre a deflexão da viga quando uma carga constante w_0 está uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento, isto é, quando $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

Figura 03. Viga engastada em ambas as extremidades.



Fonte: Zill e Cullen (2001).

Solução

Sabemos que

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w(x),$$

aplicando a transformada de Laplace para essa equação, temos:

$$EI(s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0)) = \frac{w_0}{s}$$

substituindo as condições dadas, vemos que:

$$s^4 Y(s) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{w_0}{EI s}$$

Se $c_1 = y''(0)$ e $c_2 = y'''(0)$, então:

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{w_0}{EI s^5}$$

e conseqüentemente

$$y(x) = \frac{c_1}{2!} L^{-1} \left\{ \frac{2!}{s^3} \right\} + \frac{c_2}{3!} L^{-1} \left\{ \frac{3!}{s^4} \right\} + \frac{w_0}{4! EI} L^{-1} \left\{ \frac{4!}{s^5} \right\}$$

$$y(x) = \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{6} x^3 + \frac{w_0}{24 EI} x^4$$

Pelas condições dadas, $y(L) = 0$ e $y'(L) = 0$, a última equação conduz ao sistema

$$\frac{c_1}{2} L^2 + \frac{c_2}{6} L^3 + \frac{w_0}{24 EI} L^4 = 0$$

$$c_1 L + \frac{c_2}{2} L^2 + \frac{w_0}{6EI} L^3 = 0$$

Resolvendo, encontramos $c_1 = w_0 L^2 / 12EI$ e $c_2 = -w_0 L / 2EI$. Logo, a deflexão é dada por

$$y(x) = \frac{w_0 L^2}{24EI} x^2 - \frac{w_0 L}{12EI} x^3 + \frac{w_0}{24EI} x^4$$

$$y(x) = \frac{w_0}{24EI} x^2 (x - L)^2.$$

5.1.3 Blocos cerâmicos

A previsão de dados, como o tempo que os corpos levam para voltar a sua temperatura ambiente depois de aquecidos, também é um resultado obtido através de modelos, o que mostra que a análise do comportamento de incógnitas pode ser realizada, apresentando as tendências comportamentais que segue de acordo com um dado intervalo de tempo.

A determinação da constante de resfriamento de um material pode ser feita através da lei de esfriamento de Newton, já que quando corpos a diferentes temperaturas estão em contato haverá uma troca de calor, transferindo calor do corpo mais quente para o corpo mais frio, ao ponto em que se consiga um equilíbrio térmico, ou seja, ambos adquiram a mesma temperatura.

ZILL (2001) afirma “[...] a taxa de esfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio ambiente.”, isto é, o equilíbrio térmico de um sistema, envolvendo vários corpos, é alcançado quando ambos atingem a mesma temperatura.

Supondo que $T(t)$ represente a temperatura de um corpo no instante t e que a temperatura do meio ambiente seja uma constante T_m . Se dT/dt representa a taxa de variação da temperatura do corpo, a lei de esfriamento de Newton poderá ser expressa matematicamente por

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m). \quad (11)$$

em que k é constante de proporcionalidade. Logo a taxa de resfriamento de um bloco pode ser dada pela equação diferencial apresentada.

O bloco atingirá o equilíbrio térmico somente no limite em que o tempo tender ao infinito, entretanto, podemos estipular um valor máximo para a diferença entre T e T_a estabelecendo uma quantidade de tempo praticável e minimizada.

5.1.4 Aplicação

Problema 2: Realizado um experimento, construiu-se uma mini parede utilizando dois blocos cerâmicos unidos e revestidos por argamassa, inseriu-se em um forno durante 30 minutos, a uma temperatura de 120°C . Dois minutos depois de retirado do forno, sua temperatura passa para 73°C . Quanto tempo levará para que sua temperatura chegue a 28°C , se a temperatura do meio ambiente em que foi colocado for de exatamente 28°C ?

Solução

Sabemos que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

de acordo com dados fornecidos na questão temos que $T_m = 28$, $T(0) = 120$ e $T(2) = 73$, logo:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 28)$$

aplicando variáveis separáveis temos,

$$\frac{dT}{T - 28} = kdt$$

integrando ambos os lados vemos que,

$$\ln|T - 28| = kt + c_1$$

$$T - 28 = c_2 e^{kt}$$

$$T = c_2 e^{kt} + 28$$

Das condições iniciais dadas, temos que $T(0) = 120$, logo:

$$T(0) = c_2 e^{k0} + 28 = 120$$

$$c_2 + 28 = 120$$

$$c_2 = 92$$

portanto,

$$T = 92e^{kt} + 28$$

sabendo que $T(2) = 73$ vemos que,

$$T(2) = 92e^{2k} + 28 = 73$$

$$92e^{2k} = 45$$

$$e^{2k} = \frac{45}{92}$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{45}{92}$$

Logo, a mini parede construída de blocos cerâmicos levará

$$T(t) = 92e^{\frac{1}{2} \ln \frac{45}{92} t} + 28.$$

5.2 Equações Diferenciais na Engenharia Elétrica

5.2.1 Circuito RC

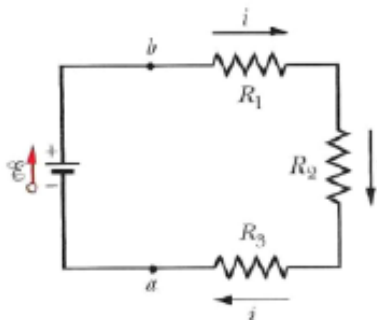
Os circuitos elétricos desempenham um papel importantíssimo no nosso dia-a-dia, pois estão presentes na maioria dos equipamentos do nosso cotidiano, desde lanternas, aparelhos de CD, computadores, sistemas de transmissão e recepção de rádio e TV, à o sistema nervoso dos animais e do homem.

Um circuito elétrico fornece um caminho para transferir energia de um local para outro, e é considerado bastante útil por permitir que essa energia seja transportada sem partes móveis.

Existem inúmeros tipos de circuitos, desde os mais simples que são os circuitos conectados por fios, ate os circuitos mais complexos, que são impressos integrados em um chip semicondutor. Todos esses, geralmente, incluem diversas fontes, resistores e outros elementos, tais como capacitores, transformadores e motores, interconectados em uma rede.

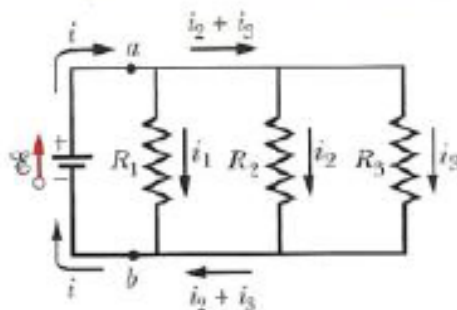
Em um circuito, quando temos vários elementos ligados em sequência e há um único caminho de corrente entre os pontos dizemos que existe uma ligação em série (Figura 04); quando cada um desses componentes oferece um caminho alternativo para a corrente entre esses pontos, temos uma ligação em paralelo (Figura 05).

Figura 04. Associação em série.



Fonte: Halliday (2012).

Figura 05. Associação em paralelo.



Fonte: Halliday (2012).

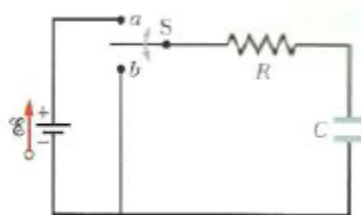
Nos circuitos em série a corrente permanece a mesma em todo o sistema, não variando variando seu valor nas extremidades dos resistores; já nos circuitos em paralelo, a corrente é distribuída entre os componentes, no entanto, a tensão (ddp) permanece a mesma em todos os dispositivos.

A análise desse tipo de trajetória pode ser feita através das Leis de Kirchhoff, elas regem a associação de componentes num circuito. Essas leis estabelecem as regras às quais devem respeitar as associações de componentes.

Na primeira lei, denominada Lei dos Nós, determina-se que a soma das correntes que saem do nó precisa ser igual à soma das que chegam até o mesmo, resultando $\sum I_n = 0$. A segunda lei, denominada Lei das Malhas, diz que a soma algébrica das tensões ao longo de uma malha fechada, é nula, portanto $\sum V_n = 0$.

Existem circuitos compostos pela associação em série de resistores e capacitores, a esses circuitos dão-se o nome de circuito RC. O circuito RC mais simples (Figura 06) é aquele composto por um capacitor e um resistor. Nesses tipos de circuitos os capacitores podem ser carregados ou descarregados através do resistor.

Figura 06. Circuito RC simples.



Fonte: Halliday (2012).

Para o circuito em serie mostrado acima, a segunda lei de Kirchhoff nos dá

$$V_R + V_C - \varepsilon = 0$$

sabendo que para um resistor $V = Ri$, e no capacitor $C = q/V$, temos

$$Ri + \frac{1}{C}q - \varepsilon = 0$$

conhecendo a definição de corrente elétrica, onde a corrente i e a carga q estão relacionados por $i = dq/dt$, logo:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q - \varepsilon = 0$$

reorganizando, temos a equação diferencial que representa um circuito RC em série

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \varepsilon. \quad (12)$$

5.2.2 Aplicação

Problema 3: (Zill e Cullen, pág. 114) Uma força eletromotriz (fem) de 200 volts é aplicada a um circuito R-C em série no qual a resistência é 1000 ohms e a capacitância, $5 \cdot 10^{-6}$ farad. Encontre a carga $q(t)$ no capacitor se $i(0) = 0,4$. Determine a carga quando $t \rightarrow \infty$.

Solução

De acordo com a questão temos que $V = 200$ volts, $R = 1000$ ohms, e $C = 5 \cdot 10^{-6}$ farad, logo

$$1000 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{5 \cdot 10^{-6}} q = 200$$

dividindo tudo por 1000, temos

$$\frac{dq}{dt} + 200q = \frac{200}{1000}$$

Utilizando equações lineares de primeira ordem podemos calcular o fator integrante $\mu(t)$,

$$\mu(t) = e^{\int 200 dt}$$

$$\mu(t) = e^{200t}$$

Multiplicamos todos os termos da equação por $\mu(t)$

$$\frac{dq}{dt}e^{200t} + 200qe^{200t} = \frac{200}{1000}e^{200t}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}[e^{200t}q] = \frac{200}{1000}e^{200t}$$

integrando ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{d}{dt}[e^{200t}q] dt = \int \frac{200}{1000}e^{200t} dt$$

$$e^{200t}q = \frac{200}{1000} \cdot \frac{1}{200} \cdot e^{200t} + c_1$$

$$e^{200t}q = \frac{1}{1000}e^{200t} + c_1$$

dividindo a equação por e^{200t}

$$q = \frac{\frac{1}{1000}e^{200t} + c_1}{e^{200t}}$$

$$q = \frac{1}{1000} + c_1e^{-200t}$$

Da condição inicial dada temos que $i(0) = 0,4$, sabendo que $i = dq/dt$, logo $q'(0) = 0,4$.

Derivando a equação encontrada, vemos que

$$q' = -200c_1e^{-200t}$$

Aplicando a condição inicial

$$q'(0) = -200c_1e^{-200 \cdot 0} = 0,4$$

$$-200c_1 = 0,4$$

$$c_1 = -\frac{0,4}{200}$$

Portanto, a carga do capacitor é dada por

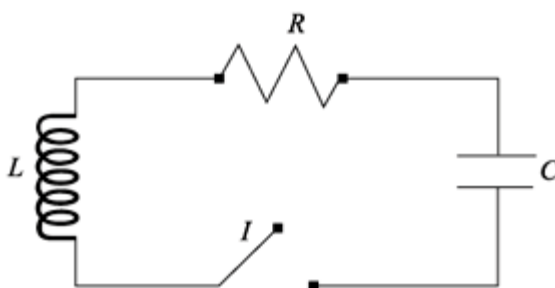
$$q = \frac{1}{1000} - \frac{0,4}{200}e^{-200t}$$

Assim, passando um longo tempo a carga é igual a $q = \frac{1}{1000}$.

5.2.3 Circuito LRC

O circuito LRC é outro tipo de circuito bastante estudado, composto pela associação em série de resistores, capacitores e indutores (Figura 07), é chamado de circuito de segunda ordem já que qualquer tensão ou corrente nele pode ser escrita por uma equação diferencial de segunda ordem.

Figura 07. Circuito LRC simples.



Fonte: Revista brasileira de ensino de física (2008).

Nestes circuitos a energia total U não é constante devido à existência da resistência R e diminui ao passar do tempo. Com isso, parte da energia será dissipada como energia térmica na resistência R .

Pela segunda lei de Kirchhoff, a soma dessas tensões é igual à tensão $V(t)$ impressa no circuito, isto é,

$$V_R + V_C + V_L = V(t)$$

Se $i(t)$ denota a corrente em um circuito elétrico LRC, então a queda de tensão através do indutor, resistor e capacitor é igual a $L di/dt$, iR e $1/C \cdot q$, respectivamente.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = V(t)$$

mas a carga $q(t)$ no capacitor está relacionada com a corrente $i(t)$ por $i = dq/dt$, e então a equação anterior torna-se a equação diferencial linear de segunda ordem que representa um circuito LRC em série

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = V(t). \quad (13)$$

5.2.4 Aplicação

Problema 4: (Ayres Jr, p 205) Num circuito temos uma indutância de 0,05 henry, uma resistência de 20 ohms, uma capacitância de 100 microfarads e uma força eletromotriz (F.E.M) $E = 100$ volts. Achar i e q sabendo que $q = 0$ e $i = 0$ quando $t = 0$.

Solução

Da questão, temos que $L = 0,05$ henry, $R = 20$ ohms, $C = 100 \cdot 10^{-6}$ farad e $V = 100$ volts, portanto

$$0,05 \frac{d^2 q}{dt^2} + 20 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} q = 100$$

dividindo a equação por 0,05, temos

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 400 \frac{dq}{dt} + 200000 q = 2000$$

Utilizando equações de segunda ordem lineares não homogêneas podemos reescrever a equação acima

$$q'' + 400q' + 200000q = 2000$$

onde $q'' + 400q' + 200000q$ é a parte homogênea da equação e 2000 é a parte não homogênea, com isto, sua solução será

$$q = q_h + q_p$$

Resolvendo a parte homogênea da equação, reescrevemo-la em termos da equação característica

$$\lambda^2 + 400\lambda + 200000 = 0$$

Vemos que temos uma equação do segundo grau, que ao ser resolvida obtêm-se duas raízes complexas

$$\lambda_1 = -200 + 400i$$

$$\lambda_2 = -200 - 400i$$

Portanto, nota-se que a solução homogênea desta EDO está no terceiro caso, onde

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

por isso,

$$q_h = c_1 e^{-200t} \cos 400t + c_2 e^{-200t} \sin 400t$$

Resolvendo a parte não-homogênea, temos $g(t) = 2000t^0$, por se tratar de uma função polinomial, temos que a solução particular será

$$q_p = 2000t^0$$

calculando as derivadas primeira e segunda, vemos que

$$q'_p = 0$$

$$q''_p = 0$$

substituindo na EDO

$$q'' + 400q' + 200000q_p = 2000$$

$$q''_p + 400q'_p + 200000q_p = 2000$$

$$0 + 400 \cdot 0 + 200000q_p = 2000$$

$$q_p = \frac{2000}{200000}$$

Lembrando a solução deste EDO e dada por

$$q = q_h + q_p$$

detemos de

$$q = c_1 e^{-200t} \cos 400t + c_2 e^{-200t} \sin 400t + \frac{2000}{200000}$$

Derivando a equação encontrada vemos que

$$q' = c_1(-200e^{-200t} \cos 400t - 400e^{-200t} \sin 400t) + c_2(-200e^{-200t} \sin 400t + 400e^{-200t} t)$$

Das condições iniciais dadas, dispomos de $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$, visto que $i = dq/dt$, obtemos $q'(0) = 0$.

Aplicando as condições dadas, contemos

$$q(0) = c_1 e^{-200 \cdot 0} \cos 400 \cdot 0 + c_2 e^{-200 \cdot 0} \sin 400 \cdot 0 + \frac{2000}{200000} = 0$$

$$c_1 = -\frac{2000}{200000}$$

e

$$q'(0) = c_1(-200e^{-200 \cdot 0} \cos 400 \cdot 0 - 400e^{-200 \cdot 0} \sin 400 \cdot 0) + c_2(-200e^{-200 \cdot 0} \sin 400 \cdot 0 + 400e^{-200 \cdot 0} \cos 400 \cdot 0) = 0$$

$$-200c_1 + 400c_2 = 0$$

dividindo a equação por -200

$$c_1 - 2 c_2 = 0$$

substituindo c_1

$$-\frac{2000}{200000} - 2 c_2 = 0$$

$$c_2 = -\frac{2000}{400000}$$

Então a carga $q(t)$ do capacitor será

$$q = -\frac{2000}{200000} e^{-200t} \cos 400t - \frac{2000}{400000} e^{-200t} \sen 400t + \frac{2000}{200000}$$

e a corrente $i(t)$

$$i(t) = q' = -\frac{2000}{200000} (-200e^{-200t} \cos 400t - 400e^{-200t} \sen 400t) - \frac{2000}{400000} (-200e^{-200t} \sen 400t + 400e^{-200t} t).$$

5.3 Equações Diferenciais na Engenharia Mecânica

5.3.1 Suspensões mecânicas automotivas

As suspensões veiculares existem desde meados do século VIII, com o uso de correntes em alguns sistemas de locomoção da época. No entanto causavam desconforto aos passageiros pois os veículos balançavam muito e eram bastante ruidosos. Com o passar do tempo e o avanço da tecnologia, surgiram molas de metal, que quando usadas como suspensão, reduziam significativamente o balanço das charretes, mas tornavam o sistema bastante robusto e pesado.

Alguns séculos depois, os processos de fabricação começaram a ser mais desenvolvidos, sendo possível a realização de projetos automotivos mais resistentes e leves, tendo como consequência novos designs de suspensão.

Nos dias atuais, as suspensões tem uma atenção diferenciada, passando a ser desenvolvidas eletronicamente, corrigindo imperfeições na pista mais rapidamente do que uma suspensão comum, fornecendo assim mais estabilidade e desempenho.

As molas utilizadas como suspensão podem ter seu movimento descrito por meio de duas leis empíricas, a segunda lei de Newton sobre o movimento e a lei de Hooke. A primeira delas diz que a resultante das forças que atuam sobre um

sistema em movimento é $F = m \cdot a$, em que m é a massa e a , a aceleração; já a lei de Hooke diz que a força restauradora de uma mola esticada é proporcional ao deslocamento $s + x$, ou seja, a força restauradora é $k(s + x)$, em que $k > 0$ é uma constante, s sendo o deslocamento de uma mola quando uma massa é atada em sua extremidade e o sistema está em posição de equilíbrio, e x é o deslocamento da massa em relação a posição de equilíbrio.

Na ausência de amortecimento ou outras forças externas quaisquer que poderiam estar atuando no sistema, a equação diferencial do movimento vertical do centro de gravidade é

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx.$$

Na mecânica, forças de amortecimento agindo em um corpo são consideradas como sendo proporcionais a uma potência da velocidade. Em particular, podemos supor que essa força seja proporcional a dx/dt . Quando não há outras forças agindo sobre o sistema, temos

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt}$$

em que β é uma constante de amortecimento positiva e o sinal de subtração indica que a força de amortecimento atua em direção oposta ao movimento. Dividindo a equação pela massa m e reorganizando

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

tomando $w^2 = k/m$ e $2\lambda = \beta/m$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + w^2 x = 0. \quad (14)$$

5.3.2 Aplicação

Problema 5: (Zill e Cullen, pág. 240) Um peso de 0,25 kg é atado a uma mola com constante de elasticidade igual a 4 N/cm. Supondo que uma força de amortecimento igual ao dobro da velocidade instantânea atua no sistema, determine a equação do movimento se o peso parte da posição de equilíbrio com velocidade de 3 m/s para cima.

Solução

Da questão temos que $m = 0,25 = 1/4$ kg e $k = 4$ kg/m, portanto

$$\frac{1}{4} \frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2 \frac{dx}{dt}$$

multiplicando a equação por 4 e reorganizando

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

Utilizando equações de segunda ordem lineares homogêneas podemos reescrever a equação acima

$$x'' + 8x' + 16 = 0$$

reescrevendo-a em termos da equação característica

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$

Vemos que temos uma equação do segundo grau, que ao ser resolvida obtêm-se duas raízes reais iguais

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = -4$$

Portanto, nota-se que a solução homogênea desta EDO está no segundo caso, onde

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$$

por isso,

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$$

Derivando a equação encontrada vemos que

$$x' = -4c_1 e^{-4t} + c_2 (e^{-4t} - 4t e^{-4t})$$

Das condições iniciais dadas, dispomos de $x(0) = 0$ e $x'(0) = -3$. Aplicando-as vemos que

$$x(0) = c_1 e^{-4.0} + c_2 0 e^{-4.0} = 0$$

$$c_1 = 0$$

e

$$x'(0) = -4c_1 e^{-4.0} + c_2 (e^{-4.0} - 4.0 e^{-4.0}) = -3$$

$$-4c_1 + c_2 = -3$$

substituindo c_1

$$-4.0 + c_2 = -3$$

$$c_2 = -3$$

Então a equação do movimento é dada por

$$x(t) = -3te^{-4t}.$$

5.3.3 Válvulas de segurança e alívio de pressão

As válvulas de segurança e alívio de pressão são consideradas os dispositivos mais importantes instalados na proteção de linhas condutoras de fluidos sobre pressão. Essas válvulas garantem que a pressão de operação não exceda o valor limite projetado, ou seja, o excesso de pressão causado por qualquer transiente hidráulico, a válvula entrará em ação de modo automático, eliminando o excesso de fluido causador do aumento de pressão na linha.

Essas válvulas podem ser do tipo mola que permitem um curso rápido de elevação e retorno para a posição inicial. O conjunto é composto por uma mola na vertical, sendo que em suas extremidades há dois componentes chamados prato de mola superior e prato de mola inferior e o local onde o fluido “empurra” a mola chama-se disco de vedação.

Por se tratar de um sistema envolvendo molas, podemos considerar que

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt}$$

em que β é uma constante de amortecimento positiva e o sinal de subtração indica que a força de amortecimento atua em direção oposta ao movimento. Dividindo a equação pela massa m e reorganizando

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

tomando $w^2 = k/m$ e $2\lambda = \beta/m$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + w^2x = 0.$$

5.3.4 Aplicação

Problema 6: (Silva, pág. 48) Considere uma válvula de alívio de pressão do tipo mola montada em uma rede hidráulica, sendo diâmetro de entrada do fluido na válvula $D_e = 25$ mm, diâmetro de saída $D_s = 50$ mm, pressão de trabalho $P = 10$ kgf/m². Suponhamos que houve uma avaria na linha e a pressão aumentou fazendo com que a mola deslocasse no mesmo valor que o diâmetro de saída, ou seja, $x_0 =$

50 mm, para que aliviasse a pressão e equilibrasse novamente o sistema. Como o processo requer um retorno rápido da mola, consideraremos $\zeta = 1$, ou seja, o movimento é criticamente amortecido. Com esses dados, podemos modelar matematicamente a oscilação criticamente amortecida do sistema, isto é, determinar a função deslocamento em cada instante de tempo para o retorno da mola em sua posição zero.

Solução

Analisando o problema temos as condições iniciais $x(0) = 50/1000$ e $x'(0) = 0$.

Da física sabemos que

$$P = \frac{F}{A}$$

logo

$$F = P \cdot A$$

onde $A = \pi d^2/4$

$$F = 10 \frac{\pi(25 \text{ mm})^2}{4}$$

$$F = \frac{5}{1000} \text{ kgf} = \frac{5}{100} \text{ N}$$

e sendo $x_0 = 50/1000$, utilizando a lei de Hooke podemos encontrar a constante elástica k da mola

$$F = k \cdot x$$

$$k = \frac{F}{x} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{5}{100}}$$

$$k = 1 \text{ N/m}$$

Através da segunda lei de Newton é possível encontrar a massa m

$$F = m \cdot a$$

$$m = \frac{F}{a} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{98}{10}}$$

$$m = \frac{51}{10000} \text{ kg}$$

Portanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 28 \frac{dx}{dt} + 196x = 0$$

aplicando a transformada de Laplace para essa equação, temos:

$$[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + 28[sX(s) - x(0)] + 196X(s) = 0$$

substituindo as condições dadas

$$s^2X(s) + 28sX(s) + 196X(s) = \frac{145}{100}s$$

$$X(s)[s^2 + 28s + 196] = \frac{145}{100}s$$

$$X(s) = \frac{145}{100} \cdot \frac{s}{(s^2 + 28s + 196)}$$

$$X(s) = \frac{29}{20} \cdot \frac{s}{(s + 14)^2}$$

$$X(s) = \frac{29}{20} e^{-14t}(-14t + 1)$$

Portanto a função deslocamento em cada instante de tempo para o retorno da mola em sua posição zero é

$$X(s) = \frac{29}{20} e^{-14t}(-14t + 1).$$

6 UTILIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NAS ENGENHARIAS

Em razão da sua fundamental importância para a área das ciências físicas, a obrigatoriedade do ensino de equações diferenciais nos cursos de engenharias e tecnologias é atendida pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido, campus Caraúbas, ofertando a disciplina de equações diferenciais como requisito da estrutura curricular do bacharelado interdisciplinar para estudantes de engenharia com formação em dois ciclos, onde a partir do quarto período de graduação os alunos adquirem contato com esses princípios matemáticos.

Se tratando de um curso com formação em dois ciclos, o bacharelado interdisciplinar contempla a disciplina no quarto período, onde os alunos em sua maioria estão destinando-se à engenharia a ser cursada no segundo ciclo.

6.1 Utilização na Engenharia Civil

O curso de engenharia civil da UFERSA campus Caraúbas formado por dois ciclos, permite a formação nas áreas da construção civil, estruturas, geotecnia e estradas, e saneamento e recursos hídricos, distribuídas em vinte e seis disciplinas, apresentadas na tabela 04.

Tabela 04. Disciplinas do segundo ciclo da engenharia civil.

Disciplinas
Resistência dos Materiais II
Topografia
Hidráulica
Geologia Aplicada à Engenharia
Materiais de Construção I
Mecânica dos Solos I
Eletricidade Básica
Mecânica das Estruturas I
Materiais de Construção II

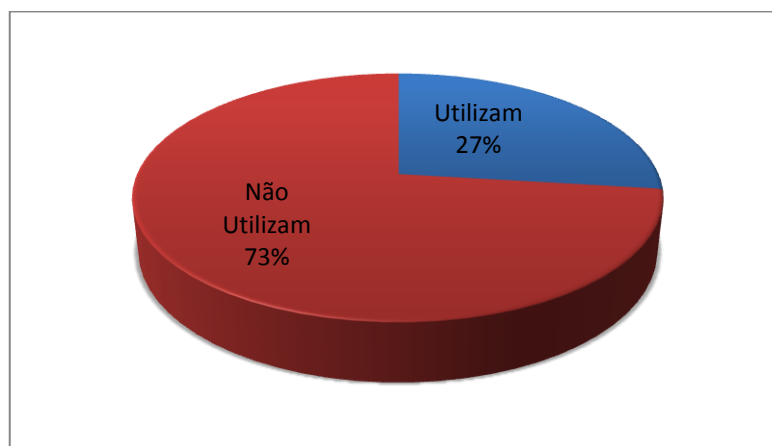
Saneamento
Mecânica das Estruturas II
Estradas I
Instalações Hidrossanitárias
Mecânica dos Solos II
Instalações Elétricas
Tecnologia das Edificações I
Sistemas de Abastecimento de Água
Estruturas de Aço
Estruturas de Concreto Armado I
Hidrologia
Estradas II
Tecnologia das edificações II
Estruturas de Concreto Armado II
Fundações e Estruturas de Contenção
Engenharia dos Transportes
Orçamento, Planejamento e controle de Obras

Fonte: Autoria própria (2018).

Das disciplinas apresentadas acima, 27% podem utilizar equações diferenciais na resolução de seus problemas, e 73% não utilizam, como mostrado no gráfico 01. Dentro dos 27% que utilizam equações diferenciais estão as disciplinas da área das estruturas, Resistência dos Materiais II, Mecânica das Estruturas I, Mecânica das Estruturas II, Estruturas de Aço, Estruturas de Concreto Armado I e II, e Fundações e Estruturas de Contenção.

Dentro dessas disciplinas os métodos mais empregados são, equações diferenciais de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, equações diferenciais de segunda ordem não-homogêneas e transformadas de Laplace.

Gráfico 01. Utilização das equações diferenciais nas disciplinas da engenharia civil.



Fonte: Autoria própria (2018).

6.2 Utilização na Engenharia Elétrica

O curso de engenharia elétrica da UFERSA campus Caraúbas formado por dois ciclos, permite a formação nos ramos da eletrônica, eletrotécnica, telecomunicações, e controle e automação, distribuídas em vinte e quatro disciplinas, apresentadas na tabela 05.

Tabela 05. Disciplinas do segundo ciclo da engenharia elétrica.

Disciplinas
Circuitos Elétricos I
Materiais Elétricos e Magnéticos
Sistemas Digitais
Teoria Eletromagnética
Circuitos Elétricos II
Circuitos Eletrônicos I
Laboratório de Circuitos Elétricos
Laboratório de Sistemas Digitais
Ondas e Linhas
Circuitos Eletrônicos II

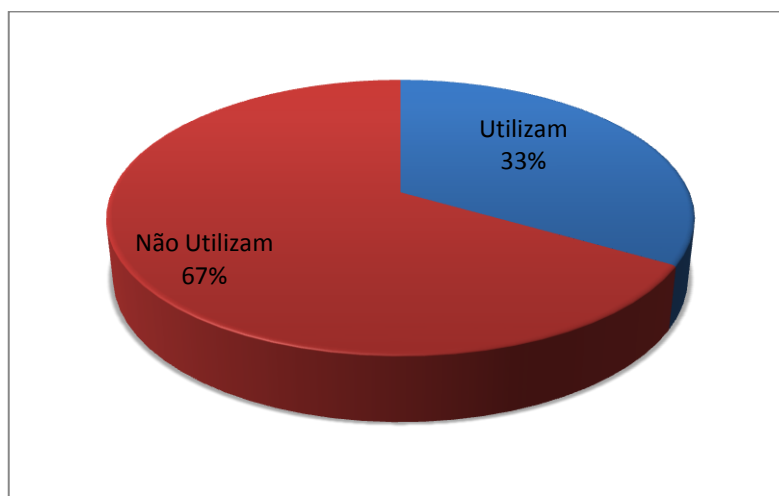
Laboratório de Circuitos Eletrônicos
Instalações Elétricas
Laboratório de Instalações Elétricas
Princípios de Telecomunicações
Conversão Eletromecânica de Energia
Eletrônica de Potência
Laboratório de Eletrônica de Potência
Microprocessadores e Microcontroladores
Laboratório de Microprocessadores e Microcontroladores
Análise de Sistema de Potência
Controle Analógico
Máquinas Elétricas
Controle Digital
Automação e Controle de Processos

Fonte: Autoria própria (2018).

Das disciplinas apresentadas acima, 33% podem utilizar equações diferenciais na resolução de seus problemas, e 67% não utilizam, como mostrado no gráfico 02. Dentro dos 33% que utilizam equações diferenciais estão as disciplinas, Circuitos Elétricos I e II, Teoria Eletromagnética, Ondas e Linhas, Princípios de Telecomunicações, Conversão Eletromecânica de Energia, Controle Analógico e Controle Digital.

Dentro dessas disciplinas os métodos mais empregados são, equações diferenciais de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, equações diferenciais de segunda ordem não-homogêneas e transformadas de Laplace.

Gráfico 02. Utilização das equações diferenciais nas disciplinas da engenharia elétrica.



Fonte: Autoria própria (2018).

6.3 Utilização na Engenharia Mecânica

O curso de engenharia mecânica da UFERSA campus Caraúbas formado por dois ciclos, permite a formação em áreas como processos mecânicos de fabricação, sistemas térmicos, e desenvolvimento e fabricação de materiais, distribuídas em vinte e três disciplinas, apresentadas na tabela 06.

Tabela 06. Disciplinas do segundo ciclo da engenharia mecânica.

Disciplinas
Metrologia
Mecânica Geral II
Desenho Mecânico
Termodinâmica Aplicada
Mecânica dos Fluídos
Mecanismos
Fundamentos de Ciência dos Materiais
Transferência de Calor
Elementos de Máquinas I
Planejamento, Programação e Controle da Produção

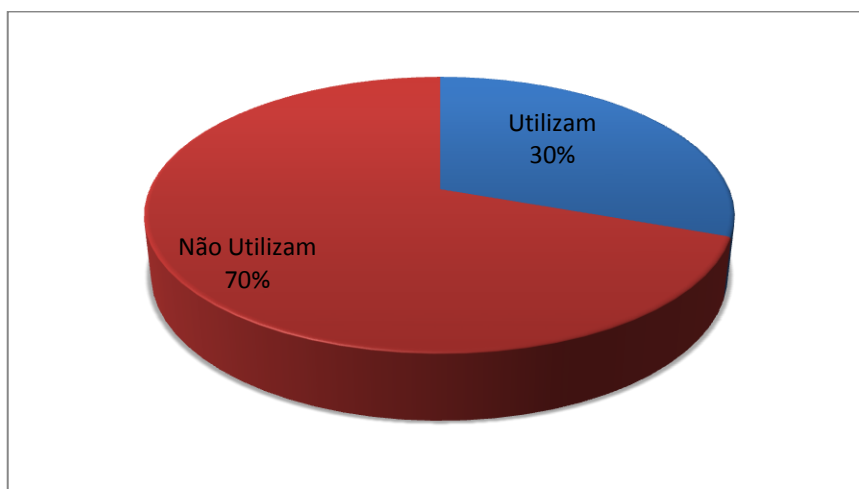
Conformação Mecânica
Materiais de Construção Mecânica
Motores de combustão
Máquinas de Fluxo
Elementos de Máquinas II
Manutenção Industrial
Tecnologia Mecânica
Processos Metalúrgicos de Fabricação
Usinagem
Sistemas Hidropneumáticos
Vibrações Mecânicas
Refrigeração e Ar Condicionado
Resistência dos Materiais II

Fonte: Autoria própria (2018).

Das disciplinas apresentadas acima, 30% podem utilizar equações diferenciais na resolução de seus problemas, e 70% não utilizam, como mostrado no gráfico 03. Dentro dos 30% que utilizam equações diferenciais estão as disciplinas, Mecânica Geral II, Mecânica dos Flúidos, Mecanismos, Resistência dos Materiais II, Elementos de Máquinas I e II, e Vibrações Mecânicas.

Dentro dessas disciplinas os métodos mais empregados são, equações diferenciais de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, equações diferenciais de segunda ordem não-homogêneas e transformadas de Laplace.

Gráfico 03. Utilização das equações diferenciais nas disciplinas da engenharia mecânica.



Fonte: Autoria própria (2018).

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A engenharia em sua grande maioria tem como suporte teórico a linguagem e investigação matemática, com isso, são de extrema importância um excelente embasamento de cálculos diferenciais e integrais, além de vários outros recursos matemáticos que são utilizados para resolver uma pluralidade de problemas.

Por ser uma extensão do cálculo, as equações diferenciais, em todas as áreas das ciências exatas é uma poderosa ferramenta para descrição e modelagem de muitos fenômenos, com inúmeras formas de aplicação.

Com o processo de modelagem matemática pode-se representar sistemas realistas, onde foram identificadas suas características, assim como as leis teóricas ou empíricas que os regem.

Os sistemas representados fazem parte do conjunto de engenharias disponíveis na UFERSA campus Caraúbas, onde da engenharia civil foram modelados sistemas de deflexão de viga e blocos cerâmicos, da engenharia elétrica conjuntos de circuitos elétricos RC e LRC, e da engenharia mecânica sistemas de suspensão mecânica e válvulas de segurança e alívio de pressão.

A aplicação das equações diferenciais para criação do modelo de cada sistema foi realizada por meio dos métodos de resolução de EDO's, onde pode-se ressaltar a importância do seu ensino nos cursos de graduação, visto que, os modelos descritos através destas, explicam fenômenos reais estudados pelos profissionais da área.

Neste contexto, enfatizou-se a importância da utilização das equações diferenciais para modelagem de sistemas de engenharias, permitindo a associação de conteúdos aprendidos em sala a problemas práticos, desmistificando a ideia de que a matemática é desnecessária.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALITOLEF, Sérgio dos Santos. **Algumas aplicações das equações diferenciais**. 2011. 37 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Federal de Rondônia, Ji-Paraná, 2011.

AYRES JÚNIOR, Frank. **Equações diferenciais**. 1. ed. São Paulo: McGraw-Hill, Inc, 1959.

BARIVIERA, Gabriela Duarte; MUMBERGER, Graziane Mariana; DOS SANTOS, Lucas Arnold; PÁDUA, Súzan Grazielle Benetti de. Lei de resfriamento de newton: resolução por edo e método de Euler. **Anais inovação, tecnologia, gestão e sustentabilidade**. Tangará da Serra: UEMG, 2017.

BASSANEZI, R. C. **Equações Diferenciais Ordinárias: Um curso introdutório**. 1. ed. São Paulo: UFABC, 2002.

BATTISTI, Aloísio José. **Equações diferenciais aplicadas em escoamento de fluídos**. 2002. 53 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

FIGUEIREDO, Tiago Dziekaniak. Aplicações das equações diferenciais em estudos da engenharia. In: IV COLÓQUIO INTERNACIONAL EDUCAÇÃO, CIDADANIA E EXCLUSÃO: DIDÁTICA E AVALIAÇÃO. 2015, Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: UFRJ, 2015.

FLEMMING, Diva M.; LUZ, Elisa F.; WAGNER, Robson. Equações diferenciais na engenharia civil: uma proposta didática. Palhoça: UNISUL. 2000.

HALLIDAY, D.; WALKER, J.; RESNICK, R. **Fundamentos de física**. vol. 3. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

LEÃO, Laís Sousa; ALVES, Luciana Aparecida. Aplicações de equações diferenciais ordinárias á engenharia civil. **Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco**. Uberlândia, v. 4, n. 1, p. 16 – 29. março. 2016.

MACHADO, Ivana Maria Fernandes. **Matemática aplicada: o uso das equações diferenciais ordinárias em modelos matemáticos de sistemas físicos e bio-químicos**. 2016. 58 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Química) – Instituto Federal de Goiás, Anápolis, 2016.

NÓBREGA, Danielle Dantas. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. 2016. 58 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, 2016.

REVSTA BRASILEIRA DO ENSINO DE FÍSICA. **Simulação e modelagem computacionais no auxílio à aprendizagem significativa de conceitos básicos de eletricidade. Parte II - circuitos RLC.** São Paulo, 2008. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000300008>. Acesso em: 12 mar. 2018.

SANTOS, Daniele Lima; LIMA, Regivaldo Vieira; RAMOS, Renisson Andrade; BARROS, Tassia Millena Carvalho; PRIMO, Aislan; MENDONÇA, Maria Anita S. S. de. Lei do resfriamento de newton: aplicação em blocos cerâmicos. **Ciências exatas e tecnológicas**, Aracaju, v. 4, n. 1, p. 21-28, março. 2017.

SILVA, Marcos Afonso da. **Modelagem matemática:** Equações diferenciais ordinárias em cursos de graduação. 2014. 140 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2014.

THOMAS, Lucas Rangel. **O uso das equações diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros.** 2013. 34 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Naturais) – Universidade de Brasília, Brasília, 2013.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**, Vol. 1, 3. ed. São Paulo: Pearson, 2013.