



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CAMPUS PAU DOS FERROS**

LUIZ PAULO GOMES DA SILVA

MECÂNICA QUÂNTICA EM ESPAÇOS CURVOS

PAU DOS FERROS

2019

LUIZ PAULO GOMES DA SILVA

MECÂNICA QUÂNTICA EM ESPAÇOS CURVOS

Monografia (graduação) submetida à Coordenação do Curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia

Orientador: Prof. Dr. Francisco Ernandes Matos Costa

PAU DOS FERROS

2019

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S586m Silva, Luiz Paulo Gomes da.
Mecânica Quântica em Espaços Curvos / Luiz Paulo
Gomes da Silva. - 2019.
22 f. : il.

Orientador: Francisco Ernandes Matos Costa.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2019.

1. Espaços Curvos. 2. Equação Schrödinger. 3.
Partícula Livre. 4. Espaço Métrico. 5. Sistemas
Microscópicos. I. Matos Costa, Francisco Ernandes,
orient. II. Título.

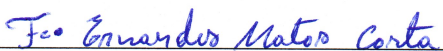
LUIZ PAULO GOMES DA SILVA

MECÂNICA QUÂNTICA EM ESPAÇOS CURVOS

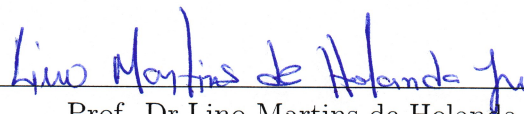
Monografia (graduação) submetida à Coordenação do Curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia

Aprovada em 07/02/2020

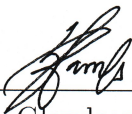
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Francisco Ernandes Matos Costa
Universidade Federal Rural do Semi-Árido



Prof. Dr. Lino Martins de Holanda Júnior
Universidade Federal Ruural do Semi-Árido



Prof. Dr. Glaydson Francisco Barros de Oliveira
Universidade Federal Rural do Semi-Árido

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por me conceder saúde e consciência para completar meus objetivos.

Agradeço a todos que compõem a universidade que de maneira direta ou indireta me ajudaram.

Ao Prof. Dr. Francisco Ernandes Matos Costa por ter aceitado e ter disponibilizado do seu tempo sendo meu orientador. Assim como a todos os professores que me ajudaram a trilhar esse caminho até este momento.

Agradeço principalmente a minha mãe Maria Vera Lucia Gomes, por me apoiar, encorajar e por nunca me deixar desistir dos meus objetivos facilmente, a minha tia Vanjerusa Gomes e meu primo João Victor e toda a minha família.

A Todos meus amigos e companheiros de labuta: José Lira, Thiago Aquino, Felipe William, Monaliza Soares, Renato Ne, Gabriel Caldas, Manoel Jose e Renata Fernandes.

A meus amigos de trabalho Adriel Filemon e Luan Fontes, pelos momentos de descontração e risadas.

Agradeço a todos, que mesmo distante me apoiaram.

RESUMO

A mecânica quântica é uma teoria que descreve sistemas físicos na escala atômica e subatômica. Ela explica três das quatro interações fundamentais e tem se mostrado ser extremamente consistente com os resultados experimentais. Entretanto, em altas escalas de energias, os efeitos gravitacionais em sistemas microscópicos precisam ser considerados. Nessa perspectiva, é importante estudar a teoria quântica em espaços com curvatura espacial. Nesta monografia, resolvemos analiticamente a equação de Schrödinger para a partícula livre para um dado espaço métrico.

Palavras-chave: Espaços Curvos. Equação Schrödinger. Partícula Livre. Espaço Métrico. Sistemas Microscópicos.

*Viva com o orgulho
das suas escolhas.*

ABSTRACT

The quantum mechanics is a theory that describe physical systems in the scale atomic and subatomic. The theory explain three of the four fundamental interactions has been shown to be extremely consistent with the experimentals results. Though, in the high energy scales, gravitational effects in microscopic systems need to be considered. In that perspective, is important to study a quantum theory in spaces with sptial curvature. In that monography, we solve the Schrödinger equation for a free particle for a given metric space.

Keywords: Curved Space. Schrödinger Equation. Free Particle. Metric Space. Microscopic Systems.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Problemática	9
1.2	Objetivo Geral	10
1.3	Objetivos Específicos	10
1.4	Justificativa	10
1.5	Metodologia	11
1.6	Estrutura da Monografia	11
2	MECÂNICA QUÂNTICA EM ESPAÇOS CURVOS	12
2.1	Espaços Métricos	12
2.2	Mecânica Quântica em Espaços Métricos	13
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	19
3.1	Especificando a Métrica	19
3.2	Partícula Livre	20
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	22
	REFERÊNCIAS	23

1 INTRODUÇÃO

A teoria quântica teve sua origem no começo do século XX resultando da incapacidade da física clássica em explicar uma série de resultados experimentais observados no final do século XIX, tais como: a radiação emitida por um corpo negro, o efeito fotoelétrico a estabilidade atômica e os aspectos atômicos (COHEN; DIU; LALOË; 1977).

Diferentemente da física clássica, que lida com fenômenos que estão em uma escala macroscópica aos quais é possível estabelecer uma noção intuitiva dos acontecimentos, a física quântica lida com fenômenos na escala atômica e subatômica que fogem completamente a noção intuitiva. Embora a física quântica faça apenas previsões probabilísticas, ela tem se mostrado ser uma teoria extremamente consistente para explicar a natureza na escala atômica e subatômica.

Existem pelo menos nove formulações da mecânica quântica (STYER et al., 2002), que são muito diferentes tanto do ponto de vista matemático quanto conceitual, no entanto, essas descrições fazem as mesmas previsões nos mais diversos tipos de fenômenos. Na descrição de Schrödinger o estado quântico de um sistema é descrito por uma função de onda que contém toda a informação sobre o sistema. Quando se aplica a equação de Schrödinger para descrever algum fenômeno assume-se um espaço euclidiano de fundo, que não possui curvatura. Nesse sentido, é importante estudar a mecânica quântica em espaços com uma métrica mais geral.

1.1 Problemática

A mecânica quântica é uma teoria muito bem estabelecida, tendo sido corroborada através de uma variedade enorme de experimentos científicos. Ela descreve com extrema precisão três das quatro interações fundamentais (o eletromagnetismo, as forças fraca e forte). A quarta interação – a gravidade – é descrita pela relatividade geral. Nesse contexto a gravidade é entendida como sendo o resultado da curvatura do espaço-tempo. Dessa forma, os pilares da física são a mecânica quântica e a relatividade geral.

Muitos esforços têm sido feitos no sentido de unificar esses dois pilares e isso pode, a priori, ser feito por duas vias. A primeira via consiste em formular uma teoria quântica para descrever a gravidade, entretanto os métodos usuais têm levado a teorias não renormalizáveis (que não é possível eliminar os infinitos que aparecem na teoria) (BARROS,

2005). A segunda via consiste em inserir efeitos gravitacionais (de curvatura do espaço-tempo) na própria descrição quântica, se esta for relativística, ou só efeitos de curvatura espacial *se for no contexto da mecânica quântica não relativística* (ALHAIDARI, 2002).

Nesta monografia investiga-se a segunda via. Para um primeiro momento considera-se apenas a mecânica quântica não relativística, dessa forma, os efeitos que serão considerados são de curvatura espacial. Portanto, estuda-se a mecânica quântica em espaços curvos e faz-se algumas aplicações na escala microscópica para verificar os efeitos da curvatura espacial.

1.2 Objetivo Geral

- Investigar efeitos da curvatura espacial em fenômenos que estão na escala atômica e subatômica.

1.3 Objetivos Específicos

- Fazer um estudo da mecânica quântica em espaços curvos.
- Resolver a equação de Schrödinger em espaços curvos para a partícula livre.

1.4 Justificativa

Existe uma série de problemas complexos como a quebra da simetria de Lorentz, invariância translacional, existência de um comprimento mínimo que não podem ser entendidos apenas no contexto da mecânica quântica usual. Além disso, inserir efeitos de curvatura espacial na descrição quântica constitui um caminho viável para a unificação dos dois pilares da física, citados anteriormente.

Dessa forma, o estudo da mecânica quântica em espaços curvos pode contribuir para com o esclarecimento das questões que ainda não foram explicadas pela mecânica quântica usual. Portanto, entendemos que esse estudo é de grande relevância.

1.5 Metodologia

Essa pesquisa consiste em uma investigação de natureza teórica quantitativa. Descreveremos a seguir as principais etapas metodológicas que serão adotadas.

Em um primeiro momento, será feito um estudo bibliográfico sobre a mecânica quântica ondulatória e a generalização da equação de Schrödinger para espaços curvos.

Posteriormente, será considerada uma métrica específica para resolver a equação de Schrödinger em espaços curvos aplicada em determinadas situações físicas, como o caso da partícula livre.

Os principais resultados deste estudo são apresentados na forma de equações matemáticas.

1.6 Estrutura da Monografia

A presente monografia está dividida em 4 capítulos cuja organização e descrição é feita a seguir:

O capítulo 2 traz uma discussão a mecânica quântica em espaços métricos que apresenta curvatura.

No capítulo 3 é proposta uma métrica fundamentada no princípio cosmológico e resolve-se a equação de Schrödinger aplicada à partícula livre para a métrica proposta.

No capítulo 4 apresenta-se as principais conclusões obtidas neste trabalho bem como algumas perspectivas de estudos futuros.

2 MECÂNICA QUÂNTICA EM ESPAÇOS CURVOS

2.1 Espaços Métricos

Em geometria analítica a distância entre dois pontos infinitamente próximos é representada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.1)$$

onde o quadrado da distância ds^2 de dois pontos infinitamente próximos $P=(x, y, z)$ e $P'=(x+dx, y+dy, z+dz)$ é uma forma quadrática das coordenadas relativas. Fazendo,

$$x^i = (x, y, z). \quad (2.2)$$

Segue que,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.3)$$

onde g_{ij} é o tensor métrico do espaço Euclidiano, que pode ser escrito em termos dos vetores que formam a base desse espaço, como segue

$$g_{ij} = \vec{\epsilon}_i \vec{\epsilon}_j.$$

Os vetores $\vec{\epsilon}_i$ são escritos em termos do vetor posição $\vec{r}$, isto é,

$$\vec{\epsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}.$$

Na Eq. (2.3) também está implícito a convenção da soma de Einstein. Desse modo, g_{ij} pode ser representado pela seguinte matriz,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Note que a Eq. (2.3) recupera a Eq. (2.1). Portanto, a Eq. (2.3) representa uma forma mais geral de se escrever a distância entre dois pontos. Para um espaço que apresenta curvatura os coeficientes de g_{ij} são funções da posição.

Por questão de simplicidade, vamos restringir nossa análise a apenas uma dimensão.

Neste caso, tem-se que

$$ds^2 = g_{11}dx^1dx^1, \quad (2.5)$$

ou ainda,

$$ds^2 = g(x)dx^2. \quad (2.6)$$

2.2 Mecânica Quântica em Espaços Métricos

Na mecânica quântica o espaço das funções de onda é o espaço de Hilbert, que é dotado de um peso, ou seja, o espaço das funções de x definidas em um certo intervalo $a \leq x \leq b$, tal que

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 g(x) dx < \infty, \quad (2.7)$$

dotado de um produto interno (ou escalar),

$$\langle \phi | \psi \rangle \equiv \int_a^b \psi^*(x) \psi(x) \sqrt{g(x)} dx. \quad (2.8)$$

Da definição acima, seguem as propriedades

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^*, \quad (2.9)$$

$$\langle \phi | \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \phi | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \phi | \psi_2 \rangle, \quad (2.10)$$

$$\langle \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 | \psi \rangle = \lambda_1^* \langle \phi_1 | \psi \rangle + \lambda_2^* \langle \phi_2 | \psi \rangle. \quad (2.11)$$

A partir da definição de produto interno, podemos definir o conceito de norma e de ortogonalidade de funções. Duas funções $\psi(x)$ e $\phi(x)$ são ortogonais se $\langle \phi | \psi \rangle = 0$. Por outro lado, a norma $\|\psi(x)\|$, é definida como

$$\|\psi(x)\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (2.12)$$

que deve ser positiva definida.

Nesse contexto, uma partícula bem localizada em torno de um ponto $P(x)$ é descrita pelo ket $|x\rangle$, autoket do operador posição X ,

$$X |x\rangle = x |x\rangle. \quad (2.13)$$

O conjunto $|x\rangle$ é completo. Assim, o operador identidade pode ser escrito como

$$\mathbb{1} = \int \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x|. \quad (2.14)$$

Demonstração:

Como $\phi^*(x) = \langle \phi | \psi \rangle$ e $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$, segue da Eq.(2.14) que

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle \sqrt{g(x)} dx, \quad (2.15)$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \left[\int |x\rangle \langle x| \sqrt{g(x)} dx \right] | \psi \rangle. \quad (2.16)$$

Temos que,

$$\int \langle x | |x\rangle \sqrt{g(x)} dx = \mathbb{1}. \quad (2.17)$$

Equanto que o produto escalar dos autokets do operador posição será

$$\langle x | x' \rangle = g(x)^{-1/2} \delta(x - x'). \quad (2.18)$$

Agora utilizando a Eq. (2.14),

$$\phi(x') = \langle x' | \phi \rangle = \langle x' | \left[\int |x\rangle \langle x| \sqrt{g(x)} dx \right] | \phi \rangle, \quad (2.19)$$

$$= \int \left(\sqrt{g(x)} \langle x' | x \rangle \right) \langle x | \phi \rangle dx, \quad (2.20)$$

$$\phi(x') = \int \left(\sqrt{g(x)} \langle x' | x \rangle \right) \phi(x) dx. \quad (2.21)$$

Assim, relembando a propriedade da integral da delta de Dirac, onde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x'), \quad (2.22)$$

se $-\infty < x' < +\infty$. Podemos concluir que

$$\langle x' | x \rangle = g(x)^{-1/2} \delta(x - x'). \quad (2.23)$$

Dessa forma, um estado físico arbitrário pode ser expandido em termos de $|x\rangle$,

$$| \psi \rangle = \int \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x | \psi \rangle. \quad (2.24)$$

Considerando que o operador translação espacial, $Tg(dx)$, atua no estado $|x\rangle$ da seguinte forma

$$Tg(dx) |x\rangle = |x + g(x)^{-1/2} dx\rangle. \quad (2.25)$$

Das Eqs. (2.6) e (2.25) podemos ver que

$$Tg(ds) |x\rangle = |x + ds\rangle, \quad (2.26)$$

o que mostra que nesse espaço é necessário uma translação de comprimento ds para levar um estado $|x\rangle$ em um outro estado $x + |dx\rangle$.

Mostraremos, agora, o caráter não-aditivo de Tg , isto é,

$$Tg(dx')Tg(dx'') \neq Tg(dx' + dx''). \quad (2.27)$$

Segue da Eq. (2.25) que

$$Tg(dx')Tg(dx'')|x\rangle = Tg(dx')|x + g(x)^{-1/2}|dx''\rangle, \quad (2.28)$$

$$Tg(dx')Tg(dx'')|x\rangle = |x + g(x)^{-1/2}dx'' + g(x + g(x)^{-1/2}dx'')^{-1/2}dx'\rangle. \quad (2.29)$$

Por outro lado,

$$Tg(dx' + dx'')|x\rangle = |x + g(x)^{-1/2}(dx' + dx'')\rangle, \quad (2.30)$$

$$Tg(dx' + dx'')|x\rangle = |x + g(x)^{-1/2}dx'' + g(x)^{-1/2}dx'\rangle. \quad (2.31)$$

Como $g(x + g(x)^{-1/2}dx'')$ não é necessariamente igual a $g(x)$, então podemos concluir das Eqs. (2.29) e (2.31) que Tg é, em geral, não-aditivo.

Outra propriedade que também segue imediatamente da definição do operador Tg , Eq. (2.25), é que

$$\lim_{dx \rightarrow 0} Tg(dx) = \mathbb{1} \quad (2.32)$$

Além disso, das Eqs. (2.13) e (2.25), tem-se que

$$[X, Tg]|x\rangle = g(x)^{-1/2}dx|x + g(x)^{-1/2}dx\rangle, \quad (2.33)$$

onde os colchetes representam o comutator. A Eq.(2.33) pode ser aproximada, com um erro da segunda ordem em dx , por

$$[X, Tg]|x\rangle \simeq g(x)^{-1/2}dx|x\rangle = g(X)^{-1/2}dX|x\rangle. \quad (2.34)$$

Agora, supondo que o momento generalizado P_g é o gerador de translação, ou seja, considerando que

$$Tg(dx) \equiv \mathbb{1} - \frac{-iP_g dx}{\hbar}, \quad (2.35)$$

obtemos das Eqs. (2.33) e (2.34), a nova relação de comutação entre os operadores posição e momento

$$[X, P_g] = i\hbar g(X)^{-1/2}. \quad (2.36)$$

Na sequência, é possível obter a expressão de P_g no espaço das posições

$$\langle x|P_g|\psi\rangle = -i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx} \langle x|\psi\rangle. \quad (2.37)$$

Segue da Eq. (2.23) que

$$Tg(\delta) |\psi\rangle = |\psi\rangle - \frac{iP_g\delta s}{\hbar} |\psi\rangle, \quad (2.38)$$

onde $\delta s = \sqrt{g(x)} \delta x$ é muito pequeno.

Utilizando as Eqs. (2.6) e (2.14), podemos reescrever a Eq. (2.26) na forma

$$\int ds' Tg(\delta s) |x'\rangle \langle x'|\psi\rangle = |\psi\rangle - \frac{iP_g\delta s}{\hbar} |\psi\rangle, \quad (2.39)$$

onde $ds' = \sqrt{g(x')} dx'$.

Agora, se utilizarmos a propriedade expressa na Eq. (2.26), a Eq. (2.39) torna-se

$$\int ds' |x' + \delta x\rangle \langle x'|\psi\rangle = |\psi\rangle - \frac{iP_g\delta s}{\hbar} |\psi\rangle, \quad (2.40)$$

$$\int ds' |x'\rangle \langle x' - \delta x|\psi\rangle = |\psi\rangle - \frac{iP_g\delta s}{\hbar} |\psi\rangle. \quad (2.41)$$

Por outro lado, se utilizarmos a seguinte relação aproximada

$$\langle x' - \delta x|\psi\rangle \approx \langle x'|\psi\rangle - \delta s \frac{\partial}{\partial s} \langle x'|\psi\rangle, \quad (2.42)$$

na Eq. (2.41), obteremos

$$\int ds' |x'\rangle \left(\langle x'|\psi\rangle - \delta s \frac{\partial}{\partial s} \langle x'|\psi\rangle \right) = |\psi\rangle - \frac{iP_g\delta s}{\hbar} |\psi\rangle. \quad (2.43)$$

Por fim, se aplicarmos $\langle x|$ dos dois lados da Eq. (2.43) e utilizarmos as Eqs. (2.14) e (2.18) podemos concluir

$$\int ds' \langle x|x'\rangle \frac{\partial}{\partial s} \langle x'|\psi\rangle = \frac{i}{\hbar} \langle x|P_g|\psi\rangle, \quad (2.44)$$

$$\int ds' (x' - x) \frac{\partial}{\partial s} \langle x'|\psi\rangle = \frac{i}{\hbar} \langle x|P_g|\psi\rangle, \quad (2.45)$$

$$\frac{i}{\hbar} \langle x|P_g|\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial s} \langle x|\psi\rangle, \quad (2.46)$$

$$\frac{i}{\hbar} \langle x|P_g|\psi\rangle = -i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx} \langle x|\psi\rangle. \quad (2.47)$$

Portanto, segue da Eq. (2.37) que, no espaço das posições o operador P_g é escrito como,

$$Pg = -i\hbar Dg, \quad (2.48)$$

onde,

$$Dg \equiv g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx}. \quad (2.49)$$

O operador momento P_g é Hermitiano no espaço de Hilbert com um peso, definido pelas Eqs. (2.7) e (2.8).

$$\langle \phi | P_g | \psi \rangle = \langle \phi | \int \sqrt{g(x)} dx | x \rangle \langle x | P_g | \psi \rangle, \quad (2.50)$$

$$= \int \sqrt{g(x)} dx \phi^*(x) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \psi(x) \right), \quad (2.51)$$

$$\langle \phi | P_g | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \int dx \psi^*(x) \frac{d}{dx} \psi(x). \quad (2.52)$$

Portanto P_g atua no espaço de Hilbert com um peso da mesma forma que $P = -i\hbar \frac{d}{dx}$ atua no espaço de Hilbert.

Agora, a integração por partes na Eq. (2.50) e supondo que $\phi^*(x)\psi(x)$ assume o mesmo valor nos limites de integração (zero, por exemplo, se a integração for de $-\infty$ a $+\infty$), obtemos

$$\langle \phi | P_g | \psi \rangle = -\frac{\hbar}{i} \int dx \psi(x) \frac{d}{dx} \phi^*(x), \quad (2.53)$$

$$= \int \sqrt{g(x)} dx \psi(x) i\hbar \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} \phi^*(x), \quad (2.54)$$

$$= \left[\int \sqrt{g(x)} dx \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \phi(x) \right) \right]^*. \quad (2.55)$$

$$\langle \phi | P_g | \psi \rangle = \langle \psi | P_g | \phi \rangle^*. \quad (2.56)$$

No espaço das posições, a Equação de Schrödinger dependente do tempo é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x | \psi(t) \rangle = \langle x | Hg | \psi(t) \rangle, \quad (2.57)$$

e considerando que

$$Hg = \frac{P_g^2}{2m} + V(X, t), \quad (2.58)$$

finalmente temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) D_g^2 \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t). \quad (2.59)$$

Supondo que o potencial V seja independente do tempo, $V = V(x)$, podemos buscar por soluções da Eq. (2.59) na forma

$$\Psi(x, t) = \psi(x) T(t). \quad (2.60)$$

Substituindo a Eq. (2.60) na Eq. (2.59),

$$\frac{i\hbar}{T(t)} \frac{d}{dt} T(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} D_g^2 \psi(x) + V(x). \quad (2.61)$$

O lado esquerdo da Eq. (2.61) só depende do tempo, enquanto que o lado direito só depende da posição, assim, para que essa equação seja verdadeira, é necessário que os dois lados da mesma sejam constantes, ou seja,

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{E}{i\hbar}T(t) \Rightarrow T(t) = \exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right), \quad (2.62)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m}Dg^2\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.63)$$

ou ainda,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \psi(x) \right] + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (2.64)$$

onde a constante de separação E é a energia da partícula. Note que quando $g(x) = 1$ a mecânica quântica tradicional é recuperada.

Para um espaço curvo tridimensional a equação de Schrodinger dependente do tempo pode ser escrita como,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{-\hbar^2/2m}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{g} g^{11} \frac{\partial}{\partial x} \Psi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{g} g^{22} \frac{\partial}{\partial y} \Psi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{g} g^{33} \frac{\partial}{\partial z} \Psi \right) \right] + V(x, y, z, t) \Psi, \quad (2.65)$$

onde $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ e g é o determinante da métrica.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 Especificando a Métrica

Para que possamos investigar melhor a equação de Schrödinger em espaços curvos vamos primeiramente especificar a métrica. A motivação da escolha da métrica vem da cosmologia.

Em cosmologia, a suposição básica de que o conteúdo energético do universo se distribui de modo homogêneo e isotrópico em grandes escalas implica que a distância entre dois pontos do espaço-tempo é descrita pelo elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker, isto é,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3.1)$$

onde o fator de escala $a(t)$ é uma função apenas do tempo e k é o parâmetro de curvatura, podendo assumir os valores $k = 0$, $k = 1$ e $k = -1$ o que representa universos planos, fechados e abertos, respectivamente.

No contexto da mecânica quântica o tempo é tratado como sendo um parâmetro, neste caso, o elemento de distância anterior se reduz para

$$ds^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (3.2)$$

Em nosso estudo, consideramos apenas espaços não expansionistas e unidimensionais. Dessa forma, a Eq. (3.2) se reduz para

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - kx^2}, \quad (3.3)$$

onde a coordenada radial r foi substituída pela coordenada x . Agora, comparando a equação acima com a Eq. (2.5), vem que

$$g(x) = \frac{1}{1 - kx^2}. \quad (3.4)$$

Substituindo a equação anterior na Eq.(2.64), vem que

$$-(1 - kx^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left[(1 - kx^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \psi(x) \right] + \frac{2m}{\hbar^2} V(x) \psi(x) = \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x). \quad (3.5)$$

que é a equação de Schrödinger independente do tempo em espaços curvos para uma métrica do tipo dada pela Eq. (3.4).

3.2 Partícula Livre

Para que possamos fazer agora algumas aplicações da equação de Schrödinger independente do tempo em espaços curvos, vamos considerar o caso mais simples que é o de uma partícula livre.

Fazendo então $V = 0$, na Eq. (3.5), vem que

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{kx}{(1-kx^2)} \frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{2mE}{\hbar^2} \frac{\psi(x)}{(1-kx^2)} = 0. \quad (3.6)$$

Para que possamos resolver a equação acima, vamos fazer a seguinte mudança de variável, isto é,

$$x = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{sen}(\sqrt{k}u). \quad (3.7)$$

Dessa forma,

$$u = \sqrt{k}^{-1} \text{sen}^{-1}(\sqrt{k}x), \quad (3.8)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos(\sqrt{k}u)}, \quad (3.9)$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{du}{dx} \frac{d\psi(u)}{du} \Rightarrow \frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{\cos(\sqrt{k}u)} \frac{d\psi(u)}{du}, \quad (3.10)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{du}{dx} \left(\frac{d\psi(x)}{dx} \right) \Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{1}{\cos(\sqrt{k}u)} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{\cos(\sqrt{k}u)} \frac{d\psi(u)}{du} \right). \quad (3.11)$$

Substituindo os resultados acima na Eq. (3.6), vem que

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} + \sqrt{k} \tan(\sqrt{k}u) \frac{d\psi(u)}{du} - \sqrt{k} \text{sen}(\sqrt{k}u) \frac{1}{\cos(\sqrt{k}u)} \frac{d\psi(u)}{du} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(u) = 0. \quad (3.12)$$

Após alguns procedimentos algébricos pode-se mostrar que,

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(u) = 0. \quad (3.13)$$

A equação acima apresenta solução conhecida, que pode ser escrita como

$$\psi(u) = Ae^{icu} + Be^{-icu}, \quad (3.14)$$

onde,

$$c = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (3.15)$$

e A e B são constantes arbitrárias.

Agora, retornando a variável x, vem que

$$\psi(x) = Ae^{ick^{-1/2}\sin^{-1}(\sqrt{k}x)} + Be^{-ick^{-1/2}\sin^{-1}(\sqrt{k}x)}. \quad (3.16)$$

Assumindo que a partícula desloca-se na direção crescente de x , a equação anterior se reduz para

$$\psi(x) = Ae^{ick^{-1/2}\sin^{-1}(\sqrt{k}x)}, \quad (3.17)$$

que é a autofunção da partícula livre em um espaço curvo cuja métrica é dada pela Eq. (3.4). Tomando agora o limite $k \Rightarrow 0$ obtem-se a solução usual para a equação de Schrödinger com um espaço plano como pano de fundo.

$$\psi(x) = Ae^{icx}. \quad (3.18)$$

Por outro lado, a solução geral, isto é, para a equação de Schrödinger dependente do tempo pode ser escrita como

$$\Psi(x, t) = Ae^{i[ck^{-1/2}\sin^{-1}(\sqrt{k}x) - \omega t]}. \quad (3.19)$$

Que mostra que a partícula livre pode ser descrita por uma onda plana em um espaço curvo. Na variável u tem-se exatamente a solução do tipo onda plana, isto é,

$$\Psi(u, t) = Ae^{i(cu - \omega t)}. \quad (3.20)$$

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Fizemos a formulação unidimensional da mecânica quântica em espaços curvos. Vimos que operador de translação não é aditivo, como na mecânica quântica usual e que o operador momento depende da escolha da métrica.

Utilizando uma métrica motivada pelo princípio cosmológico, resolvemos a equação de Schrodinger para a partícula livre e encontramos soluções analíticas.

Como perspectiva de estudos futuros pretende-se fazer outras aplicações da equação de Schrödinger para situações envolvendo potenciais dependentes da posição.

REFERÊNCIAS

ALHAIDARI, A. Solutions of the nonrelativistic wave equation with position-dependent effective mass. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, v. 66, n. 4, p. 421161-421167, (2002).

BARROS, C. C. Quantum mechanics in curved space-time. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 42, p. 119126, 2005. ISSN 1434-6044.

C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Vol.1 (Hermann e John Wiley & Sons, Paris, 1977).

D. F. Styer, M. S. Balkin, K. M. Becker, M. R. Burns, C. E. Dudley, S. T. Forth, J. S. Gaumer, M. A. Kramer, D. C. Oertel, L. H. Park, M. T. Rinkoski, C. T. Smith and T. D. Wotherspoon, *Nine Formulations of Quantum Mechanics*, *Am. J. Phys.* 70 (3), (2002).

P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, Oxford, 1958).

R. N. Costa Filho, G. Alencar, B. Skagerstam and J. S. Andrade Jr., Morse potential derived from first principles *EPL* 101, 10009-p1 - 10009-p4 (2013).