

APLICAÇÃO DE MODELOS DIFERENCIAIS NA ENGENHARIA CIVIL, COM FOCO NA DEFLEXÃO DE VIGAS

Leonardo da Silva Rebouças¹, Matheus da Silva Menezes².

¹ Aluno Curso de Ciência e Tecnologia UFRSA Campus Mossoró-RN, leosilvar15@gmail.com

² Dr., Professor Orientador, Campus Mossoró-RN, matheus@ufersa.edu.br

Resumo: Vários fenômenos da natureza podem ser modelados através de equações diferenciais, envolvendo uma equação desconhecida e suas derivadas [1]. Através dessas equações pode-se explicar e quantificar fenômenos ou sistemas de forma matemática, nos fornecendo uma descrição simplificada do processo real, ou seja, a modelagem do sistema. Uma dessas modelagens envolve o estudo da curva de deflexão, que se utiliza técnicas de resolução para equações diferenciais de ordem superior. Para realização desse estudo utilizou-se como corpo sólido as vigas, que são elementos comuns da engenharia civil, no qual são projetadas para suportar momentos e forças transversais. Muitas estruturas são construídas usando grandes suportes de aço ou vigas, as quais defletem ou distorcem sob seu próprio peso ou em decorrência de alguma força externa. Essa deflexão é governada por uma equação diferencial linear de ordem superior [2]. Neste trabalho foi feita uma modelagem diferencial analítica, na qual, pode se obter a equação que descreve a deflexão máxima sofrida por uma viga, possibilitando avaliar comparativamente aos dois outros modelos presentes no estudo, que são a modelagem experimental e o método dos elementos finitos (MEF), obtido através de um software chamado ANSYS.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Modelagem. Deflexão. Vigas. MEF.

1. INTRODUÇÃO

Uma das principais funções do engenheiro civil é projetar, e quando se trata de projeto de vigas um dos aspectos a ser considerado é a deflexão. Quando uma viga com um eixo longitudinal reto é carregada por forças verticais o eixo é deformado em uma curva chamada de curva de deflexão de viga [3].

Em resumo a deflexão ou flecha $v(x)$ corresponde ao deslocamento em relação ao eixo y , em qualquer ponto do eixo x , conforme ilustrado na Figura 1, estabelecendo uma deflexão, em relação ao ponto de interesse (no eixo x) e a influência da carga aplicada, ou seja, a intensidade e localidade em que a carga está atuando [4].

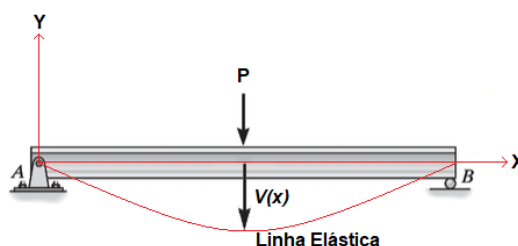


Figura1. Esboço da deflexão máxima e linha elástica em uma viga simplesmente apoiada (Autoria própria).

Pode-se observar que a curva da viga (linha elástica) varia de acordo com a intensidade da carga P e do seu comprimento em relação ao eixo x , logo tratasse de uma função $v(x)$.

O interesse particular da determinação da máxima deflexão, em uma viga sujeita a um determinado carregamento, está no fato de que, geralmente, as especificações do projeto de uma viga incluem um valor máximo admissível para esta deflexão [5].

Embasado nessas teorias, o presente trabalho irá apresentar a demonstração, modelagem, aplicação e comparação das equações diferenciais em relação ao método numérico dos elementos finitos (MEF) e o modelo experimental.

2. DESENVOLVIMENTO

É importante e desejável realizar a descrição matemática do comportamento de algum sistema ou fenômeno real em termos matemáticos, sejam eles físicos, sociológicos ou mesmo econômicos. Essa descrição matemática, chamada de modelo matemático, é construída levando-se em consideração determinadas condições [2].

No caso da deflexão de vigas será necessário a utilização de equações diferenciais de ordem superiores lineares e métodos específicos para encontrar a parte homogênea (y_c) e não homogênea (y_p) da equação que rege a curva de deflexão, isto é $y = y_c + y_p$. É importante lembrar que durante a modelagem irá surgir constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, onde essas constantes podem ser determinadas através dos problemas de valor inicial (PVI) ou problemas de valor de contorno (PVC), que estão intimamente ligadas as restrições impostas pelos apoios, ou seja, como as vigas estão apoiadas.

De acordo com [6], outra fonte de estudo é a utilização de softwares de simulação estrutural que possuem como base de processamento o método dos elementos finitos (MEF). O MEF é uma técnica complexa no que concerne sua formulação, cuja sua aplicação abrange várias áreas da engenharia. Para realização dessa análise foi utilizado um software de análise estrutural (ANSYS).

2.1. Demonstração da EDO

Para deduzir a equação diferencial que rege a deflexão de vigas precisa-se de alguns conceitos de resistências dos materiais. Além disso, deve-se fazer algumas considerações em relação a viga, no qual, ela seja homogênea e tenha seção transversal uniforme.

Inicialmente se faz necessário uma análise com base na resistência da viga antes da aplicação da carga, Figura 2 (a). Devido ausência de qualquer tipo de carga aplicada na viga (incluindo o peso da viga), nota-se que o corpo não sofre nenhum tipo de alteração, de modo que a curva que liga todos os centroides de todas seções transversais, é uma reta chamada de eixo de simetria. Caso seja aplicada uma carga no corpo da viga, irá acontecer uma deformação (deflexão) no eixo de simetria, e essa deformação é denominada de curva de deflexão, Figura 2 (b).

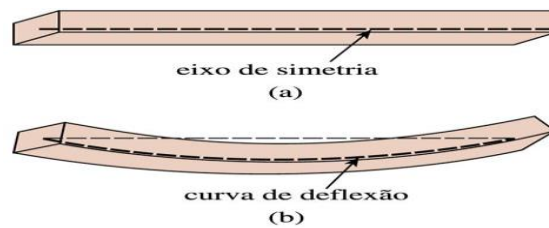


Figura 2. Deflexão de uma viga: viga antes da deflexão (a) e viga após a deflexão (b). [2]

Com base nessas informações, podemos observar uma relação entre o momento fletor $M(x)$ aplicado em qualquer ponto do eixo x , com uma carga distribuída qualquer $w(x)$, que é expressa pela equação

$$M(x) = EIk \quad (1)$$

Onde $M(x)$ é proporcional a curva k da curva elástica, logo

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = w(x) \quad (2)$$

Lembre-se que E é o módulo de elasticidade e o I é o momento de inércia, onde ambos são constantes. Seja k a curvatura expressa pela equação

$$k = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

Como a deflexão $y(x)$ é algo tão pequeno, que se pode considerar uma a inclinação $y' \approx 0$, de forma que $[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}} \approx 1$, portanto conclui-se que $k = y''$. Aplicando na equação 1

$$M(x) = EIy'' \quad (4)$$

Aplicando a equação 4 na equação 2, obtém-se a seguinte equação diferencial de quarta ordem

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w(x) \quad (5)$$

A partir dessa equação pode-se encontrar a deflexão de uma viga, simplesmente aplicando métodos de soluções para equações diferenciais. Para facilitar os cálculos e diminuir o número de constantes, existem outras equações de ordem menores que podem ser utilizadas.

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x) \quad (6)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (7)$$

É importante lembrar que o uso dessas equações está ligado diretamente ao problema e aos dados que se possui.

2.2. Modelagem utilizando técnicas para equações diferenciais de ordem superior

Com base nas equações diferenciais 5, 6 e 7, pode-se criar um modelo matemático (modelagem), cuja solução dependa de duas condições. São elas as condições de contorno e de continuidade, que podem ser descritas como sendo um PVC e PVI respectivamente. Para entender melhor cada condição, é importante definir o que é um apoio, uma vez que essas condições estão diretamente ligadas as restrições do movimento impostas pelo mesmo.

Definição de apoio: um apoio é um elemento que impede o movimento em uma ou mais direções.

Portanto é possível modelar um sistema a partir da quantidade de restrições impostas por cada apoio, ou seja, para encontrar a solução da equação diferencial é preciso inicialmente identificar as condições de contorno (PVC), mostradas na Tabela 1.

Tabela 1. condições de contorno (PVC) com base nos apoios (autoria própria).

condições de contorno	
Tipos de apoios	PVC
Engastada	$y = 0 \quad y' = 0$
Livre	$y'' = 0 \quad y''' = 0$
Simplesmente apoiada	$y = 0 \quad y'' = 0$

Se não for possível usar uma única coordenada x para expressar a equação da inclinação ou curva de deflexão, as condições de contorno não serão suficientes para encontrar a solução. Caso isso aconteça, será necessário aplicar as condições de continuidade (PVI) que são válidas em um ponto x de intercessão entre dois intervalos, ou seja, cada condição só será válida numa região $0 \leq x_1 \leq a$ e $a \leq x_2 \leq (a + b)$, Figura 3.

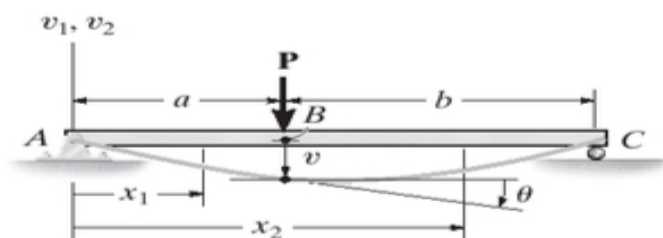


Figura 3. Análise da deflexão em duas coordenadas. [7]

É importante lembrar que, os valores da inclinação e deflexão encontrados devem ser iguais a do ponto B, para que as condições do PVI sejam válidas, e a curva de deflexão seja contínua. Essas condições podem ser expressas matematicamente da seguinte forma:

$$\theta_1(x) = \theta_2(x) \quad (8)$$

$$v_1(x) = v_2(x) \quad (9)$$

Onde $\theta(x) = y'(x)$ e $v(x) = y(x)$.

2.2.1 Viga simplesmente apoiada

Considerando uma viga simplesmente apoiada de comprimento L , submetida a uma carga P no centro do comprimento, Figura 4.

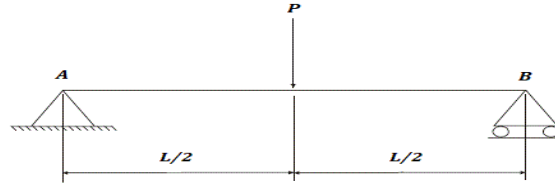


Figura 4. viga simplesmente apoiada (autoria própria).

De acordo com as condições da estática, conclui-se que a viga estará em equilíbrio, caso as forças de reação em A e B sejam iguais, logo, a carga está sendo aplicada na metade do comprimento total, e a soma das reações devem ser iguais a P . Portanto conclui-se que

$$F_A = F_B = \frac{P}{2} \quad (10)$$

Logo

$$F_A + F_B = P \quad (11)$$

Se for feita uma seção, de $0 \leq x_1 \leq \frac{L}{2}$, obtém-se a situação mostrada na Figura 5.

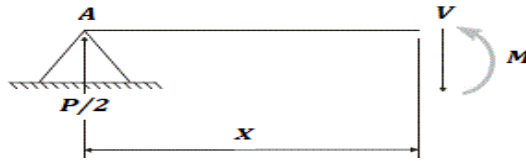


Figura 5. Seção da viga (autoria própria).

Aplicando as mesmas condições de equilíbrio na seção, com a finalidade de achar o momento interno, adotasse que

$$\Sigma M = 0 \quad (12)$$

Portanto

$$M(x) = \frac{px}{2} \quad (13)$$

Substituindo a equação 13 na equação 7 que foi demonstrada anteriormente, chega-se a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{px}{2EI} \quad \text{ou} \quad y'' = \frac{px}{2EI} \quad (14)$$

Esta equação diferencial ordinária de segunda ordem, pode ser resolvida de forma separada, trabalhando inicialmente com a parte homogênea (y_c) e logo após a parte não homogênea (y_p), na qual obtém se a equação $y = y_c + y_p$.

Parte homogênea: Partindo da equação 14 a parte homogênea, corresponde a seguinte equação

$$y'' = 0 \quad (15)$$

Como a equação 15 é linear e possui coeficiente constante pode-se dizer que a equação auxiliar diferencial é

$$\begin{aligned} m^2 + 0.m + 0 &= 0 \\ \Delta &= 0^2 - 4.1.0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta = 0$$

Portanto apresenta uma única raiz que é

$$\frac{0 \pm \sqrt{0}}{2} = 0 \quad (17)$$

$$m = 0$$

Então a solução da parte homogênea será

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} \\ y_c &= c_1 + c_2 x \end{aligned} \quad (18)$$

Parte não homogênea: Com base na equação 18, obtém-se as identificações $y_1 = 1$ e $y_2 = x$, com isso é possível calcular o Wronskiano e aplicar o método de variação de parâmetro e encontrar a solução de y_p , veja a seguir o cálculo:

$$\begin{aligned} W(1, x) &= \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 \\ W &= 1 \end{aligned} \quad (19)$$

Como o Wronskiano é diferente de zero, dizemos que y_1 e y_2 são linearmente independentes, portanto é possível determinar u_1 e u_2 , da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{px^2}{2EI}, & u_1 &= -\frac{p}{2EI} \int x^2 dx \\ u_1 &= -\frac{px^3}{6EI} \end{aligned} \quad (20)$$

Em relação a u_2

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{px}{2EI}, & u_2 &= \frac{p}{2EI} \int x dx \\ u_2 &= \frac{px^2}{4EI} \end{aligned} \quad (21)$$

Como $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, conclui-se que a solução geral é

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{px^3}{6EI} \cdot 1 + \frac{px^2}{4EI} X \\ y_p &= \frac{px^3}{12EI} \end{aligned} \quad (22)$$

Então a solução geral será

$$y = c_1 + c_2 x + \frac{px^3}{12EI} \quad (23)$$

Para encontrar as constantes deve-se utilizar uma condição de continuidade (PVI) e uma condição de contorno (PVC). Importante lembrar que nesse caso só é necessário utilizar 2 condições, mas existem outras condições de continuidade e outras condições de contorno. Como a viga é simplesmente apoiada tanto na esquerda ($x = 0$) como na direita ($x = L$), não há deflexão vertical, além disso para que a curva elástica seja contínua a inclinação onde a força p é aplicada ($x = \frac{L}{2}$) tem que ser igual a 0, logo as condições utilizadas são:

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (24)$$

Para $y(0) = 0$

$$0 = c_1 + c_2 \cdot 0 + \frac{p \cdot 0^3}{12EI}$$
$$c_1 = 0$$
(25)

Para $y'(\frac{L}{2}) = 0$

$$0 = c_2 + \frac{p}{4EI} \cdot \left(\frac{L^2}{4}\right)$$
$$c_2 = -\frac{pL^2}{16EI}$$
(26)

Aplicando as equações 25 e 26 na equação 23, encontrasse a equação que rege a deflexão da viga em questão, que é

$$y_1 = 0 - \frac{pL^2}{16EI} \cdot x + \frac{px^3}{12EI}$$
(27)

Simplificando

$$y_1 = -\frac{px}{48EI} (3L^2 - 4x^2)$$
(28)

Onde:

p = Carga (N)

L = Comprimento (m)

E = Módulo de elasticidade (GPa)

I = Momento de inércia (m^4)

Lembre-se que essa equação só é válida para seção 1, no intervalo $0 \leq x_1 \leq \frac{L}{2}$, mas o leitor mais atento já percebeu que a seção 1 é igual a seção 2, uma vez que a carga está sendo aplicada exatamente em $\frac{L}{2}$, então pode-se afirmar que as seções são simétricas. Com base nessas informações é possível dizer que a equação da seção 2, cujo o intervalo $\frac{L}{2} \leq x_2 \leq L$, é igual a equação 28, onde L é a coordena inicial de referência, e as condições de contorno e continuidade serão

$$y_2(L) = 0, \quad y_2\left(\frac{L}{2}\right) = y_1\left(\frac{L}{2}\right), \quad y_2'\left(\frac{L}{2}\right) = -y_1'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

A condição de continuidade $y_2\left(\frac{L}{2}\right) = y_1\left(\frac{L}{2}\right)$, confirma que a equação da curva de deflexão é continua.

3. METODOLOGIA

Com intuito de validar o modelo matemático descrito anteriormente e avaliar comparativamente os seus resultados, foi utilizado nessa metodologia três métodos de análises, são eles: teórico, experimental e simulacional.

3.1 Análise teórica

A análise teórica é feita através da modelagem do problema utilizando técnicas diferenciais, no qual se obtém a solução, ou seja, a equação da deflexão. posteriormente com a ajuda do software excel são plotados os resultados e os gráficos.

3.2 Análise experimental

Esta análise foi realizada inicialmente com a confecção de dois apoios, sendo eles um fixo (pino) e outro móvel(rolete), como mostra a Figura 6, com a finalidade de deixar a análise experimental o mais próximo do ideal. Os apoios foram feitos de madeira, pois é um material de fácil manipulação e que apresentasse uma resistência considerável para suportar tanto o peso da viga quanto a carga aplicada sem sofrer deformações.

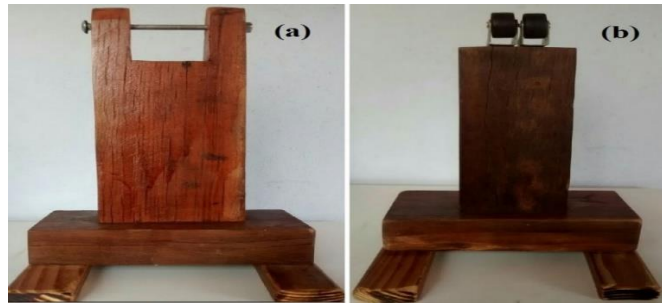


Figura 6. (a) Pino, (b) rolete (autoria própria).

Sendo a obtenção da deflexão máxima o objetivo desse processo, houve a necessidade de buscar bastante qualidade durante todas as etapas do mesmo, visto que a deflexão não é algo fácil de se determinar com exatidão, pós e muito pequena e em muitos os casos não é perceptível ao olho nu. Com intuito de realizar um bom experimento e obter um resultado satisfatório foi utilizado um equipamento denominado de relógio comparador, que irá fornecer a medição da deflexão através de uma relação do estado inicial e o final da viga, ou seja, estabelece uma diferença entre os estados fornecendo a leitura da deflexão máxima sofrida. Para esse experimento foi utilizado todos os materiais da Tabela 2.

Tabela 2. Listagem de materiais (autoria própria).

Materiais	Quantidade	Especificação
Pino	01	Usinado em madeira
Roleta	01	Acoplado na base de madeira
Relógio comparador	01	Instrumento de medição
Viga retangular	01	2"x1" (0,80mm espessura)
Nylon	01	0,60mm de espessura
Chapa de aço (carga)	01	1,597 Kg

A montagem e execução do experimento foi realizada no laboratório da UFERSA – Campus Mossoró, onde teve suporte de técnicos e professores qualificados para auxiliar na utilização dos equipamentos. Inicialmente foi feito a montagem sistema, onde a viga retangular foi fixada no apoio fixo (pino) de modo que restringisse o movimento de translação tanto na vertical quanto na horizontal. A outra extremidade foi apoiada no rolete impedindo a movimentação de translação no eixo vertical e livre na horizontal, portanto a viga é considerada simplesmente apoiada, como mostra a Figura 7 (a).

Com o sistema pronto foi feito a fixação do relógio comparador, que é parte mais importante do sistema, uma vez que o relógio é bastante sensível e a ponta de contato tem que ficar exatamente na metade do comprimento do corpo da viga. Logo após foi feita a aplicação da carga através do nylon. O nylon foi utilizado com o objetivo de simular uma carga concentrada (na prática isso é impossível), uma vez que é improvável aplicar toda a carga em um único ponto infinitesimal, mas devido a espessura do nylon ser fina e seu peso ser desprezível, pode se dizer que foi a modelagem prática mais próxima do real.



Figura 7. Viga simplesmente apoiada (a) e sistema de medição de deflexão (b) (autoria própria).

Com o sistema finalizado foi realizado a aplicação da carga, como mostra a Figura 7 (b) acima, gerando uma alteração na leitura do relógio comparador, onde está variação é a deflexão máxima. A leitura obtida foi anotada e será discutida posteriormente.

3.2 Análise simulacional

Para uma melhor análise dos resultados foi feito uma simulação do mesmo sistema através de um software de

análise estrutural, que tem como base de processamento o método dos elementos finitos (MEF), no qual, vai possibilitar uma comparação entre os resultados. O MEF é uma técnica complexa no que concerne sua formulação, cuja sua aplicação abrange várias áreas da engenharia [6]. Em resumo foi utilizado o software ANSYS, onde feito um pré-processamento, que consiste na escolha do tipo de malha mais apropriada para a modelação fiel do problema, no qual foi selecionado o elemento de barra. Posteriormente foi feita a representação 3D do sistema com todas as condições pré-estabelecidas onde foi obtido a solução e os resultados do pós-processamento, como mostra a figura 9.

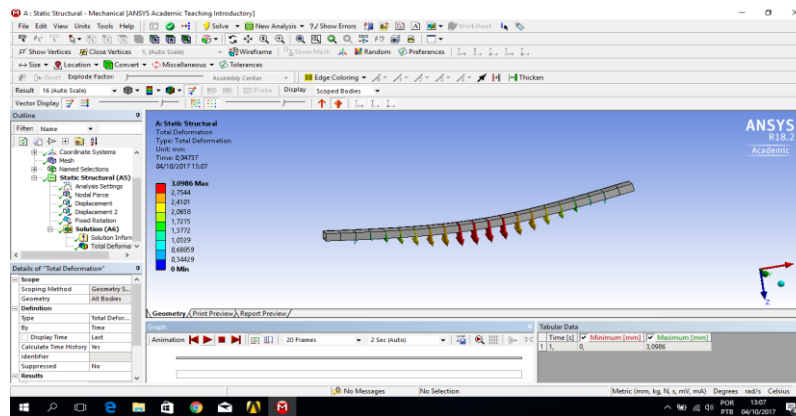


Figura 9. Interface gráfica do ANSYS (autoria própria).

Com os resultados obtidos em todas as análises foi feito comparações e avaliações dos resultados através de métodos estatísticos, que serão discutidos com a finalidade de observar a proximidade do modelo matemático com o modelo real, além da influência das variáveis envolvida no sistema.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A primeira consideração neste trabalho, foi que a base teórica utilizada tivesse resultados bem próximos aos da simulação e em relação ao experimental ficasse em uma margem de erro aceitável, visto que o modelo experimental apresenta variáveis que não são consideradas pelos demais modelos. Essa consideração é importante pois indica qual a real importância das equações diferenciais no estudo da deflexão de vigas, permitindo aos estudantes de engenharia identificar a influência das variáveis envolvidas em cada modelo.

4.1 Análise teórica

Através do modelo matemático teórico obteve-se a equação 28, partindo da mesma é necessário saber as propriedades da viga, que estão na tabela 3 a seguir:

Tabela 3. Propriedades da viga (autoria própria).

VIGA RETANGULAR	
$P \text{ (N)}$	15,6612
$I \text{ (m}^4\text{)}$	$1,4099 \times 10^{-8}$
$L \text{ (m)}$	1,00
$E \text{ (Pa)}$	$6,8627 \times 10^{10}$

Com os dados da tabela 3 e a equação 28 foi feita uma planilha, onde foi possível observar a variação da deflexão y em relação as coordenadas do eixo x , como mostra a tabela 4:

Tabela 4. Variação da deflexão (y) em relação a x (autoria própria).

SEÇÃO 1 $\left(0 \leq x_1 \leq \frac{L}{2}\right)$		SEÇÃO 2 $\left(\frac{L}{2} \leq x_2 \leq L\right)$	
$x_1 \text{ (m)}$	$y_1 \text{ (mm)}$	$x_2 \text{ (m)}$	$y_2 \text{ (mm)}$
0	0	0,50	-0,33721
0,10	-0,09981	0,60	-0,31833
0,20	-0,19153	0,70	-0,26707
0,30	-0,26707	0,80	-0,19153
0,40	-0,31833	0,90	-0,09981
0,50	-0,33721	1,00	0

A partir desta tabela pode-se observar a deflexão sofrida em ambas as seções, além disso é possível ver que a deflexão máxima sofrida está localizada em $\frac{l}{2} = 0,50\text{cm}$, mas isso é fácil de notar, pois foi o local de aplicação da carga e a viga é simétrica, portando $y(\text{máx}) = y(0,50\text{cm})$. Esse resultado pode ser observado na Figura 10.

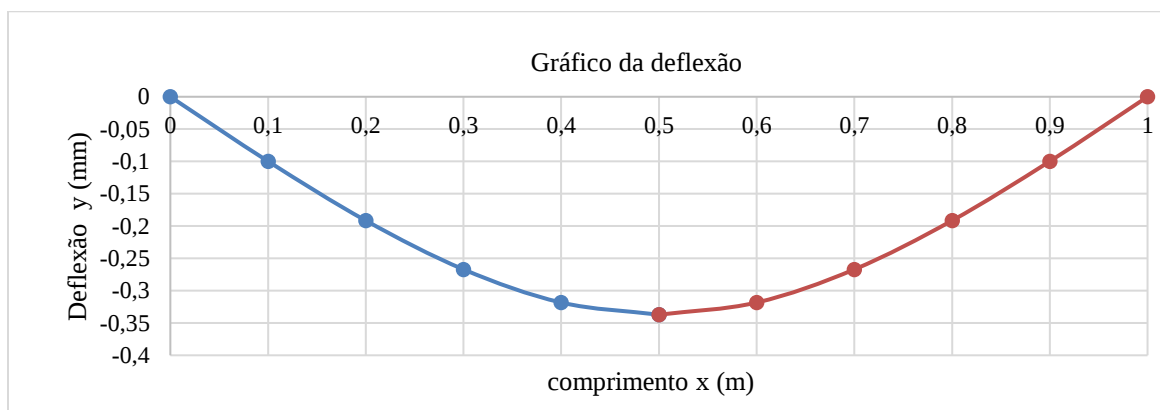


Figura 10. Gráfico da deflexão sofrida nas seções 1 e 2 (autoria própria).

No gráfico mostrado na Figura 10, é possível notar que os comportamentos em ambas seções são iguais, ou seja, a deflexão sofrida é simétrica, justificando o que foi descrito na modelagem matemática.

4.2 Análise experimental

Através do modelo experimental foi obtido o resultado de acordo com a leitura do relógio comparador, que apresentou uma leitura de deflexão máxima de $y \cong 0,38000\text{mm}$, como mostra a Figura 11.



Figura 11. Leitura da deflexão (autoria própria).

É importante lembrar que o ponteiro do relógio comparador pode girar em ambos os sentidos, e nesse caso foi fixado de modo que o ponteiro girasse no sentido anti-horário, então não confunda a leitura.

4.3 Análise simulacional

Através do ANSYS obteve-se a deflexão sofrida em cada malha, onde os valores obtidos são demonstrados em faixas de cores que variam do valor mínimo ao máximo. Com base na simulação foi observado que o valor máximo de deflexão obtido foi $y = 0,34131\text{mm}$, ou seja, esse valor é a deflexão máxima ($y = \text{máx}$), que pode ser observada na Figura 12.

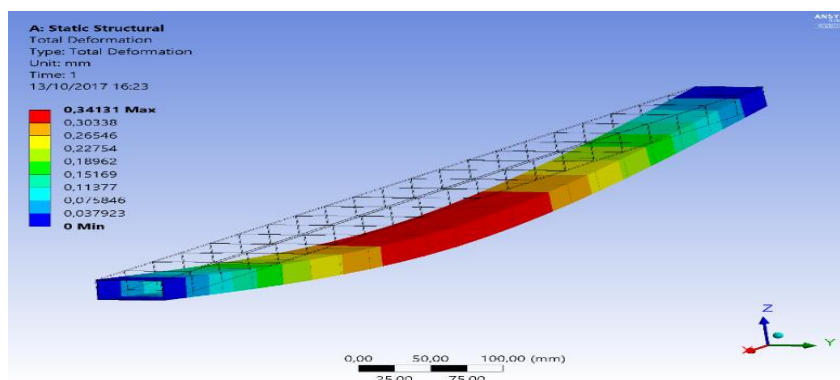


Figura 12. Análise da deflexão no ANSYS (autoria própria).

Com os resultados obtidos foi feita uma avaliação através de uma análise de erro relativo percentual, quando comparado o modelo teórico com o modelo experimental e de simulação no ANSYS. Os resultados obtidos em todas as comparações, pode ser observada na Tabela 5.

Tabela 5. Estatística de erro relativo percentual (autoria própria).

Modelo	Deflexão Máx. (mm)	Modelo Teórico Deflexão Máx. (mm)	Erro (%)
Experimental	0,38000	0,33721	12,69
Simulação (ANSYS)	0,34131	0,33721	1,22

Os resultados obtidos nos experimentos e simulações nos possibilitou a confirmação que a equação descrita na modelagem do referencial teórico é válida e de certa forma bastante precisa para estimar a deflexão sofrida por uma viga. A partir do estudo desse modelo matemático é possível ver claramente a influência de cada variável na curva da linha elástica.

Como foi mostrado na tabela acima, a porcentagem de erro envolvido entre os modelos matemático (teórico) e o simulado foram mínimos, logo o MEF é uma aproximação do modelo teórico de forma que ambos se igualam nos resultados obtidos. Em relação ao teórico e experimental foi observado uma porcentagem relativamente baixa de erros, e esses erros podem ser explicados por diversos fatores. Entre os motivos pode-se destacar os principais que são:

Erro instrumental: o relógio utilizado no experimento não foi calibrado recentemente.

Imprecisão na estimativa do módulo de elasticidade: A única forma de descobrir o valor exato é submetendo o material a um ensaio.

Aplicação da carga: como foi explicado anteriormente é impossível aplicar uma carga pontual na prática, portanto o resultado obtido será uma aproximação.

Em relação a influência da geometria ficou claro, que em um projeto de viga, o formato e as dimensões da seção transversal é algo que se deve ter muito cuidado, visto que está diretamente ligado ao momento de inércia, onde segundo os resultados, pode-se afirmar que para diminuir a deflexão sofrida por uma viga, basta alterar as dimensões e se possível até utilizar reforços, mas isso é assunto para outra pesquisa.

Em resumo os resultados foram satisfatórios e encorajadores, visto que o principal objetivo desses métodos era a comprovação que o modelo matemático (modelagem) demonstrado era válido.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em vista dos resultados apresentados, conclui-se que as equações diferenciais são artifícios importantes para quantificar a deflexão sofrida por uma viga, evidenciando sua capacidade de aplicação e modelagem. Ficou claro que o estudo da deflexão é algo de suma importância em um projeto de viga, e a utilização de equações diferenciais para sua solução envolve métodos relativamente simples, portanto é importante incentivar a utilização de modelos matemáticos para outros tipos de sistemas que estão presentes em nosso cotidiano.

Quando se trata de análise estrutural aplicada a engenharia, a deflexão de viga é um elemento que deve ser analisado detalhadamente, de forma que a deflexão máxima sofrida seja um valor admissível, no qual, o projeto esteja dentro dos padrões de segurança, evitando perdas materiais ou até humanas. Além dos métodos matemáticos é importante destacar a importância dos softwares de simulação, visto que os resultados em ambos casos são bem próximos, contribuindo que a modelagem chegue o mais próximo dos valores reais.

Os modelos matemáticos proporcionados pelas equações diferenciais são de grande importância para os alunos ou profissionais da engenharia civil, visto que suas aplicações são simples e seus resultados são precisos, além de proporcionar uma melhor visualização da influência das variáveis trabalhadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARROSO, Leônidas Conceição; BARROSO, Magali Maria de Araújo; CAMPOS FILHO, Frederico Ferreira.. **Cálculo Numérico** (com aplicações). 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987. 384 p.
- [2] ZILL, Dennis G.. **Equações diferenciais** com aplicações em modelagem. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 410 p. Tradução da 9ª edição norte-americana.
- [3] GERE, James M.; GOODNO, Barry J.. **Mecânica dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 880 p. Tradução da 7ª Edição Norte-Americana.
- [4] SOUSA, Carlos M. P.. **Uma aplicação das equações diferenciais à deflexão de vigas**. 2013. 66 f. TCC

(Graduação) - Curso de Ciência e Tecnologia, Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2013.

[5] BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON, E. Russel; DEWOLF, John T.. **Resistência dos materiais**. 4. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010. 774 p.

[6] CAMPILHO, Raul D. S. G.. **Método de Elementos Finitos** ferramentas para análise estrutural. Publindústria, 2012. 205 p.

[7] HIBBELER, R. C.. **Resistência Dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 640 p. Tradução: Arlete Simille Marques.