



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

LUIS FELIPE ALEXANDRE DA SILVA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS A ESCOAMENTO DE FLUIDOS

PAU DOS FERROS

2019

LUIS FELIPE ALEXANDRE DA SILVA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS A ESCOAMENTO DE FLUIDOS

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em ciência e tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor

PAU DOS FERROS

2019

©Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata, exceto as pesquisas que estejam vinculadas ao processo de patenteamento. Esta investigação será base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) seja devidamente citado e mencionado os seus créditos bibliográficos.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central Orlando Teixeira (BCOT)
Setor de Informação e Referência (SIR)

A586e Alexandre da Silva, Luis Felipe.
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS A
ESCOAMENTO DE FLUIDOS / Luis Felipe Alexandre
da Silva. - 2019. 46 f. : il.

Orientador: Otávio Paulino. Trabalho. Monografia
(graduação) - Universidade Federal Rural do Semi-
árido, Curso de Ciência e Tecnologia, 2019.

1. Equações diferenciais. 2. escoamento de
fluidos. 3. Sistema de Drenagem variável. I. Trabalho,
Otávio Paulino, orient. II. Título

Bibliotecário-Documentalista
Nome do profissional, Bib. Me. (CRB-15/10.000)

LUIS FELIPE ALEXANDRE DA SILVA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS A ESCOAMENTO DE FLUIDOS

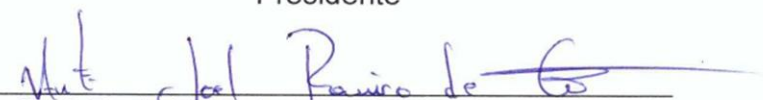
Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em ciência e tecnologia.

Defendida em: 07 / 03 / 2019.

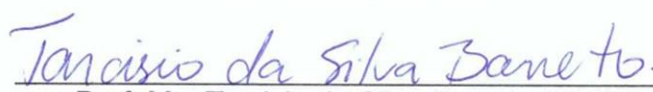
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor (UFERSA)
Presidente



Prof. Dr. Antônio Joel Ramiro de Castro (UFC)
Membro Examinador



Prof. Me. Tarcísio da Silva Barreto (UFRN)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força nos momentos difíceis e por ter me guiado pelo caminho certo nesta fase da minha vida.

Agradeço aos meus pais, Manoel Alexandre da silva e Maria de Lourdes Fernandes da silva, pois foram os pilares dessa conquista, tive no amor de vocês combustível para vencer cada batalha.

Agradeço a minha irmã e meu cunhado, Maria Soralia e Orlando pereira, pelo amor e por me ajudarem de inúmeras formas sempre que precisei.

Agradeço a minha irmã e meu cunhado, Deizimar Alexandre e Alexandro Teixeira, pelo amor e por me aconselhar e apoiar em todas as decisões que tomei.

Agradeço a meu Orientador e amigo, Otavio Paulino Lavor, pela paciência e bom humor em me ensinar, pelos conselhos e principalmente pelo exemplo de profissional, pai e família que é.

Agradeço aos meus amigos que tornaram cada dia mais fácil e prazeroso. Thales Alexandre, Alisson Fernandes, Rui Alexandre, Samuel Fernandes, Marcos André, Marcelo Tavares, Felipe carvalho, Guilherme fontes, Cassio Carvalho. Agradeço a Amanda costa e Isadora oliveira, pois estiveram ao meu lado em dias bons e ruins. Agradeço a Raianny Mikaelly, Denise Kauanny, Thallysmara Moura, Analine Ferreira, Heloisa Andrade, pois tenho a certeza que levarei vocês pro resto da vida. Aos nomes aqui citados meu muito obrigado por tudo.

O escoamento dos esforços é satisfatório se for calculado através da curva lisa que passa pela dedicação, fé e honestidade.

Otávio Paulino

RESUMO

Nas áreas de ciências e tecnologias muitos problemas são modelados por equações diferenciais. O interesse deste estudo é mostrar ao leitor que mesmo equações de primeira ordem e de solução simples têm aplicações importantes, apresentando um modelo matemático de previsão a um sistema de massa variável composto por um fluido armazenado em um reservatório onde o mesmo está sujeito a drenagem, tendo como diferencial a análise qualitativa e quantitativa das variáveis do escoamento quando sujeito à um dreno com área variável. Foi realizado estudo de escoamentos em tanques cilíndricos, retangulares, funis e troncos de cone, onde foram modelados por equações diferenciais que resolvidas dão o comportamento da variação de nível em cada tanque.

Palavras-chave: Dreno variável, Sistema de massa variável, Variação de nível.

ABSTRACT

Many problems in the science and technological fields are modeled by differential equations. This study will show that even first order equations and simple solution equations have important applications, providing a mathematical forecast model for a variable mass system comprised of fluids stored in a reservoir. The fluids were subject to drainage, having as a differential, the qualitative and quantitative analysis of the variables when drained in a drain with variable area. Drainage studies were conducted in cylindrical tanks, rectangular tanks, funnels and truncated cones, where they were modeled by differential equations that when solved, provided the level variation performance of the liquid in each tank.

Keywords: Variable drain, Variable mass system, Level variation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	–	Escoamento de um fluido por um duto	22
Figura 2	–	Tubo de escoamento	23
Figura 3	–	Escoamento de água em tanque por um dreno na base	25
Figura 4	–	Reservatório do tipo tranco de cone	28
Figura 5	–	Reservatório do tipo cilindro vertical	36
Figura 6	–	Vista lateral e frontal de cilindro horizontal.....	38
Figura 7	–	Reservatório do tipo funil.....	41
Figura 8	–	Reservatório do tipo caixa retangular	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Tempo de esvaziamento em função da taxa de crescimento do raio.....	31
Tabela 2	–	Raio x Tempo para esvaziamento constante de 0,001m/s.....	33
Tabela 3	–	Raio do dreno x Tempo para taxa de esvaziamento de 0,001 m/s	35
Tabela 4	–	Tempo x vazão para taxa de esvaziamento constante de 0,001m/s	38

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	15
2.2	FLUIDOS EM ESCOAMENTO	20
2.3	MODELO MATEMÁTICO	254
3	ESCOAMENTO DE FLUIDO EM TANQUES COM DRENO VARIÁVEL	28
3.1	ESCOAMENTOS EM TANQUE DO TIPO TRONCO DE CONE.....	28
3.2	ESCOAMENTO EM TANQUE DO TIPO CILINDRO.....	35
3.3	ESCOAMENTO EM TANQUE DO TIPO CILINDRO HORIZONTAL	38
3.4	ESCOAMENTO EM TANQUE DO TIPO FUNIL	40
3.5	ESCOAMENTO EM TANQUE DO TIPO CAIXA RETANGULAR	42
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
	REFERÊNCIAS	46

INTRODUÇÃO

Em todas as áreas das ciências exatas, as equações diferenciais são uma poderosa ferramenta para a descrição e modelagem de muitos fenômenos. Essas equações encontram uma gama de aplicações, desde uma formulação mais simples, por equações de primeira ordem, até aplicações em problemas mais complexos envolvendo equações não lineares de altas ordens.

Boyce (2006, p.15-16) afirma que sem compreender o básico sobre equações diferenciais e métodos para resolvê-las, é difícil apreciar a história desse ramo importante da matemática. Apesar disso, fornece uma perspectiva histórica, na qual a mesma iniciou-se com o estudo do cálculo durante o século XVII, pelos matemáticos Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Nesta concepção percebe-se que a evolução das equações está coesa aos avanços da matemática. Nesse período inicial, outros matemáticos também contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento das equações, dentre eles pode-se citar: Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, Cauchy, Daniel Bernoulli, Lagrange, Gauss e Lipschitz.

De início, as aplicações de equações diferenciais estão diretamente ligadas às contribuições de Isaac Newton, pois suas publicações no final do século XVII forneceram base para esse estudo através do desenvolvimento do cálculo e explicação dos princípios básicos da mecânica. Porém, para este trabalho tem suas maiores inspirações nos estudos desenvolvidos pelos matemáticos da família Bernoulli, em especial Daniel Bernoulli, que se destaca pelo interesse maior nas equações diferenciais e suas aplicações, principalmente na mecânica dos fluidos.

Procuraremos para este trabalho mostrar aplicações das equações diferenciais na área das ciências físicas voltadas a um sistema de massa variável, tratando em particular do escoamento de um fluido sujeito a um sistema de drenagem. Porém, antes de analisar as leis físicas e as equações que regem o seu comportamento é necessário primeiramente entender alguns conceitos relacionados a fluidos.

A primeira definição de fluido passa por uma noção já internalizada no nosso dia a dia de que quando trabalhamos com fluidos estamos tratando do oposto ao trabalho com sólidos. Porém uma segunda definição é necessária pra identificar uma substancia fluida, que é sua capacidade de escoar quando sujeito a tensão. Logo

está é sua principal característica, pois assim definimos fluido como uma função de estado, visto que a água líquida é um fluido, mas o gelo não. Portanto, temos o movimento de massa fluida em relação a um dado referencial como a definição de escoamento e uma das propriedades capaz de identificar uma substância fluida.

Outra propriedade importante a ser observada nos fluidos é sua capacidade de adaptar-se ao formato dos recipientes que os contém. Combinando essa propriedade a sua capacidade de escoar, moldamos do ponto de vista de aplicações um dos principais problemas em estudo na mecânica dos fluidos. O estudo de fluidos armazenados associados a sistemas de drenagem encontram inúmeras aplicações na engenharia, desde problemas associados à construção civil, processos industriais a simples técnicas aplicadas na agricultura.

A área de estudo desse fenômeno é a mecânica dos fluidos, de forma simples pode ser definida como estudo do comportamento de fluidos em repouso ou em movimento. Porém ao contrário dessa simples definição, a compreensão das variáveis desse fenômeno é extremamente complexa, podendo variar de equações diferenciais de solução extremamente difíceis a problemas solucionáveis unicamente pela análise computacional, porém os estudos mais complexos relacionados a sistemas fluidos estão ligados a uma análise microscópica e real dos fluidos, mas para aplicações de engenharia esse esforço não é necessário, pois equações diferenciais de primeira ordem são suficientes para modelar matematicamente o comportamento do sistema.

Apesar da importância destes tipos de aplicações de fluidos a análise desse fenômeno é pouco discutida, sendo tratadas nas literaturas de forma superficial. Ainda mais escasso são os trabalhos quando se trata da análise do problema por equações diferenciais, sendo abordado apenas de forma introdutória em alguns livros de aplicações de equações diferenciais como: Boyce, Deprima, Zill e Cullen. Outros trabalhos publicados como relatórios, monografias, artigos tratam o tema com poucas variações das apresentadas em outras literaturas.

Portanto, o presente trabalho tem como principal objetivo expor o desenvolvimento de um modelo matemático para descrever o fenômeno físico do escoamento de um fluido em recipientes de diversos formatos, tendo como diferencial a análise qualitativa e quantitativa do sistema de escoamento sujeito a drenagem variável, onde a área do dreno varia em função de um perfil dependente do tempo. Esse tipo de modelo leva a equações diferenciais diferentes do modelo

com escoamento constante, o que dará ao leitor uma visão simplificada da aplicação destas equações em processos mecânicos não vistos na literatura. Apesar de ser um problema simples, esse tipo de análise tem um espaço de extrema importância em aplicações na engenharia além de ser uma área imensa e pouco explorada.

O trabalho está dividido nas seguintes partes: introdução que trata do objetivo, inspirações e justificativas para o desenvolvimento deste estudo, em seguida, com o tópico referencial teórico tem-se uma revisão bibliográfica a cerca de equações diferenciais e escoamento de fluidos, em sequência os resultados onde o modelo matemático proposto é aplicado em alguns recipientes, também desenvolvendo equações para alguns casos específicos como para o problema de taxa de esvaziamento constante. Por último, apresentaremos uma conclusão relatando a importância e contribuição do trabalho.

2. REFERENCIAL TEORICO

2.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A seguir será abordada uma fração da teoria sobre equações diferenciais, sendo apresentadas definições e classificações que possibilitaram o reconhecimento como também o método de solução a uma subclasse específica das equações diferenciais.

Definição 1.1: *Uma equação diferencial é, basicamente, uma equação que envolve as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma ou mais variáveis independentes.*

As equações a seguir são exemplos de equações diferenciais.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5 \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t \quad (2.2)$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} + y \frac{d^2y}{dz^2} = \ln z \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial t} = v \quad (2.4)$$

Como expostos com as equações acima, existem n formas de apresentar as equações diferenciais. Sendo assim se faz necessário classificar os diferentes tipos sob alguns critérios como: número de variáveis independentes, linearidade e ordem. A saber, as seguintes definições:

Quanto ao numero de variáveis independentes a equação pode se apresentar como ordinária ou parcial, a seguir será definido estes dois tipos.

Definição 1.2. *Uma equação diferencial que envolve apenas derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas uma variável independente é chamada equação diferencial ordinária.*

Exemplo:

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x \quad (2.5)$$

Esta equação apresenta duas variáveis dependentes u e v , e apenas uma única variável independente x .

Perceba que o número de variáveis dependentes não define uma EDO, sendo este tipo de equação caracterizado por possuir apenas uma única variável independente.

Definição 1.3. *Uma equação diferencial que envolve derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a mais de uma variável independente é chamada equação diferencial parcial.*

Exemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = x \quad (2.6)$$

Na eq.(4.6) temos duas variáveis dependentes u e v , e duas variáveis independentes y e x .

Portanto, a quantidade de variáveis dependentes não tem importância, pois o que realmente define uma equação diferencial parcial é possuir mais de uma variável independente.

A seguir será apresentada a definição que possibilita a classificação quanto a ordem.

Definição 1.4. *A derivada de maior ordem numa equação diferencial define a ordem da equação diferencial.*

Podemos representar equação diferencial ordinária geral de n -ésima ordem como:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \quad (2.7)$$

De forma semelhante para equação diferencial parcial geral de n -ésima ordem, temos:

$$G\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = 0 \quad (2.8)$$

Quanto a linearidade equações diferenciais classificam-se em linear e não linear. A seguir serão apresentadas as definições de equação linear e não linear.

Definição 1.5. *Se uma equação diferencial for tal que nos seus termos não aparecem termos transcendentais da variável ou variáveis dependentes, ou de suas derivadas, como por exemplo, $\ln z(x)$, $\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\sin\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, produto entre as variáveis dependentes, entre as variáveis dependentes e suas derivadas, como por exemplo:*

$[y(x)]^3$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, $y(x)\frac{dy}{dx}$ então a equação diferencial é uma equação diferencial linear. Se aparecer algum desses termos, a equação é chamada equação diferencial não linear.

Sabendo classificar as equações diferenciais, trataremos a seguir de uma subclasse específica que interpola os três critérios expostos anteriormente, ou seja, as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem lineares, mostrando o modelo para o caso geral bem como o método usado para a solução.

Definição 1.6. A forma geral das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é definida por:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t) \quad (2.9)$$

onde tomamos o caso mais simples, aquelas com coeficientes constantes, em que a e b são funções da variável independente t .

Se $b(t)$ é uma função nula, a equação $\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$ é chamada equação diferencial homogênea de primeira ordem. Caso contrário, é chamada equação diferencial não homogênea de primeira ordem.

Para um caso geral de equações lineares, podemos representar as equações diferenciais da seguinte forma:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \quad (2.10)$$

Onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ e b são funções somente de x .

Para caso de $n=1$ temos uma equação diferencial linear de primeira ordem,

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \quad (2.11)$$

Se $b(x)$ é uma função nula, a equação $\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0$ é chamada equação diferencial homogênea linear de primeira ordem. Caso contrário é chamada equação diferencial não homogênea linear de primeira ordem.

São exemplos de equações lineares de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^{-x} \quad (2.12)$$

$$\frac{dy}{dx} - \sin y = 0 \quad (2.13)$$

De acordo com Boyce e Deprima (2017), existe uma subclasse de equações diferenciais de primeira ordem que permitem uma resolução direta por integração, são as denominadas equações diferenciais separáveis.

As equações do tipo

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0 \quad (2.14)$$

São chamadas de equações diferenciais separáveis porque elas podem ser colocadas na forma,

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0 \quad (2.15)$$

que é uma equação exata, pois

$$M(x, y) = M(x) = \frac{F(x)}{f(x)}$$

ou de forma equivalente,

$$N(x, y) = N(y) = \frac{g(y)}{G(y)}$$

Sobe essa perspectiva, Zill e Cullen (2001) definem que quando for possível todos os termos em x com dx e todos os termos em y com dy , ou seja, se uma EDO pode ser escrita da seguinte forma:

$$dxM(x) + N(y)dy = 0 \quad (2.16)$$

A solução da mesma é obtida integrando imediatamente a equação, resultando em

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c \quad (2.17)$$

Da mesma forma,

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx + \int \frac{g(y)}{G(y)}dy = c \quad (2.18)$$

As duas equações acima fornecem a solução da equação diferencial separável.

Para uma boa parte dos sistemas físicos conhecidos até o momento, a equação ou equações que descrevem os fenômenos, pelo menos de forma aproximada, são equações diferenciais. Porém, para alguns casos de equações diferenciais separáveis não é possível calcular as integrais obtidas nas equações. Para esse tipo de situação pode-se empregar técnicas numéricas para aproximações da solução. E mesmo quando possível realizar a integração a solução pode se dar de forma implícita ou explícita.

Definição 1.7 (solução explícita). *Uma solução explícita de uma equação diferencial e uma função de $y=f(\{x\})$, que quando substituída na equação diferencial, a transforma em uma igualdade.*

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (2.19)$$

tem solução explícita dada por:

$$x(t) = ce^{2t} \quad (2.20)$$

Definição 1.8 (solução implícita). *Uma solução implícita de uma equação diferencial e uma função $g(\{x\},\{y\})$ do conjunto de variáveis dependentes e independentes, a qual, através de derivação implícita, reproduz a equação diferencial inicial. (MACHADO, 1999, p. 27)*

Exemplo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0 \quad (2.21)$$

é uma solução implícita da equação diferencial

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.22)$$

É possível que para um dado problema, além da equação diferencial em si, exista mais algumas condições que o modelo matemático deve satisfazer para compreender o fenômeno por completo.

Definição 1.9. *Quando um dado fenômeno, além de uma equação diferencial que o descreve, tem ainda que seguir certas condições iniciais, estabelecidas a priori, para um mesmo valor de variável independente, dizemos que temos um problema de valor inicial.*

Para o caso das equações de primeira ordem, o problema de valor inicial consiste na resolução de equações diferenciais que podem ser definidas geometricamente em um intervalo i , tal que o gráfico passe por um ponto (x_0, y_0) determinando que a equação a seguir:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.23)$$

está sujeita a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$.

Ressalvo que foi exposta apenas uma fração da teoria das equações diferenciais, veja que o foco do estudo são equações diferenciais de primeira ordem com uma classificação específica de casos em que as equações são lineares, homogêneas e separáveis. O método de solução apresentado não é o único possível, mas foi o escolhido para este trabalho por ser o mais pratico. Portanto caso o leitor tenha um maior interesse em equações diferenciais de primeira ordem é indicado que se procure as literaturas presentes nas referencias deste trabalho.

2.2. Fluidos em escoamento

Para complementar o estudo, faz-se necessário entender alguns conceitos aplicados aos fluidos em movimento, área conhecida como dinâmica dos fluidos ou hidrodinâmica. O estudo de fluidos em movimento pode se tornar muito complicado de se prever, porém essa complexidade está diretamente associada ao estudo de um fluido real ou a uma análise infinitesimal do fenômeno, para simplificação da problemática usaremos o modelo de um fluido ideal. Portanto trabalharemos com a premissa do escoamento de fluidos incompressíveis e inviscidos.

Os conceitos apresentados neste capítulo corriqueiramente são aplicados no dia a dia, por exemplo, quando é necessário aumentar a velocidade da água de uma mangueira, é comum fechar parcialmente a saída da tubulação. A consequência da ação anterior é explicada pelo fato da velocidade de escoamento de um fluido ser inversamente proporcional à área de saída do escoamento.

Portanto, mesmo que o trabalho seja desenvolvido para um modelo ideal, perceba que é totalmente aceitável essa suposição para fins de aplicações praticas, para entendimento do conceito de modelo ideal. A seguir serão apresentadas as definição de fluido bem como as características que o tornam ideal.

Quando se trabalha com fluidos temos o sentimento comum de que estamos tratando do oposto de um sólido, segundo HALLIDAY e RESNICK (2012, 2 v, p. 59), “ um fluido ao contrário de um solido, é uma substância que pode escoar. Os fluidos assumem a forma do recipiente em que são colocados. Eles se comportam dessa forma porque não resistem as forças paralelas à sua superfície”. Portanto a capacidade de escoar conferiu a principal característica para se identificar um fluido, mesmo que o material demore a demonstrar essa propriedade quando sujeito a um esforço, como é o caso do piche, a substância ainda será enquadrada como fluido.

A base para tratamento de um fluido como ideal está na maneira como se acompanha o movimento da massa fluida, sendo que de um modo geral o escoamento de um fluido não é descrito pelo movimento individual das partículas, o fox (2014, p.23) coloca que “o conceito de um contínuo é a base da mecânica dos fluidos clássica. A hipótese do contínuo é válida no tratamento dos fluidos sob condições normais”. Assim o escoamento do fluido é especificado por sua densidade ρ e velocidade de escoamento, numa determinada posição do espaço num instante de tempo t , esse é o método de descrição euleriano, onde se considera o fluido como um conjunto de pontos no espaço, cada ponto possuindo um conjunto de propriedades variantes no tempo. Para fins de aplicações na engenharia a aproximação de fluido como um contínuo é suficientemente aceitável.

Análise de fluidos reais além de muito complicada não é totalmente compreendida. Por tais razões, se discute o movimento de um fluido ideal, que é mais fácil de analisar matematicamente. Um fluido ideal tem que satisfazer quatro requisitos a respeito do escoamento:

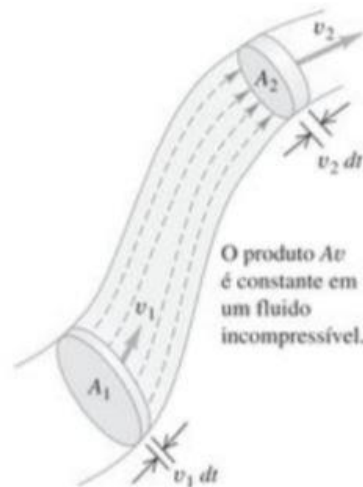
- Se a velocidade $\vec{v}$ do fluido em qualquer ponto do espaço for constante em relação ao tempo, o escoamento se diz laminar.
- Se a densidade não variar com o tempo, sendo o escoamento incompressível, temos os líquidos em geral, incompressíveis.
- Escoamento deve desprezar as perdas de energia devido à viscosidade do fluido.
- O escoamento não deve girar em torno do seu eixo, ou seja, ser irrotacional.

Vale ressaltar que a incompressibilidade não confere uma característica intrínseca dos fluidos, mas, sim uma propriedade diretamente ligada ao tipo de movimento que ele desenvolve (HALLIDAY, RESNICK, 2012, 2 v, p. 72).

A seguir, iremos apresentar os princípios e as equações que permitem a análise quantitativa de um fluido em movimento.

Para fins de compreensão, imagine um tubo onde o líquido escoa livremente em uma dada direção (Figura 1). A massa do fluido não varia no decorrer de sua trajetória. Devido a forma do tubo, pode-se dizer que este está delimitado por duas seções de área A_1 e A_2 , e como estamos tratando de fluidos em movimento, estes devem possuir velocidades v_1 e v_2 nos mesmos pontos 1 e 2 citados anteriormente.

Figura 1- Escoamento de um fluido por um duto.



Fonte: SEARS, F.W. ZEMANSKY, M.W. vol. 2. 2007. p.83.

Tomando um intervalo de tempo Δt , o mesmo volume que entra em um dos seguimentos em uma das extremidades tem que ser igual ao volume que deve deixar o recipiente, obedecendo assim a conhecida lei da continuidade, onde obedecendo o balanço de massa o volume que entra na tubulação tem que ser igual ao volume que sai, assim temos a lei da continuidade expressa pela seguinte equação:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (2.24)$$

onde se define a relação entre a área e a velocidade correspondente, tal que esta só aumenta em modulo quando a área de seção onde se encontra diminui e vice-versa (para o caso de fluido incompressível).

Outra relação importante é aquela que determina qual o volume de fluido que passa por uma dada área por unidades de tempo. Esta chamada de *vazão volumétrica* é a taxa de variação de volume em relação ao tempo, escrita da seguinte forma:

$$\frac{dV}{dt} = Av \quad (2.25)$$

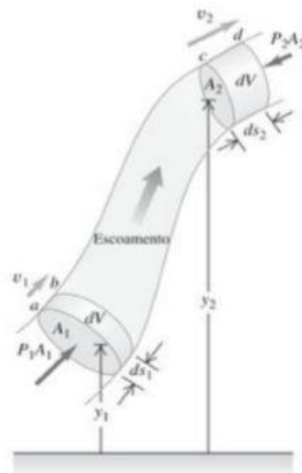
Desta relação também é possível retirar mais informações sobre a vazão, mas agora em termos de massa por unidade de tempo, sabe-se que $dm = \rho dV$, juntando essa informação com a anterior obtemos a *vazão mássica*,

$$\frac{dm}{dt} = \rho Av \quad (2.26)$$

É possível agrupar as equações mostradas anteriormente para obter uma equação mais ampla, conseqüentemente mais útil. Para reunir estas equações se aplica o teorema de trabalho-energia em fluidos, também conhecido com teorema de Bernoulli, que foi exposto por Daniel Bernoulli em sua obra *Hidrodinâmica* (1738) onde é colocado que num fluido ideal em regime fechado, a energia que possui o fluido permanece constante ao longo do seu percurso.

Como mostrado na (Figura 2), os pontos 1 e 2, ponto inferior e superior respectivamente possuem velocidades distintas v_1 e v_2 , onde estas determinam um distância dS quando multiplicadas por um intervalo de tempo infinitesimal dt , onde $dS_1 = v_1 dt$ e $dS_2 = v_2 dt$. A_1 e A_2 são as áreas de seção transversal nos referidos pontos. Como exposto inicialmente, seguiremos um modelo idealizado onde o fluido não apresenta viscosidade. Logo, todas as forças internas se resumem a pressão interna gerada pelo fluido nas suas redondezas, assim temos a seguinte relação para as forças em cada extremidade da tubulação, $f_1 = p_1 A_1$ e $f_2 = p_2 A_2$, onde p_1 e p_2 são as pressões nos pontos 1 e 2 respectivamente.

Figura 2: Tubo de escoamento.



Fonte: SEARS, F.W. ZEMANSKY, M.W. vol. 2. 2007. p.84.

Aplicando a lei de conservação de energia, onde temos que a variação de energia cinética ΔK é igual ao trabalho realizado no sistema.

$$W = \Delta k \quad (2.28)$$

Para variação de energia cinética, considere a seguinte relação:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_1^2 \quad (2.29)$$

Onde Δm a massa de fluido que entra em uma extremidade e sai pela outra em um intervalo de tempo Δt .

Para o trabalho devemos considerar a parcelas em razão da força gravitacional $\Delta m \vec{g}$ sobre o fluido para os determinados níveis de altura de entrada e saída, sendo respectivamente y_1 e y_2 :

$$W_g = \Delta m g y_1 - \Delta m g y_2 \quad (2.30)$$

Por ultimo, temos o trabalho realizado pelas forças internas, que é responsável por impulsiona o fluido para dentro do tubo de modo que o faça percorrer uma distancia ds . Logo, o trabalho w_f realizado por f_1 e f_2 que agem nas áreas A_1 e A_2 é dado por:

$$w_f = p_1 \cdot A_1 \cdot ds - p_2 \cdot A_2 \cdot ds \quad (2.31)$$

Como $\Delta V = A \cdot \Delta s$, pode-se substituir:

$$w_f = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V \quad (2.32)$$

Se substituirmos esta equação, juntamente com as Eq. (2.30) e Eq.(2.31) na equação de trabalho para variação da energia mecânica, chegamos em,

$$P_2 \Delta V + \Delta m g y_1 + \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_1^2 = P_2 \cdot \Delta V + \Delta m g y_2 + \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_2^2 \quad (2.33)$$

Definindo $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ e reorganizando os termos temos a seguinte equação:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot y_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot y_2 \quad (2.34)$$

conhecida como a equação de Bernoulli.

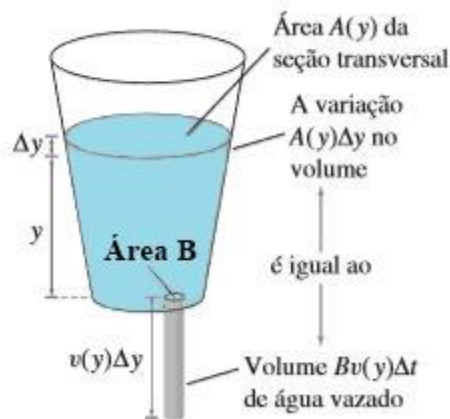
Ressaltando que a equação de Bernoulli só é aplicável a fluidos em regime permanente de escoamento.

2.3. Modelo matemático.

Considerando um fluido suportado por um recipiente, analise do escoamento pode ser realizado se nos preocuparmos apenas com o formato da superfície do liquido, ou seja, a área de seção transversal do recipiente, e como o fluido escoar através de um buraco na base do recipiente, o ultimo fator que precisamos determinar é a área de seção reta do escoamento.

Como mostrado na (Figura 3), o problema consiste em encontrar o nível da água $y(t)$ no instante t , onde $v(y)$ é a velocidade da água escoando pelo dreno quando o tanque estiver cheio até a altura y , B é a área do dreno e $A(y)$ corresponde à área de seção transversal do tanque à altura y .

Figura 3: Escoamento de água de um tanque por um dreno na base.



Fonte: ROGAWSKI, J. ADAMS, C. 2018. P. 482.

Resolveremos o problema mostrando que $y(t)$ satisfaz uma equação diferencial. Por uma observação básica a água perdida no instante $t + \Delta t$ pode ser calculada de duas maneiras, inicialmente a água que sai pelo dreno durante um intervalo de tempo Δt forma um cilindro de base B e altura $v(y)\Delta t$ (distância percorrida pela água). O volume desse cilindro é aproximadamente $B v(y)\Delta t$.

Portanto a água perdida entre t e $t + \Delta t \approx B v(y)\Delta t$.

O termo aproximado é utilizado pelo fato de que a velocidade pode variar com a altura.

Uma segunda análise refere-se ao fato de que se o nível da água baixar uma quantidade Δy durante o intervalo de tempo Δt , então o volume de água é aproximadamente $\Delta y A(y)$.

Portanto a água perdida entre t e $t + \Delta t \approx \Delta y A(y)$

Novamente usamos o termo aproximação, pois a área de seção transversal pode não ser constante.

Da conservação da massa temos que o volume que deixa o recipiente deve ser igual ao volume que passa pelo dreno, comparando os dois resultados, obtemos

$\Delta y A(y) \approx B v(y) \Delta t$, reagrupando os termos a relação pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{B v(y)}{A(y)} \quad (2.35)$$

Agora tomando o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ obtemos a equação diferencial,

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{B v(y)}{A(y)} \quad (2.36)$$

Para utilizar a equação acima é necessário conhecer a velocidade de saída da água, tarefa relativamente simples quando aplicamos o princípio de Bernoulli em pontos estratégicos do fluxo do líquido contido no recipiente.

Considerando a equação de Bernoulli para a situação da figura 3, onde os pontos 1 e 2 estão localizados imediatamente após a área do fluxo de saída e na superfície superior do líquido respectivamente, temos

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot y_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot y_2 \quad (2.37)$$

Onde para o ponto 1 temos $y_1 = 0$, e a velocidade $v_2 = 0$ no ponto 2, tem-se que:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho \cdot g \cdot y_2$$

Em ambos os pontos apenas a pressão atmosférica atua sob o fluido, portanto desconsiderando qualquer variação de pressão, e para o caso de fluido incompressível temos a seguinte relação para velocidade do fluxo de saída:

$$v(y) = \sqrt{2gy} \quad (2.38)$$

A equação encontrada para velocidade é a mesma de uma partícula em queda livre.

Substituindo a equação (2.37) na equação (2.36), tem-se:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{B \sqrt{2gy}}{A(y)} \quad (2.39)$$

Perceba que ainda não temos uma igualdade, devido algumas aproximações é necessário o incremento de uma constante de proporcionalidade k em razão da configuração do orifício e do tanque, assim obtemos uma igualdade da forma:

$$\frac{dy}{dt} = -k \frac{B \sqrt{2gy}}{A(y)} \quad (2.40)$$

como o volume é decrescente, o sinal de negativo.

A constante k pode variar de entre 0,95 no caso mais desfavorável até 1 em um caso ideal. O problema direto consiste em resolver a equação diferencial com variáveis y e t separáveis.

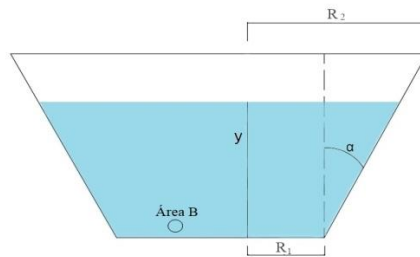
3. ESCOAMENTO DE LÍQUIDO EM UM RECIPIENTE PARA DRENO VARIÁVEL.

Nesta sessão serão apresentados os modelos matemáticos para quatro reservatórios diferentes, mostrando a solução para caso da área do dreno constante e para o caso variável, sendo mostradas algumas equações para casos especiais como o de taxa de esvaziamento constante.

3.1. Escoamento em reservatório do tipo tronco de cone:

Nesta seção, estudamos o escoamento de um fluido em um tanque com formato tronco de cone. A (Figura 4) ilustra o reservatório.

Figura 4: Reservatório tipo tronco de cone.



Fonte: Autor (2018).

O reservatório está cheio com líquido até uma altura y , que escoa através de um orifício de área B na base de um tronco de cone.

Partindo da equação (2.40), onde $A(y)$ é a área de seção transversal do recipiente, da geometria do reservatório temos que R_2 depende de y . Da geometria do triângulo obtemos a seguinte relação de dependência:

$$R_2 = y \operatorname{tg} \alpha + R_1 \quad (3.1)$$

E substituindo (3.1) em (2.40):

$$\pi(y \operatorname{tg} \alpha + R_1)^2 \frac{dy}{dt} = -kB\sqrt{2gy} \quad (3.2)$$

Para o caso mais simples onde B é constante, $y(t)$ é da forma:

$$\frac{6tg^2\alpha\sqrt{y^5} + 30R_1^2\sqrt{y} + 20R_1tg\alpha\sqrt{y^3}}{15} \quad (3.3)$$

$$= -kr^2t\sqrt{2g} + \frac{6tg^2\alpha\sqrt{y_0^5} + 30R_1^2\sqrt{y_0} + 20R_1tg\alpha\sqrt{y_0^3}}{15}$$

Para o problema em que a área do orifício de saída do fluido é variável, ou seja, B dependente do tempo. A equação (3.2) é da forma:

$$\pi(ytg\alpha + R_1)^2 \frac{dy}{dt} = -kB(t)\sqrt{2gy} \quad (3.4)$$

Para caso do dreno variável os estudos serão concentrados em analisar o comportamento para o caso mais comum, onde a área do dreno é circular. Portanto, para que tenhamos o controle do crescimento da área de saída partiremos da premissa anterior estabelecendo uma função para o raio do dreno.

Reescrevendo a equação (4.2) de acordo com as condições acima, temos:

$$\pi(ytg\alpha + R_1)^2 \frac{dy}{dt} = -k\pi(r^*(t))^2\sqrt{2gy} \quad (3.5)$$

Onde $r^*(t)$ representa a função para crescimento do raio do dreno. estabelecendo $r^*(t)$ para o perfil mais simples possível, ou seja, onde o raio do dreno comporta-se linearmente, temos:

$$r^*(t) = at + b \quad (3.6)$$

Logo é fácil perceber que para a eq.(3.6) que a constante a é a velocidade de crescimento do raio, sendo dada em metros por segundo, e b refere-se ao valor inicial do raio do dreno. Portanto podemos redefinir a eq.(3.6) da seguinte forma:

$$r^*(t) = vt + r_0 \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.5):

$$\pi(ytg\alpha + R_1)^2 \frac{dy}{dt} = -k\pi(vt + r_0)^2\sqrt{2gy} \quad (3.7)$$

Separando as variáveis na equação (3.7) obteremos:

$$\frac{(ytg\alpha + R_1)^2}{\sqrt{y}} dy = -k\sqrt{2g} (vt + r_0)^2 dt \quad (3.8)$$

Ao integrarmos ambos os lados da equação (3.7), obteremos:

$$\frac{6tg^2\alpha\sqrt{y^5} + 30R_1^2\sqrt{y} + 20R_1tg\alpha\sqrt{y^3}}{15} = -k\sqrt{2g} \frac{(vt + r_0)^3}{3a} + C_1 \quad (3.9)$$

A equação (3.9) é a solução geral da equação (3.7), a solução particular pode ser obtida tomando a condição inicial:

$$y(0) = y_0$$

A condição inicial acima estabelece que no instante inicial do escoamento, $t = 0$, a coluna de fluido encontra-se em seu estado inicial, $y = y_0$, aplicando à condição inicial a eq. (3.9) temos C_1 da seguinte forma:

$$C_1 = \frac{6tg^2\alpha\sqrt{y_0^5} + 30R_1^2\sqrt{y_0} + 20R_1tg\alpha\sqrt{y_0^3}}{15} + k\sqrt{2g}\frac{r_0^3}{3v} \quad (3.10)$$

Substituindo a constante C_1 na equação (3.9) temos a solução particular para o problema, escrita da forma:

$$\begin{aligned} & \frac{6tg^2\alpha\sqrt{y^5} + 30R_1^2\sqrt{y} + 20R_1tg\alpha\sqrt{y^3}}{15} \\ &= -k\frac{(vt + r_0)^3}{3v}\sqrt{2g} + \frac{6tg^2\alpha\sqrt{y_0^5} + 30R_1^2\sqrt{y_0} + 20R_1tg\alpha\sqrt{y_0^3}}{15} \\ &+ k\sqrt{2g}\frac{r_0^3}{3v} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Onde:

v é a velocidade de crescimento do raio.

r_0 o valor inicial do raio do dreno.

y_0 altura inicial da coluna de água.

$tg\alpha$ e R_1 constantes referente às dimensões do reservatório.

k constante de proporcionalidade.

g a gravidade.

A equação (3.11) fornece de forma implícita os valores de y , portanto, podemos calcular a qualquer tempo os valores do nível da coluna de fluido substituindo os valores específicos as dimensões do recipiente e os valores das constantes v e r_0 referentes ao perfil de crescimento.

O recipiente tipo tronco de cone foi escolhido sobre a premissa de aplicar as equações em um exemplo prático, visto que a maioria dos reservatórios de água tem essa geometria. Ilustraremos a seguir com um exemplo.

Segundo a caixa convencional de 5000l as dimensões são as seguintes:

$$y_0 = 1,63m$$

$$R = 1,18m$$

$$r = 0,93m$$

Supondo que o reservatório esteja com sua capacidade máxima, usaremos as equações desenvolvidas para determinar o tempo em que o reservatório esvazia para o caso do dreno com raio constante e variável.

Exemplo 1: Para o dreno constante com diâmetro fixo de 20mm, e escolhendo $k = 0,95$, a eq. (3.3) resume-se a seguinte relação.

$$t \cdot 0,95 \cdot (0,01)^2 \cdot \sqrt{2,9,81} = \frac{6 \cdot 1,29^2 \cdot \sqrt{1,63^5} + 30 \cdot 0,93^2 \cdot \sqrt{1,93} + 20 \cdot 0,93 \cdot 1,29 \sqrt{1,63^3}}{15}$$

Explicitando o tempo na equação acima temos que é necessário para esvaziar todo o reservatório 3400s equivalente a 56,7min.

Exemplo 2: Para o caso do dreno com o raio variável, faremos o raio crescer a partir do valor fixo de 0,01m para alguns valores arbitrários de velocidade.

$$0,95 \frac{(vt + 0,01)^3}{3a} \sqrt{2,9,81} = 3,4 + 0,95 \sqrt{2,9,81} \frac{0,01^3}{3a}$$

Tabela 1: Tempo de esvaziamento em função da taxa de crescimento do raio.

Raio variável	
Valores para v [m/s]	Tempo de esvaziamento [s]
0,0001	526,1
0,0003	267,3
0,0006	172,9
0,0009	133,3

Fonte: Autor (2019).

Para o raio crescendo a uma taxa de 0,0001 m/s o tempo de esvaziamento do reservatório diminui em 84,5 %, aumentando ao final o raio do dreno em 0,0526m. Outro fato notório é que mesmo que a taxa de crescimento do raio seja inversamente proporcional ao tempo de esvaziamento do reservatório, o mesmo não acontece com o raio final do dreno, que se torna cada vez maior à medida que se aumenta a velocidade de crescimento do raio.

Para o esvaziamento de um tanque o volume que escoar depende de duas variáveis, área de saída do fluido, ou seja, a área do dreno e da velocidade do fluxo do escoamento, sabendo disto será tratado a seguir de um caso específico onde estabeleceremos que a taxa de esvaziamento deva ser constante no tempo. Uma

das formas de controlar a vazão e manter a taxa de esvaziamento constante seria estabelecer velocidade de saída do fluido constante (isto para o caso da área do dreno invariável), porém a velocidade do escoamento como mostrado pelo teorema de Torricelli é uma função potencial com altura da coluna de fluido, diminuindo conforme o tanque esvazia, então só seria possível estabelecer uma taxa de esvaziamento constante (mantendo as configurações originais) adicionando energia ao sistema.

Outra forma de controlar o volume no sistema é baseada nas condições impostas no início desta seção de que a área do dreno é variável. Aumentando ou diminuindo a área do dreno maximizamos ou minimizamos a vazão de saída, para esta seção o foco será estabelecer uma função que modele o perfil de crescimento do raio do dreno para que a taxa de esvaziamento seja constante.

Como y decresce com o tempo,

$$\frac{dy}{dt} = -ct$$

O que nos leva a resolver um simples problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = -z$$

$$y(0) = y_0$$

$$y = -zt + y_0 \quad (3.12)$$

O fluido que escoar pelo dreno pode ser comparado a um corpo em queda livre, logo z equivale a velocidade de decréscimo da coluna de fluido, sendo dado em m/s . Reescrevendo eq.(3.12) temos:

$$y = -vt + y_0 \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.4), temos:

$$\pi((-vt + y_0) \tan \alpha + R_1) v = -k\pi(r^*(t))^2 \sqrt{2g(-vt + y_0)}$$

Resolvendo para $r^*(t)$:

$$r^*(t) = \sqrt{\frac{((-vt + y_0) \tan \alpha + R_1)^2 v}{k \sqrt{2g(-vt + y_0)}}} \quad (3.14)$$

Onde:

$r^*(t)$ raio do dreno.

y_0 a altura máxima da coluna de água.

tga é R_1 constantes referente as dimensões do tronco de cone.

k constante de proporcionalidade.

v a velocidade do escoamento.

Diferentemente da eq.(3.10) em que o objetivo é o estudo da coluna de água no tanque sob ação de um perfil de crescimento do raio do dreno já pré-definido, a eq. (3.14) percorre o caminho inverso, ou seja, a taxa de esvaziamento agora tem perfil estabelecido e o estudo refere-se ao comportamento do raio do dreno sob a premissa de uma taxa de esvaziamento constante, ressalvo que a eq. (3.14) não é válida para $vt = y_0$, também não faz sentido valores para $r^*(t) = 0$.

Para melhor entendimento a equação será ilustrada com um exemplo.

Exemplo 3: usando as mesmas dimensões do exemplo anterior, para uma caixa de água de 5000l, se estabelecermos que a coluna de água do reservatório decresça a uma velocidade de 0,001m/s e o coeficiente de equivalência seja de 0,95, a tabela a seguir mostra para cada tempo o respectivo raio do dreno.

Tabela 2: Raio x Tempo para esvaziamento constante de 0,001m/s

Tempo [s]	Raio [mm]
100	40,2
300	37,9
500	35,7
700	33,4
900	31,2
1100	29,1
1300	27,6
1500	26,0
1550	29,9
1575	31,7
1600	35,6

Fonte: Autor (2019).

Como para o tronco de cone a área de seção transversal diminui com a altura, o volume por milímetro também é menor à medida que a coluna de água baixa,

inicialmente o raio do dreno diminui controlando a vazão mantendo a taxa de esvaziamento constante, porém quando a coluna de água no reservatório chega próximo à base do tronco de cone o raio do dreno passa a crescer, pois a perda de potencial devido a baixa coluna de água é maior que diminuição do volume por milímetro de altura, não sendo mais necessário reduzir o escoamento e sim aumentá-lo, para isso o raio do dreno passa a crescer compensando a perda de velocidade do escoamento.

Outra importante variável de estudo é a vazão do sistema, escrevendo a vazão como diferencial de tempo temos:

$$Q = \frac{dV}{dt} \quad (3.15)$$

Onde para a forma geométrica de um tronco de cone e baseados na figura 4, o volume é dado por:

$$V = \frac{\pi y}{3} (R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2) \quad (3.16)$$

Se $R_2 = ytg \alpha + R_1$, substituindo em (3.16):

$$V = \frac{\pi y}{3} [(ytg \alpha + R_1)^2 + R_1(ytg \alpha + R_1) + R_1^2]$$

Fazendo as devidas simplificações, chegamos a seguinte relação:

$$V = \frac{\pi y}{3} (y^2 tg^2 \alpha + 3yR_1 tg \alpha + 3R_1^2) \quad (3.17)$$

Se substituirmos $y = -vt + y_0$ na equação acima temos a relação para volume em termos de uma taxa de escoamento constante:

$$V = \frac{\pi(-vt + y_0)^3}{3} tg^2 \alpha + \pi(-vt + y_0)^2 R_1 tg \alpha + \pi(-vt + y_0) R_1^2 \quad (3.18)$$

Derivando a equação (3.18) em relação ao tempo chegamos à vazão para uma taxa de escoamento constante:

$$Q = \pi[-v.tg^2 \alpha.(-vt + y_0)^2 tg^2 \alpha - 2v.tg \alpha.R_1(-vt + y_0) - vR_1^2] \quad (3.20)$$

Aplicando a equação acima para o reservatório de 5000l, para uma velocidade de esvaziamento de 0,001m/s temos a seguinte relação:

$$Q = \pi[-0,0017(-0,001t + 1,63)^2 - 0,0026(-0,001t + 1,63) - 0,0009] \quad (3.21)$$

A tabela a seguir relaciona cada tempo a sua respectiva vazão.

Tabela 3- tempo x vazão para taxa de esvaziamento constante.

Tempo [s]	Vazão [m^3/s]
100	-0,0278
300	-0,0231
500	-0,0190
1000	-0,0102
1300	-0,0060
1500	-0,0040
1550	-0,0035
1600	-0,0031

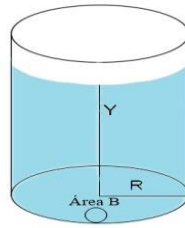
Fonte: Autor (2019).

A vazão negativa se explica pelo fato de adotarmos o sentido positivo de y para cima, como o tanque está esvaziando o sentido do escoamento é negativo. Outro fato a se atentar diz respeito ao comportamento da vazão nos instantes finais do escoamento, que passa a decrescer em uma taxa muito menor do que a inicial, agindo de acordo com os valores da tabela 3 onde o raio do dreno passa a crescer, equilibrando a perda de velocidade do escoamento devido à baixa pressão. Dessa forma mostramos que o modelo é plausível, visto que as equações não são unilaterais, pois o raio e vazão diminuem ou aumentam respeitando as variação de pressão e velocidade do escoamento.

3.2. Escoamento em reservatório do tipo cilindro vertical.

O estudo a seguir estabelece equações para o comportamento da coluna de fluido para o caso do dreno constante e variável, e semelhante a sessão anterior foi desenvolvida a equação pra comportamento do raio do dreno para uma taxa de esvaziamento constante. A (Figura 5) a seguir ilustra um tanque do tipo cilindro vertical.

Figura 5: Reservatório do tipo cilindro.



Fonte: Autor (2018).

Para o cilindro vertical tem-se um caso mais simples que o anterior, pois a área de seção transversal é constante por toda a altura da coluna de fluido, assim a área da base do cilindro é equivalente a $A(y)$, reescrevendo a equação (3.16), temos:

$$\pi R^2 \frac{dy}{dt} = -k\pi r^2 \sqrt{2gy} \quad (3.22)$$

Se B e constante, $y(t)$ é da forma:

$$y^{1/2} = \frac{-kr^2 t \sqrt{2g}}{2R^2} + y_0^{1/2} \quad (3.23)$$

Se o raio do dreno varia com perfil linear, como visto na seção 3.1 temos:

$$r = r^*(t) = vt + r_0 \quad (3.5)$$

Substituindo a eq. (3.5) em (3.23), chegamos a seguinte equação diferencial a ser resolvida:

$$R^2 dy = -k(vt + r_0)^2 \sqrt{2gy} dt \quad (3.24)$$

Integrando ambos os lados da equação acima, temos a solução geral da equação diferencial:

$$2y^{1/2} = \frac{-k\sqrt{2g}}{R^2} \frac{(vt + r_0)^3}{3v} + C_2 \quad (3.25)$$

Sendo a equação (4.38) sujeitas as seguintes condições iniciais:

$$y(0) = y_0$$

onde y_0 é a altura da coluna de fluido no estado inicial, encontra-se:

$$C_2 = y_0^{1/2} + \frac{kr_0^3 \sqrt{2g}}{3vR^2} \quad (3.26)$$

Portanto a solução particular da equação é escrita da forma:

$$2y^{1/2} = \frac{-k\sqrt{2g}}{R^2} \frac{(vt + r_0)^3}{3v} + \frac{kr_0^3\sqrt{2g}}{3vR^2} + 2y_0^{1/2} \quad (3.27)$$

Onde:

v é a velocidade de crescimento do raio.

r_0 o valor inicial do raio do dreno.

y_0 altura inicial da coluna de água.

R o raio do cilindro.

k constante de proporcionalidade.

g a gravidade.

A eq. (3.27) fornece para qualquer tempo os valores de da coluna de água conforme perfil de crescimento do raio desejado.

Fazendo o estudo semelhante ao caso do reservatório tipo tronco de cone da seção anterior estabelecemos para taxa de esvaziamento constante, resolvemos o mesmo problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = -z$$

$$y(0) = y_0$$

$$y = -zt + y_0$$

O fluído escoar em queda livre, sendo que z é a velocidade do escoamento, temos:

$$y = -vt + y_0 \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.2):

$$r^*(t) = \sqrt{\frac{v R^2}{k\sqrt{2g}(-vt + y_0)}} \quad (3.28)$$

Para melhor entendimento a equação acima será aplicada a um exemplo.

Exemplo 3: Para um reservatório com um diâmetro de $2m$ que se encontra com água até o nível de $1,5m$, pré-estabelecemos que o tanque esvazia a uma taxa de $0,001m/s$, para um k de $0,95$. O comportamento do raio do dreno para cada tempo é mostrado na Tabela 4 a seguir.

Tabela 4: Raio do dreno x Tempo para uma taxa de esvaziamento de $0,001m/s$,

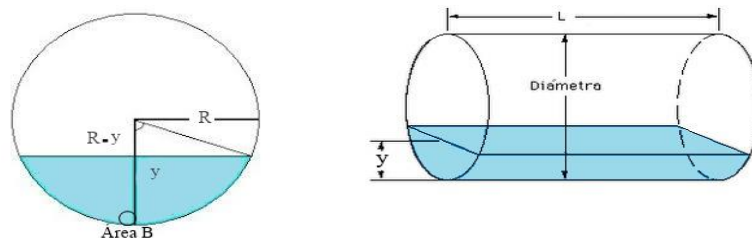
Tempo [s]	Raio do dreno [mm]
100	13,8
500	14,9
900	16,7
1200	19,0
1400	22,4
1475	24,5

Fonte: Autor (2019).

Diferentemente dos resultados obtidos com o tronco de cone para o cilindro o raio do dreno cresce do começo ao fim do escoamento, o que de fato se espera, pois a área de seção transversal não muda ao longo da altura, o volume por milímetro de altura também é invariável, assim para manter a taxa de esvaziamento constante o raio deve crescer compensando o decréscimo e pressão e a perda de velocidade do escoamento.

3.3. Escoamento em tanque do tipo cilindro horizontal

Diferentemente do cilindro vertical, no escoamento em um cilindro na horizontal a área de seção transversal do tanque e função da coluna de água, sendo o volume por milímetro variável com o raio do cilindro. A Figura 6 a seguir ilustra um cilindro vertical.

Figura 6: vista lateral e frontal de um cilindro vertical.

Fonte: Autor (2019).

Da geometria da (Figura 6) temos que a área de seção transversal é função de y da seguinte forma:

$$A(y) = 2w \cdot L \quad (3.29)$$

Onde w é o cateto oposto do triângulo $w(R - y)R$, podendo ser obtido em função de R e y , pelo teorema de Pitágoras, assim temos a seguinte relação para w :

$$w = \sqrt{2yR - y^2} \quad (3.30)$$

Substituindo w em $A(y)$ temos:

$$w = 2 \cdot L \cdot \sqrt{2yR - y^2} \quad (3.31)$$

Reescrevendo a eq.(2.40), temos a equação diferencial característica da forma:

$$\frac{2L}{\sqrt{2g}} (2R - y)^{1/2} dy = -k\pi r^2 dt \quad (3.32)$$

Integrando ambos dos lados da equação acima temos a solução geral do problema para o caso de um dreno com área constante.

$$\frac{4L}{3\sqrt{2g}} (2R - y)^{3/2} = k\pi r^2 t + C_3 \quad (3.33)$$

Fazendo a solução geral sujeita à seguinte condição inicial:

$$y(0) = y_0$$

Temos a solução particular da seguinte forma:

$$\frac{4L}{3\sqrt{2g}} (2R - y)^{3/2} = k\pi r^2 t + \frac{4L}{3\sqrt{2g}} (2R - y_0)^{3/2} \quad (3.34)$$

A equação acima fornece os valores da coluna de água, y , para os respectivos valores de tempo para o caso de um dreno com área constante igual a πr^2 , y_0 é a altura máxima da coluna de água.

Para o caso do dreno variando com perfil linear temos:

$$r = r^*(t) = vt + r_0 \quad (3.5)$$

Reescrevendo a equação (3.16) para o dreno variável temos:

$$\frac{2L}{\sqrt{2g}} (2R - y)^{1/2} dy = -k\pi (vt + r_0)^2 dt \quad (3.35)$$

Integrando ambos os lados têm a solução geral da forma:

$$\frac{4L}{3\sqrt{2g}} (2R - y)^{3/2} = k\pi \frac{(vt + r_0)^3}{3a} + C_3 \quad (3.35)$$

Fazendo a solução geral sujeita as seguintes condições iniciais:

$$y(0) = y_0$$

A solução particular da equação e da seguinte forma:

$$\frac{4L}{3\sqrt{2g}}(2R - y)^{3/2} = k\pi \frac{(vt + r_0)^3}{3v} + \frac{4L}{3\sqrt{2g}}(2R - y_0)^{3/2} + \frac{k\pi r_0^3}{3v} \quad (3.36)$$

A equação acima fornece para qualquer tempo, t , os valores da coluna de água, y , para o esvaziamento do tanque cilíndrico sujeito a um dreno variando com perfil linear.

Exemplo: para um tanque de comprimento $L = 4,86m$ e raio $R = 0,8865m$, supondo que o tanque esteja em sua capacidade máxima o que equivale ao volume de $V = 12m^3$, para o caso de dreno com área constante de $0,01m$, compare o tempo de esvaziamento para tanque na vertical e na horizontal.

Usando a eq.(3.23) sendo y_0 equivalente ao diâmetro do tanque, tomando $k = 0,95$ temos que o tempo de esvaziamento do tanque cilíndrico vertical é de $4973s$ aproximadamente $1,4h$.

Usando a eq.(3.34) sob as mesmas condições citadas anteriormente determinamos o tempo de esvaziamento do tanque cilíndrico na horizontal será de $11578s$ aproximadamente $3,2h$.

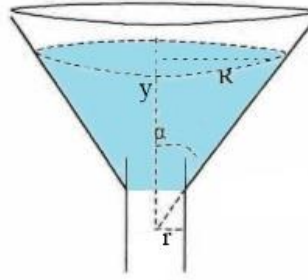
Como esperado o tempo de esvaziamento do tanque cilíndrico na vertical é muito menor em relação ao tanque posicionado na horizontal. Visto que a diferença na coluna de água entre os dois reservatórios é muito grande, a pressão para o cilindro vertical é muito maior que para o cilindro horizontal.

Com o objetivo de ilustrar as aplicações de desenvolver um modelo matemático de estudo do escoamento sujeito a um dreno variável, a eq.(3.36) foi aplicada sobre a problemática de estabelecer uma velocidade de crescimento do raio do dreno para qual o tanque na horizontal esvazie ao mesmo tempo em que o tanque na vertical. Utilizando as mesmas dimensões citadas anteriormente, para um mesmo fator de proporcionalidade de $0,95$, para um tempo de esvaziamento de $1,4h$ o raio do dreno do cilindro horizontal deve crescer a uma velocidade de $10^{-8} m/s$ para que os reservatórios esvaziem ao mesmo tempo.

3.4. Escoamento em tanque do tipo funil

A (Figura 7) ilustra o reservatório tipo funil, cheio até a altura y que escoa por um tubo de raio r

Figura 7: Reservatório do tipo funil.



Fonte: Autor (2018).

Seja $A(y)$, a área circular de seção transversal do funil é dado pôr:

$$A(y) = \pi R^2 \quad (3.37)$$

Como o raio R é uma variável ao longo do eixo vertical do funil, podendo ser expresso em função do ângulo α e y com seguinte relação $R = y \tan \alpha$, reescrevendo a eq. (3.37):

$$A(y) = \pi (y \tan \alpha)^2 \quad (3.38)$$

Ao substituir na equação (3.38) em (2.40), obtemos a equação diferencial característica para altura da coluna de fluido no tanque, dada pôr:

$$\pi y^2 \tan^2 \alpha \frac{dy}{dt} = -k \pi r^2 \sqrt{2gy} \quad (3.39)$$

Para o caso da área do dreno constante ao longo do tempo, a solução geral da altura em função do tempo e da forma:

$$y^{5/2} = \frac{-5kr^2 \sqrt{2g}}{2 \tan^2 \alpha} + y_0^{5/2} \quad (3.40)$$

Tomando a área do dreno variável, com o raio do dreno obedecendo a um perfil parabólico, tem-se:

$$r = r^*(t) = a t^2 + bt + c \quad (3.41)$$

Logo de uma análise dimensional simples temos que as constantes a, b e c são respectivamente aceleração, velocidade e raio inicial do dreno. Assim podemos reescrever o perfil da seguinte forma:

$$r = r^*(t) = a t^2 + vt + r_0 \quad (3.41)$$

Substituindo (3.41) em (3.39) obtemos:

$$\pi y^2 \tan^2 \alpha \frac{dy}{dt} = -k \pi (a t^2 + vt + r_0)^2 \sqrt{2gy} \quad (3.42)$$

Fazendo a separação de variáveis, obtemos:

$$y^{3/2}dy = \frac{-k\sqrt{2g}}{tg^2\alpha}(at^2 + vt + r_0)^2dt \quad (3.43)$$

Integrando ambos os lados da equação acima, obtemos:

$$y^{5/2} = \frac{-k\sqrt{2g}}{2tg^2\alpha} \left(\frac{a^2t^5}{5} + \frac{avt^4}{2} + \frac{2at^3}{3} + \frac{v^2t^3}{3} + \frac{r_0vt^2}{2} + r_0^2t \right) + C_4 \quad (3.44)$$

A equação acima é a solução geral pra altura da coluna de fluido em função do tempo de esvaziamento, sendo C_4 uma constante de integração.

Fazendo a solução geral sujeita seguinte condição inicial:

$$y(0) = y_0$$

Temos:

$$C_4 = y_0^{5/2} \quad (3.45)$$

$$y^{5/2} = \frac{-5k\sqrt{2g}}{2tg^2\alpha} \left(\frac{a^2t^5}{5} + \frac{avt^4}{2} + \frac{2ar_0t^3}{3} + \frac{v^2t^3}{3} + \frac{vr_0t^2}{2} + r_0^2t \right) + y_0^{5/2} \quad (3.46)$$

Onde:

a é aceleração do crescimento do raio.

v é a velocidade de crescimento do raio.

r_0 o raio inicial do dreno.

$tg\alpha$ é uma constante obtida das dimensões do reservatório.

y_0 altura inicial da coluna de água.

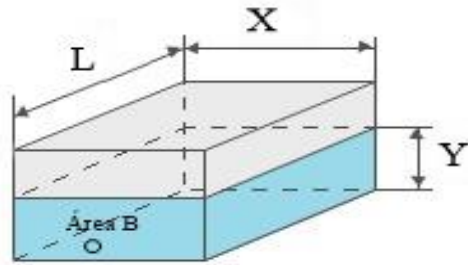
k constante de proporcionalidade.

A eq.(3.46) fornece para um perfil parabólico de crescimento do raio do dreno os valores da coluna água, y , para qualquer tempo, t .

3.5. Escoamento em reservatório do tipo caixa retangular.

A (Figura 8) ilustra um reservatório do tipo caixa retangular.

Figura 8: Reservatório do tipo caixa retangular..



Fonte: Autor (2018).

Seja $A(y)$ a área de seção transversal do retângulo, assim como para o cilindro essa forma geométrica a área de seção transversal é invariável com a altura, temos $A(y) = XL$ onde L é o comprimento e X a largura do retângulo.

Escrevendo a equação (2.40) para esse problema:

$$XL dy = -kB\sqrt{2gy} dt \quad (3.47)$$

Para B constante, $y(t)$ é da forma:

$$y^{1/2} = \frac{-\pi r^2 kt \sqrt{2g}}{2X.L} + y_0^{1/2} \quad (3.48)$$

Tomando o raio do dreno variando com um perfil cossenoidal, tem-se:

$$r = r^*(t) = a \cdot \cos t \quad (3.49)$$

Substituindo o perfil de crescimento da área na equação (3.47), temos:

$$XLdy = -k\pi a^2 \cos^2 t \sqrt{2gy} dt \quad (3.50)$$

Integrando a equação acima e resolvendo em função da variável y , temos a seguinte solução:

$$y^{1/2} = \frac{-\pi ka^2 \sqrt{2g}}{2X.L} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C_5 \quad (3.51)$$

A equação (3.51) é a solução geral para o problema do escoamento em uma caixa retangular área do dreno variável.

Tomando a equação (3.51) sujeitas a seguinte condição inicial:

$$y(0) = y_0$$

Encontra-se:

$$C_5 = y_0^{1/2} \quad (3.52)$$

Sendo solução particular da equação diferencial da forma:

$$y^{1/2} = \frac{-\pi k a^2 \sqrt{2g}}{2X.l} \left(t + \frac{1}{2} \text{sen} 2t \right) + y_0^{1/2} \quad (3.53)$$

Onde:

X é a largura do tanque.

L é o comprimento do tanque.

a é a amplitude de crescimento do raio.

y_0 altura inicial da coluna de água.

k constante de proporcionalidade.

Tomando um perfil de crescimento $a \cdot \cos t$ para o raio do dreno a equação acima fornece os valores para níveis de y da coluna de água para qualquer tempo t .

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi desenvolvido o estudo sistemático sobre a aplicação de equações diferenciais em alguns sistemas simples relacionados com a dinâmica dos fluidos, para tais estudos a abordagem das equações utilizadas foi bastante simples, visto que a modelagem de tal sistema envolveu somente equações diferenciais de primeira ordem.

Evidentemente, tivemos a modesta tentativa de fornecer um maior entendimento sobre a dinâmica dos fluidos, mais que isso este trabalho é uma forma de desmistificar a dificuldade das aplicações de equações diferenciais, pelo fato de modelarmos o problema sujeito a n variáveis apenas por equações diferenciais de primeira ordem buscamos incentivar os leitores a se aprofundarem em seus ramos fazendo deste trabalho base para aplicações mais complexas.

O presente trabalho dá contribuições significativas, pois apresenta uma base teórica ainda não vista na literatura, mostrando equações desenvolvidas para dinâmica de fluidos em alguns recipientes, onde todas as análises apresentadas a cerca de taxa de esvaziamento dos recipientes, vazão e tempo de escoamento foram baseados sobre o diferencial de um dreno variável com o tempo.

Esperamos posteriormente aprofundar os estudos a cerca do assunto fornecendo base para softwares, em uma tentativa de simplificar e baratear a tecnologia de controles de nível, possibilitando assim aplicações residenciais, agropecuárias e industriais visando melhor controle e monitoramento de recursos hídricos.

REFERÊNCIAS

ALOISIO, J. B. **Equações Diferenciais Aplicadas em Escoamento de Fluidos..** Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA, Santa Catarina, 2002.

BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. p. 23-93.

DIACU, Florin.. **Introdução a Equações Diferenciais:** Teoria e Aplicações. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

FOX, R. W.; McDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Mecânica dos Fluidos** - 6ª edição, LTC, 2006.

GROETSCH, C.W. **Inverse Problems in the Mathematical Sciences.** Germany: Vieweg, 1993.

HALLIDAY, D. RESNICK, R. **Fundamentos da Física**, vol. 2, : LTC, 1996.

MACHADO, K.D. Introdução. In: Machado, K.D. **Equações Diferenciais Aplicadas et Física.** Ponta Grossa: UEPG, 1999.

ROGAWSKI, J. ADAMS, C. **Cálculo**, vol. 2: 3ª edição, Bookman, 2018.

SEARS, F.W. ZEMANSKY, M.W. and ALMARZA, A. Y.. **Física Básica: Termodinâmica e Ondas**, Vol. 2 (2007).

ZILL, Dennis G.; FARIAS, Alfredo Alves de; CULLEN, Michael R. ((Trad.)). **Equações diferenciais.** 3.ed 2.v ISBN 8534611416 v.2