



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO CIÊNCIA EXATAS E NATURAIS
CURSO BACHARELADO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PEDRO ARTUR PESSOA ALVES

**ANÁLISE DINÂMICA DE OSCILAÇÕES MECÂNICAS VIA SISTEMA DE
AQUISIÇÃO DE BAIXO CUSTO COM ESP32 E ACELERÔMETRO MPU-6050**

PAU DOS FERROS - RN

2026

PEDRO ARTUR PESSOA ALVES

**ANÁLISE DINÂMICA DE OSCILAÇÕES MECÂNICAS VIA SISTEMA DE
AQUISIÇÃO DE BAIXO CUSTO COM ESP32 E ACELERÔMETRO MPU-6050**

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido *Campus* Pau dos Ferros como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Sharon Dantas da Cunha, Prof Dr.

PAU DOS FERROS - RN

2026

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

A474a Alves, Pedro Artur Pessoa.
 Análise dinâmica de oscilações mecânicas via
 sistema de aquisição de baixo custo com ESP32 e
 acelerômetro MPU-6050 / Pedro Artur Pessoa Alves. -
 2026.
 47 f. : il.

 Orientador: Sharon Dantas da Cunha.
 Monografia (graduação) - Universidade Federal
 Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
 Tecnologia, 2026.

 1. Vibração livre. 2. Frequência natural
 amortecida. 3. Tecnologia MEMS. 4. Rigidez
 estrutural. 5. Tracker. I. Cunha, Sharon Dantas
 da, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

 Biblioteca Campus Pau dos Ferros
 Bibliotecária: Erlanda Maria Lopes da Silva
 CRB: 15/966

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

PEDRO ARTUR PESSOA ALVES

ANÁLISE DINÂMICA DE OSCILAÇÕES MECÂNICAS VIA SISTEMA DE
AQUISIÇÃO DE BAIXO CUSTO COM ESP32 E ACELERÔMETRO MPU-6050

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido *Campus* Pau dos Ferros como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 24/06/2026

BANCA EXAMINADORA

Sharon Dantas da Cunha, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

Matheus Fernandes de Araújo Silva, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Paulo Henrique Araújo Bezerra, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha família. Ao meu pai, Lindon Johson, meu grande incentivador, que sempre me mostrou o caminho certo e me apoiou em minha trajetória até aqui. Tenho você, meu pai, como meu grande herói e referência. Agradeço à minha mãe, Maria Sebastiana, uma mulher forte e guerreira. Sua força está presente em suas atitudes e, com amor e dedicação, sempre me mostrou a importância do respeito e da educação. Vocês dois são a minha grande inspiração. Diante de tantos obstáculos, encontraram forças para se dedicar, incentivar e educar seus dois filhos com muito amor e carinho. Se hoje chego até aqui, é graças a vocês. Deixo um agradecimento especial ao meu irmão, Isac Emanuel, meu maior presente e amigo que a vida me reservou, bem como a todos os meus familiares.

Agradeço também aos meus amigos da UFERSA, que fizeram parte da minha trajetória acadêmica. Deixo um agradecimento especial aos amigos do grupo "Discípulos de Sharon". Vocês também foram fundamentais desde o meu primeiro momento na UFERSA. Em um ambiente novo, encontrei amigos que levarei para a vida.

Agradeço também aos grandes amigos que tenho o privilégio de ter desde o ensino fundamental, que me apoiaram e incentivaram desde o momento em que ingressei na UFERSA. Sou grato aos meus amigos Tales Igor, com quem tive o privilégio de compartilhar essa jornada na UFERSA, e aos amigos Gilcleiton Oliveira, Mangili Diware, Entony Katy e Kauan Henrique. Vocês foram fundamentais em diferentes momentos da minha trajetória, contribuindo não apenas para minha formação acadêmica, mas também para o meu crescimento pessoal.

Agradeço, de forma especial, ao meu orientador, Prof. Dr. Sharon Dantas da Cunha. Sem suas orientações e, principalmente, seu apoio e dedicação, a realização deste trabalho não teria sido possível. Sua contribuição foi muito importante para todo esse processo e para a concretização deste trabalho, além de ter sido fundamental para minha trajetória acadêmica em diferentes momentos. Tive o privilégio de ser seu aluno em diversas disciplinas e de conhecer de perto o grande profissional e ser humano que o senhor é. Sou grato por ter aceitado ser meu orientador em um momento tão importante da minha trajetória acadêmica.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram de alguma forma para a minha graduação. Cada momento compartilhado, conselho recebido e palavra de carinho foram muito importantes para a realização desse momento e permanecerão guardados em minha memória.

EPÍGRAFE

“Se vi mais longe, foi por estar sobre os ombros de gigantes.”

Isaac Newton.

RESUMO

Este trabalho investiga a análise dinâmica experimental de oscilações mecânicas em estruturas flexíveis por meio da integração de conceitos da mecânica clássica à instrumentação eletrônica de baixo custo. O objetivo consistiu no desenvolvimento de um sistema de aquisição de dados baseado no microcontrolador ESP32 e no acelerômetro MEMS MPU-6050 para a extração de parâmetros modais e da rigidez equivalente de um modelo experimental. O estudo prático desse comportamento justifica-se pela necessidade de viabilizar a experimentação estrutural e o ensino prático nos laboratórios, oferecendo uma alternativa técnica e financeiramente acessível aos equipamentos industriais convencionais. Metodologicamente, o trabalho foi realizado por meio da coleta do perfil de aceleração de um protótipo do tipo torre em vibração livre e, através do ajuste das curvas de aceleração de um dos eixos, foram obtidos a frequência natural amortecida e a constante de decaimento estrutural. Com essas duas grandezas, obtém-se a frequência natural da torre e, conseqüentemente, a rigidez da estrutura. As grandezas obtidas foram submetidas a uma validação cruzada: uma análise estatística dos dados de deslocamento da estrutura, obtidos com a técnica da videoanálise via software Tracker. Os resultados revelam a viabilidade da instrumentação desenvolvida, sendo capaz de detectar variações não previstas no modelo analítico, como pequenas folgas e acomodações na base de fixação. Assim, o projeto demonstra sua aplicabilidade no ambiente prático de laboratório.

Palavras-chave: vibração livre; frequência natural amortecida; tecnologia MEMS; rigidez estrutural; tracker.

ABSTRACT

This work investigates the experimental dynamic analysis of mechanical oscillations in flexible structures through the integration of classical mechanics concepts with low-cost electronic instrumentation. The objective was to develop a data acquisition system based on the ESP32 microcontroller and the MPU-6050 MEMS accelerometer for the extraction of modal parameters and the equivalent stiffness of an experimental model. The practical study of this behavior is justified by the need to enable structural experimentation and practical teaching in laboratories, offering a technically and financially accessible alternative to conventional industrial equipment. Methodologically, the study was carried out by collecting the acceleration profile of a tower-type prototype under free vibration, and by fitting the acceleration curves of one of the axes, the damped natural frequency and the structural decay constant were obtained. From these two quantities, the natural frequency of the tower and, consequently, the structural stiffness were determined. The obtained quantities were subjected to cross-validation: a statistical analysis of the structure's displacement data, obtained with the video analysis technique via Tracker software. The results reveal the feasibility of the developed instrumentation, being able to detect variations not predicted by the analytical model, such as small gaps and settling at the fixation base. Thus, the project demonstrates its applicability in the practical laboratory environment.

Keywords: free vibration; damped natural frequency; MEMS technology; structural stiffness; tracker.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema com viga engastada ilustrativa (a) e seu respectivo modelo equivalente (b).	22
Figura 2 – Sistema com molas em paralelo.....	23
Figura 3 -Imagem da placa de desenvolvimento ESP32.....	24
Figura 4 - Imagem do sensor MPU-6050 e sua pinagem de comunicação.....	25
Figura 5 – Simulação lógica da integração entre ESP32 e MPU-6050 no ambiente Wokwi...	27
Figura 6 – Monitor Serial do Arduino IDE indicando o processo de calibração e os valores estáticos compensados.....	29
Figura 7 – Torre de oscilação montada com o sensor e Esp32 no topo(a) e montagem com o acrílico(b).....	31
Figura 8 – Disposição do equipamento de gravação e alinhamento do tripé em relação ao modelo físico.....	33
Figura 9 – A figura 9 mostra o gráfico de tempo versus aceleração para a haste de 0,90 m, evidenciando os saltos transiente inicial e mostra o decaimento das oscilações ao longo do tempo.....	37
Figura 10 – A figura 10 mostra o gráfico de tempo versus aceleração para a haste de 0,85 m, ilustrando o decaimento contínuo das oscilações ao longo do tempo.....	38
Figura 11 – Gráfico de tempo versus aceleração para a haste de 0,75 m, evidenciando a oscilação residual.....	39

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Classificação, raízes da equação característica, comportamento de ζ e características da oscilação da equação 04.....	19
Quadro 2 – Tolerâncias típicas de erro de zero (Offset) do MPU-6050.....	34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Pinagem utilizada para a operação do módulo MPU-6050.....	26
Tabela 2 – Relação de componentes e materiais utilizados na montagem do protótipo.....	27
Tabela 3 – Resultados da calibração estática antes do ensaio de 0,90 m.....	35
Tabela 4 – Composição da massa equivalente (Meq) para cada comprimento estrutural.....	39
Tabela 5 – Parâmetros dinâmicos: wd(SciDAVis) e w0 (Planilha).....	40
Tabela 6 – Comparação entre a rigidez teórica e a rigidez experimental.....	41
Tabela 7 – Parâmetros dinâmicos extraídos via Tracker e cálculo de 0.....	43
Tabela 8 – Comparação entre a rigidez teórica e a rigidez experimental(Tracker).....	43
Tabela 9 – Validação cruzada da rigidez experimental entre Acelerômetro e Tracker.....	44

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	16
2 REVISÃO TEÓRICA.....	17
2.1 Sistemas de Um Grau de Liberdade e Vibração Amortecida.....	17
2.2 Modelagem de Sistemas Contínuos e Massa Equivalente.....	19
2.3 Rigidez Equivalente e Molas em Paralelo.....	22
2.4 ESP 32 e Acelerômetro (MPU - 6050).....	23
3 MATERIAIS E MÉTODOS.....	27
3.1 Materiais utilizados no protótipo.....	27
3.2 Montagem mecânica do modelo físico.....	27
3.3 Preparação do hardware e do firmware.....	29
3.3.1 Simulação preliminar e validação lógica.....	29
3.3.2 Configuração de bibliotecas, parâmetros e calibração estática.....	30
3.4 Procedimentos de coleta de dados e rotina de ensaios.....	31
4 RESULTADOS.....	34
4.1 Calibração do sistema de aquisição de dados.....	34
4.2 Obtenção de parâmetro dinâmicos.....	36
4.2.1 Tratamento Preliminar do Sinal.....	37
4.2.2 Composição da Massa Equivalente do Sistema.....	39
4.2.3 Extração dos Parâmetros Dinâmicos.....	40
4.2.4 Cálculo da Rigidez Teórica e Experimental.....	41
4.2.5 Obtenção de Parâmetros Dinâmicos via Rastreamento Óptico (Tracker).....	42
4.3 Comparação dos Resultados e Cálculo da Rigidez.....	44
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	40
REFERÊNCIAS.....	42
APÊNDICE A - Código usado nos testes e calibração do sensor MPU - 6050.....	43

1 INTRODUÇÃO

O avanço tecnológico, marcado pela popularização de plataformas de prototipagem eletrônica de baixo custo, tem transformado a análise estrutural e o ensino prático das engenharias. O estudo das vibrações mecânicas atua na previsão do comportamento dinâmico e na prevenção de falhas em estruturas sujeitas a esforços contínuos. Historicamente, a instrumentação para a análise e o ensino desses fenômenos em laboratórios dependia de equipamentos industriais de elevada complexidade e alto custo, o que frequentemente limitava a experimentação nas disciplinas (Varanis *et al.*, 2016). Contudo, esses obstáculos vêm sendo superados pela utilização de microcontroladores integrados a sensores da tecnologia MEMS (*Micro-Electro-Mechanical Systems*), que trazem novas possibilidades de experimentação computacional com precisão adequada e orçamento acessível (Varanis *et al.*, 2016).

No contexto prático, a garantia da estabilidade e da integridade de grandes obras civis, como edifícios e pontes, frente a vibrações naturais ou antrópicas exige o conhecimento prévio das propriedades dinâmicas da estrutura principal (Rao, 2008). Soluções de controle, como os Atenuadores Dinâmicos Sincronizados (ADS), demonstram eficácia em aplicações reais, a exemplo do edifício Taipei 101 (Poon, 2004), mas sua implementação depende de medições experimentais confiáveis. Diferentemente de aproximações teóricas ideais que desconsideram a perda de energia, a vibração livre amortecida é o modelo adequado para descrever a dinâmica de estruturas reais, pois a frequência natural amortecida e a taxa de amortecimento dependem diretamente das propriedades físicas do material, como a rigidez e o módulo de elasticidade. Apesar dessas contribuições teóricas e aplicadas, permanece pouco explorada a disponibilização e validação de arranjos experimentais de baixo custo que permitam determinar esses parâmetros em laboratório.

Diante disso, o presente trabalho propõe desenvolver e analisar um sistema experimental de baixo custo para o estudo das oscilações estruturais, integrando o microcontrolador ESP32 e o acelerômetro MPU-6050 à engenharia prática. Especificamente, busca-se investigar o comportamento de um protótipo estrutural uma torre flexível constituída por barras roscadas e placas de madeira, determinando a sua frequência natural amortecida e o decremento logarítmico. A partir desses dados, objetiva-se calcular a rigidez (constante elástica) do modelo e validar a precisão do arranjo por comparação com rastreamento de vídeo via software *Tracker*, avaliando a exatidão por meio do erro relativo frente ao modelo analítico teórico. O trabalho estrutura-se apresentando a fundamentação teórica pertinente,

detalhando os materiais e métodos de construção e configuração, discutindo os resultados obtidos e, por fim, as implicações para a prática e o ensino.

2 REVISÃO TEÓRICA

2.1 Sistemas de Um Grau de Liberdade e Vibração Amortecida

No contexto da física experimental e do ensino de oscilações mecânicas, o estudo das vibrações estruturais se destaca como uma aplicação clássica que permite a verificação de parâmetros fundamentais da dinâmica, como a frequência natural, o amortecimento viscoso e a massa equivalente (Rao, 2008). Para a determinação do primeiro parâmetro é necessário estudar as oscilações livres da estrutura, e a análise inicial deste sistema parte da premissa de que o movimento horizontal da torre pode ser simplificado por um grau de liberdade, composto por uma massa e uma mola (Halliday, Resnick e Walker, 2014). Aplicando a segunda Lei de Newton, e considerando pequenas oscilações, a equação diferencial ordinária linear de segunda ordem que rege o comportamento desse sistema é dado pela equação 01:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1)$$

em que x é deslocamento do centro de massa do sistema e k é a constante elástica ou rigidez da estrutura. A solução da equação é dada pela equação 2:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t + \phi) \quad (2)$$

em que x_0 é a amplitude máxima, ϕ é a fase, e ω_n é a frequência natural não-amortecida do sistema, dada pela equação 3, que representa a oscilação ideal, ou seja, sem dissipação de energia (Rao, 2008):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

No sistema internacional de unidades (SI) a frequência ω_n é em rad/s, a rigidez equivalente do sistema k em N/m, e m é a massa do sistema expressa em kg.

Entretanto, em situações reais, a conservação de energia não ocorre, sendo necessário incluir a dissipação de energia. Um modelo bastante utilizado é o que considera o amortecimento viscoso, sendo proporcional à velocidade ($F_c = cv$). Embora estruturas metálicas reais apresentem comportamentos dissipativos mais complexos, como o amortecimento histerico, o modelo viscoso é amplamente adotado por consistir em uma aproximação matemática linear conveniente. Essa abordagem simplifica a modelagem analítica e entrega resultados consistentes e aplicáveis a sistemas de engenharia e a

experimentos de laboratório. Aplicando a Segunda Lei de Newton para este sistema oscilando na horizontal resulta na equação diferencial ordinária linear do segundo grau, como pode ser visto na equação 4:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (4)$$

onde m é a massa do sistema (kg), c é o coeficiente de amortecimento viscoso (N·s/m), k é a rigidez estrutural (N/m), $x(t)$ é o deslocamento lateral em função do tempo (m), $\dot{x}(t)$ é a velocidade da estrutura (m/s), e $\ddot{x}(t)$ é a aceleração lateral em função do tempo (m/s²).

Considerando a razão de amortecimento, $\zeta=c/(2m\omega_n)$, três soluções são possíveis para a equação 4, depende diretamente das raízes da sua equação característica (um polinômio de 2º grau). O quadro 1 apresenta a classificação, raízes da equação característica, comportamento de ζ e características da oscilação.

Quadro 1 - Classificação, raízes da equação característica, comportamento de ζ e características da oscilação da equação 4.

CLASSIFICAÇÃO	RAÍZES	ζ	CARACTERÍSTICAS
SUBAMORTECIDA	COMPLEXAS E DIFERENTES	$0 < \zeta < 1$	Oscilações amortecidas
CRITICAMENTE AMORTECIDA	REAIS E IGUAIS	$\zeta = 1$	Sem oscilações, retorno mais rápido sem ultrapassagem
SUPERAMORTECIDA	REAIS E DIFERENTES	$\zeta > 1$	Retorno sem oscilações, mais lento

Fonte: Autoria própria (2026)

Para estruturas de engenharia onde o amortecimento é pequeno, o sistema é classificado como subamortecido. A solução da equação diferencial 4 revela que o corpo continuará oscilando, mas a amplitude do seu deslocamento decairá exponencialmente ao longo do tempo. Segundo Rao (2008), o declínio das amplitudes é governado pela função exponencial $e^{-t/\tau}$, onde τ representa a constante de decaimento de tempo do sistema. A frequência com que o sistema perde energia é definida pelo produto entre a razão de amortecimento e a frequência natural $\zeta\omega_n$. Relacionando este termo com a constante de tempo (τ), uma grandeza física que caracteriza o decaimento exponencial e é definida por $\tau=1/\zeta\omega_n$, a solução subamortecida da equação 4 pode ser reescrita conforme a equação 5:

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \quad (5)$$

em que a frequência angular amortecida ω_d com que o sistema realmente oscila é identificada pela equação 6:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (6)$$

Segundo Rao (2008), a presença de forças dissipativas (amortecimento) atua como uma resistência ao movimento, o que aumenta o período da oscilação e reduz a sua rapidez. Por este motivo físico fundamental, a frequência com que o sistema balança na realidade (ω_d) será sempre estritamente menor do que a sua frequência natural teórica ideal (ω_n).

No contexto desta pesquisa, a estrutura metálica flexível analisada opera estritamente no regime subamortecido ($0 < \zeta < 1$). Isso ocorre porque o arranjo físico apresenta oscilações livres visíveis, cuja amplitude decai de forma gradativa ao longo do tempo até atingir o repouso, evidenciando a dissipação de energia característica desse intervalo.

2.2 Modelagem de Sistemas Contínuos e Massa Equivalente

Embora a equação 1 considere a massa do sistema concentrada em um único ponto, modelos físicos aplicados a estruturas reais requerem a análise de corpos contínuos. Nesse cenário, as próprias hastes metálicas possuem massa distribuída ao longo de seu comprimento.

Para relacionar este sistema real com as equações clássicas sem comprometer a precisão matemática, utiliza-se o Método da Energia de Rayleigh. Na mecânica oscilatória, quando um elemento flexível possui massa considerável, a inércia de sua própria estrutura é modelada adicionando a contribuição de sua massa total ao sistema (Rao, 2008).

Para calcular a influência da massa da barra e compreender o efeito da massa da mola, avalia-se a sua energia cinética (E_c). Sendo a massa da haste metálica constante (m_B), a barra possui diferentes velocidades ao longo de sua extensão devido ao engaste: ela é nula na base $v(0) = 0$ e atinge a velocidade máxima na extremidade livre de comprimento L ($v(L) = v_m$). Por causa desse comportamento linear, estuda-se um elemento infinitesimal de massa (d_m) em uma dada posição (y), cuja velocidade é descrita pela equação 7:

$$v(y) = \frac{V_m}{L}y \quad (7)$$

A energia cinética infinitesimal correspondente a este elemento de massa é dada pela equação 8:

$$dE_c = \frac{1}{2} dm v(y)^2 \quad (8)$$

A energia cinética da barra é obtida pela integração desse elemento infinitesimal ao longo de todo o comprimento L , substituindo-se as relações lineares de massa distribuída, $dm = \frac{m_B}{L} dy$, e a velocidade termos na equação 9:

$$E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{m_B}{L} dy \right) \left(\frac{V_m}{L} y \right)^2 \quad (9)$$

Simplificando os comprimentos após o processo de integração da variável geométrica, chega-se ao resultado da energia cinética associada exclusivamente à haste para a equação 10:

$$E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{m_B}{3} \right) V_m^2 \quad (10)$$

Para obter a energia cinética total do sistema (E_{total}), soma-se a contribuição da massa concentrada no topo (m_{topo}) com a parcela inércia equivalente da haste metálica, em que a velocidade máxima V_m corresponde à velocidade da coordenada generalizada de deslocamento ($\dot{x}$) para a equação 11:

$$E_{c,topo} = \frac{1}{2} m_{topo} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_B}{3} \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(m_{topo} + \frac{m_B}{3} \right) \dot{x}^2 \quad (11)$$

A partir do princípio da conservação da energia mecânica ou da aplicação da Segunda Lei de Newton ao sistema com massa equivalente, determina-se a equação de movimento para a vibração livre não amortecida da estrutura a partir da seguinte equação 12:

$$\left(m_{topo} + \frac{m_B}{3} \right) \ddot{x} + kx = 0 \quad (12)$$

A resolução desta equação diferencial governante define os parâmetros dinâmicos do sistema. Desse modo, considerando um sistema generalizado composto por n hastes elásticas

idênticas, a massa equivalente total (m_{eq}) que rege o comportamento vibratório pode ser vista na equação 13:

$$m_{eq} = (m_{topo} + \frac{m_B}{3}) \quad (13)$$

onde m_{eq} é a massa equivalente total do sistema dinâmico (kg), m_{topo} é a massa concentrada na extremidade livre (kg), composta pelos elementos rígidos superiores, n é o número de hastes da estrutura, e m_B é a massa de uma haste metálica isolada (kg).

A partir da determinação desse parâmetro fundamental, a frequência angular natural (ω_n) e o período de oscilação (T) do sistema contínuo passam a ser descritos formalmente em função da massa equivalente na equações 14 e 15:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m_{eq}}} \quad (14)$$

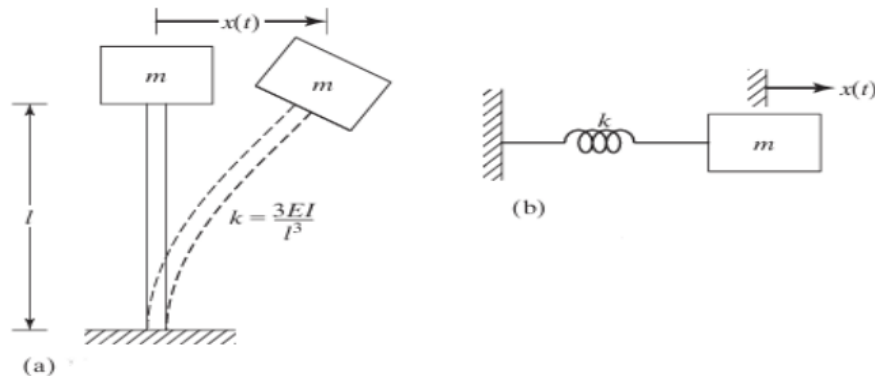
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{eq}}{K}} \quad (15)$$

Com a formulação da massa equivalente consolidada, o modelo matemático incorpora de forma precisa os efeitos inerciais do sistema contínuo. Contudo, para a aplicação integral das Equações 14 e 15 na previsão do comportamento dinâmico da estrutura, resta estabelecer a definição precisa da constante de rigidez (k). Uma vez que o modelo físico não é sustentado por um único apoio, mas sim por uma associação geométrica de elementos flexíveis, as equações da rigidez equivalente associada a essa montagem serão desenvolvidas na seção 2.3.

2.3 Rigidez Equivalente e Molas em Paralelo

Uma estrutura, com a apresentada da figura 1 a), pode ser modelada como um sistema de 1 grau de liberdade, figura 1 b).

Figura 1 – Sistema com viga engastada ilustrativa (a) e seu respectivo modelo equivalente (b)



Fonte: Rao (2008, p. 128).

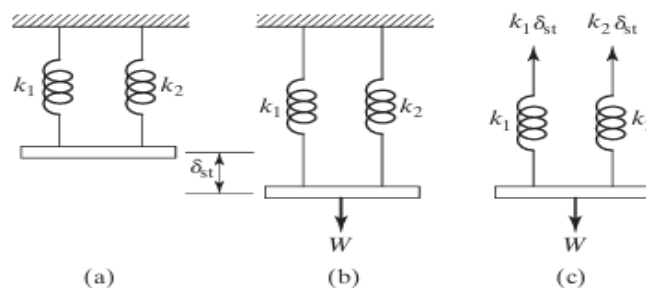
A rigidez (k) da estrutura parte da análise à flexão de uma viga engastada na base e livre no topo. De acordo com Rao (2008), a constante de rigidez de uma haste sob estas condições é dada pela equação 16:

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (16)$$

Em que E é o Módulo de Elasticidade do material, L é o comprimento da haste e I é o momento de inércia de área da seção transversal.

Na mecânica de estruturas compostas, quando elementos elásticos são dispostos de forma a sofrerem o mesmo deslocamento simultaneamente, eles atuam fisicamente como molas em paralelo. Observando as forças, observa-se que a força resultante sobre a massa é a soma das forças. Conforme ilustra a Figura 2, a rigidez total de um sistema contendo elementos paralelos é obtida através da soma direta das rigidezes individuais de cada componente.

Figura 2 – Sistema com molas em paralelo.



Fonte: Rao (2008, p. 30).

Nesse caso, considerando uma associação em paralelo composta por n suportes elásticos que experimentam o mesmo deslocamento lateral de forma síncrona, a rigidez total equivalente do sistema é a equação 17 :

$$\sum_{i=1}^n k_i = n k_i \quad (17)$$

A formulação obtida na equação 17 evidencia que a rigidez lateral de sistemas estruturais contínuos associados é influenciada pelas propriedades elásticas e geométricas dos componentes, apresentando uma relação inversamente proporcional ao cubo do comprimento útil (L^3). Desse modo, as equações desenvolvidas consolidam os conceitos fundamentais para prever e avaliar as alterações nas frequências naturais e nas respostas dinâmicas de sistemas estruturais elásticos quando submetidos a variações em seus parâmetros de altura e rigidez.

2.4 ESP 32 e Acelerômetro (MPU - 6050)

O núcleo de processamento responsável por coordenar a leitura dos sensores e a transmissão dos dados é o microcontrolador ESP32. Historicamente, este componente foi lançado pela fabricante Espressif Systems como uma evolução do popular módulo ESP8266. O ESP32 revolucionou a prototipagem eletrônica e o mercado *maker* ao integrar, em um único chip de baixo custo, um processador de alta performance com comunicação Wi-Fi e Bluetooth nativas (Espressif Systems, 2025).

Sua arquitetura moderna e a compatibilidade com o ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) do Arduino, baseado em linguagem C/C++, permitem o controle de diversas entradas e saídas digitais e analógicas. O ESP32 é bastante utilizado por duas razões principais:

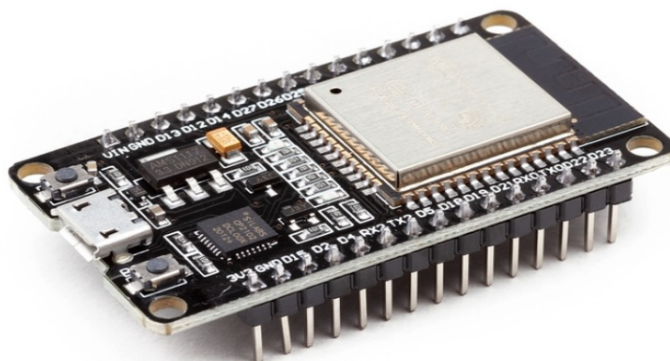
1) Possui baixo custo e alta performance, que mantém a premissa de construir uma plataforma de experimentação acessível ao mesmo tempo em que oferecem um salto tecnológico significativo em relação às placas Arduino convencionais (8 bits a 16 MHz), pois o ESP32 dispõe de um processador dual-core de 32 bits operando a até 240 MHz;

2) Possui cronômetro de alta precisão e baixa latência, atuando como um temporizador digital extremamente robusto; a alta velocidade de clock, aliada ao uso de funções de tempo como a instrução `micros()`, permite que o microcontrolador leia os dados do sensor e registre o instante exato da oscilação em microssegundos, o que é crítico para evitar atrasos na coleta de dados e garantir a medição acurada do período de oscilação e da curva de decaimento da torre.

A distribuição de seus pinos (pinagem) e o aspecto físico da placa de desenvolvimento podem ser visualizados na Figura 3. O microcontrolador oferece barramentos de comunicação

rápida (como o protocolo I²C, utilizado para se comunicar com o sensor de vibração) e conversores analógico-digitais (ADC) de 12 bits, que conferem maior resolução na leitura de componentes externos.

Figura 3 -Imagem da placa de desenvolvimento ESP32.



Fonte: Disponível em: <https://victorvision.com.br/blog/placa-esp32> (2023)

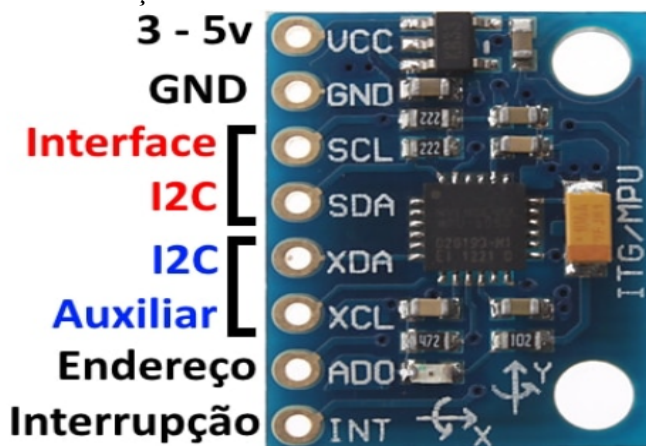
A coleta dos dados cinemáticos da torre foi realizada utilizando o módulo MPU-6050. Este componente é uma Unidade de Medida Inercial (IMU) de seis graus de liberdade (6-DOF) que integra um acelerômetro e um giroscópio MEMS de três eixos. Para garantir alta precisão, o sensor possui conversores analógico-digitais (ADCs) de 16 bits simultâneos. Seu acelerômetro opera com fundo de escala programável de $\pm 2g$ a $\pm 16g$, e o giroscópio de ± 250 a ± 2000 $^{\circ}/s$.

No contexto deste experimento de vibração, optou-se pela configuração da escala de $\pm 8g$ para o acelerômetro, visando garantir uma ampla margem de segurança contra a saturação do sensor no impacto do pico inicial, e a escala mais sensível de ± 250 $^{\circ}/s$ para o giroscópio, capturando o balanço estrutural com alta resolução (Victor Vision, 2023).

Apesar da elevada sensibilidade, a documentação técnica aponta pequenos desvios físicos inerentes à fabricação, como uma tolerância de repouso (nível zero-g) de ± 50 mg para os eixos X e Y, além de sensibilidades cruzadas causadas por tensões de soldagem ou variações térmicas. Assim, é imprescindível aplicar rotinas de calibração via software para zerar o desvio (offset) do sensor no microcontrolador antes de cada aquisição oficial de dados.

A transferência de todas essas leituras entre o MPU-6050 e o microcontrolador ESP32 ocorre por meio do protocolo I²C (Inter-Integrated Circuit). Nesta topologia de comunicação, o MPU-6050 atua estritamente como um dispositivo escravo (slave), enviando seus pacotes de dados de aceleração e rotação apenas quando requisitado pelo ESP32 (Espressif Systems, 2025). A Figura 4 ilustra como é o sensor e sua pinagem do módulo sensor utilizado.

Figura 4 - Imagem do sensor MPU-6050 e sua pinagem de comunicação



Fonte: Disponível em:

<https://www.makerhero.com/blog/tutorial-acelerometro-mpu6050>(2014)

Para o funcionamento e comunicação da placa no experimento, o componente foi conectado ao microcontrolador seguindo a pinagem descrita na Tabela 1.

Tabela 1 - Pinagem utilizada para a operação do módulo MPU-6050

Sensor MPU-6050	Barramento do Esp32
VCC	3V3
GND	GND
SDL	D22 (GPIO 22)
SDA	D21 (GPIO 21)

Fonte: Autoria própria (2026)

No experimento, como será descrito mais adiante, o sensor MPU-6050 foi posicionado no topo da estrutura e colocado no centro da placa de madeira livre para o movimento. A escolha dessa instrumentação de sensores fixa estabelece uma alternativa robusta e automatizada aos métodos tradicionais de medição, como o uso de cronômetros manuais, que são frequentemente suscetíveis a erros humanos de tempo de reação.

Para a leitura e análise correta da vibração, é fundamental que o componente esteja orientado adequadamente em relação ao movimento. O módulo foi fixado de modo que um de seus eixos de sensibilidade impressos na placa ficasse perfeitamente paralelo à direção do balanço da estrutura, garantindo que a intensidade da detecção da aceleração lateral fosse maximizada.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Metodologicamente, este trabalho classifica-se como uma pesquisa experimental de natureza aplicada. A principal motivação para o seu desenvolvimento reside na notória escassez de sistemas de aquisição de dados que sejam técnica e financeiramente acessíveis para a experimentação prática em laboratórios de ensino de física e engenharia. Diante desse cenário, o objetivo consistiu em gerar conhecimentos práticos direcionados ao desenvolvimento de um modelo dinâmico de baixo custo. Para solucionar essa lacuna, a condução da pesquisa foi dividida em duas frentes complementares: primeiramente, a concepção e a montagem estrutural do modelo físico oscilatório (uma torre flexível) e, na sequência, o desenvolvimento de um sistema de instrumentação eletrônica centrado no microcontrolador ESP32.

3.1 Materiais utilizados no protótipo

Para a estruturação física do experimento e a integração do sistema de aquisição, selecionaram-se componentes alinhados à proposta de instrumentação de baixo custo. A Tabela 2 detalha os elementos físicos empregados na construção do modelo oscilatório.

Tabela 2 – Relação de componentes e materiais utilizados na montagem do protótipo

2 placas de madeira laminada colada 30x30cm (0,00466 m)
4 barras roscadas de aço carbono zincadas
24 Porcas
24 Arruelas
1 peça de acrílico 30x30cm

Fonte: Autoria própria (2026)

3.2 Montagem mecânica do modelo físico

A estrutura mecânica foi concebida para atuar estritamente como um sistema de um grau de liberdade com altura ajustável. A base do modelo foi posicionada diretamente sobre o piso e firmemente estabilizada com o auxílio de pesos sobrepostos. A utilização desses contrapesos assegurou a condição de engaste ideal na fundação, impedindo qualquer deslocamento, escorregamento ou inclinação do sistema durante os ensaios de vibração. O corpo principal da torre foi constituído por barras roscadas de aço carbono zincadas.

O diferencial da montagem consistiu na possibilidade de variar o comprimento útil da

estrutura para realizar as coletas em diferentes frequências (como nos vãos livres de 90 cm e 75 cm). Para isso, o sistema foi projetado de forma que a haste principal pudesse ser rebaixada em direção ao piso.

Na extremidade livre superior, a massa concentrada foi estruturada por um arranjo duplo composto pela placa de madeira (compensado) e por uma placa de acrílico. A inclusão dessa placa de acrílico teve como objetivo físico fundamental impedir a ocorrência de uma situação de duplo pêndulo. Caso o topo da torre apresentasse flexibilidade ou movimento relativo próprio em relação à haste, o sistema ganharia um segundo grau de liberdade indesejado, o que prejudicaria o experimento e invalidaria a modelagem matemática linear.

Para garantir a padronização e o rigor geométrico, o acrílico foi montado mantendo-se sempre uma distância constante de exatos 5 cm em relação ao compensado de madeira. Sempre que a altura do vão livre da haste era modificada (rebaixada), todo o conjunto superior, tanto a chapa de compensado quanto a placa de acrílico, era deslocado de forma preservando rigorosamente o espaçamento de 5 cm.

Todo esse conjunto mecânico foi firmemente fixado e travado utilizando porcas e arruelas metálicas. O uso combinado desses elementos de união rosqueados foi indispensável para garantir a rigidez estrutural e diminuir drasticamente as chances de surgimento de folgas mecânicas a cada nova realização do experimento, isolando o sistema contra vibrações parasitas.

O módulo inercial MPU-6050, acoplado à *proto board*, foi parafusado no centro geométrico desse arranjo superior. A fixação rígida preveniu microvibrações independentes nos contatos elétricos, enquanto o posicionamento centralizado alinhou o eixo do sensor paralelamente à translação horizontal da torre, maximizando a captação do balanço e minimizando modos de torção, em conformidade com as recomendações de calibração prática encontradas na literatura (Beneti, 2021). Esse processo descrito pode ser observado na Figura 5.

Figura 5 – Torre de oscilação montada com o sensor e Esp32 no topo(a) e montagem com o acrílico(b).



Fonte: Arquivo pessoal (2026)

3.3 Preparação do hardware e do firmware

A estruturação do sistema de aquisição e controle ocorreu de forma incremental. O desenvolvimento iniciou-se em ambiente digital de testes e avançou para a montagem física da torre oscilatória e validação do *firmware* na IDE do Arduino. Este capítulo detalha os materiais e os procedimentos do ensaio, englobando a configuração do *hardware*, o processo de calibração eletrônica e a coleta de dados, etapas fundamentais para garantir a precisão na leitura e na análise do comportamento dinâmico estrutural.

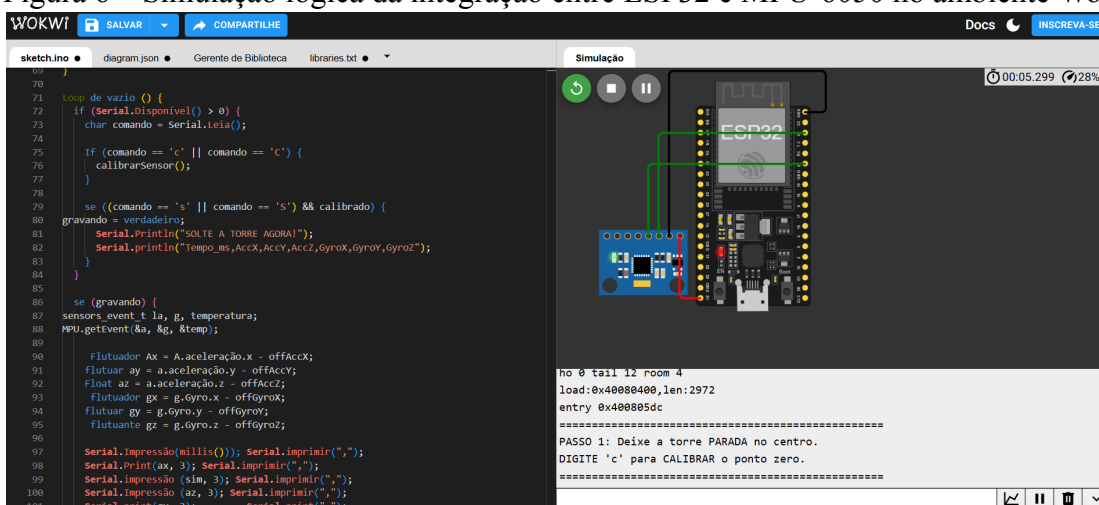
3.3.1 Simulação preliminar e validação lógica

Antes da montagem física do experimento, a etapa de desenvolvimento iniciou-se com simulações preliminares em ambiente virtual. Para isso, utilizou-se a plataforma Wokwi, um simulador de circuitos eletrônicos *online*. A escolha desse *software* justificou-se pela sua compatibilidade nativa com o microcontrolador ESP32 e com a simulação de comunicação digital via protocolo I²C.

Embora o ambiente virtual não realize simulações de falhas elétricas físicas (como a queima de componentes por sobretensão), a ferramenta cumpriu o papel de validar a lógica do

código de leitura, a correta inclusão das bibliotecas e a formatação do envio dos dados para o monitor serial. Além disso, a montagem virtual serviu como um mapa de pinagem seguro para a etapa prática, assegurando, por exemplo, o planejamento correto da alimentação do módulo MPU-6050 na porta de 3,3V do ESP32 citado nos manuais de uso e data sheets. A utilização prévia de simuladores favorece a compreensão da integração digital e otimiza o tempo de correção de erros de programação, constituindo uma prática metodológica eficaz no desenvolvimento de instrumentação, como pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 – Simulação lógica da integração entre ESP32 e MPU-6050 no ambiente Wokwi.



Fonte: Autoria Própria (2026)

3.3.2 Configuração de bibliotecas, parâmetros e calibração estática

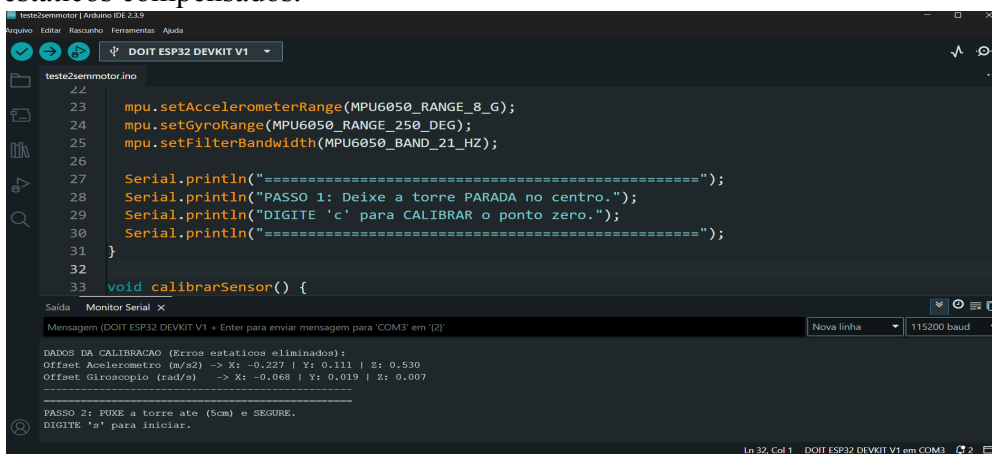
A montagem do sistema eletrônico real baseou-se na integração do microcontrolador ESP32 com o módulo inercial MPU-6050. A escolha do ESP32 justificou-se pela necessidade de manter uma taxa de amostragem rápida e estável para a leitura dos dados temporais. Para estabelecer a comunicação entre o microcontrolador e o sensor, utilizou-se o protocolo I²C. Na elaboração do código, foi necessário incluir três bibliotecas principais na IDE do Arduino para acessar os recursos do sensor: *Wire.h*, *Adafruit_Sensor.h* e *Adafruit_MPU6050.h*.

Para garantir a qualidade dos dados durante a vibração da torre, o código foi ajustado com parâmetros específicos, modificando os valores padrão do módulo: o acelerômetro foi configurado em $\pm 8g$ como margem de segurança para evitar que a aceleração brusca no instante da liberação da torre ultrapassasse o limite de leitura; o giroscópio foi fixado em ± 250 °/s para obter a escala mais sensível do componente; e o filtro passa-baixa interno foi ativado em 21 Hz para bloquear interferências externas e ruídos elétricos.

Módulos inerciais costumam apresentar pequenos desvios de leitura mesmo em repouso (*offsets*). Para corrigir esse problema, desenvolveu-se uma rotina de calibração no próprio código do *firmware*, cujo programa completo encontra-se disponível no Apêndice A.

O procedimento consistiu em manter a torre totalmente parada enquanto o microcontrolador coletava 1.000 amostras seguidas de aceleração e rotação. A média aritmética desses valores representou o erro estático do sensor. Durante a gravação ativa dos dados, o sistema realizou a correção do sinal em tempo real, subtraindo o valor do *offset* calculado diretamente de cada leitura bruta obtida pela placa. Adicionalmente, o eixo vertical (eixo Z), que sofre a ação da gravidade, teve o seu valor referencial descontado e ajustado no código para $9,780 \text{ m/s}^2$, adequando a leitura à aceleração gravitacional local da região onde o experimento foi realizado. O processo de calibração estático pode ser observado na figura 7.

Figura 7 – Monitor Serial do Arduino IDE indicando o processo de calibração e os valores estáticos compensados.



```

22
23 mpu.setAccelerometerRange(MPU6050_RANGE_8_G);
24 mpu.setGyroRange(MPU6050_RANGE_250_DEG);
25 mpu.setFilterBandwidth(MPU6050_BAND_21_HZ);
26
27 Serial.println("=====");
28 Serial.println("PASSO 1: Deixe a torre PARADA no centro.");
29 Serial.println("DIGITE 'c' para CALIBRAR o ponto zero.");
30 Serial.println("=====");
31 }
32
33 void calibrarSensor() {

```

Saída Monitor Serial X

Mensagem (DOIT ESP32 DEVKIT V1) + Enter para enviar mensagem para 'COM3' em '2'

DADOS DA CALIBRAÇÃO (Erros estáticos eliminados):
Offset Acelerometro (m/s²) -> X: -0.227 | Y: 0.111 | Z: 0.530
Offset Giroscopio (rad/s) -> X: -0.068 | Y: 0.019 | Z: 0.007

PASSO 2: PUXE a torre ate (5cm) e SEGURE.
DIGITE 's' para iniciar.

Fonte: Autoria Própria(2026)

3.4 Procedimentos de coleta de dados e rotina de ensaios

Para a execução dos ensaios e a calibração do modelo dinâmico, adotou-se um procedimento experimental padronizado e dividido em etapas consecutivas, garantindo a reprodutibilidade dos testes para as alturas de voo livre de 90 cm e 75 cm.

O processo de coleta de dados seguiu a rotina operacional programada no *firmware* do microcontrolador através do Monitor Serial da IDE do Arduino, ocorrendo em quatro etapas principais:

1. Estabilização e calibração estática: Com a torre completamente imóvel na posição de equilíbrio vertical, enviou-se o comando caractere 'c' via *Monitor Serial*. O sistema executa a rotina de calibração automática, calculando os valores de *offset* para os três

eixos do acelerômetro e do giroscópio, descontando a gravidade local de $9,780 \text{ m/s}^2$ no eixo Z.

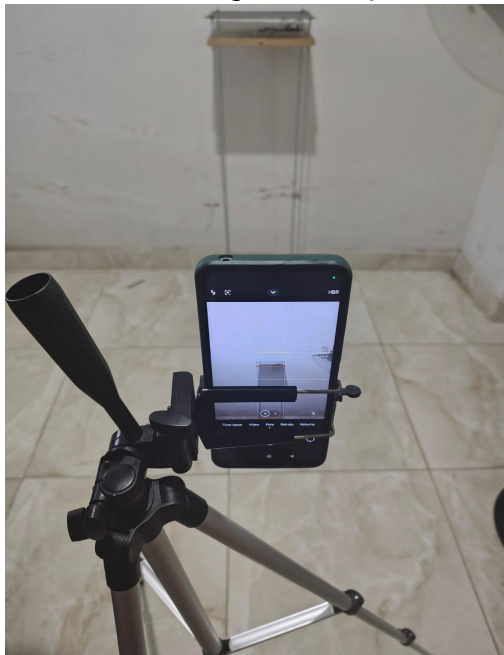
2. Deslocamento lateral inicial controlado: Após a confirmação da calibração na tela, a estrutura foi deslocada lateralmente de forma manual. Utilizando uma escala métrica de referência, o topo da torre (placa de acrílico/compensado) foi puxado horizontalmente a uma distância fixa de exatos 5 cm em relação ao seu ponto de equilíbrio central e mantido nessa posição.
3. Disparo e sincronização: Com a torre flexionada a 5 cm, enviou-se o comando caractere 's' no Monitor Serial para autorizar o início da gravação. O sistema exibiu imediatamente a mensagem "SOLTE A TORRE AGORA", criando o cabeçalho de dados formatado em formato CSV.
4. Oscilação livre amortecida: A estrutura foi liberada manualmente, iniciando o movimento de vibração livre amortecida. Durante todo o balanço da torre, o microcontrolador coletou os eventos de aceleração linear e velocidade angular do sensor MPU-6050, aplicando as correções de *offset* em tempo real. Os dados foram transmitidos continuamente para o computador em intervalos regulados por um atraso programado (*delay*) de 10 milissegundos, estabelecendo uma frequência de amostragem prática de aproximadamente 100 Hz.

Para garantir a confiabilidade dos dados gerados pelo acelerômetro MPU-6050 e validar o comportamento dinâmico da estrutura por meio de um método independente, adotou-se o rastreamento óptico de vídeo (cinemetria) como técnica de controle.

O procedimento experimental consistiu em posicionar um *smartphone* fixado a um tripé de gravação em frente à estrutura. Para evitar erros de perspectiva ou paralaxe, que poderiam distorcer a leitura óptica do movimento, o dispositivo foi alinhado de forma ortogonalmente em relação à torre. Além disso, a altura da câmera foi nivelada exatamente com um ponto de marcação visual previamente centralizado e colado na lateral da tábua de madeira (massa do topo).

As coletas ocorreram simultaneamente: enquanto o microcontrolador ESP32 registrava a aceleração e a velocidade angular da vibração amortecida e as transmitia via Monitor Serial, a câmera registrava a cinemática do movimento da marcação lateral. Esse procedimento da análise dos dados a partir do vídeo pode ser visto na Figura 8.

Figura 8 – Disposição do equipamento de gravação e alinhamento do tripé em relação ao modelo físico



Fonte: Arquivo pessoal (2026)

Os arquivos de vídeo obtidos foram posteriormente importados para o *software Tracker*, uma ferramenta de modelagem e análise de vídeo amplamente reconhecida no meio acadêmico para o ensino e pesquisa em física. O uso desse *software* permitiu extrair as coordenadas reais de posição da torre ao longo do tempo, gerando uma curva de oscilação paralela à do sensor eletrônico, servindo como base confiável para a validação dos cálculos do período e do decremento logarítmico nos resultados.

4 RESULTADOS

4.1 Calibração do sistema de aquisição de dados

A qualidade dos resultados dinâmicos depende diretamente da precisão das leituras iniciais do sensor. Sensores inerciais MEMS, como o MPU-6050, apresentam desvios de fábrica conhecidos como *offset* (erro de zero). Esse erro faz com que o sensor registre valores pequenos de aceleração ou rotação mesmo quando está perfeitamente parado.

Para garantir que o ponto de repouso da torre fosse considerado o "zero absoluto" no gráfico, realizou-se uma calibração estática. Esse processo foi repetido toda vez que a altura da estrutura do topo era alterada (baixando o compensado/madeira de 5 em 5 cm em relação a haste. A cada nova altura, o microcontrolador coletava 1000 amostras consecutivas em repouso e calculava a média aritmética para encontrar o erro estático de cada eixo. A equação que define esse *offset* é dada pela seguinte expressão:

$$offset = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} L_i \quad (18)$$

onde L_i representa cada uma das leituras brutas obtidas pelo sensor no estado de repouso.

Os valores de *offset* calculados pelo código serviram também para diagnosticar a condição de operação do componente, sendo comparados aos limites de tolerância de fábrica estipulados no *datasheet* do MPU-6050 (Invensense, 2013), conforme ilustrado no Quadro 2. É importante destacar que o manual do fabricante expressa esses limites de erro na unidade mg (*mili-g*). Na metrologia e engenharia de sensores, essa unidade representa a milésima parte da aceleração da gravidade terrestre (mg = 0,001).

Quadro 2 – Tolerâncias típicas de erro de zero (Offset) do MPU-6050.

sensor	Eixos	Tolerância de Fábrica
Acelerômetro	X e Y	±50 mg
Acelerômetro	Z	±80 mg
Giroscópio	X, Y e Z	±20 °/s

Fonte: Adaptado do Datasheet MPU-6050 (2013)

Para fins de validação experimental, a Tabela 3 apresenta os valores exatos de *offset* extraídos via Monitor Serial logo antes da realização do ensaio com a torre configurada no comprimento útil de 0,90 m, esse processo foi repetido em todos os ensaios antes da coleta dos dados (85cm, 80cm e 75cm). Para permitir a comparação direta com os limites do

fabricante, os valores do acelerômetro aferidos pelo microcontrolador em m/s^2 foram convertidos para a unidade mg, dividindo-se o valor medido pela gravidade local adotada de $9,780\text{m/s}^2$ e multiplicando-se por 1000.

Tabela 3 – Resultados da calibração estática antes do ensaio de 0,90 m.

Parâmetros	Eixo X	Eixo Y	Eixo Z	Limites de Fábrica
Acelerômetro Medido (m/s^2)	0,108	0,127	0,559	-
Acelerômetro(mg)	11,04	12,99	57,16	X e Y: ± 50 mg Z: ± 80 mg
Giroscópio Medido (rad/s)	-0,065	0,022	0,012	-
Giroscópio ($^\circ/\text{s}$)	-3,72	1,26	0,69	X,Y e Z: ± 20 $^\circ/\text{s}$

Fonte: Autoria própria (2026)

Como observado na Tabela 3, todos os erros estáticos medidos pelo sistema apresentaram grandezas seguras e dentro das especificações estipuladas pela fabricante, confirmando a higidez do *hardware* e garantindo que as pequenas imperfeições de nivelamento da base de ensaio fossem devidamente compensadas.

Além do tratamento do erro estático, foi necessário realizar a conversão do sinal para grandezas físicas utilizáveis para a recolha de dados contínua. Por padrão, o chip MPU-6050 realiza a leitura do movimento e entrega um dado digital bruto, sem unidade física definida, chamado de **LSB** (*Least Significant Bit*). Para transformar esse número digital numa grandeza física real, é necessário dividi-lo pela sensibilidade configurada no sensor. Como o acelerômetro do projeto foi ajustado para suportar até $\pm 8\text{g}$ e o giroscópio para $\pm 250^\circ/\text{s}$, os fatores de divisão tabelados pelo fabricante são 4096 LSB/g e 131 LSB/ $^\circ/\text{s}$, respectivamente. A relação para essa conversão (Invensense, 2013; Makerhero, 2014) é dado pela seguinte expressão :

$$Valor_{físico} = \frac{Valor_{Bruto}}{sensibilidade} \quad (19)$$

Para otimizar o código e evitar processamento matemático desnecessário no microcontrolador, utilizou-se o suporte das bibliotecas *Adafruit_MPU6050* e *Adafruit_Sensor*, além da biblioteca nativa *Wire.h* para a comunicação *I²C*. O uso de microcontroladores integrados a sensores MEMS é uma prática consolidada e validada na literatura para projetos de instrumentação de baixo custo (Almeida, 2019; Beneti, 2021; Varanis *et al.*, 2016). No escopo de *software* deste projeto, o papel central das bibliotecas da *Adafruit* foi realizar a

matemática de conversão nos bastidores. Quando o comando de leitura (*mpu.getEvent*) é chamado no algoritmo, a rotina acessar os registradores do sensor, recolhe os valores brutos (LSB), aplica a divisão da sensibilidade automaticamente e converte o resultado para o Sistema Internacional (SI).

Graças a essa arquitetura, os dados exportados para a planilha já chegam padronizados e prontos para a análise gráfica, utilizando as seguintes unidades:

- Tempo: registrado em milissegundos (ms) por meio da contagem interna da placa (função *millis*).
- Aceleração: entregue em metros por segundo ao quadrado (m/s^2), já subtraída do erro estático (*offset*) e, no caso do eixo Z, ajustada para a gravidade local descontando-se o valor de 9,780, m/s^2 .
- Velocidade Angular: entregue pelo giroscópio em radianos por segundo (rad/s), o que permite avaliar possíveis efeitos de torção indesejada na haste durante a oscilação.

Dessa forma, a integração entre o *hardware* calibrado e as bibliotecas de conversão garantiu que as curvas de vibração geradas a seguir refletissem com alta fidelidade o comportamento dinâmico da estrutura.

4.2 Obtenção de parâmetro dinâmicos

A obtenção dos parâmetros dinâmicos da estrutura foi realizada por meio de ensaios de vibração livre. O procedimento consistiu em aplicar um deslocamento inicial de 5 cm na extremidade superior da torre em repouso, seguido da sua liberação abrupta, permitindo que o sistema oscilasse de forma amortecida. Para garantir a confiabilidade dos dados e eliminar o ruído transiente gerado pelo solavanco da soltura inicial, adotou-se como padrão metodológico descartar as duas primeiras oscilações das medições do acelerômetro. A análise do sinal considerou o instante $t = 0$ a partir do terceiro pico, momento em que a estrutura apresentava um regime de vibração livre e estável.

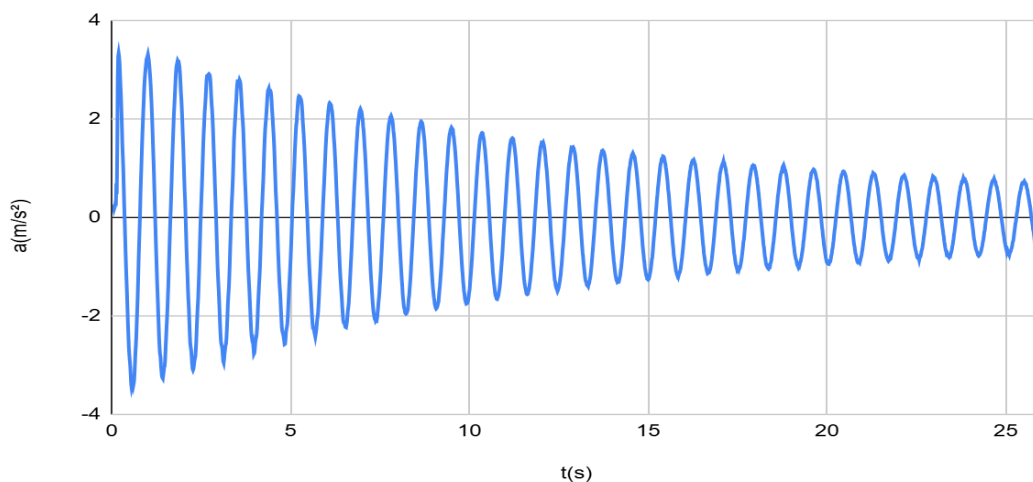
Após a coleta física, o tratamento dos dados inerciais capturados pelo acelerômetro MPU-6050 foi estruturado metodologicamente em três etapas sequenciais para garantir a clareza e a reprodutibilidade dos cálculos: inicialmente, definiu-se a inércia estrutural através do cálculo da massa equivalente em seguida, procedeu-se à extração das frequências e do amortecimento e, por fim, correlacionaram-se estes dados para a determinação da rigidez.

4.2.1 Tratamento Preliminar do Sinal

Para processar a onda de aceleração gerada pelo sensor, utilizou-se uma rotina analítica estruturada diretamente na planilha eletrônica. O método consistiu em rastrear pontos notáveis do sinal: identificaram-se os **centros** (cruzamento da onda pelo eixo de repouso) para mapear o período do movimento, além dos **picos** (amplitude máxima positiva) e **vales** (amplitude mínima negativa) de cada ciclo para avaliar o decaimento da energia da estrutura ao longo do tempo.

Durante a execução dos ensaios, observou-se que a liberação abrupta da estrutura introduziu um solavanco mecânico que gerava saltos pontuais nas primeiras leituras do sensor. Por esse motivo, adotou-se como padrão metodológico o descarte sistemático das duas primeiras oscilações de todos os ensaios, considerando o instante $t = 0$ apenas a partir do terceiro pico, onde o regime de vibração se mostrava livre e estável. A Figura 9 ilustra esses saltos inicial no gráfico de tempo versus aceleração para a configuração da haste de 0,90 m.

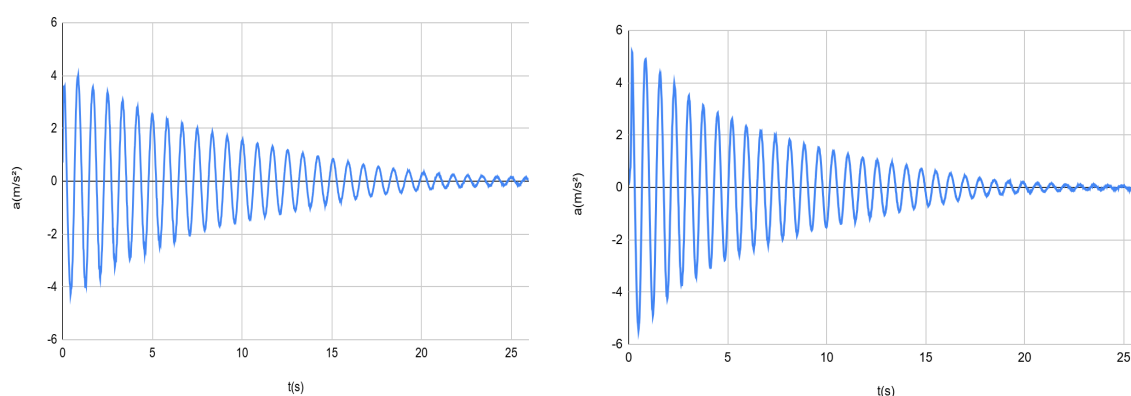
Figura 9 – Gráfico da evolução temporal da aceleração para a haste de $L = 0,90$ m, evidenciando os saltos transiente inicial e mostra o decaimento das oscilações ao longo do tempo.



Fonte: Autoria Própria(2026)

Esse mesmo comportamento de perda gradual de energia foi verificado nas outras configurações testadas. A Figura 10 apresenta o resultado para a haste de 0,85 m, onde é possível observar claramente o decaimento contínuo das oscilações ao longo do tempo. O perfil do gráfico evidencia como a estrutura vai dissipando sua energia, diminuindo a amplitude ciclo após ciclo de forma suave, característica típica de um sistema subamortecido ideal.

Figura 10 – Gráfico da evolução temporal da aceleração para a hastes de $L = 0,85$ m e $0,80$ m, evidenciando os comportamentos transientes inicial e mostra o decaimento das oscilações ao longo do tempo.



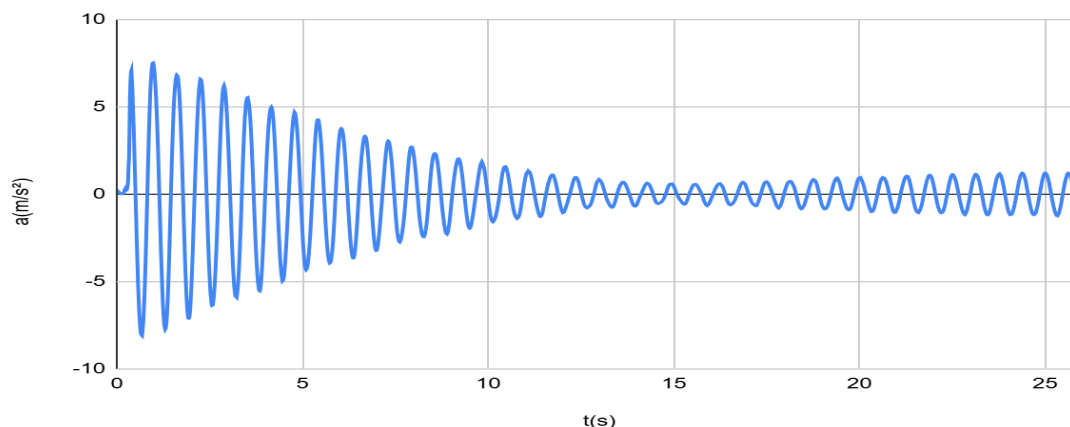
Fonte: Autoria própria (2026)

Ainda na etapa de análise visual do decaimento das ondas, o método da planilha exigiu um recorte criterioso das medições. Vale destacar que nem todos os dados brutos registrados durante o ensaio foram utilizados no ajuste matemático. Para garantir a confiabilidade na verificação dos termos e assegurar um regime de vibração livre e estável, a análise foi delimitada a partir da terceira onda, eliminando as distorções causadas pelo solavanco inerente à soltura manual inicial. Com esse filtro temporal aplicado, a visualização do gráfico revelou a presença de outras interferências mecânicas no experimento: ao analisar a configuração de $0,75$ m, observou-se uma continuação inesperada de oscilações residuais no final da medição, em vez de uma dissipação completa e suave da energia.

Esse comportamento atípico, verificado especificamente na configuração de $0,75$ m, pôde ser atribuído ao surgimento de uma pequena folga nas porcas de fixação da base. Após a realização sucessiva dos ensaios com as hastes maiores, esse afrouxamento mecânico comprometeu a condição de engaste ideal. Como resultado, a estrutura passou a permitir ligeiros movimentos em sua base de apoio. Esse efeito físico fica evidente no gráfico de tempo versus aceleração (Figura 11), no qual é possível observar que a onda inicia o seu decaimento padrão, mas logo em seguida apresenta uma leve retomada na amplitude e rapidez

das oscilações. Essa quebra na suavidade da curva teórica de amortecimento comprova visualmente a interferência mecânica que prolongou o movimento de forma irregular.

Figura 11 – Gráfico da evolução temporal da aceleração para a haste de $L = 0,75$ m, evidenciando os saltos transiente inicial e mostra o comportamento atípico causado pelas folgas das porcas na estrutura.



Fonte: Autoria Própria (2026)

4.2.2 Composição da Massa Equivalente do Sistema

Para calcular a rigidez experimental, é necessário definir a massa que está em movimento durante a vibração. O sistema possui uma massa fixa concentrada no topo de 1,262 kg, formada pela tábua, arruelas, porcas (1,089 kg), placa de acrílico (0,158 kg) e os componentes eletrônicos (0,015 kg).

Além dessa massa do topo, uma parte da massa das próprias hastes cilíndricas também se movimenta e precisa ser contabilizada. A soma da massa do topo com essa fração da haste resulta na massa equivalente (M_{eq}). Como a haste foi encurtada ao longo dos testes, a sua massa proporcional também diminuiu. A Tabela 4 apresenta esses valores.

Tabela 4 – Composição da massa equivalente (M_{eq}) para cada comprimento estrutural.

Comprimentos (L) em metros	Massa do topo (kg)	Massa proporcional das hastes(kg)	Massa equivalente - M_{eq} (kg)
0,9	1,262	0,0918	1,3844
0,85	1,262	0,0867	1,3776
0,80	1,262	0,0816	1,3708
0,75	1,262	0,0765	1,3640

Fonte: Autoria própria (2026)

4.2.3 Extração dos Parâmetros Dinâmicos

A segunda etapa consistiu em obter a frequência angular amortecida (ω_d). Para validar os resultados, os dados do sensor foram processados de duas formas:

1. Via SciDAVis (ω_d): O software utilizou um ajuste de curva não-linear sobre o sinal bruto para extrair a frequência angular amortecida (ω_d) e a constante de decaimento (τ).
2. Via Planilha (ω_0): A planilha utilizou os tempos medidos entre os picos para calcular a frequência angular amortecida (ω_d) e, a partir dela e da constante de decaimento (τ), determinou a frequência natural (ω_0) do sistema por meio da relação $\omega_0^2 = \omega_d^2 - (1/\tau^2)$, isolando assim a frequência de oscilação livre da estrutura.

A Tabela 5 apresenta as frequências extraídas por ambas as metodologias e a constante de tempo (τ).

Tabela 5 – Parâmetros dinâmicos: ω_d (SciDAVis) e ω_0 (Planilha).

Comprimentos (L) em metros	ω_d SciDAVis (rad/s)	ω_0 Planilha (rad/s)	τ (SciDAVis)	ω_0^2 (rad/s ²)
0,9	7,3939	7,3936	13,93	54,6646
0.85	7,5525	7,5517	9,22	57,0285
0,80	8,616	8,6150	7,49	74,2176
0,75	9,931	9,9298	6,46	98,6008

Fonte: Autoria própria (2026)

Os dados mostram que os valores calculados pelo SciDAVis e pela Planilha são praticamente iguais, o que confirma a precisão do processamento de dados.

Observa-se também que, conforme a haste fica mais curta, a frequência de oscilação aumenta e a constante de tempo diminui. Como o amortecimento da estrutura de aço é muito baixo, o valor de ω_0 obtido pela planilha foi elevado ao quadrado (ω_0^2) para ser utilizado como base no cálculo final da rigidez, garantindo que o parâmetro de entrada na Equação 21 corresponde à característica natural da estrutura.

4.2.4 Cálculo da Rigidez Teórica e Experimental

O protótipo utiliza quatro hastes cilíndricas rigorosamente idênticas. Na mecânica, quando hastes trabalham em paralelo, a rigidez total é a soma das rigidezes individuais, conforme a equação 20:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \quad (20)$$

Dessa forma, a rigidez equivalente total aplicada à estrutura é representada pela equação 21:

$$k_{eq} = 4\left(\frac{3EI}{L^3}\right) \quad (21)$$

Para calcular o valor teórico (k_{teo}) na equação 22, adotou-se o Módulo de Elasticidade do aço como $E = 2,0 \times 10^{11}$ Pa. Para elementos cilíndricos de seção transversal circular maciça, o momento de inércia I é calculado analiticamente pela Equação 22:

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (22)$$

onde o diâmetro da barra é de 0,00466 m. A rigidez experimental (k_{ex}) foi obtida multiplicando a massa equivalente (M_{eq}) pelo quadrado da frequência natural (ω_0^2). A Tabela 6 apresenta essa comparação.

Tabela 6 – Comparação entre a rigidez teórica e a rigidez experimental.

Comprimentos (L) em metros	k_{teo} Calculado (N/m)	k_{ex} Experimental (N/m) - SciDAVis/Acelerômetro	Erro Relativo(%)
0,9	18,49	18,92	2,26
0,85	21,84	19,64	9,90
0,80	26,04	25,43	2,19
0,75	31,27	33,62	8,45

Fonte: Autoria Própria (2026)

A análise mostra que os erros relativos ficaram entre aproximadamente 2% e 10%. Para validar se essa diferença entre os valores práticos e teóricos era aceitável dentro das incertezas da medição, aplicou-se um teste de hipótese (Teste t) individual para cada

configuração estrutural. O teste consistiu em comparar a diferença absoluta entre as rigidezes com o erro combinado do ensaio, utilizando um nível de confiança de 95% e 11 graus de liberdade, o que estabelece um valor crítico limite de $t = 2,20$.

Os resultados demonstraram que, para as configurações de 0,90 m e 0,80 m, os valores calculados do teste ($t = 0,83$ e $t = 0,71$, respectivamente) foram inferiores ao limite crítico. Isso comprova matematicamente que, para essas hastes, a rigidez experimental é estatisticamente equivalente à teórica, validando o método.

No entanto, para as hastes de 0,85 m e 0,75 m, os valores calculados ($t = 3,59$ e $t = 2,61$) ultrapassaram o limite de 2,20, indicando uma diferença estatisticamente significativa entre a teoria e a prática. Essa discrepância pontual corrobora a análise visual do sinal e pode ser atribuída a dois fatores principais:

1. Condições de Fixação: O cálculo teórico assume um modelo perfeito, onde a base das hastes não se move sob nenhuma hipótese. No protótipo real, durante a vibração, podem ocorrer pequenas folgas ou acomodações mecânicas na fixação, o que faz a estrutura se comportar de forma ligeiramente diferente da teoria. Esse fator explica o desvio detectado pelo teste estatístico na configuração de 0,75 m.
2. Propriedades do Material: O valor adotado para o Módulo de Elasticidade é uma referência padrão de literatura. Na prática, hastes comerciais de aço podem apresentar pequenas variações na sua fabricação, o que altera levemente a sua rigidez real.

Em suma, a aprovação estatística nas hastes de 0,90 m e 0,80 m valida o experimento de forma robusta. O uso do acelerômetro demonstrou ser um método confiável e altamente sensível, capaz inclusive de detectar falhas mecânicas como afrouxamentos na base durante os ensaios.

4.2.5 Obtenção de Parâmetros Dinâmicos via Rastreamento Óptico (Tracker)

Para diversificar a metodologia de medição e garantir a confiabilidade dos ensaios, a dinâmica da estrutura também foi analisada através de rastreamento óptico utilizando o software livre Tracker. Os vídeos dos ensaios de vibração livre foram importados para o programa, onde o movimento horizontal do topo da torre foi mapeado quadro a quadro.

Para manter o rigor metodológico e a padronização com a análise inercial.

Uma das grandes vantagens do Tracker é a sua Ferramenta de Dados (Data Tool) nativa. Em vez de exportar as coordenadas de posição e tempo para uma planilha externa ou software de terceiros, o processamento ocorreu dentro do próprio ambiente do programa.

Utilizou-se a função de Ajuste de Curva (Fit Curve) nativa do Tracker, aplicando o modelo matemático de uma senoide amortecida diretamente sobre os pontos rastreados no vídeo.

Essa ferramenta ajusta a curva automaticamente e fornece de forma direta a frequência angular amortecida (ω_d) e o parâmetro de decaimento do movimento, que neste software é expresso pela relação $1/\tau$. A partir desses valores extraídos nativamente, calculou-se a frequência natural livre (ω_0) do sistema por meio da relação $\omega_0^2 = \omega_d^2 - (1/\tau^2)$. A Tabela 7 apresenta esses parâmetros fundamentais da onda para cada comprimento estrutural.

Tabela 7 – Parâmetros dinâmicos extraídos via Tracker e cálculo de ω_0

Comprimentos (m)	ω_d Tracker (rad/s)	ω_0 Planilha (rad/s)	$1/\tau$ (Tracker)	ω_0^2 (rad/s ²)
0,9	7,4083	0,0728	7,4079	54,88
0,85	7,5730	0,1140	7,5721	57,34
0,80	8,6290	0,1420	8,6278	74,44
0,75	9,9290	0,1160	9,9283	98,57

Fonte: : Autoria própria (2026)

Com a definição do quadrado da frequência natural garantida pela Tabela 5, o passo seguinte foi a determinação da rigidez experimental óptica. O cálculo seguiu a mesma formulação utilizada na análise inercial ($k_{ex} = M_{eq} \times \omega_0^2$), utilizando a massa equivalente previamente definida na Tabela 4.

A Tabela 8 apresenta a comparação direta entre o valor de rigidez obtido pelo rastreamento de vídeo e o modelo teórico esperado para as hastes.

Tabela 8 – Comparação entre a rigidez teórica e a rigidez experimental (Tracker).

Comprimentos (L) em metros	k_{teo} Calculado (N/m)	k_{ex} Experimental (N/m) - Tracker	Erro Relativo(%)
0,9	18,49	18,99	2,65
0,85	21,84	19,75	9,40
0,80	26,04	25,51	1,88
0,75	31,26	33,61	8,42

Fonte: Autoria própria (2026)

Os resultados extraídos pelo rastreamento em vídeo mostram erros relativos muito semelhantes aos encontrados na análise com o sensor físico, mantendo-se na faixa de 1,8% a

9,4%. Isso demonstra que a ferramenta nativa de ajuste de curva do Tracker é altamente precisa para a extração de frequências em sistemas oscilatórios. Os pequenos desvios em relação à teoria reforçam a ocorrência das interferências mecânicas da montagem real (como as pequenas folgas na fixação), já discutidas anteriormente.

4.3 Comparação dos Resultados e Cálculo da Rigidez

Após a extração dos parâmetros dinâmicos e o cálculo da rigidez por duas vias independentes, esta etapa tem como objetivo confrontar os resultados do rastreamento inercial (via Acelerômetro MPU-6050) com o rastreamento óptico (via software Tracker). A premissa é realizar uma validação cruzada das metodologias, verificando se o sensor físico de baixo custo é capaz de entregar o mesmo nível de precisão de uma ferramenta visual consolidada em laboratórios de física.

A Tabela 9 consolida os valores da rigidez experimental (k_{exp}) obtidos por ambos os métodos, alinhados com o referencial teórico esperado (k_{teo}).

Tabela 9 – Validação cruzada da rigidez experimental entre Acelerômetro e Tracker.

Comprimentos (L) em metros	k_{teo} Calculado (N/m)	k_{ex} Experimental (N/m) Acelerômetro/SciDavis	k_{ex} Experimental (N/m) -Track	Diferença Absoluta (N/m)
0,9	18,49	18,92	18,99	0,071
0,85	21,83	19,64	19,75	0,11
0,80	26,04	25,43	25,51	0,08
0,75	31,27	33,62	33,61	0,01

Fonte: Autoria própria (2026)

A análise da Tabela 9 evidencia uma altíssima concordância entre os dois métodos experimentais. A divergência máxima observada entre o cálculo gerado pelo sensor e pelo vídeo foi de apenas 0,11 N/m (na configuração de 0,85 m), o que representa uma variação praticamente nula na mecânica prática. Na haste de 0,75 m, os resultados foram quase idênticos, com uma diferença de apenas um centésimo.

O aspecto mais notável dessa comparação não é apenas a proximidade global entre os números, mas o fato de que ambos os métodos registraram os mesmos desvios em relação ao modelo teórico. Nas configurações onde a rigidez experimental se distanciou da teoria (0,85

m e 0,75 m), tanto o acelerômetro quanto o Tracker leram praticamente a mesma variação de rigidez.

Isso corrobora, de forma definitiva, que as discrepâncias encontradas nas análises individuais não são falhas de medição, ruídos de sensor ou erros de software. Tratam-se de características físicas reais do protótipo no momento do ensaio (como a já citada acomodação e folga nas porcas de fixação da base).

Em suma, a validação cruzada atesta a viabilidade e a precisão do arranjo experimental desenvolvido. O sistema inercial baseado no acelerômetro MPU-6050 comprovou ser uma ferramenta metodologicamente confiável para a análise de vibrações estruturais, entregando resultados metrológicos de excelência e coerentes com a realidade física do modelo ensaiado

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A caracterização do comportamento dinâmico de uma estrutura metálica flexível foi realizada com êxito a partir do desenvolvimento de um sistema experimental de baixo custo. A integração entre a instrumentação eletrônica, baseada no microcontrolador ESP32 e no acelerômetro inercial MPU-6050, e os fundamentos teóricos de vibrações mecânicas permitiu registrar a evolução temporal da aceleração. Por meio desses perfis gráficos, foi possível determinar experimentalmente a frequência natural amortecida e a rigidez do sistema, bem como evidenciar a dissipação de energia estrutural através do decaimento da amplitude de oscilação, atestando a validade do arranjo construído.

Um aspecto relevante desta pesquisa é a comprovação da precisão do sistema em diagnosticar comportamentos físicos reais que divergem do modelo analítico simplificado. A validação cruzada, realizada a partir da extração das frequências angulares e demais parâmetros dinâmicos via ajustes no software *SciDAVis*, mostrou resultados equivalentes quando comparados ao rastreamento óptico do *Tracker*. Esse achado revelou que as diferenças estatísticas inicialmente observadas em relação à rigidez teórica (como verificado nas configurações de 0,85 m e 0,75 m) não configuraram erros de leitura do sensor. Tais resultados demonstraram a capacidade do equipamento em detectar anomalias estruturais não previstas no modelo analítico simples, a exemplo do afrouxamento e das acomodações na base de fixação.

Na prática, este estudo entrega à comunidade acadêmica e escolar um equipamento educacional viável e de fácil montagem. O sistema funciona como uma ferramenta didática eficiente, que transforma a teoria da dinâmica das estruturas em uma experiência visual e prática. Por utilizar peças de baixo custo e materiais comuns, o projeto tem grande potencial para ser aplicado em laboratórios e escolas públicas com poucos recursos, facilitando o acesso à experimentação prática e laboratorial.

O desenvolvimento do projeto, porém, apresentou limitações e desafios técnicos esperados no laboratório. A principal dificuldade foi a necessidade de tratar e filtrar os dados, pois o sensor é muito sensível e capta ruídos de manuseio e pequenos erros de fábrica (*offsets*). Para resolver isso, foi preciso calibrar o sistema antes dos testes e selecionar com cuidado os dados avaliados. O descarte das primeiras oscilações foi um passo essencial para retirar os erros causados pelo impulso manual inicial, garantindo que a análise fosse feita apenas em um regime de vibração livre e estável.

Por fim, o estudo realizado serve como base para melhorias e novas pesquisas. Como trabalhos futuros, sugere-se a instalação de um mecanismo para forçar a vibração na estrutura de forma contínua, permitindo observar na prática o fenômeno de ressonância (oscilação forçada). Além disso, propõe-se adicionar um pêndulo na parte superior da torre para funcionar como um Atenuador Dinâmico Sincronizado (ADS), permitindo a investigação experimental de estratégias de controle passivo de vibrações.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Gustavo Rogel de. Sistema de baixo custo para monitoramento de vibração. **Revista Científica Semana Acadêmica**, Fortaleza, v. 1, n. 156, fev. 2019. Disponível em: <https://semanaacademica.org.br/artigo/sistema-de-baixo-custo-para-monitoramento-de-vibracao>. Acesso em: 7 jul. 2025.
- BENETI, Leonan Cordeiro. **Análise de vibração para uso na manutenção preditiva utilizando dispositivo de baixo custo**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecatrônica) – Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, 2021. Disponível em: <https://dspace.ufsj.edu.br/handle/123456789/2704>. Acesso em: 20 fev. 2026.
- ESPRESSIF SYSTEMS. **ESP32 Series Datasheet**. Versão 5.0. [S. l.], 2025. Disponível em: https://www.espressif.com/sites/default/files/documentation/esp32_datasheet_en.pdf. Acesso em: 29 nov. 2025.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos de Física: Volume 2 – Oscilações e Ondas, Termodinâmica. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- INVENSENSE. **MPU-6000/MPU-6050 Register Map and Descriptions**. [S. l.], 2013. Disponível em: <https://www.invensense>. Acesso em: 25 nov. 2025.
- MAKERHERO. **Tutorial Acelerômetro MPU6050**. [S. l.], 2014. Disponível em: <https://www.makerhero.com/blog/tutorial-acelerometro-mpu6050>. Acesso em: 30 nov. 2025.
- POON, Danny. **Structural Design of Taipei 101, the World's Tallest Building**. Council on Tall Buildings Urban Habitat (CTBUH), 2004. Disponível em: <https://www.ctbuh.org/resource/structural-design-of-taipei-101>. Acesso em: 20 nov. 2025.
- RAO, Singiresu S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2008.
- VARANIS, Marcus, et al. Instrumentation for mechanical vibrations analysis in the time domain and frequency domain using the Arduino platform. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 38, n. 1, p. 1301-1-1301-10, mar. 2016. DOI: <http://doi.org/10.1590/S1806-11173812063>. Acesso em: 23 mar. 2026.
- VICTOR VISION. **Placa ESP32: O que é, para que serve**. [S. l.], 2023. Disponível em: <https://www.victorvision.com.br/esp32-o-que-e-e-como-funciona>. Acesso em: 29 nov. 2025.

APÊNDICE A - Código usado nos testes e calibração do sensor MPU - 6050

O código-fonte a seguir foi desenvolvido em linguagem C/C++ na IDE do Arduino para embarcar o microcontrolador ESP32. O *firmware* é responsável por estabelecer a comunicação I²C com o acelerômetro MPU-6050, realizar a calibração estática inicial eliminando os erros de fábrica (*offsets*) e transmitir os dados de aceleração e giroscópio corrigidos em tempo real pelo Monitor Serial.

```
#include <Wire.h>
#include <Adafruit_MPU6050.h>
#include <Adafruit_Sensor.h>

Adafruit_MPU6050 mpu;

// Variáveis para armazenar o erro estático do sensor (offsets)
float offAccX = 0.0, offAccY = 0.0, offAccZ = 0.0;
float offGyroX = 0.0, offGyroY = 0.0, offGyroZ = 0.0;
bool calibrado = false;
bool gravando = false;

// Aceleração da gravidade local adotada (m/s²)
const float gravidade_adotada= 9.780;

void setup() {
  Serial.begin(115200);
  while (!Serial) { delay(10); }

  if (!mpu.begin()) {
    Serial.println("Falha ao encontrar o chip MPU6050!");
    while (1) { delay(10); }
  }

  // Configuração dos fundos de escala para ensaio de vibração livre
  mpu.setAccelerometerRange(MPU6050_RANGE_8_G);
```

```

mpu.setGyroRange(MPU6050_RANGE_250_DEG);
mpu.setFilterBandwidth(MPU6050_BAND_21_HZ); // Filtro passa-baixa

Serial.println("=====");
Serial.println("PASSO 1: Deixe a torre PARADA no centro.");
Serial.println("DIGITE 'c' para CALIBRAR o ponto zero.");
Serial.println("=====");
}

void calibrarSensor() {
    Serial.println("Calibrando o referencial zero...");
    delay(1000);

    float sumAx = 0, sumAy = 0, sumAz = 0;
    float sumGx = 0, sumGy = 0, sumGz = 0;
    int numAmostras = 1000;

    // Coleta de 1000 amostras com a torre em estado de repouso
    for (int i = 0; i < numAmostras; i++) {
        sensors_event_t a, g, temp;
        mpu.getEvent(&a, &g, &temp);
        sumAx += a.acceleration.x; sumAy += a.acceleration.y; sumAz += a.acceleration.z;
        sumGx += g.gyro.x; sumGy += g.gyro.y; sumGz += g.gyro.z;
        delay(2);
    }

    // Cálculo da média aritmética para definir o offset
    offAccX = sumAx / numAmostras;
    offAccY = sumAy / numAmostras;
    offAccZ = (sumAz / numAmostras) - gravidade_adotada;
    offGyroX = sumGx / numAmostras; offGyroY = sumGy / numAmostras; offGyroZ =
sumGz / numAmostras;

    calibrado = true;

```

```

Serial.println("\nCalibracao CONCLUIDA com sucesso!");

// Exibição dos dados estáticos compensados
Serial.println("-----");
Serial.println("DADOS DA CALIBRACAO (Erros estaticos eliminados):");
Serial.print("Offset Acelerometro (m/s2) -> X: "); Serial.print(offAccX, 3); Serial.print(" | Y:");
Serial.print(offAccY, 3); Serial.print(" | Z: "); Serial.println(offAccZ, 3);
Serial.print("Offset Giroscopio (rad/s) -> X: "); Serial.print(offGyroX, 3); Serial.print(" | Y:");
Serial.print(offGyroY, 3); Serial.print(" | Z: "); Serial.println(offGyroZ, 3);
Serial.println("-----");

Serial.println("=====");
Serial.println("PASSO 2: PUXE a torre ate (5cm) e SEGURE.");
Serial.println("DIGITE 's' para iniciar.");
Serial.println("=====");
}

void loop() {
  // Verificação de comandos inseridos pelo usuário no Monitor Serial
  if (Serial.available() > 0) {
    char comando = Serial.read();

    if (comando == 'c' || comando == 'C') {
      calibrarSensor();
    }

    if ((comando == 's' || comando == 'S') && calibrado) {
      gravando = true;
      Serial.println("SOLTE A TORRE AGORA!");
      // Criação do cabeçalho formato CSV para plotagem
      Serial.println("Tempo_ms,AccX,AccY,AccZ,GyroX,GyroY,GyroZ");
    }
  }
}

```

```

// Rotina de gravação ativa após disparo manual
if (gravando) {
    sensors_event_t a, g, temp;
    mpu.getEvent(&a, &g, &temp);

    // Subtração do erro (offset) capturado na calibração inicial
    float ax = a.acceleration.x - offAccX;
    float ay = a.acceleration.y - offAccY;
    float az = a.acceleration.z - offAccZ;
    float gx = g.gyro.x - offGyroX;
    float gy = g.gyro.y - offGyroY;
    float gz = g.gyro.z - offGyroZ;

    // Transmissão dos dados estruturados via porta serial
    Serial.print(millis());    Serial.print(",");
    Serial.print(ax, 3);      Serial.print(",");
    Serial.print(ay, 3);      Serial.print(",");
    Serial.print(az, 3);      Serial.print(",");
    Serial.print(gx, 3);      Serial.print(",");
    Serial.print(gy, 3);      Serial.print(",");
    Serial.println(gz, 3);

    delay(10); // Intervalo para estabilizar leitura (100 Hz de amostragem)
}
}

```

Fonte: Autoria própria (2026)