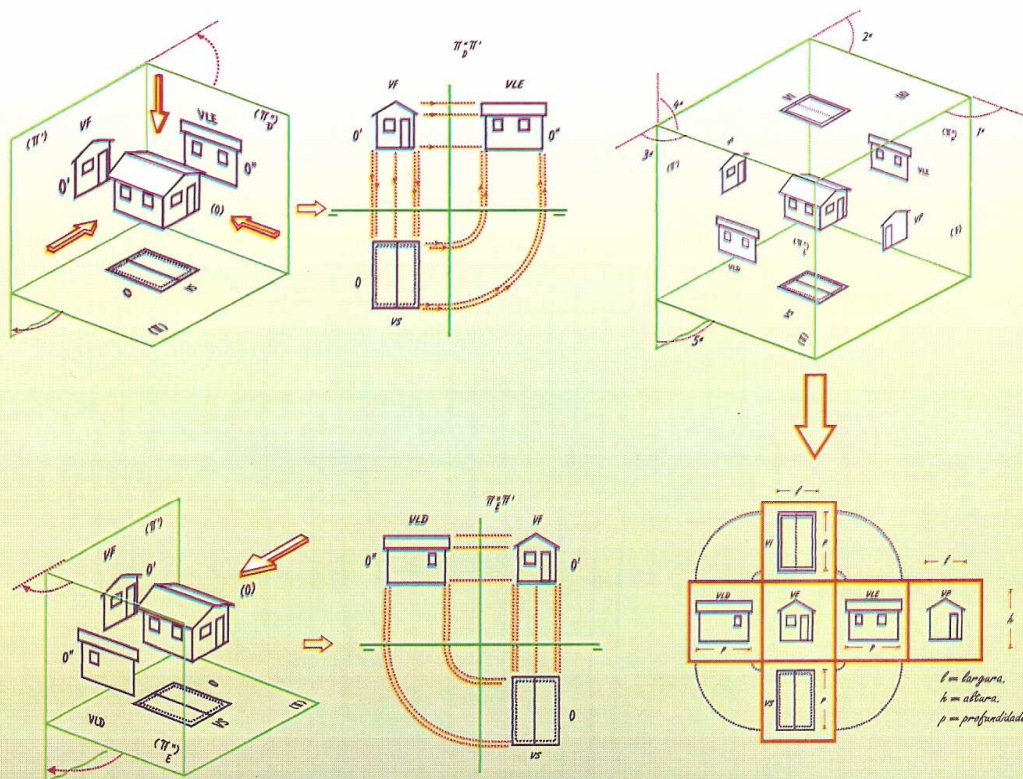


NILSON DE SOUSA SATHLER

NOTAS DE AULA DE

DESENHO

PRIMEIRA PARTE: PONTO, RETA, PLANO, ESCALAS
NUMÉRICA E GRÁFICA, E VISTAS ORTOGRÁFICAS



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA DE MOSSORÓ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA

**NOTAS DE AULA DE DESENHO: PONTO, RETA, PLANO, ESCALAS
NUMÉRICA E GRÁFICA, E VISTAS ORTOGRÁFICAS**

SATHLER, N. S.

ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA DE MOSSORÓ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA
km 47 da BR 110 - Cx. Postal, 137
59625-900 - Mossoró, RN - Brasil
engeagro@esam.br
www.esam.br

COMISSÃO EDITORIAL: Francisco do Carmo Filho
José Espínola Sobrinho
Nilson de Sousa Sathler

Segunda edição: Novembro de 1999.
Tiragem: 150 exemplares.

É permitida a reprodução total ou parcial deste trabalho, desde que citada a fonte e que não seja para fins lucrativos.

FICHA CATALOGRÁFICA PREPARADA PELO SETOR DE CLASSIFICAÇÃO E
CATALOGAÇÃO DA BIBLIOTECA "ORLANDO TEIXEIRA" DA ESAM

S.253n Sathler, Nilson de Sousa.

Notas de aula de desenho: ponto, reta, plano, escalas numérica e gráfica, e vistas ortográficas / Nilson de Sousa Sathler. - 2. ed. - Mossoró - RN: ENA/ESAM, 1999.

185 p. (Boletim Técnico-Científico, 26).

1. Geometria descritiva; 2. Desenho técnico;
3. Vistas ortográficas; 4. Escalas numérica e gráfica;
5. Ponto; 6. Reta; 7. Plano.
I. Título. II. Série.

CDD.516.6

NILSON DE SOUSA SATHLER

Engenheiro Agrônomo (julho de 1977) e M. Sc. em Engenharia Agrícola (dezembro de 1982), pela Universidade Federal de Viçosa – MG (UFV). Auxiliar de Ensino do Departamento de Física, do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da UFV, de agosto de 1977 a fevereiro de 1979. Professor do Departamento de Engenharia Agrícola da Escola Superior de Agricultura de Mossoró – ESAM, desde março de 1979. Atualmente, Professor Adjunto, nível 4.

Ajude a libertar uma pessoa, eduque-a!

APRESENTAÇÃO

(2ª edição)

Após a utilização deste trabalho durante três semestres consecutivos na disciplina Desenho, do Departamento de Engenharia Agrícola da Escola Superior de Agricultura de Mossoró – ESAM, ministrada aos estudantes do primeiro período do curso de Agronomia, com as devidas correções efetuadas, publicamos a segunda edição das Notas de Aula de DESENHO, em sua primeira parte.

A melhoria da qualidade do ensino-aprendizagem tem sido progressiva a cada semestre; ou seja: a cada semestre tem-se aprovado mais alunos na disciplina. Isto depende do esforço conjunto professor-aluno, mas é bastante facilitada pela utilização individual da apostila pelo aluno.

Observamos que as medidas lineares dos desenhos das **Figuras**, para melhor estética, **estão reduzidas a 80%** das respectivas dos desenhos originais; que são as referidas e/ou apresentadas no texto.

Dedicamos a todos aqueles que, com suas dúvidas e/ou soluções, ajudaram a formar um conhecimento na área, e àqueles que ajudarão a aprimorar este trabalho.

Agradecemos especialmente ao estudante **Manoel Januário da Silva Júnior**, monitor da disciplina no 2º semestre de 1998 e no 1º semestre de 1999, pela sua dedicação ao trabalho da monitoria, o que certamente contribuiu para a melhoria do ensino-aprendizagem.

Mossoró, agosto de 1999.

Prof. Nilson de Sousa Sathler

APRESENTAÇÃO

(1ª edição)

Este trabalho foi escrito por um principiante para principiantes. É destinado aos alunos do primeiro período do Curso de Engenharia Agrônômica da Escola Superior de Agricultura de Mossoró - ESAM, contendo a primeira parte da disciplina de Desenho, do Departamento de Engenharia Agrícola. Sendo estritamente didático, nasceu devido a necessidade de reduzir ao máximo os desenhos a serem feitos no quadro durante as aulas, tendo em vista a nossa lenta e progressiva recuperação de uma Trombose Venosa Profunda na panturrilha esquerda, desenvolvida há um ano atrás. A idéia inicial era a elaboração de transparências, mas, à medida que os desenhos foram ficando prontos, achamos por bem acrescentar as notas de aula, que preparamos quando demos a disciplina pela primeira vez, e as listas de exercícios utilizadas.

Esperamos que a qualidade do ensino-aprendizagem seja melhorada, uma vez que se deve escrever o mínimo possível, ficando mais tempo reservado para as aulas práticas.

Observamos que as medidas lineares dos desenhos das **Figuras**, para melhor estética, **estão reduzidas a 80%** das respectivas dos desenhos originais; que são as referidas e/ou apresentadas no texto.

Dedicamos a todos aqueles que, com suas dúvidas e/ou soluções, ajudaram a formar um conhecimento na área, e àqueles que ajudarão a aprimorar este trabalho.

Agradecemos especialmente ao estudante **Nildo da Silva Dias**, monitor da disciplina, quando fomos designados para ministrá-la, pela ajuda que nos deu com bibliografias e outros materiais, e pela sua dedicação ao trabalho da monitoria.

Mossoró, fevereiro de 1998.

Prof. Nilson de Sousa Sathler

A MARIA DAS GRAÇAS BEZERRA SATHLER, pelos 20 anos de casamento, pela ajuda que sempre me deu, como colega e como esposa, pelo incentivo e, principalmente, pela paciência de tolerar-me quando estou realizando trabalhos desse tipo, **DEDICO** especialmente este simples trabalho.

Fevereiro de 1998.

CONTEÚDO

ASSUNTO	PÁGINA
1. Materiais necessários	
1.1 Par de esquadros	01
Utilização dos esquadros	01
1.2. Régua graduada	01
Utilização da régua	01
1.3. Lápis	06
a. Classificação do lápis	06
b. Utilização do lápis	06
c. Ponta do lápis	06
d. Como segurar o lápis	07
e. Como utilizar o lápis	07
1.4. Lapiseira	07
1.5. Obtenção de traços de diferentes larguras	08
1.6. Apagador (“borracha”)	09
1.7. Pincel	09
1.8. Pano	10
1.9. Compasso	10
a. Compasso simples	10
b. Outros tipos de compasso	11
c. Utilização do compasso	11
1.10. Transferidor	11
Utilização do transferidor	12
1.11. Papel	12
1.12. Iluminação	12
1.13. Outros materiais	13
1.14. Exercícios	13
2. O ponto	
2.1. Introdução	
a. Objetivos	14
b. Conceito	14
2.2. Elementos de projeção	14
2.3. Projeções cônicas e projeções cilíndricas ou paralelas	15
2.4. Projeções cilíndricas oblíquas e ortogonais	16
2.5. O espaço	18
2.6. Representação de um ponto no espaço por suas coordenadas descritivas	20
2.7. Épura	22
a. Conceito	22

b. Obtenção	22
c. Coordenadas descritivas de um ponto em épura	22
d. Representação de um ponto em épura através de suas coordenadas descritivas	22
2.8. Planos bissetores	24
a. Bissetor ímpar (β_I) e bissetor par (β_P)	24
b. Coordenadas de pontos nos bissetores e suas representações em épura	27
2.9. Simetria de dois pontos	27
a. Conceito	27
b. Simetria em relação a (π)	27
c. Simetria em relação a (π')	29
d. Simetria em relação a $\pi'\pi$	29
e. Simetria em relação ao (β_I)	29
f. Simetria em relação ao (β_P)	29
2.10. Exercícios	32
3. Reta genérica ou qualquer e reta de perfil	
3.1. Introdução	
a. Objetivos	34
b. Conceito	34
3.2. Projeção ortogonal de uma reta em um plano	34
a. Projeção de uma reta oblíqua ao plano de projeção	34
b. Projeção de uma reta paralela ao plano de projeção ou situada ou aposta no plano de projeção	34
c. Projeção de uma reta perpendicular (ortogonal) ao plano de projeção	35
3.3. Representação de uma reta qualquer	36
a. Conceito	36
b. Representação no espaço (1º diedro)	36
c. Representação em épura	36
d. Descrição da trajetória de uma reta	36
3.4. Representação de uma reta de perfil	39
a. Conceito	39
b. Representação em épura	39
c. Visibilidade da reta de perfil - projeção lateral ou terceira projeção	39
1. O plano lateral de projeção ou terceiro plano de projeção (π'')	39
2. Representação em épura	41
3. Projeção lateral de um ponto (P)	41
4. Projeção lateral de uma reta de perfil	42
3.5. Pertinência de ponto e reta	46
a. Reta qualquer	46

b. Reta de perfil	46
3.6. Razão de seção de um ponto em uma reta	47
3.7. Exercícios	49
4. Pontos notáveis de uma reta	
4.1. Introdução	
a. Objetivo	52
b. Conceito	52
c. Os pontos notáveis de uma reta	52
4.2. Definições	52
a. Traço horizontal (H)	52
b. Traço vertical (V)	52
c. Traço no bissetor ímpar (I)	52
d. Traço no bissetor par (P)	52
4.3. Métodos de determinação dos traços de uma reta	52
a. Reta qualquer	52
b. Reta de perfil	56
4.4. Classificação dos traços horizontal (H) e vertical (V) de uma reta	58
4.5. Descrição de uma reta	58
4.6. Traços de uma reta que passa pela linha de terra, $\pi'\pi$	59
4.7. Traços de uma reta paralela a um plano	59
a. Reta paralela ao plano horizontal de projeção (π)	60
b. Reta paralela ao plano vertical de projeção (π')	60
c. Reta paralela ao bissetor par (β_P)	60
d. Reta paralela ao bissetor ímpar (β_I)	63
4.8. Exercícios	63
5. Retas particulares	
5.1. Introdução	
a. Objetivos	67
b. Conceito	67
c. Tipos de retas particulares	67
5.2. Reta horizontal ou de nível	67
5.3. Reta frontal ou de frente	68
5.4. Reta fronto-horizontal ou horizontal de frente	69
5.5. Reta vertical	71
5.6. Reta de topo	72
5.7. Reta perpendicular ao (β_I)	73
5.8. Reta perpendicular ao (β_P)	75
5.9. Exercícios	77
6. Posições relativas de duas retas: Retas reversas, concorrentes e paralelas	
6.1. Introdução	
a. Objetivos	80

b. Retas coplanares	80
b.1. Retas concorrentes	80
b.2. Retas paralelas	80
c. Retas não coplanares	80
c.1. Retas reversas	80
c.2. Retas concorrentes	80
c.3. Retas contidas em planos paralelos	80
6.2. Retas concorrentes	81
6.3. Retas paralelas	85
6.4. Posição relativa de duas retas envolvendo retas de perfil	90
a. Posição relativa de uma reta qualquer e uma de perfil	90
b. Posição relativa de duas retas de perfil	91
b.1. Retas de perfil coplanares	91
b.2. Retas de perfil não coplanares	95
6.5. Exercícios	98
7. O plano	
7.1. Introdução	
Objetivos	100
7.2. Definições	100
a. Geral	100
b. Conseqüentes	100
7.3. Representação de um plano em épura	100
a. Três pontos não alinhados	100
b. Uma reta e um ponto exterior à reta	100
c. Duas retas concorrentes	100
d. Duas retas paralelas	100
7.4. Traços de um plano	100
7.5. Características dos traços de um plano	103
7.6. Representação em épura dos traços de um plano	106
a. Plano qualquer	106
b. Plano paralelo ao (π)	106
c. Plano paralelo ao (π')	106
d. Plano paralelo à linha de terra	106
e. Plano que passa pela linha de terra	106
7.7. Classificação dos traços de um plano	106
7.8. Porções úteis de um plano nos diedros	109
7.9. Determinação de um plano que passa pela linha de terra	109
7.10. Pertinência de reta e plano	111
a. O plano é definido por duas retas (concorrentes ou paralelas)	111
b. O plano é definido por seus traços horizontal e vertical	113
7.11. Retas auxiliares	115
7.12. Exercícios	115

8. Planos particulares

8.1. Introdução	
a. Objetivos	118
b. Conceito	118
c. Tipos de planos particulares	118
8.2. Plano vertical	118
8.3. Plano de topo	122
8.4. Plano de perfil	126
8.5. Plano horizontal ou de nível	130
8.6. Plano frontal ou de frente	131
8.7. Plano paralelo à linha de terra	137
8.8. Plano que passa pela linha de terra	138
8.9. Exercícios	141

9. Escalas numérica e gráfica

9.1. Introdução	
1. Objetivos	144
2. Localização na folha para desenho	144
9.2. Escala numérica ou métrica	144
9.3. Escalas de redução, de ampliação e natural	144
9.4. Escalas recomendadas pela ABNT	145
9.5. Escalas mais utilizadas no desenho arquitetônico	145
9.6. Escalas mais utilizadas no desenho topográfico	145
9.7. Definição da escala numérica de redução	145
9.8. Escalas na forma decimal ou na de percentagem	148
9.9. Fator de escala	148
9.10. Uso do escalímetro	150
9.11. A escala numérica e a área de uma superfície	151
9.12. Mudança de escala - ampliação ou redução de um original	154
9.13. Escala gráfica	158
9.14. Elementos de uma escala gráfica linear ou simples	159
a. Comprimento da escala	159
b. Unidade básica ou divisão principal da escala	159
c. Talão da escala	159
d. Numeração da escala	159
e. Escala numérica	160
9.15. Construção de uma escala gráfica linear ou simples	160
9.16. Utilização da escala gráfica linear ou simples	161
9.17. Exercícios	163

10. Vistas ortográficas

10.1. Introdução	
Objetivos	166
10.2. Projeções de um objeto nos planos horizontal, vertical e lateral de projeção	166
a. Situação espacial do objeto no 1º diedro e sua épura	167

b. Situação espacial do objeto no 3º diedro e sua épura	167
10.3. Conceito	168
10.4. As seis vistas ortográficas principais	168
10.5. Definições das vistas ortográficas principais	169
10.6. Representação das vistas ortográficas principais no papel	171
10.7. Construção das vistas ortográficas principais para um objeto no 1º diedro	173
10.8. Exercícios	179
11. Bibliografia consultada	182

**NOTAS DE AULA DE DESENHO: PONTO, RETA, PLANO, ESCALAS
NUMÉRICA E GRÁFICA, E VISTAS ORTOGRÁFICAS**

1. MATERIAIS NECESSÁRIOS.

Muitos e diferentes são os materiais utilizados em Desenho Técnico. Entretanto, os materiais mínimos e necessários para a utilização nesta parte da disciplina são: 1. Par de esquadros. 2. Régua graduada. 3. Lápis ou lapiseira. 4. Apagador (borracha). 5. Pincel. 6. Pano. 7. Compasso. 8. Transferidor. 9. Papel. 10. Iluminação.

1.1. *Par de esquadros:*

Um par de esquadros transparentes e não graduados com espessura máxima de 3,0 mm, um dos esquadros deve ser de 45° e o outro de 30° ou de 60° (Figura 1). O maior comprimento dos esquadros deve estar entre 30 e 37 cm; geralmente a hipotenusa do esquadro de 45° (triângulo retângulo isósceles) é aproximadamente igual ao maior cateto do esquadro de 30° ou 60° (que também é um triângulo retângulo).

Utilização dos esquadros:

Um esquadro é utilizado para o traçado de retas, apoiado na régua tê ou em outro esquadro. O par de esquadros serve para o traçado de retas paralelas ou de retas perpendiculares e para o traçado de ângulos de 15 em 15° (15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° , 105° , 120° , 135° , 150° , 165° e 180°).

No **traçado de retas paralelas** (Figura 2), utiliza-se um dos esquadros como apoio, fixando-o com a palma da mão e o polegar, e o outro é movimentado pelos dedos da mesma mão; apoia-se o esquadro através de um de seus catetos de modo a utilizar a hipotenusa para traçar as retas.

No **traçado de retas perpendiculares** (Figura 3), apoia-se um dos esquadros sobre o outro do mesmo modo anterior, traçando-se a primeira reta; em seguida, gira-se o esquadro móvel em torno do ângulo reto e traça-se, pela hipotenusa, a reta perpendicular à primeira.

A Figura 4 apresenta a construção de um ângulo com o par de esquadros, a partir de uma reta e um vértice. As Figuras 5 e 6 mostram como obter ângulos múltiplos de 15° com o par de esquadros.

1.2. *Régua graduada:*

É um instrumento de medição. Uma boa régua graduada será, de preferência, opaca. Assim, a própria régua cobrirá traços do desenho, deixando à mostra apenas aqueles que se deseja medir.

Normalmente é usado o triplo decímetro, ou régua de 30 cm, de plástico opaco e flexível, graduado em cm e em mm, permitindo a estimativa do décimo de milímetro (Figura 7). Quando a menor divisão da escala da régua graduada é 0,5 mm, também o último algarismo, que compõe o número que expressa a medida, é o décimo de milímetro, entretanto sua estimativa é muito mais facilitada (Figura 7-b).

Utilização da régua:

Marcam-se os segmentos por meio de pequenos traços sobre uma reta já desenhada e nunca por meio de pontos. Marcam-se todos os segmentos de uma só vez, mantendo-se fixo o zero da escala; não se marca um segmento, depois outro, e mais

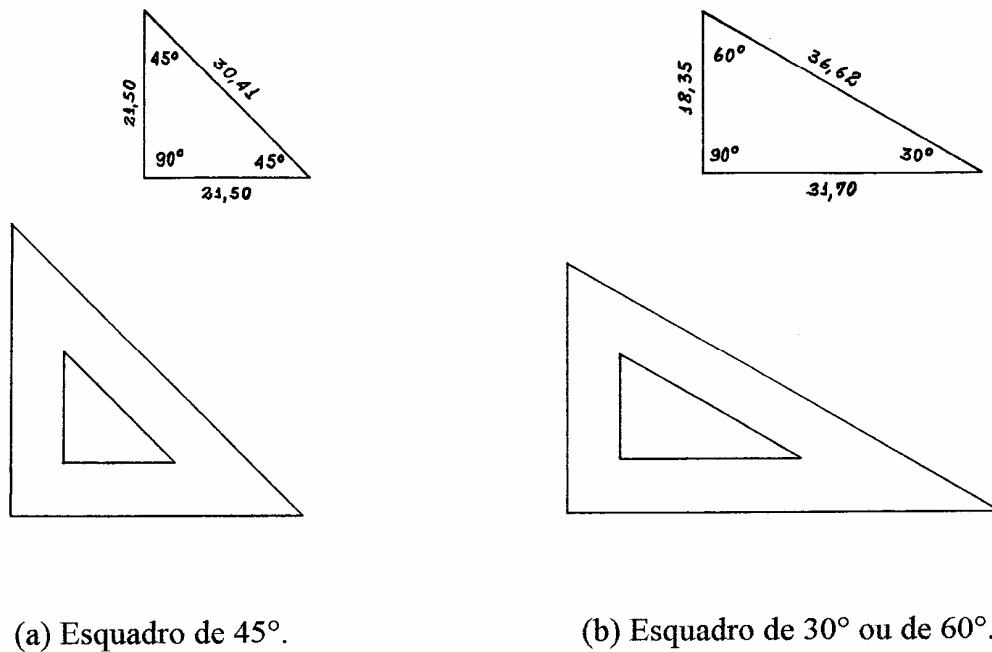
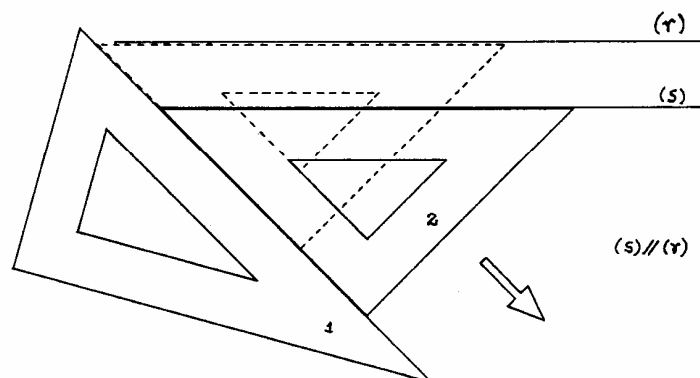
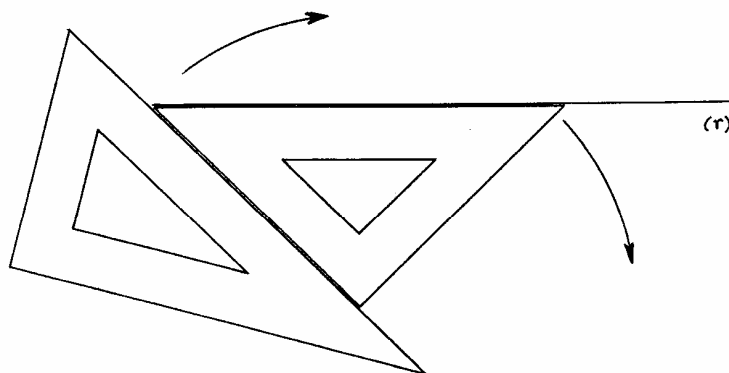


FIGURA 1. Par de esquadros adequados ao Desenho Técnico (espessura máxima de 3,0 mm, transparentes e não graduados) - comprimentos em cm.

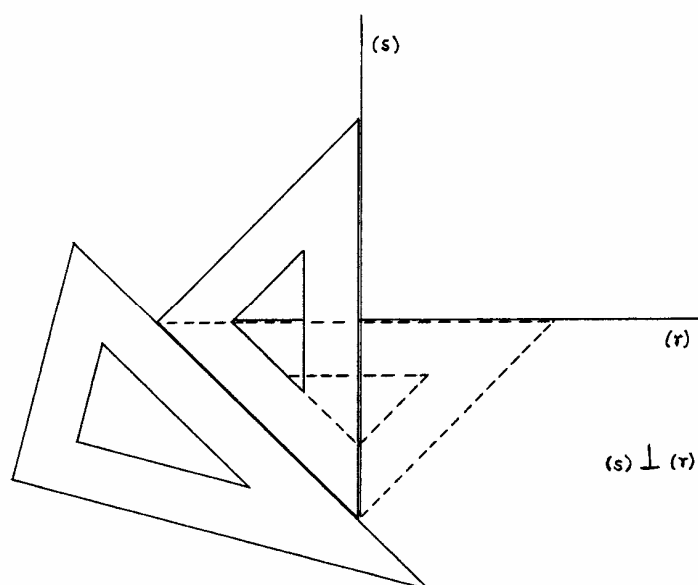


- 1 = esquadro de apoio - é fixo pela palma da mão e o polegar.
 2 = esquadro móvel - movimentado com os demais dedos da mão que segura o esquadro de apoio.

FIGURA 2. Traçado de retas paralelas utilizando-se o par de esquadros.



(a)



(b)

FIGURA 3. Traçado de retas perpendiculares utilizando-se o par de esquadros.

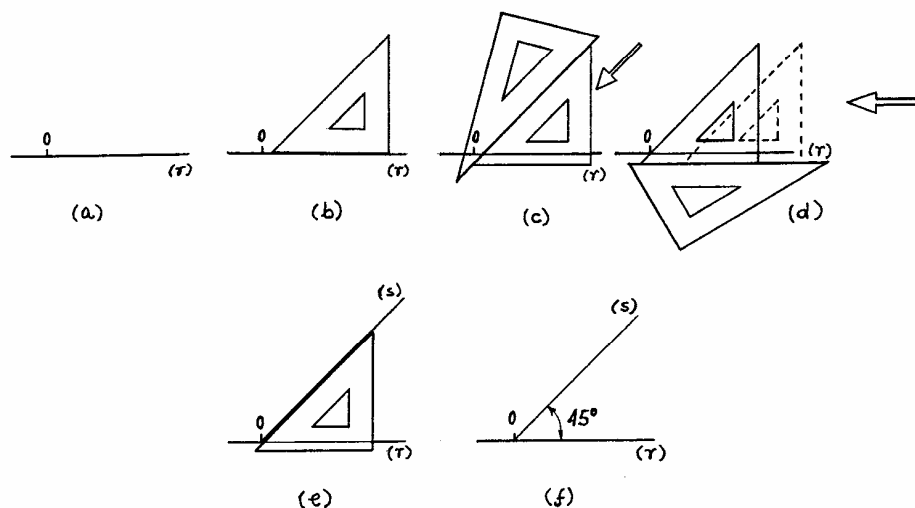


FIGURA 4. Construção de um ângulo (45°) com o par de esquadros, a partir de uma reta (r) e o vértice O.

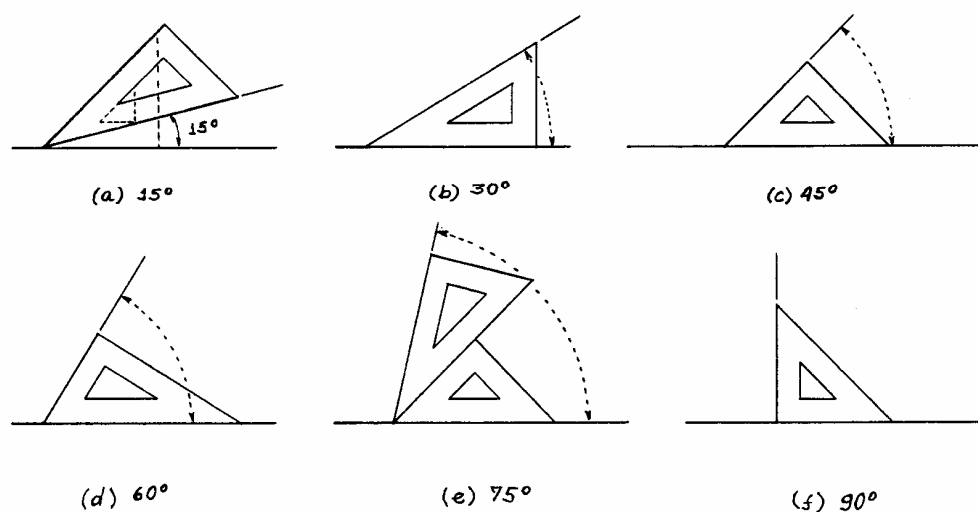


FIGURA 5. Obtenção de ângulos múltiplos de 15° com o par de esquadros (15° , 30° , 45° , 60° , 75° e 90°).

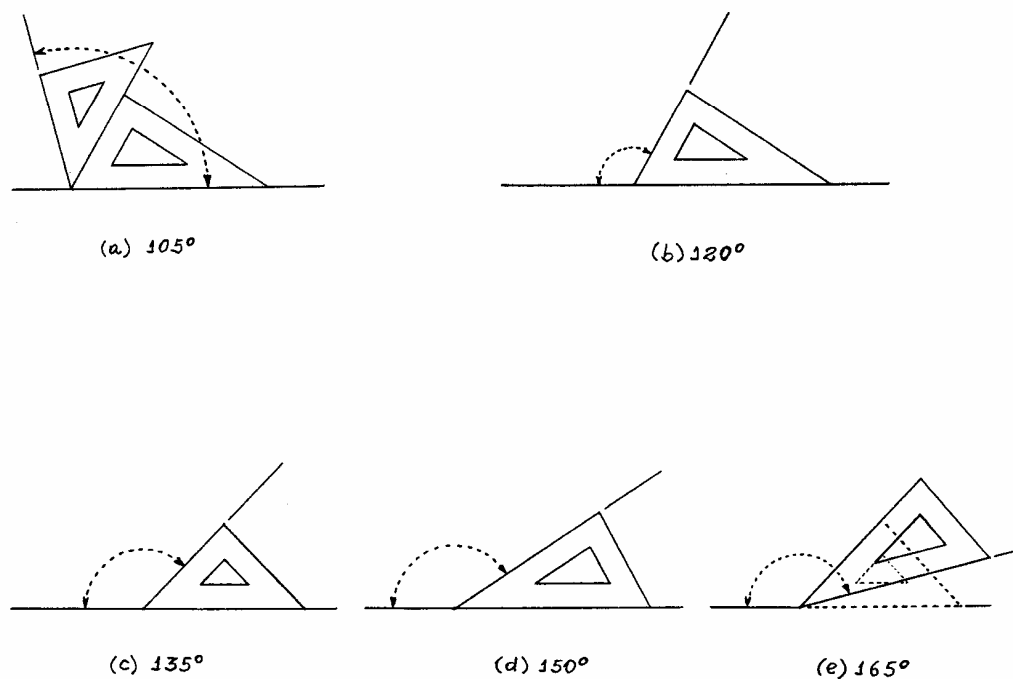


FIGURA 6. Obtenção de ângulos múltiplos de 15° com o par de esquadros (105° , 120° , 135° , 150° e 165°).

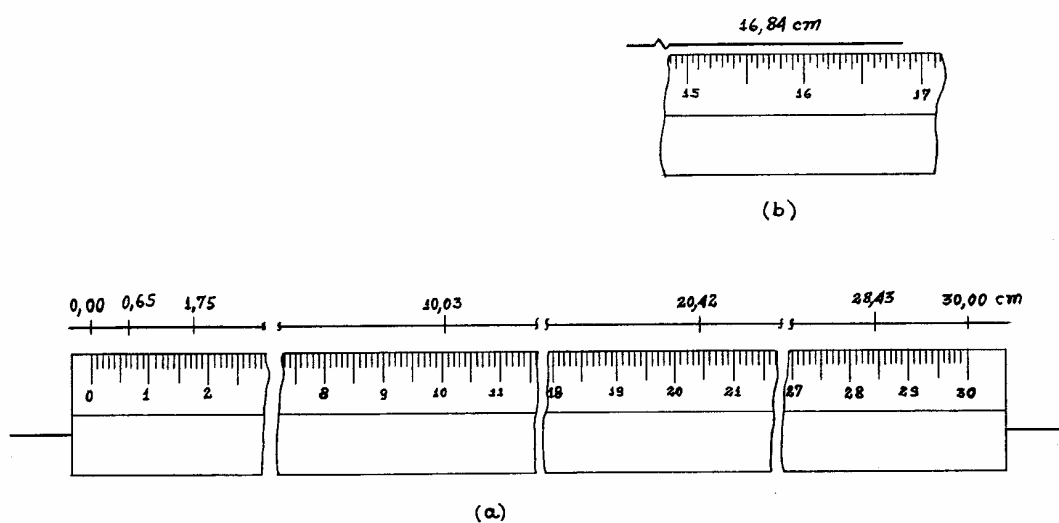


FIGURA 7. Régua graduada - triplo decímetro (30 cm). (a) Menor divisão: 1 mm. (b) Menor divisão: 0,5 mm.

outro; assim acumulam-se pequenos erros em cada medição e no final há vários milímetros a mais.

OBSERVAÇÕES:

a. É um erro usar a régua graduada como apoio para traçar retas; o lápis suja a régua, gasta a graduação e a linha não é regular por falta de apoio do lápis. A gravação dos traços da graduação chega, às vezes, a causar ondulações no traçado.

b. Outro erro comum é usar a régua como lâmina para cortar papel; o atrito aquece o plástico, derretendo-o e a régua fica com falhas.

c. Em desenhos de precisão a régua deve ficar inclinada, aproximando a graduação do papel; pode-se fechar um olho para maior segurança na medição.

1.3. Lápis:

O tipo de lápis utilizado está relacionado com a finalidade do desenho, qualidade do papel e largura das linhas.

a. Classificação do lápis:

A classificação é feita ordinariamente pela dureza de sua grafite. Grafite ou grafita é uma substância sólida e escura, que é a forma mais comum do carbono. Quando utilizamos um lápis, a ponta da grafite corre suavemente no papel, porque as camadas de átomos de carbono deslizam umas sobre as outras.

A classe mais comum para lápis de desenho técnico, um prisma sextavado de madeira com grafite no eixo (Figura 8), é a “**HB**”, onde a dureza cresce a partir do 6B (mais macio e escuro), 5B, 4B, 3B, 2B, B, HB, F, H, 2H, 3H, 4H, 5H, 6H, 7H, 8H e 9H (extremamente duro e claro).

Outra classificação é a **numérica**: 1 (bem macio e bem escuro) (3B), 2 (macio e escuro) (B), **3 (semi-macio) (F)**, 4 (duro) (H), 5 (bem duro) (3H); estes lápis, ditos comuns ou colegiais, não são muito utilizados em desenho por causa da não uniformidade da grafite.

b. Utilização do lápis:

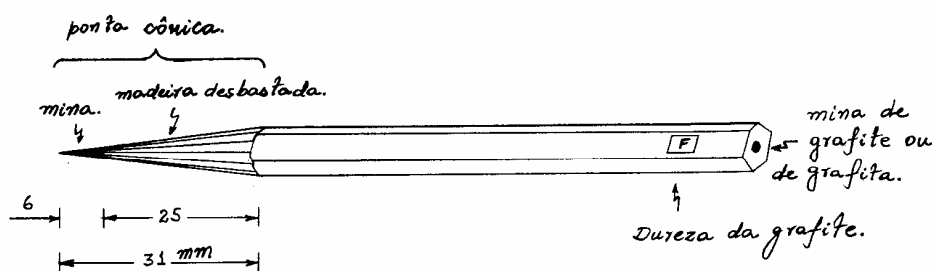
A utilização se faz tomando lápis mais macios (2B, B, F, HB, H, n.º 1, n.º 2) para desenhos definitivos em papel vegetal, com a finalidade de tirar cópias heliográficas, o que economiza tempo do traçado a nanquim, quando se faz esboços e desenhos preliminares em papel pouco resistente (cartolina). Para desenhos definitivos em papel mais resistente (canson), principalmente nos traços mais finos, como as linhas de cotas e auxiliares de cota, usam-se os lápis mais duros (n.º 3, 4, 2H, 3H).

Para utilização geral recomenda-se preferencialmente o lápis de dureza F.

c. Ponta do lápis:

O lápis deve ser bem apontado todas as vezes que se fizer necessário; para facilitar, deve-se ter sempre em mãos uma *lixa de unhas ou lixa fina para madeira* (n.º 100 ou 150), colada sobre uma superfície dura, para afiar a mina em intervalos bastante curtos.

O lápis deve apresentar a ponta cônica com uma altura de cerca de ± 31 mm, sendo ± 6 mm para o comprimento da mina e ± 25 mm para o comprimento da madeira desbastada (Figura 8).



SÉRIE HB (lápiz para Desenho Técnico)
6B, 5B, 3B, 2B, B, HB, F, H, 2H, 3H, 4H, 5H, 6H, 7H, 8H e 9H



CLASSIFICAÇÃO NUMÉRICA (lápiz comuns ou colegiais)

- 1 (bem macio e bem escuro) - 3B.
- 2 (macio e escuro) - B.
- 3 (semi-macio) - F.
- 4 (duro) - H.
- 5 (bem duro) - 3H.

FIGURA 8. Lápis e suas classificações.

d. Como segurar o lápis:

O lápis deve ser seguro entre o polegar e o dedo indicador a cerca de 4 a 5 cm da ponta, de modo que a mão fique apoiada no dedo mínimo e a ponta do lápis esteja bem visível.

e. Como utilizar o lápis:

O lápis deve ser utilizado com a **grafite encostada no esquadro** o mais perpendicularmente possível e ligeiramente inclinado no sentido do movimento (Figura 10-a).

Quando movimentado para traçar retas **deve-se sempre puxar o lápis**, e não empurrá-lo, e ao mesmo tempo girá-lo num movimento de vai e vem para que a largura da linha permaneça constante.

Quando se deseja traçar uma **reta mais escura** deve-se passar a grafite sobre ela várias vezes (uma, duas, três, ... quantas forem necessárias), evitando-se comprimi-la contra o papel.

1.4. Lapiseira:

Atualmente, o lápis está sendo substituído pela lapiseira (Figura 9), podendo a mesma ser reabastecida por minas de grafite ou de polímeros derivados de petróleo de diversos diâmetros e durezas.

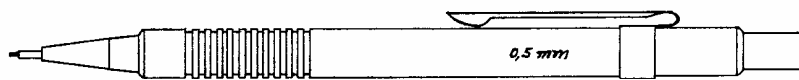


FIGURA 9. Lapiseira.

A lapiseira é mais prática, pois não há necessidade do uso de apontadores quando a grafite é fina, bem como não é necessário girá-la quando traçam-se linhas retas. Deve ser mantida na vertical na direção perpendicular ao traço e ligeiramente inclinada na direção e sentido do traço (Figuras 10-b e 10-c).

Normalmente, encontram-se lapiseiras para grafite de diâmetro 0,3 mm, ou 0,5 mm, ou 0,7 mm, ou 0,9 mm. Para o desenho técnico, **a lapiseira deve utilizar grafite de no máximo 0,5 mm, devendo-se usar as de dureza F ou H para o desenho em papel manteiga, tolerando-se HB para o desenho de letras; para desenhos em papel vegetal usar grafite mais duro: H ou 2 H.** Para utilização geral, a dureza B é comumente a mais encontrada.

1.5. Obtenção de traços de diferentes larguras:

Traços ou linhas de diferentes larguras são utilizados no Desenho Técnico para evidenciar os diferentes planos em que se encontram as retas representadas.

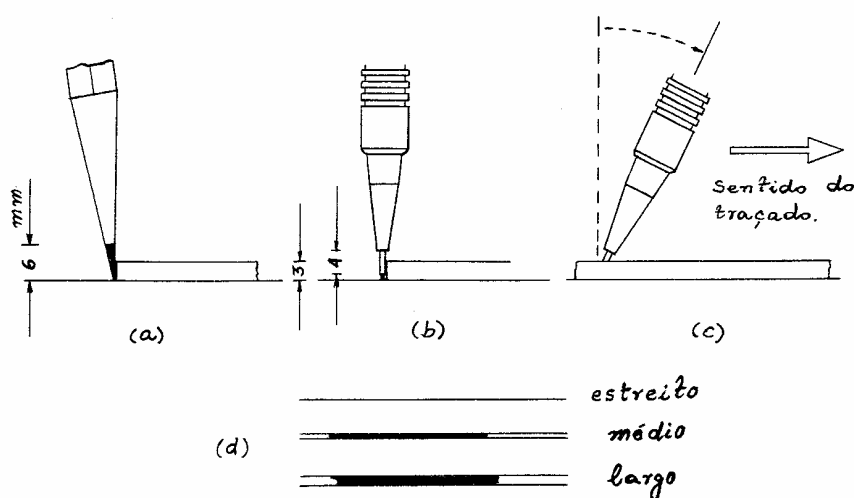


FIGURA 10. Posições relativas entre lápis, lapiseira e esquadro (a e b), e o sentido do traçado (c). Obtenção de traços ou linhas de diferentes larguras (d).

O traço estreito é simplesmente obtido com a grafite que se está utilizando para a elaboração do desenho (Figura 10-d). Os traços médio e largo são obtidos traçando-se dois traços estreitos paralelos e preenchendo o espaço entre eles com grafite. A largura do traço médio deve ser, aproximadamente, o dobro da largura do estreito, e a do largo o dobro da do médio.

1.6. Apagador (“borracha”):

Apagador ou raspador, é fabricado em plástico, fibra de vidro, pó de vidro e até mesmo borracha (Figura 11-a).

É impossível orientar o principiante na escolha; existem apagadores brancos, verdes, castanhos, cinzentos, vermelhos, prismáticos, cilíndricos, enrolados, etc.. O importante é que o apagador realmente apague sem danificar o papel e sem borrá-lo. Deve-se experimentar, se possível, antes de comprar. Há quem diga que uma boa borracha (apagador), para desenho a lápis, deve ser macia, pouco áspera e branca.

É recomendado que se corte uma pequena seção da “borracha” de modo que ela apresente arestas vivas (Figura 11-b), que facilitarão o apagar de pequenos excessos; com o tempo as arestas vão sendo quebradas, mas a “borrachinha” continua pequena e ainda bastante útil. Para desenho a tinta nanquim em papel vegetal, antes do uso de apagador para tinta, deve-se raspar com gilete fazendo um movimento rápido de vai-e-vem.

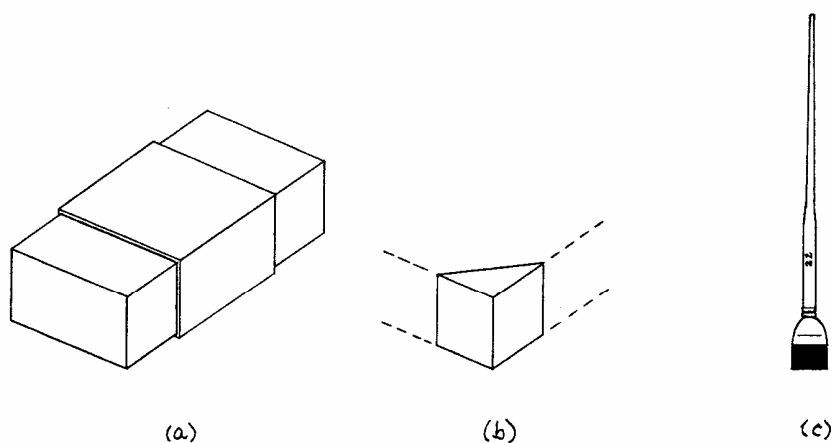


FIGURA 11. (a) Apagador. (b) Pequena seção do apagador. (c) Pincel.

1.7. Pincel:

Recomenda-se a utilização de um *pincel* ou de uma *escova para desenho* (pincel de bigode) para retirar os restos resultantes do uso do apagador, evitando passar a mão sobre o desenho, sujando-o.

Um pincel que não seja específico para desenho (Figura 11-c), também pode ser utilizado; o importante é não sujar o desenho com as mãos.

Quando se desenha com lápis, a cada traço, principalmente de finalização ou acabamento, deve-se utilizar o pincel, evitando que partículas de grafite adiram aos esquadros e venham a sujar o desenho.

1.8. Pano:

Recomenda-se a utilização de um paninho de algodão ou flanela que sirva para limpar os esquadros e régua periodicamente, retirando a grafite e sobras de “borracha” a eles aderidos. Quando o pano seco não resolver, deve-se utilizar um pano umedecido com água.

1.9. Compasso:

O compasso serve para traçar arcos ou circunferências completas. É importante que ele seja de boa fabricação.

a. Compasso simples:

Um compasso simples apresenta um comprimento de 12 a 15 cm e suas pernas são dependentes uma da outra (Figura 12-a), evitando que o compasso se abra enquanto a circunferência é traçada.

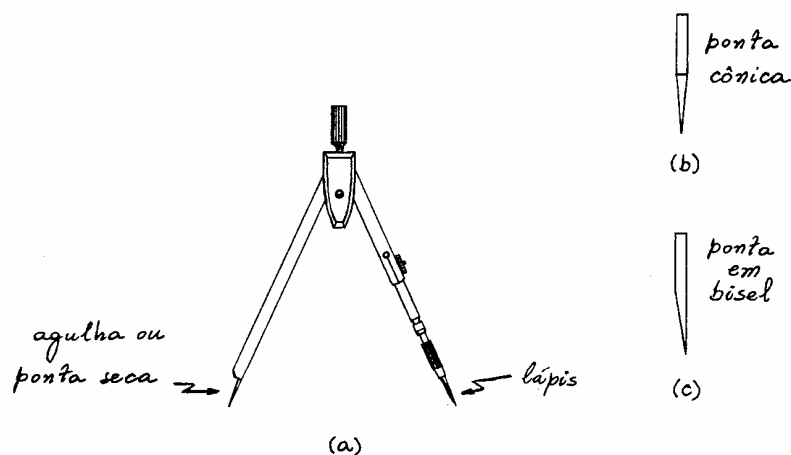


FIGURA 12. (a) Compasso simples. (b e c) Tipos de ponta do lápis utilizada no compasso.

Embora seja considerado simples, para o Desenho Técnico profissional, um compasso de boa qualidade apresenta articulações e um extensor, que permite traçar circunferência de raios maiores. Quando ele não possui a articulação, a agulha ou ponta seca e o lápis tocam o papel em direções oblíquas; ao ser traçada a circunferência o pequeno círculo do centro vai se alargando. Isso não acontece quando

o compasso é articulado, uma vez que a agulha ou ponta seca fura o papel perpendicularmente (a ponta que possui o lápis também deve ficar perpendicularmente ao papel). Portanto a falta de articulação é uma característica dos compassos de qualidade inferior. Um bom compasso também tem a agulha afiada nos dois extremos, sendo que uma das pontas apresenta um rebaixo; ele evita que a agulha se aprofunde demasiadamente, como acontece quando se traçam várias circunferências concêntricas (com o mesmo centro).

b. Outros tipos de compasso:

Apenas como informação, existem vários tipos de compasso: 1. **Compasso de balaustre**, que serve para traçar circunferências pequenas, de 0,5 a 12 mm de raio. 2. **Compasso cintel**, que serve para traçar circunferências de raios maiores que os possíveis pelo compasso simples - é formado por duas peças, que possuem a ponta e o lápis, que se prendem sob pressão em uma haste de madeira ou de alumínio, podendo a haste ser cromada; a distância entre a ponta e o lápis é o raio. 3. **Compasso de pontas secas**, que serve para transportar medidas; raramente é usado em desenho arquitetônico, podendo ser usado no desenho de máquinas (é utilizado em marcenaria para marcação de peças circulares). 4. **Compasso de redução**, que não é propriamente dito um compasso, serve para mudar as medidas segundo uma proporção definida.

Existem compassos que apresentam um suporte para utilização da caneta nanquim.

c. Utilização do compasso:

Normalmente o compasso é utilizado com **ponta cônica** (Figura 12-b); em casos excepcionais, quando o raio a traçar é muito pequeno, pode-se usar a **ponta em bisel** (Figura 12-c), que tem o inconveniente de gastar-se mais facilmente que a ponta cônica.

Marca-se o centro como sendo a interseção de dois segmentos de retas perpendiculares (+). Ajusta-se o raio do compasso fora do desenho, usando os dedos indicador, médio e anular de uma só mão. Coloca-se a ponta seca (ponta de aço) no centro, ficando o lápis no ponto mais próximo do corpo do desenhista.

Segura-se o compasso pela parte superior, usando os dedos polegar e indicador. Com o compasso ligeiramente inclinado no sentido do traço, gira-se o instrumento com o polegar no sentido dos ponteiros do relógio, traçando-se a circunferência.

Na utilização de compasso que possui extensor ou na do cintel, uma das mãos mantém a ponta seca no centro da circunferência e a outra movimenta a outra extremidade do compasso.

1.10. Transferidor:

Serve para a medição e marcação de ângulos. Consiste numa peça circular ou semicircular de plástico transparente, geralmente graduada em graus, permitindo uma estimativa do décimo de grau (Figura 13). O transferidor apropriado deve ter a graduação em traços finos e bem legíveis; o tamanho poderá variar de 15 a 25 cm. É mais utilizado em desenho topográfico.

Utilização do transferidor:

O vértice do ângulo que se deseja medir deve coincidir com o centro do transferidor (C, na Figura 13), o ponto de interseção entre a linha horizontal (a dos zeros) e a vertical (a de 90°). Um dos lados do ângulo deve coincidir com a linha horizontal (a dos zeros), o outro passa pela escala, onde faz-se a leitura até 1/10 de grau, que é estimado (na Figura 13, a leitura é 45,0°).

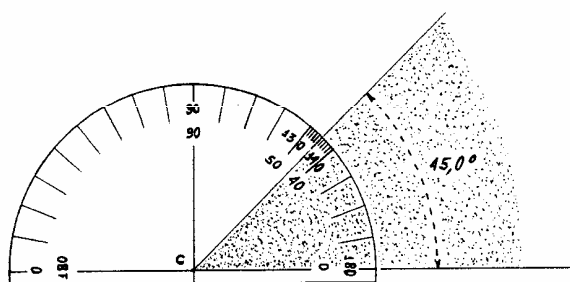


FIGURA 13. Transferidor semi-circular.

1.11. Papel:

Inicialmente utilizar-se-á o papel milimetrado, preferencialmente no formato A3 (297 mm x 420 mm) ou, no mínimo, o A4 (210 mm x 297 mm). Pode-se também utilizar o papel ofício, com o inconveniente de se ter de traçar horizontais e verticais, o que, embora seja um bom treinamento para utilização do par de esquadros, limita muito a capacidade de trabalho da maioria da turma durante as aulas práticas iniciais.

A fixação do papel à prancheta ou à mesa deve ser feita com *fita adesiva*, especialmente a *fita crepe*, que é mais fácil de ser retirada. Fixam-se os vértices do papel diagonalmente opostos, fazendo-se com que ele fique bem estirado.

1.12. Iluminação:

A iluminação recomendada é a difusa na sala, complementada por iluminação específica da área de trabalho com luz vindo da esquerda, uma vez que a maioria das pessoas desenha com a mão direita (existem no mundo apenas 10% de pessoas canhotas). Se a luz vem da direita provoca sombra da mão e dos esquadros, escurecendo o campo de trabalho e prejudicando a visibilidade. Se estiver colocada à frente, reflete-se no papel diretamente para a vista, provocando em pouco tempo o cansaço visual. Portanto, **não deve haver sombra da mão na ponta do lápis e nem reflexos sobre a vista.**

Para trabalhos prolongados a lâmpada indicada é a da marca “solar” de vidro azulado. Na lâmpada incandescente comum predominam as radiações infravermelhas, sendo uma das causas do cansaço visual. A lâmpada fluorescente, apesar de seus últimos aperfeiçoamentos, não é recomendada para trabalhos onde se exigem acuidade

visual e atividade prolongada (para ambientes de leitura e de desenho, onde se desejam reduzir o reflexo, deve-se utilizar lâmpadas fluorescentes aos pares, sendo uma branca tipo “luz do dia” e outra “branca fria”, apresentando esta última luz mais avermelhada).

A cobertura de uma mesa para desenho deve ser de cor clara, objetivando refletir a maior parte da luz que atravessa o papel, fazendo com que este fique mais claro e evidencie mais adequadamente os traços. No caso de desenhar diretamente numa folha de papel, sobre uma mesa não específica para desenho, deve-se utilizar como forro uma outra folha de papel em branco.

1.13. Outros materiais:

Existem muitos outros materiais de desenho, mas que somente serão referidos quando de suas utilizações.

1.14. EXERCÍCIOS

Objetivo: Utilizar lápis ou lapiseira, esquadros, régua graduada, compasso e transferidor.

Conhecimentos necessários: Obtenção de ângulos por meio dos esquadros. Traçado de paralelas e de perpendiculares com os esquadros. Utilização da régua graduada. Utilização do lápis ou lapiseira. Utilização do compasso e do transferidor.

1. Obter, com o par de esquadros, ângulos de: 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150 e 165°.
2. Traçar segmentos de reta horizontais com os seguintes comprimentos: a. 5,05 cm. b. 7,35 cm. c. 8,88 cm. d. 9,45 cm. e. 10,00 cm. f. 11,03 cm. g. 12,15 cm. h. 13,13 cm. i. 14,25 cm. j. 14,85 cm.
3. Obter, com o transferidor, ângulos de: 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150 e 165°.
4. Traçar cinco retas horizontais paralelas e distanciadas 1,00 cm uma da outra.
5. Traçar cinco retas inclinadas de 60,0°, paralelas e distanciadas 1,00 cm uma da outra. Salvo referência em contrário, a inclinação é relativa à horizontal.
6. Traçar uma reta perpendicular a uma reta inclinada de um ângulo α igual a: 0°, 30,0°, 45,0° e 60,0°.
7. Traçar circunferências concêntricas (de mesmo centro) de raios: 1,00; 2,00; 3,00; 4,00 e 5,00 cm.
8. Desenhar retângulos de lados a e b, sendo: 1. a = 2,50 cm e b = 3,00 cm. 2. a = 3,00 cm e b = 3,00 cm. 3. a = 3,00 cm e b = 4,00 cm. 4. a = 3,00 cm e b = 5,00 cm. 5. a = 4,00 cm e b = 6,00 cm.
9. Desenhar quadrados, inscritos sucessivamente, de mesmo centro geométrico, de lados: a. 2,50 cm. b. 3,00 cm. c. 4,00 cm. d. 5,00 cm. e. 6,00 cm.
10. Desenhar triângulos equiláteros (ângulos internos iguais a 60°) de lados: a. 2,00 cm. b. 3,00 cm. c. 4,00 cm. d. 5,00 cm. e. 6,00 cm.
11. Desenhar triângulos retângulos de lados a, b e c: 1. a = 1,50 cm, b = 2,00 cm e c = 2,50 cm. 2. a = 3,00 cm, b = 4,00 cm e c = 5,00 cm. 3. a = 6,00 cm, b = 8,00 cm e c = 10,00 cm.

2. O PONTO.

2.1. Introdução:

a. Objetivos:

a.1. Representar um ponto espacialmente e em *épura*.

a.2. Ler a *épura* de um ponto.

a.3. Identificar pontos simétricos.

b. *Conceito*: Interseção entre duas retas (quanto mais perpendiculares forem as duas retas, melhor definido é o ponto) - Figura 14; um pingo no i; um ponto de giz; um ponto de lápis, etc. (pode-se representar um ponto de várias maneiras, mas é uma entidade matemática sem dimensões).

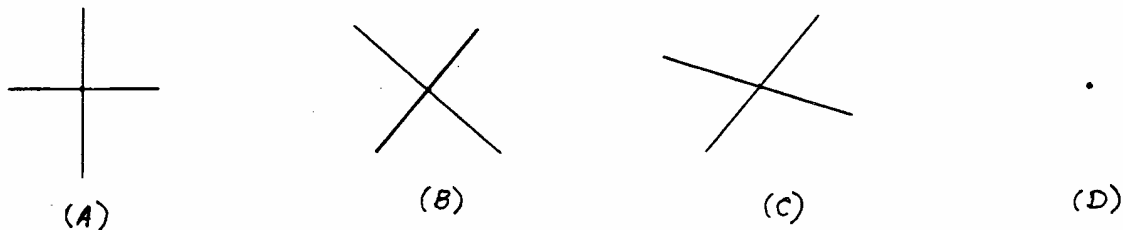


FIGURA 14. O ponto.

2.2. Elementos de projeção (Figura 15):

a. *Ponto objetivo ou objeto* (A), (B) ou (C): É o ponto que se quer projetar sobre o plano de projeção considerado.

b. *Plano de projeção* (α): É o plano utilizado para projetar o ponto considerado.

c. *Centro de projeção* (O): É o ponto por onde passa todas as retas utilizadas para projetar os pontos objetos no plano de projeção.

Em termos práticos pode ser considerado como uma fonte de luz puntiforme, uma pequena lâmpada ou a chama de uma vela, ou pode ser uma fonte de luz extensa, como o Sol, entretanto neste caso as retas são paralelas.

O critério utilizado para definir se uma fonte é puntiforme ou extensa é a distância entre esta e o plano de projeção (ou as dimensões da fonte e do objeto). Quando o centro de projeção e o plano de projeção estão a uma distância finita (ou que a fonte é muito menor que o objeto), ele é considerado **centro de projeção próprio** (Figura 15); quando a distância é considerada infinita (ou que a fonte é muito maior que o objeto), ele é considerado **centro de projeção impróprio** (Figura 17).

a. *Projetante* (O)(A), (O)(B) ou (O)(C). É a reta que passa pelo Centro de Projeção e pelo ponto considerado.

b. *Projeção de um ponto em um plano, A, B ou C:* É o ponto resultante da interseção entre a projetante do ponto objeto considerado e o plano de projeção.

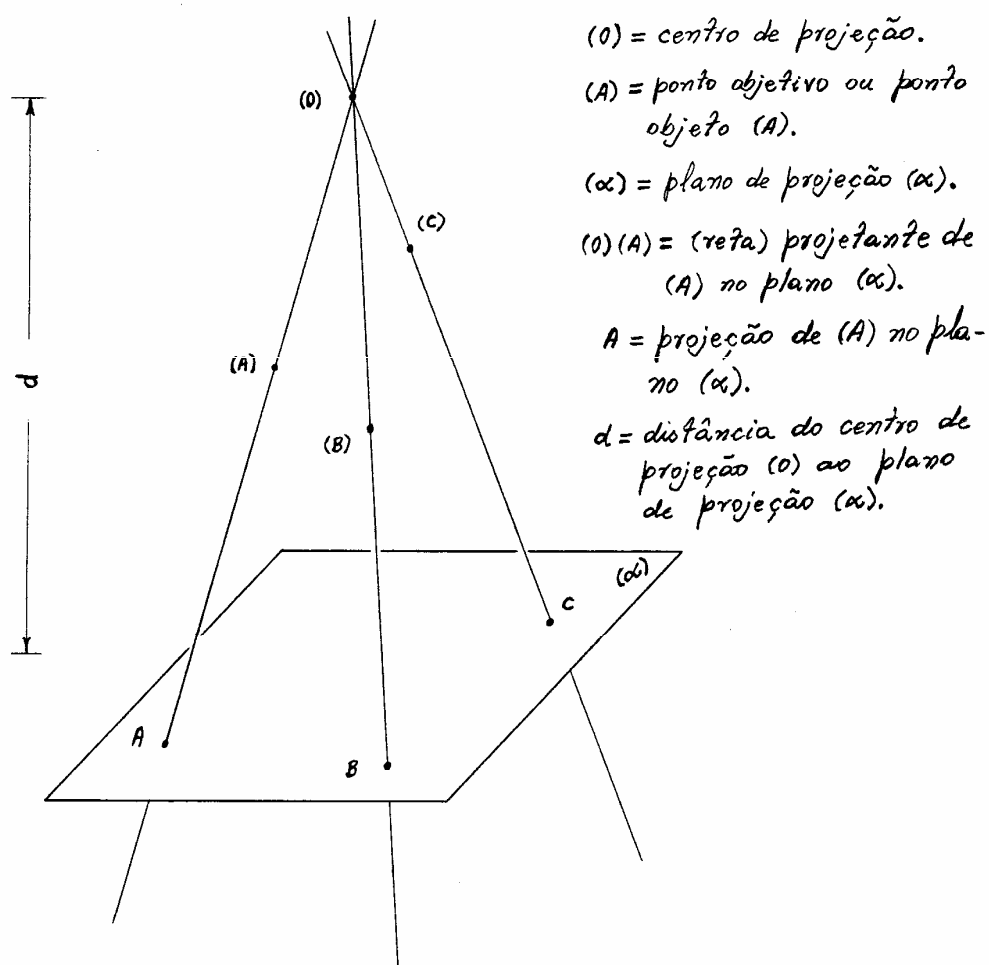


FIGURA 15. Elementos de projeção.

2.3. Projeções cônicas e projeções cilíndricas ou paralelas:

a. *Projeção cônica:* É a obtida quando o centro de projeção é próprio (O) , estando a uma distância finita do plano de projeção. Na Figura 16, $A_1, A_2, A_3, \dots$ e A_7 são as projeções cônicas dos pontos objetos $(A_1), (A_2), (A_3), \dots$ e (A_7) , e ℓ é a

projeção cônica da linha objeto (ℓ). Deve-se observar que a forma da figura sugere ser de uma projeção cônica.

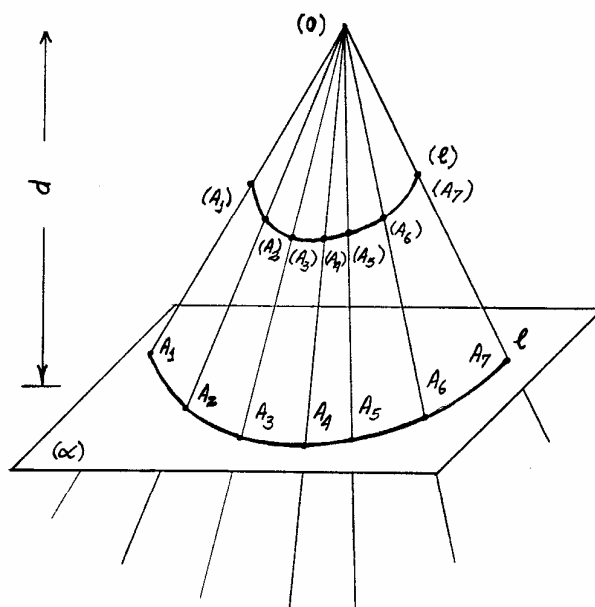


FIGURA 16. Projeção cônica.

b. Projeção cilíndrica ou paralela: É a obtida quando o centro de projeção é impróprio (O_∞), estando a uma distância infinita do plano de projeção. Na Figura 17, $A_1, A_2, A_3, \dots$ e A_6 são as projeções cilíndricas dos pontos objetos $(A_1), (A_2), (A_3), \dots$ e (A_6) , e ℓ é a projeção cilíndrica da linha objeto (ℓ). Deve-se observar que a forma da figura sugere ser de uma projeção cilíndrica, que a direção do segmento de reta orientado (d) é a direção das projetantes e que o seu sentido indica a localização do centro de projeção. Na projeção cilíndrica as projetantes são paralelas, daí ser também denominada projeção paralela.

2.4. Projeções cilíndricas oblíquas e ortogonais:

a. Projeção cilíndrica oblíqua (Figura 18): É a projeção cilíndrica em que a direção das projetantes forma um ângulo oblíquo ($0 < \theta < 90^\circ$) com o plano de projeção.

b. Projeção cilíndrica ortogonal (Figura 19): É a projeção cilíndrica em que a direção das projetantes forma um ângulo igual a 90° com o plano de projeção.

OBSERVAÇÕES:

b.1. Ortogonal significa ser perpendicular ao plano em qualquer direção. O ângulo de 90° é entre o segmento de reta orientado (d) e o plano, tendo como consequência que o ângulo é de 90° quando considerado entre (d) e qualquer reta do plano; na Figura 19-b mostra-se que (d) é perpendicular a duas retas do plano perpendiculares entre si, sendo, portanto, ortogonal ao plano.

b.2. A palavra *normal* também é utilizada para expressar a ortogonalidade de uma reta a um plano.

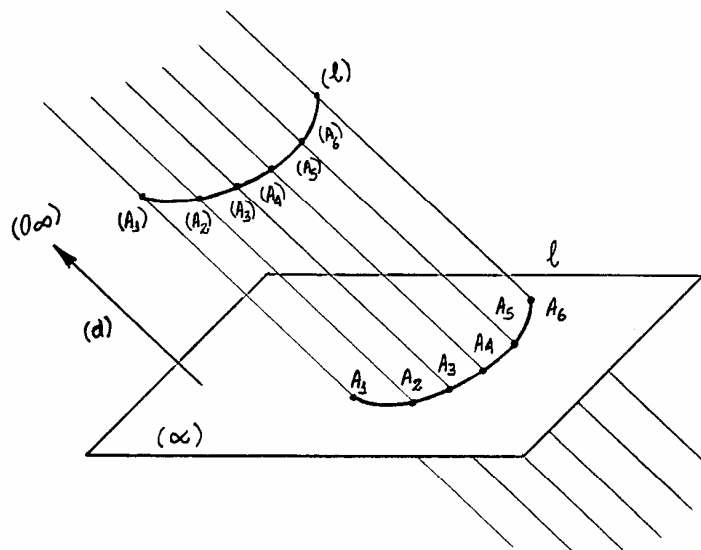


FIGURA 17. Projeção cilíndrica ou paralela.

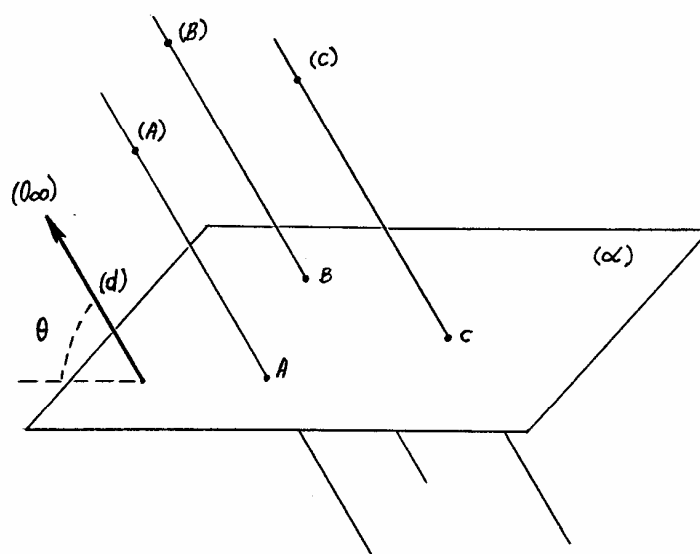


FIGURA 18. Projeção cilíndrica oblíqua ($0 < \theta < 90^\circ$).

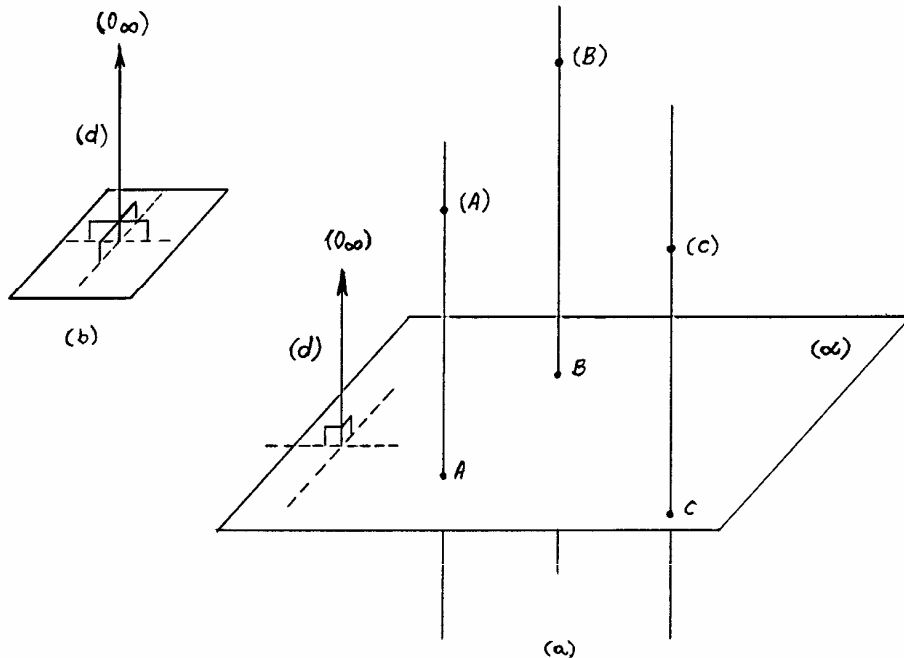


FIGURA 19. Projeção cilíndrica ortogonal ($\theta = 90^\circ$).

b.3. *Perpendicular* significa que o segmento de reta orientado (d) forma um ângulo de 90° apenas em uma direção, devendo, para o caso de mais de uma direção, ser especificada.

b.4. Muitas vezes *perpendicular* é utilizada com o significado de *ortogonal*.

2.5. O espaço (Figura 20):

a. *Planos de projeção:* Para definir o espaço utilizado para estudar os pontos, retas e planos nele contidos, definem-se dois planos principais de projeção: o *plano de projeção horizontal* (π) (Figura 20-b), e o *plano de projeção vertical* (π') (Figura 20-c).

b. *Linha de terra:* A interseção entre os planos horizontal e vertical de projeção, (π) e (π'), resulta numa reta denominada LINHA DE TERRA, inicialmente representada por $\pi'\pi$ ou por LT (Figura 20-a). A linha de terra é comum aos dois planos de projeção.

c. *Semi-planos de projeção:* A linha de terra divide cada plano de projeção em duas partes iguais ou dois semi-planos (Figura 20-a), sendo:

c.1. (π_A) o semi-plano horizontal anterior (SPHA), a parte do plano horizontal de projeção à direita da linha de terra, $\pi'\pi$;

c.2. (π_P) o semi-plano horizontal posterior (SPHP), a parte do plano horizontal de projeção à esquerda da linha de terra, $\pi'\pi$;

c.3. (π'_S) o semi-plano vertical superior (SPVS), a parte do plano vertical de projeção acima da linha de terra, $\pi'\pi$;

c.4. (π'_I) o semi-plano vertical inferior (SPVI), a parte do plano vertical de projeção abaixo da linha de terra, $\pi'\pi$.

d. *Diedros*: As regiões compreendidas entre os semi-planos de projeção são denominadas DIEDROS (Figura 20-a), sendo:

d.1. $1^\circ d = 1^\circ$ diedro, a região compreendida entre (π_A) e (π'_S) ;

d.2. $2^\circ d = 2^\circ$ diedro, a região compreendida entre (π_P) e (π'_S) ;

d.3. $3^\circ d = 3^\circ$ diedro, a região compreendida entre (π_P) e (π'_I) ;

d.4. $4^\circ d = 4^\circ$ diedro, a região compreendida entre (π_A) e (π'_I) .

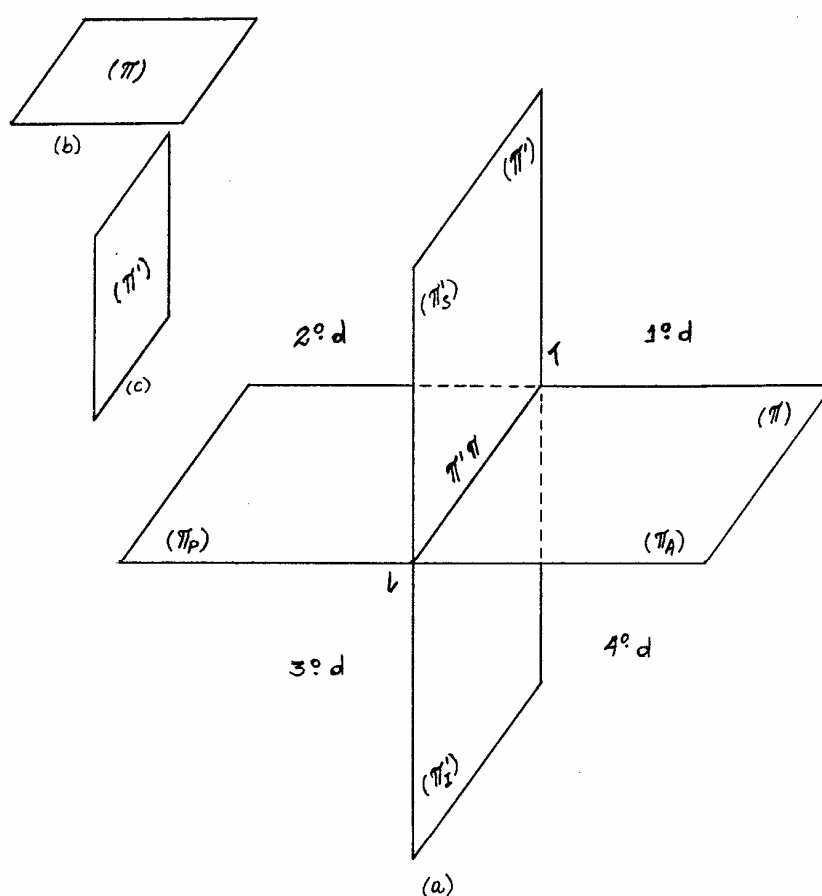


FIGURA 20. O espaço.

2.6. Representação de um ponto no espaço por suas coordenadas descritivas:

Para representar um ponto (A) no espaço, obtêm-se as suas projeções ortogonais horizontal, A, e vertical, A', respectivamente nos planos de projeção horizontal (π) e vertical (π') (Figura 21-a).

a. *Afastamento de um ponto (y)*: A posição da projeção horizontal do ponto, A, em relação à linha de terra, é denominada afastamento do ponto (A); se medido no SPHA é positivo, $y > 0$ (Figura 21-a e d), se no SPHP é negativo, $y < 0$ (Figura 21-b e c).

b. *Cota de um ponto (z)*: A posição da projeção vertical do ponto, A', em relação à linha de terra, é denominada cota do ponto (A); se medida no SPVS é positiva, $z > 0$ (Figura 21-a e b), se no SPVI é negativa, $z < 0$ (Figura 21-c e d).

c. *Plano de perfil que contém o ponto*: O plano (ρ), determinado pelas projetantes (A)A e (A)A', na Figura 21-a, perpendicular aos planos de projeção horizontal e vertical, sendo, portanto, perpendicular à linha de terra, é denominado *plano de perfil*; TODO E QUALQUER PONTO NO ESPAÇO SITUA-SE EM UM PLANO DE PERFIL (Figura 21).

d. *Projeção do ponto na linha de terra*: A interseção entre o plano de perfil (ρ) que contém o ponto, (A), na Figura 21-a, e a linha de terra $\pi'\pi$ resulta em um ponto, A₀ (A zero), que é a projeção ortogonal do ponto (A) na linha de terra. A INTERSEÇÃO ENTRE O PLANO DE PERFIL, (ρ) OU (σ), na Figura 21, DE QUALQUER PONTO (P) NO ESPAÇO E A LINHA DE TERRA, RESULTA EM UM PONTO P₀ QUE É A PROJEÇÃO DO PONTO NA LINHA DE TERRA.

e. *Abcissa (x)*: Para determinar a posição do ponto (A) ao longo da linha de terra (Figura 21-a), ou a posição do plano de perfil (ρ) que contém o ponto, ou a posição da projeção do ponto (A) na linha de terra A₀, é necessário estabelecer-se um referencial.

Plano de perfil de referência: Toma-se inicialmente um outro plano de perfil como referencial, o (ω). A interseção entre este plano referencial e a linha de terra resulta no ponto O, que é a origem que deve ser escolhida na linha terra para que, relativamente a esta origem, seja medida a abcissa. Considerando um observador que sempre vê à sua frente os 1º e 4º diedros, se a abcissa for medida na linha de terra para a direita da origem, ela é positiva, ($x > 0$) (Figura 21); se for medida para a esquerda, é negativa ($x < 0$). Por facilidade de trabalhar, normalmente utilizam-se mais abcissas positivas, como resultado da escolha da origem O mais à esquerda possível.

f. *Representação de um ponto por suas coordenadas descritivas*: As coordenadas: abcissa (x), afastamento (y) e cota (z) de um ponto são denominadas *coordenadas descritivas* deste ponto.

Um ponto é caracterizado numericamente pela expressão (P) [x; y; z], onde (P) significa o ponto objeto, x a sua abcissa, y o seu afastamento e z a sua cota, separados por ponto e vírgula, sempre entre colchetes. Para um ponto no: 1º diedro (Figura 21-a), (A) [x; y > 0; z > 0]; 2º diedro (Figura 21-b), (B) [x; y < 0; z > 0]; 3º diedro (Figura 21-c), (C) [x; y < 0; z < 0]; 4º diedro (Figura 21-d), (D) [x; y > 0; z < 0]. Quando um ponto situa-se em: (π_A), (P) [x; y > 0; z = 0]; (π_P), (P) [x; y < 0; z = 0]; (π'_S), (P) [x; y = 0; z > 0]; (π'_I), (P) [x; y = 0; z < 0]; ($\pi'\pi$), (P) [x; y = 0; z = 0].

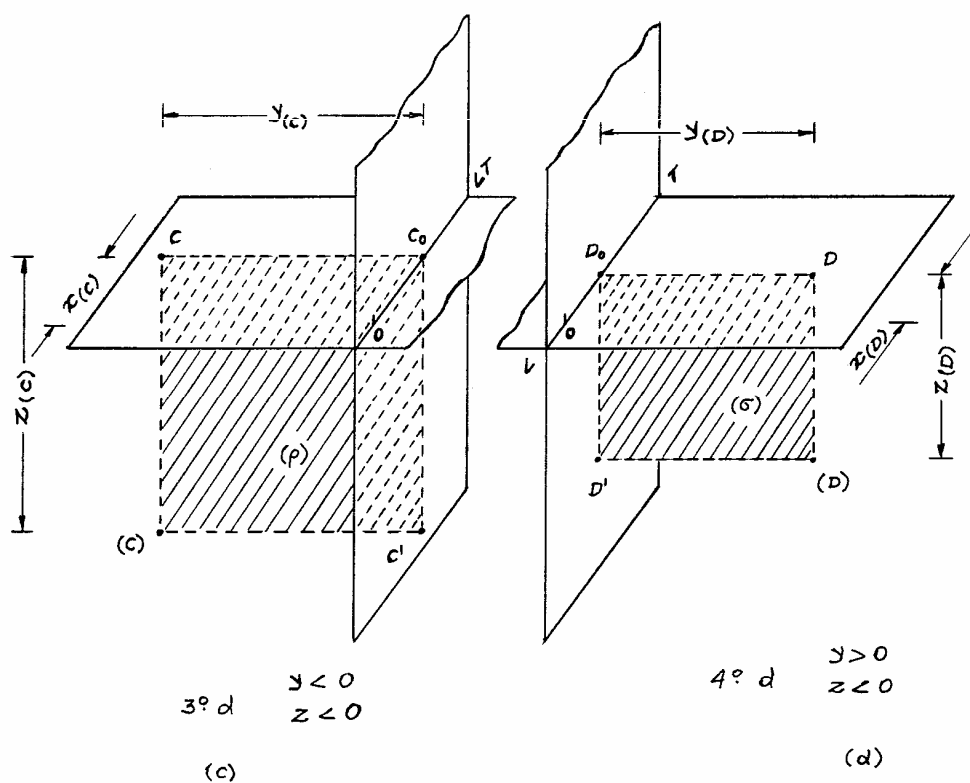
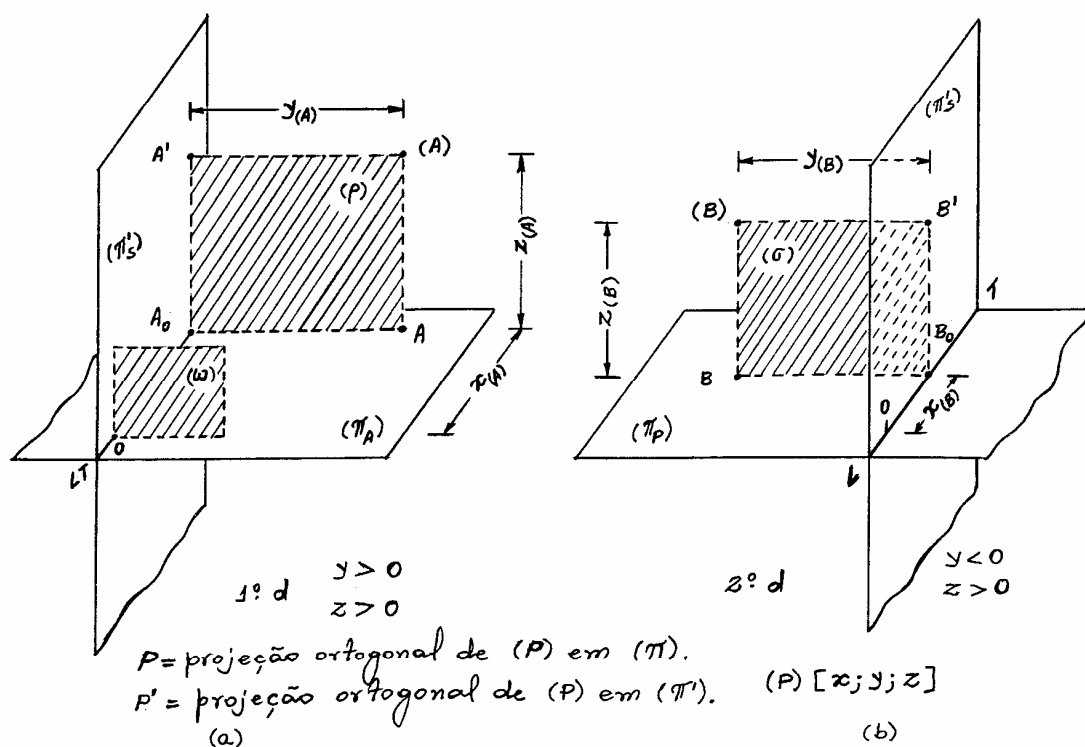


FIGURA 21. Representação de um ponto por suas coordenadas descritivas: x = abscissa; y = afastamento; z = cota.

2.7. Épura:

a. Conceito: Figura plana que representa a superposição dos planos de projeção horizontal e vertical (Figura 22-c).

b. Obtenção: Obtém-se uma épura girando em torno da linha de terra, no sentido horário, de 90° , o plano horizontal para cima do plano vertical, obtendo-se $(\pi_P) \equiv (\pi'_S)$ acima da linha de terra e $(\pi_A) \equiv (\pi'_I)$ abaixo (Figura 22).

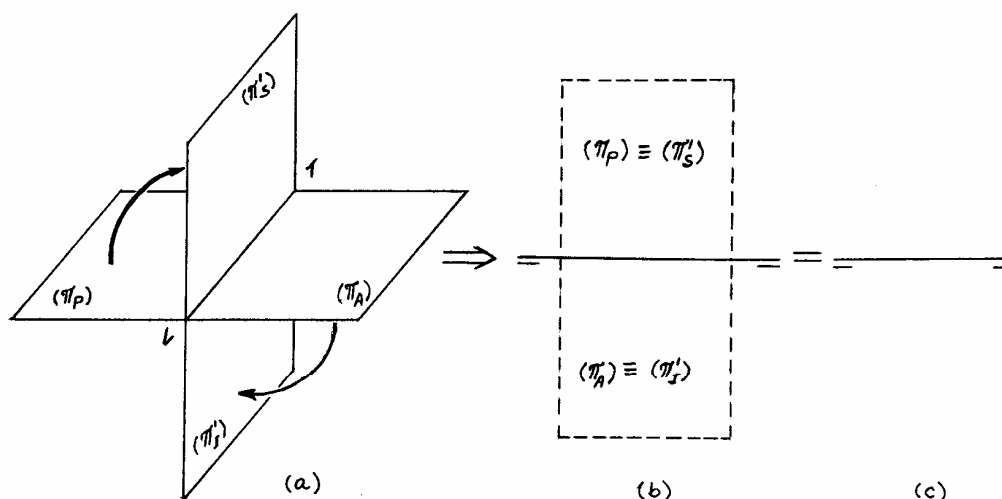


FIGURA 22. Obtenção da épura.

c. Coordenadas descritivas de um ponto em épura (Figura 23). Representações de abscissa, afastamento e cota de qualquer ponto:

c.1. Abscissa (x): A abscissa x dá a posição da projeção do ponto na linha de terra (P_0). Escolhe-se uma origem qualquer, O , e a partir dela mede-se a abscissa x , para a direita, quando esta for positiva ($x > 0$), ou para a esquerda, quando for negativa ($x < 0$). Na maioria dos exercícios encontram-se abscissas positivas, devendo-se, normalmente, tomar a origem mais à esquerda do espaço reservado ao desenho.

c.2. Afastamento (y): O afastamento positivo ($y > 0$) é sempre medido da linha de terra para baixo; o negativo ($y < 0$) é sempre medido da linha de terra para cima. $y > 0 \Rightarrow$ a projeção horizontal localiza-se em (π_A) e $y < 0 \Rightarrow$ a projeção horizontal localiza-se em (π_P) .

c.3. Cota (z): A cota positiva ($z > 0$) é sempre medida da linha de terra para cima; a negativa ($z < 0$) é sempre medida da linha de terra para baixo. $z > 0 \Rightarrow$ a projeção vertical localiza-se em (π'_S) e $z < 0 \Rightarrow$ a projeção vertical localiza-se em (π'_I) .

d. Representação de um ponto em épura através de suas coordenadas descritivas: 1º diedro (1º d), Figura 24-b, $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$. 2º diedro (2º d), Figura 25-b, $x > 0$, $y < 0$ e $z > 0$. 3º diedro (3º d), Figura 26-b, $x > 0$, $y < 0$ e $z < 0$. 4º diedro (4º d), Figura 26-d, $x > 0$, $y > 0$ e $z < 0$.

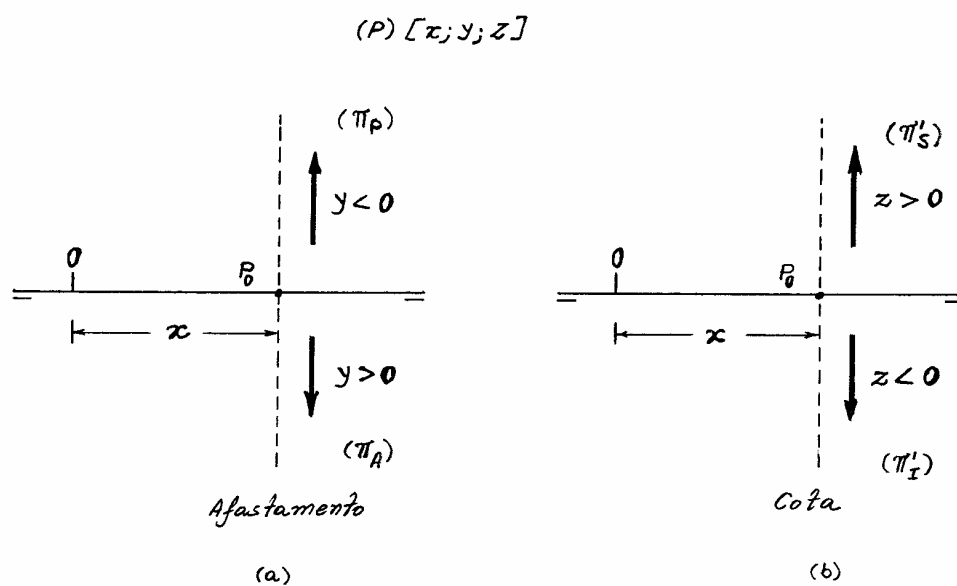


FIGURA 23. Coordenadas descritivas de um ponto em é pura.

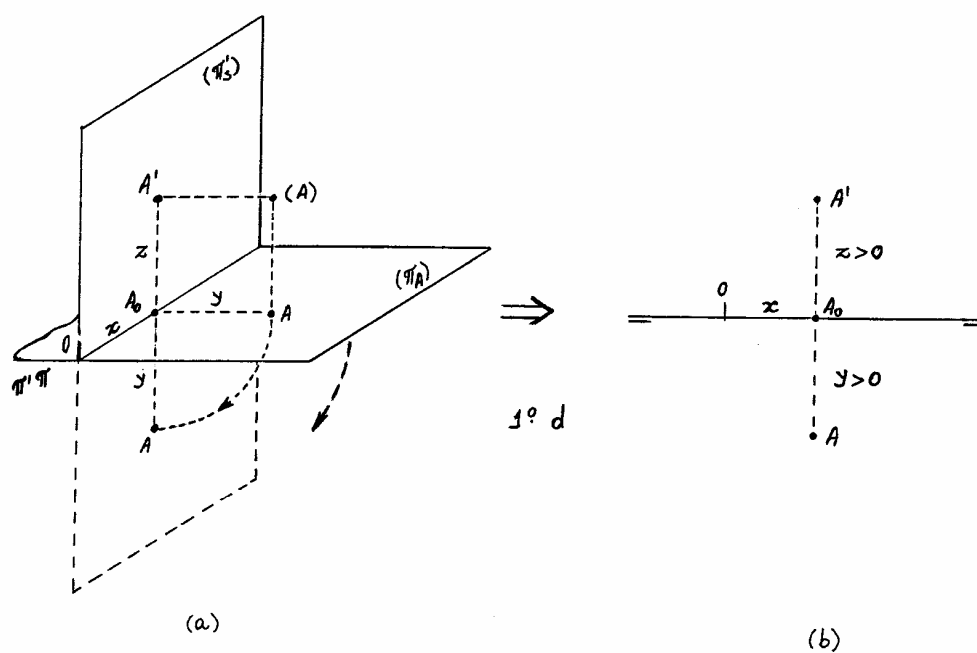


FIGURA 24. Representação de um ponto em é pura - 1º diedro (b).

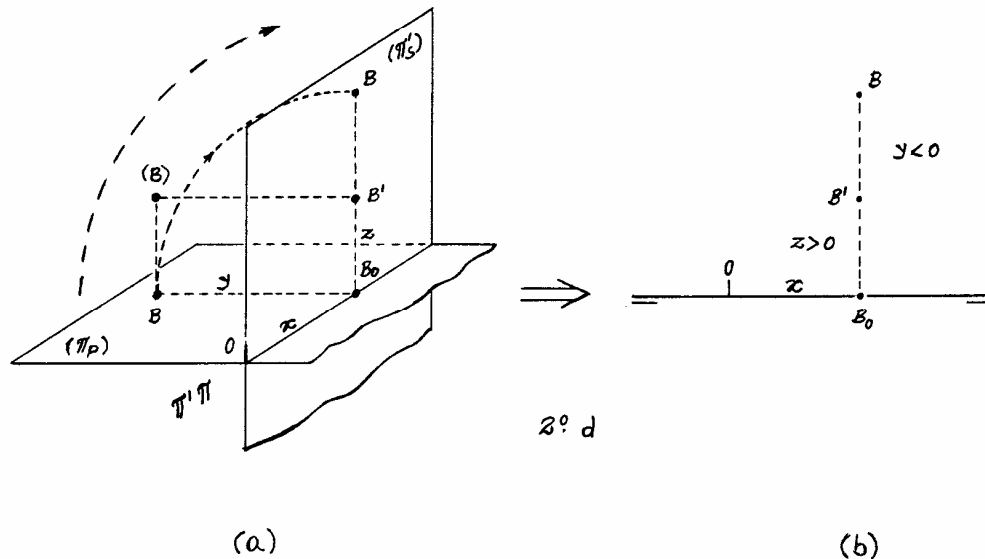


FIGURA 25. Representação de um ponto em épura - 2º diedro (b).

OBSERVAÇÕES:

1. As projeções do ponto (P), P, P' e P₀, estão situadas numa mesma reta, perpendicular à linha de terra, denominada LINHA DE CHAMADA.

2. Em todas as épuras o observador sempre vê à sua frente ($\pi'_S \equiv (\pi_P)$) acima da linha de terra, ($\pi'_I \equiv (\pi_A)$) abaixo, e a origem sempre à esquerda.

3. Salvo observação contrária, nos exercícios, a **unidade utilizada para as coordenadas descritivas** de um ponto (abscissa, afastamento e cota) é o centímetro (cm).

2.8. Planos bissetores:

a. *Bissetor ímpar* (β_I) e *bissetor par* (β_P) (Figura 27):

a.1. *Bissetor ímpar* (β_I): Plano que passa pelos 1º e 3º diedros dividindo-os em duas regiões ou setores exatamente iguais. O ângulo que o bissetor ímpar forma com os planos de projeção horizontal e vertical é 45°. O (β_I) é também denominado de 1º bissetor, sendo também representado por β_I ou β_{13} .

a.2. *Bissetor par* (β_P): Plano que passa pelos 2º e 4º diedros dividindo-os em duas regiões ou setores exatamente iguais. O ângulo que o bissetor par forma com os planos de projeção horizontal e vertical é 45°. O (β_P) é também denominado de 2º bissetor, sendo também representado por β_P ou β_{24} .

Em exercícios envolvendo os planos bissetores, costuma-se representá-los em corte (Figura 28), obtido por meio de um plano de perfil (ρ) (Figura 27).

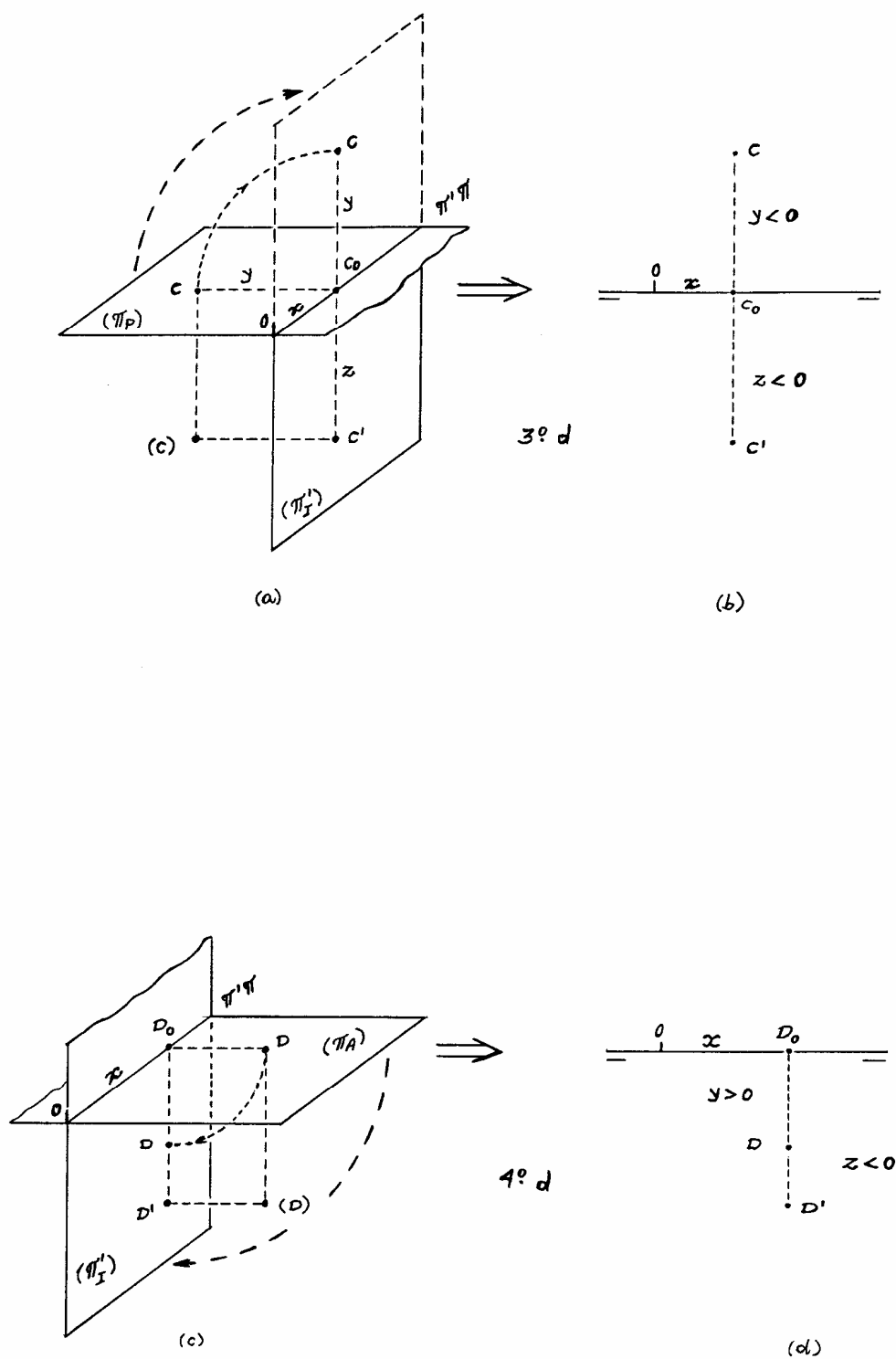


FIGURA 26. Representação de um ponto em écura: 3º diedro (b). 4º diedro (d).

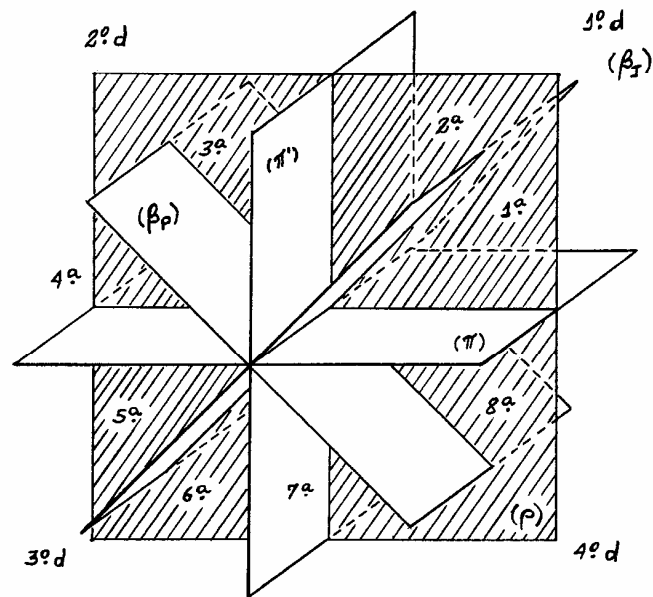


FIGURA 27. Planos bissetores ímpar (β_I) e par (β_P).

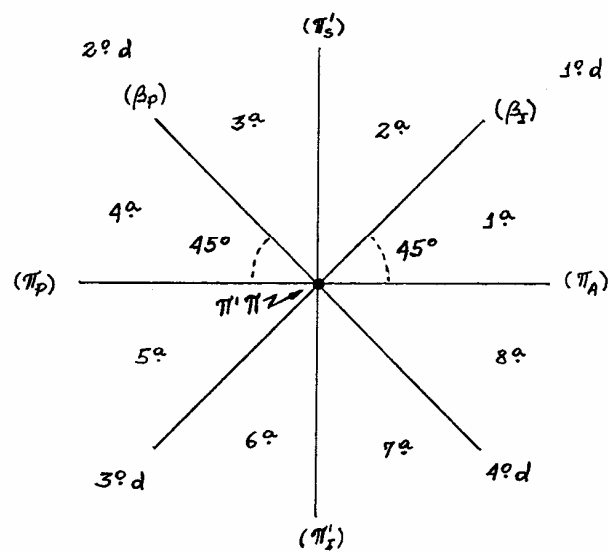


FIGURA 28. Corte dos planos de projeção, (π) e (π') , e dos planos bissetores, (β_I) e (β_P) .

Os bissetores dividem o espaço compreendido entre os planos de projeção em oito regiões (Figuras 27 e 28). A primeira é a compreendida entre o semi-plano horizontal anterior (π_A) e o bissetor ímpar (β_I); a segunda entre o plano bissetor ímpar (β_I) e o semi-plano vertical superior (π'_S); assim sucessivamente, no sentido anti-horário.

b. Coordenadas de pontos nos bissetores e suas representações em épura:

b.1. Coordenadas de pontos no bissetor ímpar (β_I) - cota e afastamento iguais ($z_{(P)} = y_{(P)}$) $\Rightarrow$ em épura as projeções horizontal e vertical são simétricas, relativamente à linha de terra (Figura 29).

b.2. Coordenadas de pontos no bissetor par (β_P) - cota e afastamento simétricos ($z_{(P)} = -y_{(P)}$) $\Rightarrow$ em épura as projeções horizontal e vertical são coincidentes (Figura 30).

2.9. Simetria de dois pontos:

a. Conceito:

Dois pontos são simétricos em relação a um plano quando o segmento de reta que os une é ortogonal ao plano ($\Rightarrow$ os pontos apresentam a mesma abscissa, por estarem contidos em um mesmo plano de perfil) e admite um ponto médio neste plano, de modo que os pontos equidistam do plano (Figura 31).

b. Simetria em relação a (π):

Além da mesma abscissa ($x_{(A)} = x_{(B)}$), os pontos apresentam o mesmo afastamento, mas cotas simétricas ($y_{(A)} = y_{(B)}$ e $z_{(A)} = -z_{(B)}$). Exemplo: (A) [?; 2; 2,4] e (B) [?; 2; -2,4] $\Rightarrow$ as projeções horizontais são coincidentes ($A \equiv B$) e as verticais (A' e B') são simétricas (Figura 32).

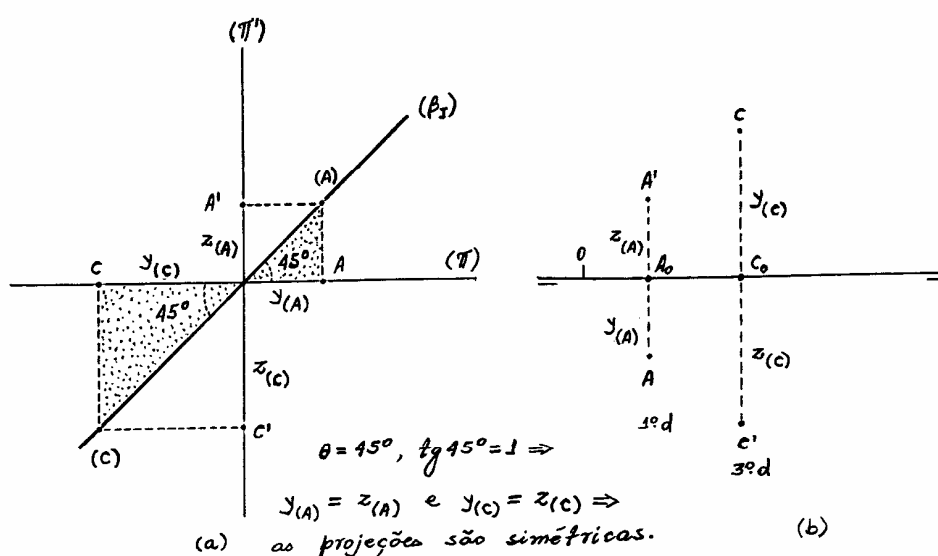


FIGURA 29. Coordenadas de pontos no bissetor ímpar (β_I).

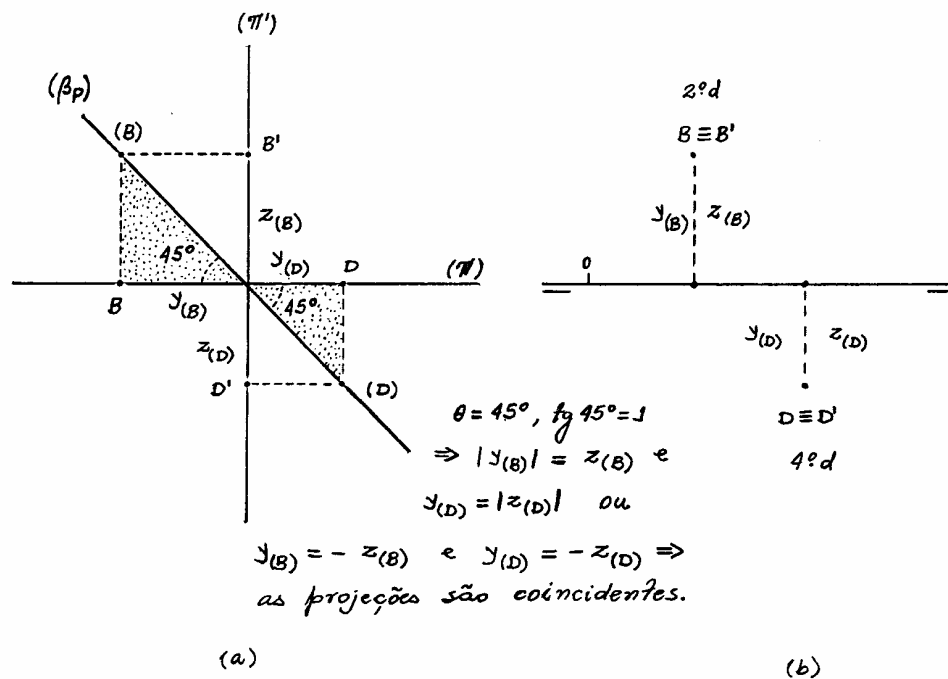


FIGURA 30. Coordenadas de pontos no bissetor par (β_P) .

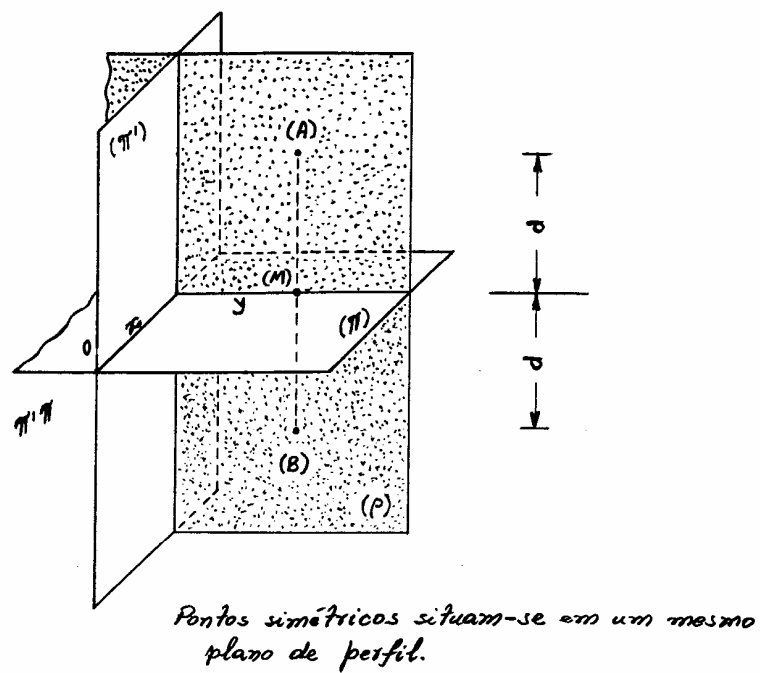


FIGURA 31. Simetria de dois pontos.

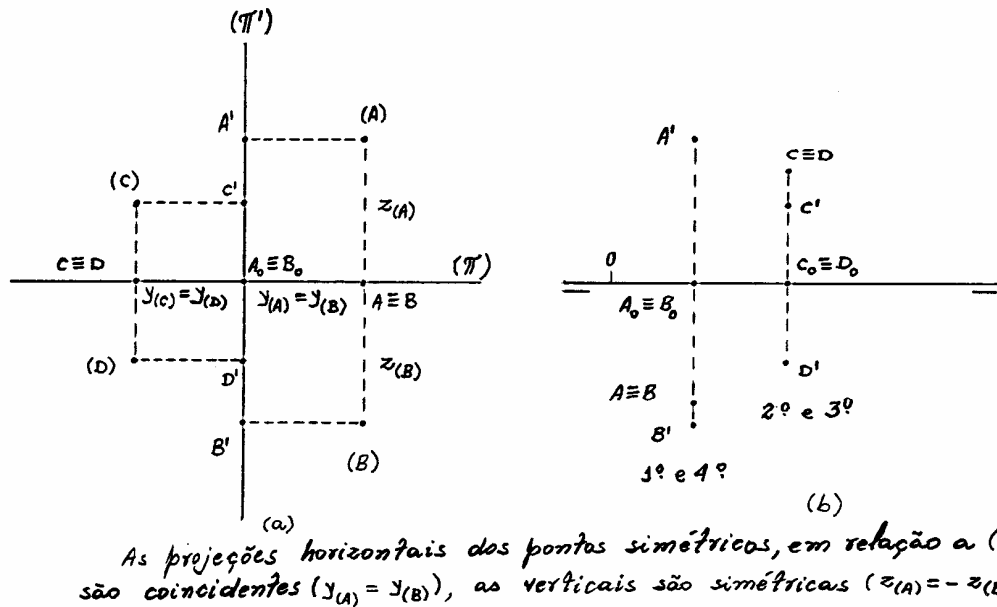


FIGURA 32. Simetria de dois pontos em relação a (π) .

c. Simetria em relação a (π') :

Além da mesma abscissa ($x_{(A)} = x_{(B)}$), os pontos apresentam a mesma cota, mas afastamentos simétricos ($z_{(A)} = z_{(B)}$ e $y_{(A)} = -y_{(B)}$). Exemplo: (A) [?; 2; 2,4] e (B) [?; -2; 2,4] $\Rightarrow$ as projeções verticais são coincidentes ($A' \equiv B'$) e as horizontais (A e B) simétricas (Figura 33).

d. Simetria em relação a $\pi'\pi$:

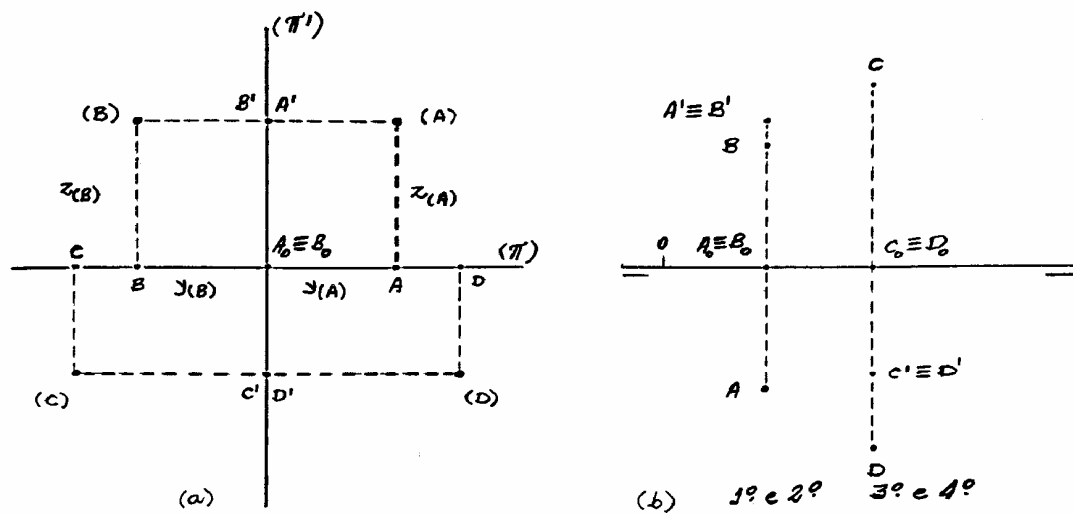
Além da mesma abscissa ($x_{(A)} = x_{(C)}$), os pontos apresentam afastamentos simétricos e cotas simétricas ($y_{(A)} = -y_{(C)}$ e $z_{(A)} = -z_{(C)}$). Exemplo: (A) [?; 2,3; 3,3] e (C) [?; -2,3; -3,3] $\Rightarrow$ projeções horizontais (A e C) simétricas e projeções verticais (A' e C') simétricas (Figura 34). Os pontos são simultaneamente simétricos ao (π) e ao (π') .

e. Simetria em relação ao (β_I) :

Além da mesma abscissa ($x_{(A)} = x_{(B)}$), os pontos apresentam cotas e afastamentos de valores trocados; isto é: a cota de um é o afastamento do outro e vice-versa ($y_{(B)} = z_{(A)}$ e $y_{(A)} = z_{(B)}$). Exemplo: (A) [?; 2,88; 0,65] e (B) [?; 0,65; 2,88] $\Rightarrow$ as projeções de nomes contrários são simétricas (A é simétrica a B' e A' é simétrica a B) - Figura 35.

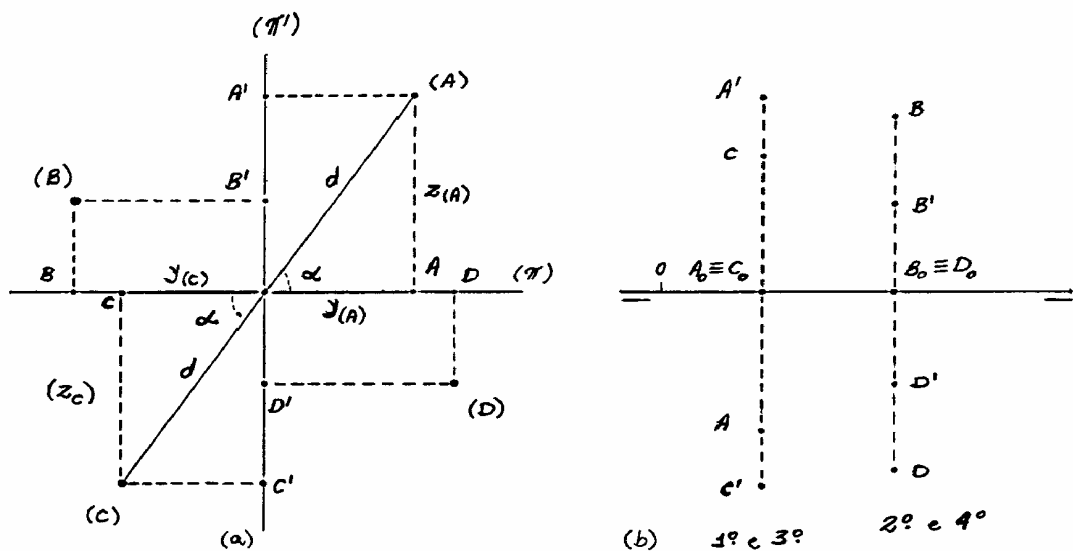
f. Simetria em relação ao (β_P) :

Além da mesma abscissa ($x_{(A)} = x_{(B)}$), os pontos apresentam cotas e afastamentos trocados e de sinais contrários; isto é: a cota de um é simétrica ao afastamento do outro e vice-versa ($z_{(B)} = -y_{(A)}$ e $z_{(A)} = -y_{(B)}$). Exemplo: (A) [?; -0,42; 3,05] e (B) [?; -3,05; 0,42] $\Rightarrow$ as projeções de nomes contrários são coincidentes (A coincide com B' e A' coincide com B) - Figura 36.



As projeções verticais dos pontos simétricos, em relação a (π') , são coincidentes ($z(A) = z(B)$), as horizontais são simétricas ($y(A) = -y(B)$).

FIGURA 33. Simetria de dois pontos em relação a (π') .



As projeções horizontais e as projeções verticais dos pontos simétricos, em relação a $\pi'\pi$, são simétricas ($y(A) = -y(B)$ e $z(A) = -z(B)$).

FIGURA 34. Simetria de dois pontos em relação a $\pi'\pi$.

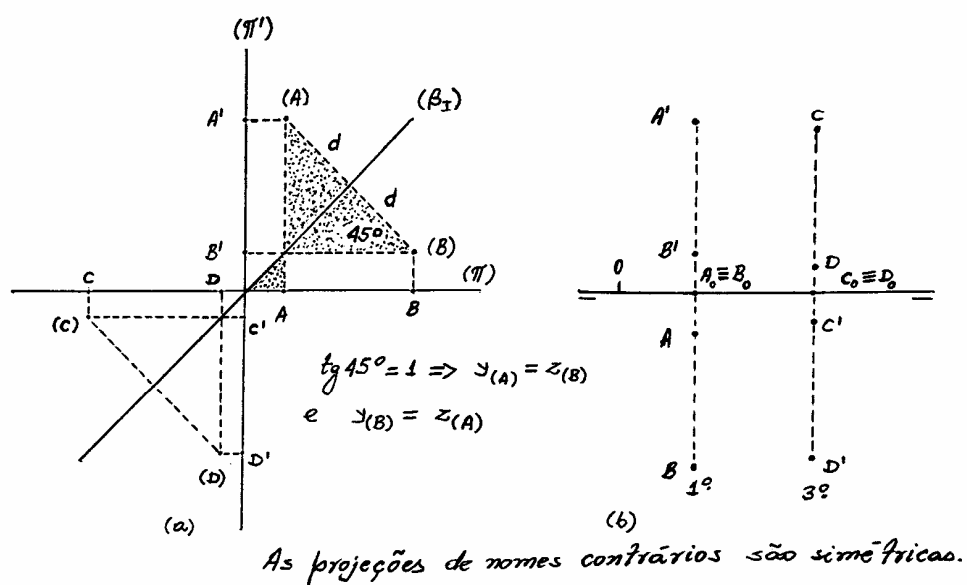


FIGURA 35. Simetria de dois pontos em relação ao (β_I) .

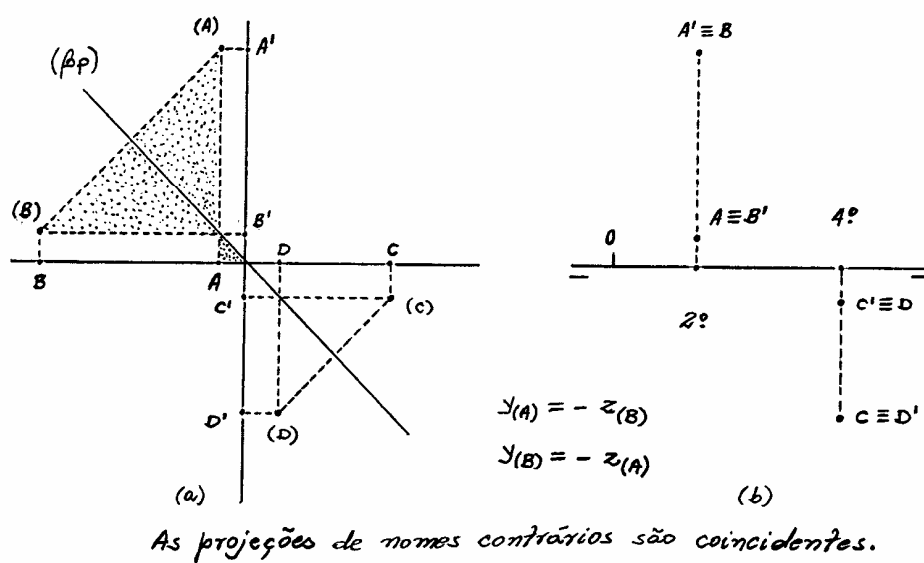


FIGURA 36. Simetria de dois pontos em relação ao (β_P) .

OBSERVAÇÃO:

Quando uma coordenada descritiva é um valor implícito do problema, já se conhecendo antecipadamente o seu valor, geralmente de forma conceitual, ela é representada por um ponto de interrogação. Como neste caso em que os dois pontos, por serem simétricos, sempre apresentam a mesma abscissa; se o seu valor fosse relevante para a solução de um problema, ele seria dado apenas em um ponto, no outro apareceria a interrogação. A interrogação também é utilizada quando o valor da coordenada é obtido com a elaboração do desenho.

2.10. EXERCÍCIOS**Ponto e simetria.**

Objetivos: Representar o ponto em épura. Ler épura de um ponto. Identificar as diferentes simetrias de dois pontos.

Conhecimentos necessários: Representação de um ponto em épura. Planos de projeção. Planos bissetores. Diedros.

Fontes: PINHEIRO, V. A. *Noções de Geometria Descritiva*; ponto, reta e plano. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970. Vol. I. p. 21-24.

PRÍNCIPE JÚNIOR, A. R. *Noções de geometria descritiva*. 37. ed. São Paulo: Nobel, 1990. Vol. I. p 21-30.

1. Representar por suas projeções os seguintes pontos:

1. (A) [2; 3; 1]. 2. (B) [4; -2; 5]. 3. (C) [6; -4; -2,5]. 4. (D) [8; 3; -1].
 5. (M) [10; 4; ?], situado em (π) . 6. (N) [12; ?; 3,5], situado em (π') . 7. (P) [14; -3; ?], situado em (π) . 8. (Q) [16; ?; -5], situado em (π') . 9. (X) [18; ?; ?], situado em $\pi' \pi$. 10. (Y) [20; 4; ?], situado em (β_I) . 11. (Z) [22; ?; -4], situado em (β_P) .

OBSERVAÇÕES: **a.** Utilizar uma só linha de terra para todos os pontos. **b.** Tomar a origem mais à esquerda possível; observar que a abscissa dada é sempre positiva e seu maior valor é 22 cm. **c.** Obter as coordenadas descritivas faltosas para cada ponto. **d.** $(P) \in (\pi) \Leftrightarrow z_{(P)} = 0$; $(P) \in (\pi') \Leftrightarrow y_{(P)} = 0$; $(P) \in (\pi' \pi) \Leftrightarrow y_{(P)} = z_{(P)} = 0$; $(P) \in (\beta_I) \Leftrightarrow z_{(P)} = y_{(P)}$; $(P) \in (\beta_P) \Leftrightarrow z_{(P)} = -y_{(P)}$.

2. Construir a épura dos pontos (A), (B), (C), (D) e (E), sabendo-se que:

1. O ponto (A) é simétrico de (M) [4; 2; 4] em relação ao plano (π) .
2. O ponto (B) é simétrico de (N) [8; -3; 2] em relação ao plano (π') .
3. O ponto (C) é simétrico de (P) [12; 5; -3] em relação a $\pi' \pi$.
4. O ponto (D) é simétrico de (Q) [16; 4; 2] em relação ao (β_P) .
5. O ponto (E) é simétrico de (R) [20; -4; -6] em relação ao (β_I) .

OBSERVAÇÃO: Utilizar uma só linha de terra.

SUGESTÃO: Observar que as três coordenadas descritivas de cada ponto pedido são dados implícitos do problema, uma vez que pontos simétricos apresentam a mesma abscissa. Assim, as abscissas de (A), (B), ... (E) são, respectivamente, 4, 8, ... 20. Determinar, em seguida, o afastamento e a cota de cada ponto pedido, com auxílio de vistas em corte.

3. O ponto (C) [4; 2; -5] é simétrico de (B) em relação a (π) , e este ponto é simétrico de (A), em relação ao (β_I) . Dar as projeções do ponto (A).

4. Ler as épuras dos itens 1 a 11 do *exercício 1*.

OBSERVAÇÃO: Ler a épura de um ponto dado é identificar a sua posição ou localização no espaço, por meio da épura; indicando o diedro, o bissetor, o semi-plano ou a linha de terra, em que o ponto se encontra.

5. Construir e ler as épuras dos seguintes pontos:

- | | | | |
|---------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| 1. (A) [4; 4; 0]. | 2. (B) [6; 0; -5]. | 3. (C) [8; 0; 0]. | 4. (D) [10; -5; 0]. |
| 5. (E) [12; 4; -4]. | 6. (F) [14; 3; 3]. | 7. (G) [16; -5; 5]. | 8. (H) [18; -2; -2]. |
| 9. (I) [20; 0; 5]. | | | |

OBSERVAÇÃO: Utilizar uma só linha de terra.

6. Instituir os critérios para que dois pontos sejam simétricos:

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 1. em relação a (π) ; | 2. em relação a (π') . | 3. em relação a $\pi'\pi$. |
| 4. em relação ao (β_I) ; e | 5. em relação ao (β_P) . | |

SUGESTÃO: Copiar as Figuras 32 a 36, os cortes e as respectivas épuras.

CONCLUI-SE que, em épura:

1. pontos simétricos em relação ao plano horizontal de projeção (π) têm projeções horizontais coincidentes e projeções verticais simétricas em relação a $\pi'\pi$;
 2. pontos simétricos em relação ao plano vertical de projeção (π') têm projeções verticais coincidentes e projeções horizontais simétricas em relação a $\pi'\pi$.
 3. pontos simétricos em relação à linha de terra têm projeções de mesmo nome simétricas em relação a $\pi'\pi$;
 4. pontos simétricos em relação ao bissetor ímpar (β_I) têm projeções de nomes contrários simétricas em relação a $\pi'\pi$;
 5. pontos simétricos em relação ao bissetor par (β_P) têm projeções de nomes contrários coincidentes.
7. Dar a épura dos pontos: (A) [-1; -2; -1], (B) [0; 1,5; -2] e (C) [1,5; 1; 1,5].
8. Dar a épura dos pontos: (A) [0; 0; 2], (B) [-1; 2; 0] e (C) [2; -1; 0].
9. Dar a épura dos pontos: (A) [-1; 2; 0], (B) [-3; 0; 0], (C) [0; -1,5; 0] e (D) [2; -1; 1].
10. Dar as épuras dos pontos (A), (B), (C), (D) e (E) situados: (A) no (π_A) ; (B) no 4º diedro e mais perto de (π') do que de (π) ; (C) em $\pi'\pi$; (D) no (π'_s) e (E) no (π_P) .
11. Dar a épura de um ponto (A) no 2º diedro com a cota igual a 1/3 do afastamento.
12. Traçar a épura dos pontos (A) e (B) situados respectivamente nos 1º e 2º bissetores, sabendo-se que (A) [-2; 1,5; ?] e (B) [1; ?; 2].
13. São dados os pontos (A) [0; 1; 2] e (B) [3; -3; 1,5]. Pedem-se as projeções de um ponto: 1. simétrico a (A) em relação ao plano (π) . 2. simétrico a (B) em relação ao plano (π') .
14. São dados os pontos (A) [1; 1; 1,5] e (B) [3; -1; 2]. Pedem-se as projeções de um ponto: 1. simétrico a (A) em relação ao plano (β_I) . 2. simétrico a (B) em relação ao plano (β_P) .

3. RETA GENÉRICA OU QUALQUER E RETA DE PERFIL.

3.1. Introdução:

a. Objetivos:

- a.1. Representar uma reta qualquer por suas projeções ortogonais, em é pura.
- a.2. Representar uma reta de perfil por suas projeções ortogonais e pela sua projeção lateral ou terceira projeção, em é pura.

a.3. Verificar se um ponto pertence a uma reta.

b. *Conceito*: Uma reta fica determinada ou individualizada no espaço quando se conhece dois de seus pontos, ou seja: Por dois pontos não coincidentes passa uma única reta, definida por estes pontos (Figura 37).

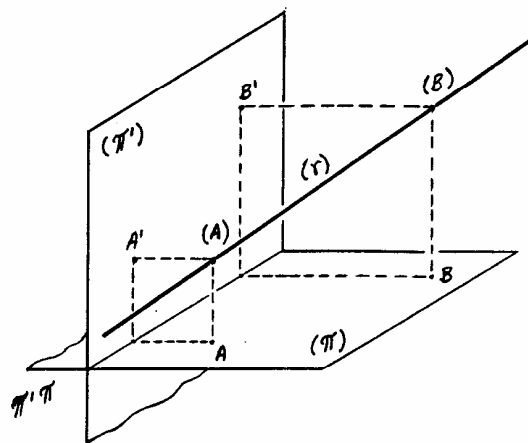


FIGURA 37. Reta qualquer ou genérica, (r) ou (A) (B).

3.2. Projeção ortogonal de uma reta em um plano (Figura 38): Obtém-se a projeção ortogonal de uma reta qualquer em um plano, através da projeção ortogonal de pelo menos dois de seus pontos neste plano. A reta que passa pelas projeções, A e B, dos dois pontos objetos, (A) e (B), é a projeção da reta objeto (r) no plano (Figura 38-a).

O plano (ρ) determinado pelas duas projetantes dos dois pontos é denominado *plano projetante* da reta no plano (α) (Figura 38-a e b). O plano projetante (ρ) também é determinado pela reta objeto (r) e sua projeção r no plano de projeção (α).

a. *Projeção de uma reta oblíqua ao plano de projeção* (Figura 38-a): A projeção da reta tem comprimento menor que o da reta ($AB = (A)(B) \cos\theta$). O plano projetante tem a forma de um trapézio retângulo.

b. *Projeção de uma reta paralela ao plano de projeção* (Figura 38-b) ou *situada ou aposta no plano de projeção* (Figura 38-c): A projeção da reta tem o

mesmo comprimento que o da reta objeto; ou seja: A PROJEÇÃO DE UMA RETA PARALELA AO PLANO DE PROJEÇÃO, OU DE UMA RETA APOSTA NO PLANO, ESTÁ EM VERDADEIRA GRANDEZA, VG (ou seja: os comprimentos dos segmentos da reta objeto e da projeção são iguais - $AB = (A)(B)$ e $CD = (C)(D)$, uma vez que $\theta = 0$). No caso da reta paralela ao plano de projeção, o plano projetante é um retângulo e quando ela é apostada no plano de projeção, o plano projetante reduz-se à própria reta.

c. *Projeção de uma reta ortogonal ao plano de projeção* (Figura 38-d): A projeção da reta no plano de projeção reduz-se (ou degenera-se) a um ponto e o plano projetante reduz-se à própria reta.

CONCLUSÃO: A projeção de uma reta é outra reta, excetuando-se quando a reta é ortogonal ao plano de projeção.

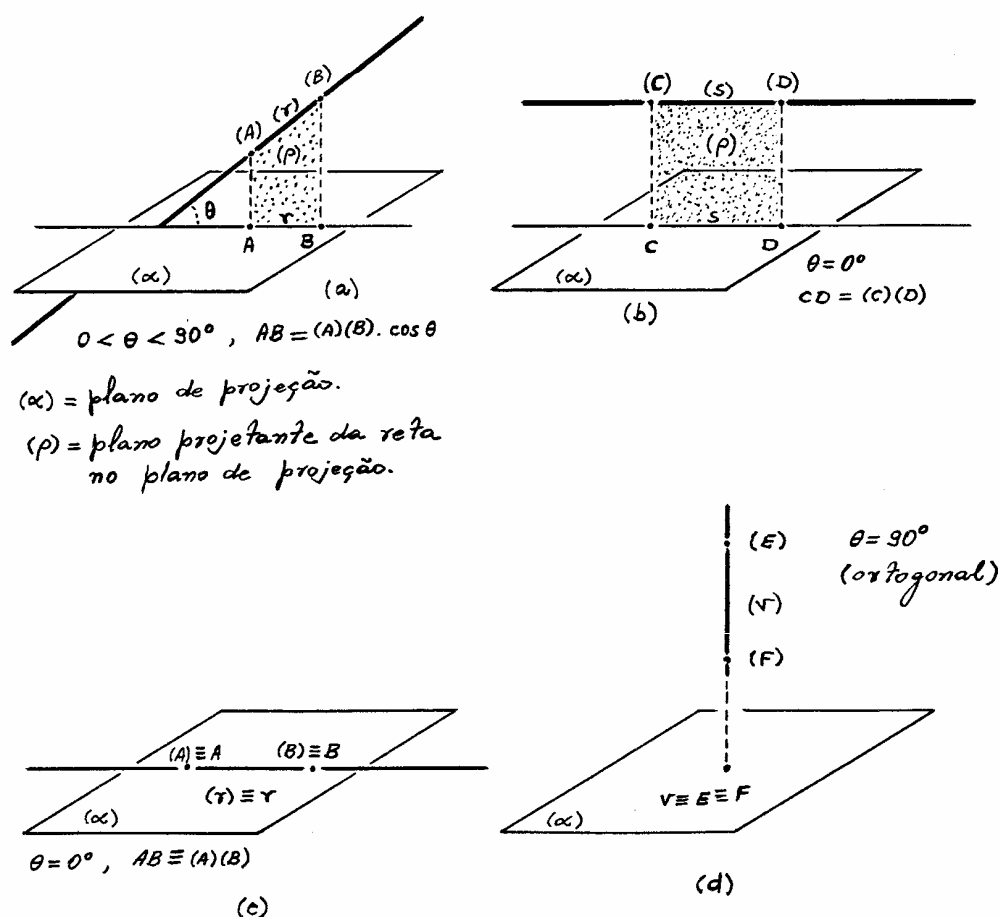


FIGURA 38. Projeção de uma reta em um plano. (a) Reta oblíqua ao plano de projeção. (b) Reta paralela ao plano de projeção. (c) Reta situada ou apostada no plano de projeção. (d) Reta ortogonal ao plano de projeção.

3.3. Representação de uma reta qualquer (Figura 39):

a. Conceito: Uma reta qualquer é aquela que é oblíqua aos planos de projeção e à linha de terra.

Na Figura 39-a, α é o ângulo oblíquo entre a reta (r) e (π'_s) , β o ângulo oblíquo entre (r) e (π_A) e (r) não é perpendicular à linha de terra $\pi'\pi$, pois forma os ângulos oblíquos θ_1 e θ_2 com $\pi'\pi$, sendo portanto, por definição, uma reta qualquer. A reta seria perpendicular a $\pi'\pi$ apenas se $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$.

b. Representação no espaço (1º diedro): A Figura 39-b mostra uma reta qualquer (r) definida por dois de seus pontos, (A) e (B). *A projeção horizontal r da reta (r), é a reta que passa pelas projeções horizontais A e B dos pontos (A) e (B). A projeção vertical r' da reta (r), é a reta que passa pelas projeções verticais A' e B' dos pontos (A) e (B).*

c. Representação em épura (representação por suas projeções ortogonais): Em épura, duas retas r e r' , oblíquas à linha de terra, são respectivamente as projeções horizontal e vertical de uma reta objetiva qualquer (r). Na Figura 39-c, r' forma o ângulo θ_1 com $\pi'\pi$ e r forma o ângulo θ_2 com $\pi'\pi$, que são oblíquos; portanto a épura é de uma reta qualquer.

d. Descrição da trajetória de uma reta: Descrever a trajetória de uma reta é indicar por qual ou quais diedros ela passa ou apresenta pontos.

A Figura 40 mostra as épuras de quatro retas quaisquer nos quatro diedros:

d.1. Na Figura 40-a, a épura é de parte de uma reta que está compreendida no 1º diedro, uma vez que a sua projeção horizontal r é constituída de pontos de afastamentos positivos ($y > 0$) e a projeção vertical r' é constituída de pontos de cotas positivas ($z > 0$).

d.2. Na Figura 40-b, a épura é de parte de uma reta que está compreendida no 2º diedro, uma vez que a sua projeção horizontal r é constituída de pontos de afastamentos negativos ($y < 0$) e a projeção vertical r' é constituída de pontos de cotas positivas ($z > 0$).

d.3. Na Figura 40-c, a épura é de parte de uma reta que está compreendida no 3º diedro, uma vez que a sua projeção horizontal r é constituída de pontos de afastamentos negativos ($y < 0$) e a projeção vertical r' é constituída de pontos de cotas negativas ($z < 0$).

d.4. Na Figura 40-d, a épura é de parte de uma reta que está compreendida no 4º diedro, uma vez que a sua projeção horizontal r é constituída de pontos de afastamentos positivos ($y > 0$) e a projeção vertical r' é constituída de pontos de cotas negativas ($z < 0$).

Seguindo a ordem alfabética dos pontos que definem a reta (de A para B $\Rightarrow$ da esquerda para a direita), a reta qualquer da Figura 39-c vem do 2º diedro, passa pelo 1º e vai para o 4º diedro.

OBSERVAÇÃO: Toda vez que qualquer uma das projeções da reta cruza a linha de terra, significa que a reta objeto está mudando de diedro, pois essa projeção está mudando de semi-plano.

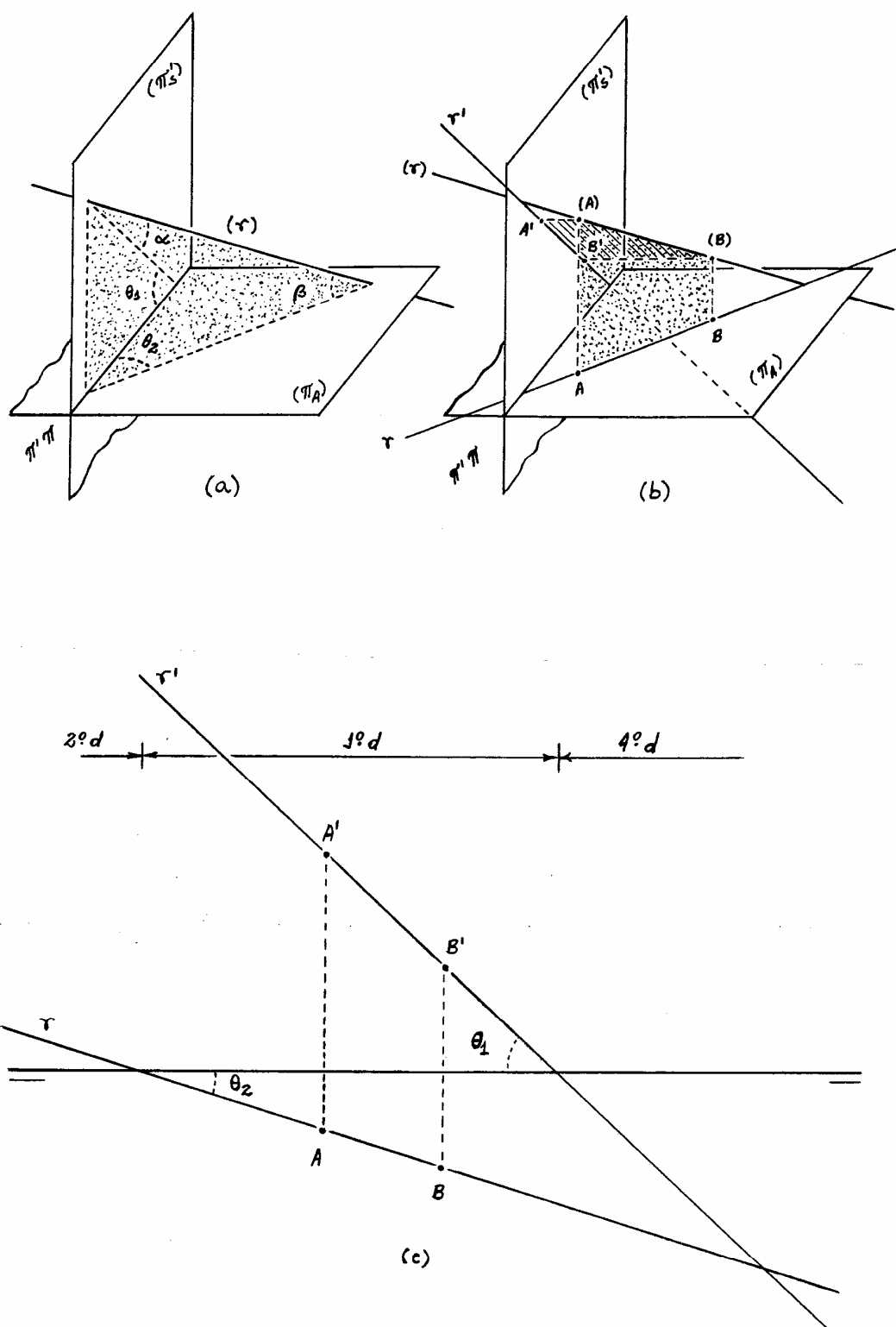
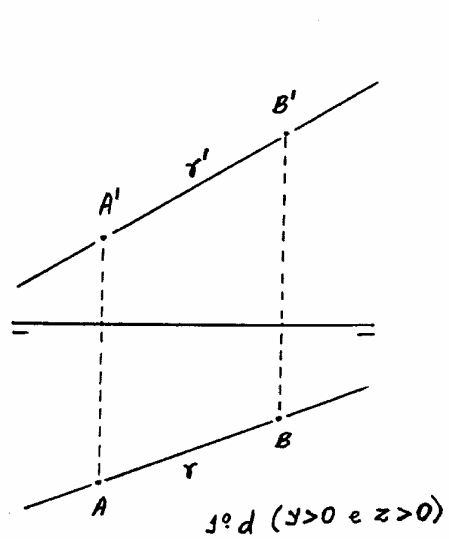
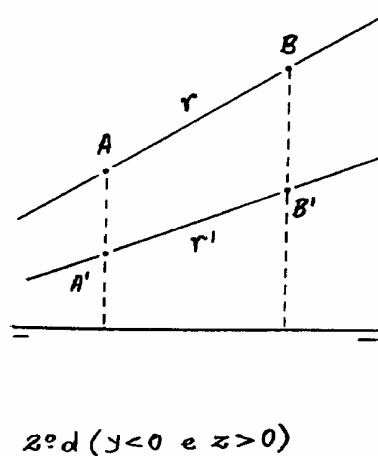


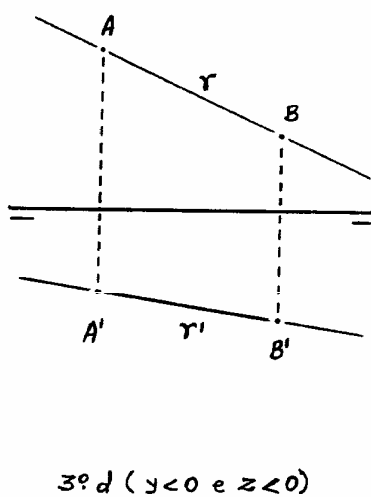
FIGURA 39. Reta genérica ou qualquer. (a) Reta qualquer (r) no espaço. (b) Projeções horizontal r e vertical r' . (c) Representação em épura.



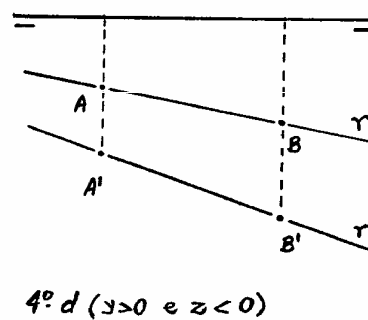
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 40. Localização de segmentos de reta em um diedro.

3.4. Representação de uma reta de perfil (Figura 41):

a. Conceito: Uma reta de perfil é aquela situada num plano perpendicular à linha de terra (plano de perfil, (γ)) e oblíqua aos planos de projeção (Figura 41-a).

Se a reta é de perfil, ela está contida em um plano de perfil e todos os seus pontos têm a mesma abcissa (Figura 41-a).

b. Representação em épura (Figuras 41-b, c, d, e): A representação de uma reta de perfil faz-se pela **representação de dois quaisquer de seus pontos (A) e (B)**.

Em épura, as projeções ortogonais da reta de perfil são perpendiculares à linha de terra e situam-se na mesma linha de chamada. Assim, apenas um ponto de uma reta de perfil é suficiente para a sua representação em épura, mas não para sua individualização, nem em épura e nem no espaço, uma vez que pelo ponto passam infinitas retas de perfil. Desta maneira, *é necessário representar dois de seus pontos, para a perfeita caracterização ou individualização de uma reta de perfil.*

As Figuras 41-b, c, d, e, apresentam épuras de partes de retas de perfil que estão respectivamente situadas no 1º, 2º, 3º e 4º diedros:

b.1. Na Figura 41-b, o segmento (A) (B) está no 1º diedro, uma vez que (A) e (B) são pontos do 1º diedro ($y > 0$ e $z > 0$).

b.2. Na Figura 41-c, o segmento (C) (D) está no 2º diedro, uma vez que (C) e (D) são pontos do 2º diedro ($y < 0$ e $z > 0$).

b.3. Na Figura 41-d, o segmento (E) (F) está no 3º diedro, uma vez que (E) e (F) são pontos do 3º diedro ($y < 0$ e $z < 0$).

b.4. Na Figura 41-e, o segmento (G) (H) está no 4º diedro, uma vez que (G) e (H) são pontos do 4º diedro ($y > 0$ e $z < 0$).

c. Visibilidade da reta de perfil - Projeção Lateral ou Terceira Projeção:

Como as projeções horizontal e vertical de qualquer reta de perfil são sempre perpendiculares à linha de terra e situam-se numa mesma linha de chamada, apenas a sua épura não permite descrever completamente a reta, permitindo apenas a localização da parte da reta compreendida entre os pontos utilizados na caracterização da mesma. Assim, faz-se necessário utilizar outro método, além do das projeções ortogonais, que permita melhor visualização e descrição da reta de perfil; tal método é o da obtenção da projeção lateral ou terceira projeção dos dois pontos da reta e, conseqüentemente, da reta de perfil.

1. O plano lateral de projeção ou terceiro plano de projeção (π''):

a. Definição: É um plano de perfil paralelo ao que contém a reta de perfil e localizado sempre à direita desse último, em qualquer diedro (Figura 42-a). Para simplificar e facilitar a compreensão, pode-se considerar que o plano lateral coincide com o plano de perfil que contém a reta de perfil (Figura 42-b).

Obtém-se a projeção lateral P'' de um ponto (P), através da projeção ortogonal do ponto no terceiro plano de projeção ou plano lateral de projeção. Na Figura 42-a, mostram-se a projeção lateral A'' do ponto (A) e a B'' do ponto (B) e, conseqüentemente, a projeção lateral $A''B''$ da reta (A) (B).

Como a projeção lateral e a sua reta de perfil são sempre paralelas ou coincidentes, no caso em que o plano lateral de projeção coincide com o da reta

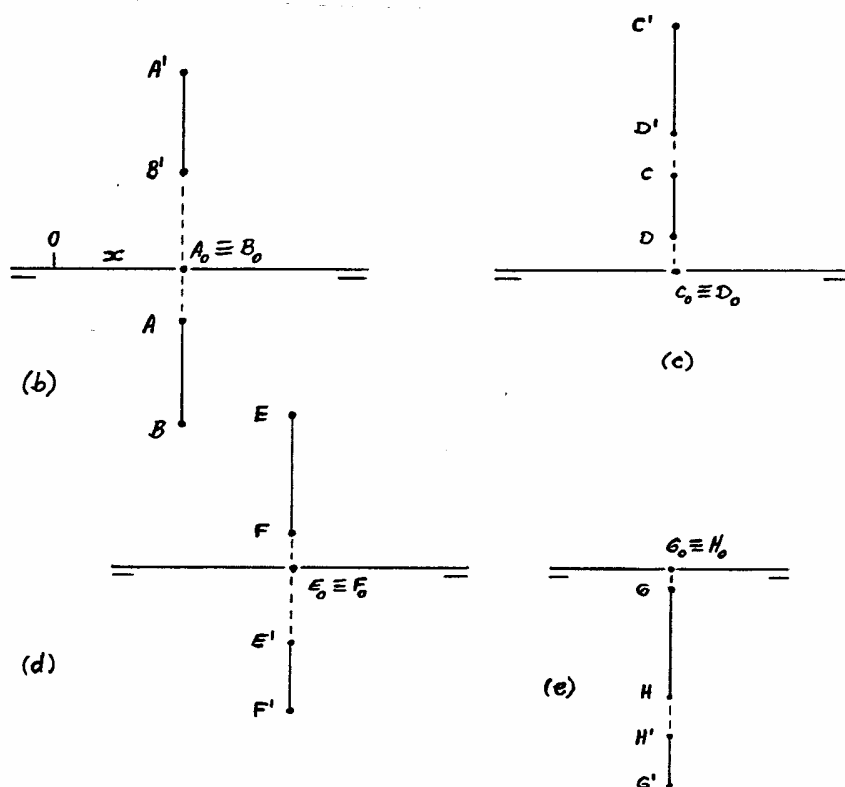
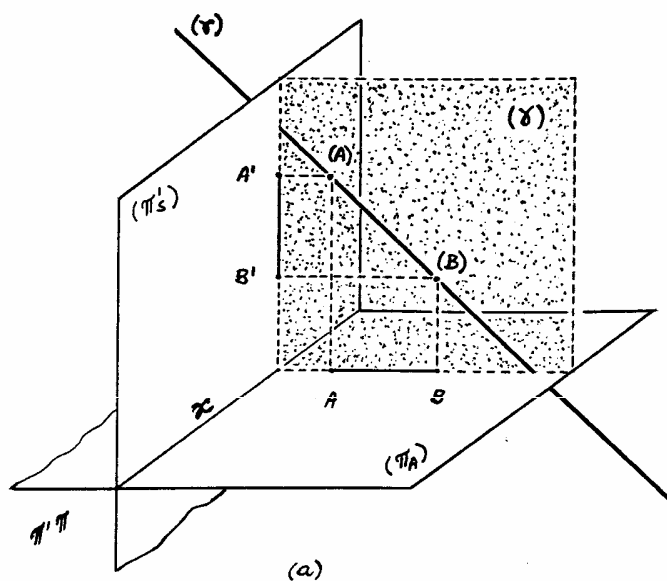


FIGURA 41. Reta de perfil. Representação no espaço (a). Representação em é pura: (b) 1º d ($y > 0$ e $z > 0$); (c) 2º d ($y < 0$ e $z > 0$); (d) 3º d ($y < 0$ e $z < 0$); (e) 4º d ($y > 0$ e $z < 0$).

(Figura 42-b), A PROJEÇÃO LATERAL DE UMA RETA DE PERFIL ESTÁ SEMPRE EM VERDADEIRA GRANDEZA, VG ($A''B'' = (A) (B) \Rightarrow$ os comprimentos de $A''B''$ e de $(A) (B)$ são iguais).

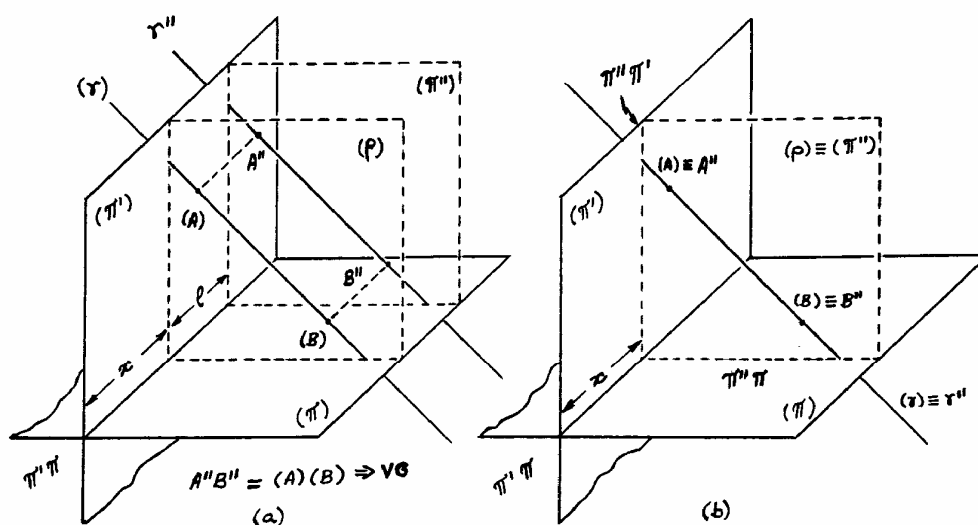


FIGURA 42. Plano lateral de projeção (π'') e a projeção lateral ou terceira projeção $A''B''$ de uma reta de perfil.

b. Representação em épura: Em qualquer diedro, o plano lateral de projeção é girado de um ângulo de 90° , em torno da interseção $\pi''\pi'$, sempre da esquerda para a direita, até apô-lo sobre o plano vertical (π'), resultando, em épura, que *as porções úteis do plano lateral nos quatro diedros se dispõem na ordenação dos quadrantes cartesianos*: O plano lateral no 1° diedro é representado no 1° quadrante (Figura 43-b), o no 2° d é representado no 2° q (Figura 44-b), o no 3° d é representado no 3° q (Figura 45-b), o no 4° d é representado no 4° q (Figura 46-b).

Nas Figuras 43 a 46, também são mostradas como as projeções ortogonais, P e P', e a projeção lateral (P'') de um ponto (P) se relacionam.

2. Projeção lateral de um ponto (P): A partir das projeções horizontal e vertical de um ponto, P e P', pode-se determinar a projeção lateral ou terceira projeção P'' (Figura 47). Resumidamente, pode-se seguir os seguintes passos:

a. Pela projeção vertical P', a partir de $\pi''\pi'$ e no quadrante equivalente ao diedro em que se encontra o ponto, traça-se uma reta auxiliar tracejada paralela à linha de terra.

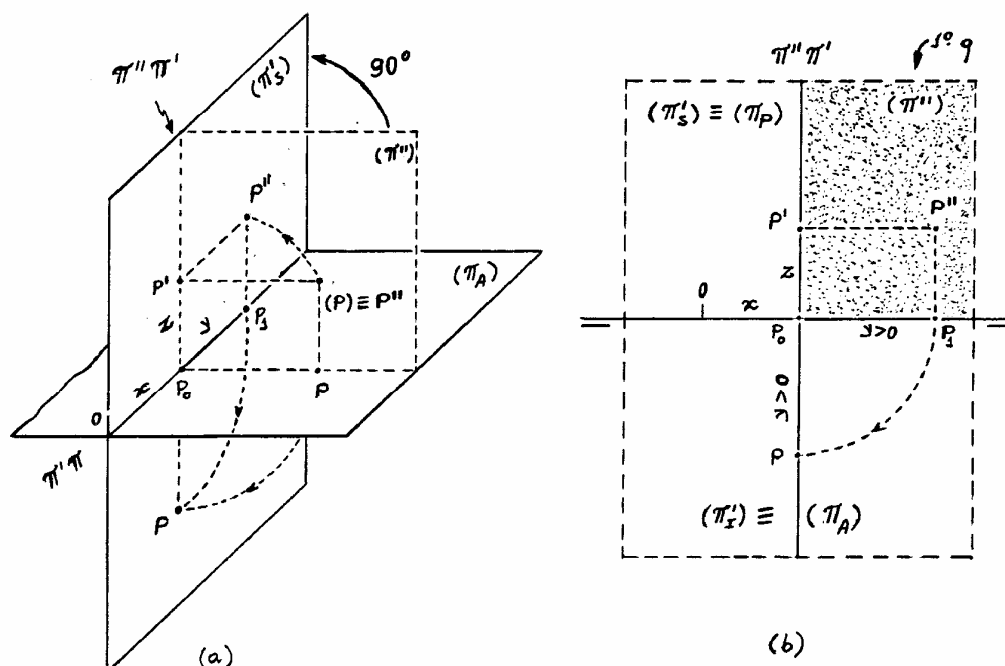


FIGURA 43. Plano lateral de projeção (π'') para um ponto (P) qualquer no 1º diedro.

b. Transporta-se ou rebate-se a projeção horizontal P para a linha de terra, sempre no sentido **anti-horário**, com auxílio de um compasso ou traçando um segmento de reta auxiliar que forme 45° com a linha de terra, obtendo-se a projeção horizontal rebatida P_1 (P_1 também pode ser considerada a projeção lateral da projeção horizontal P).

c. A partir da projeção horizontal rebatida, P_1 , traça-se uma reta auxiliar tracejada perpendicular à linha de terra, ou paralela a $\pi'\pi''$, até interceptar a reta auxiliar que passa pela projeção vertical, determinando-se assim a projeção lateral ou a terceira projeção do ponto, P'' .

As Figuras 47-a, b, c e d, mostram como obter as projeções laterais de um ponto nos 1º, 2º, 3º e 4º diedros, respectivamente.

OBSERVAÇÕES: **a.** Projeção horizontal abaixo de $\pi'\pi'' \Rightarrow$ projeção rebatida à direita de $\pi'\pi''$, e projeção horizontal acima de $\pi'\pi'' \Rightarrow$ projeção rebatida à esquerda de $\pi'\pi''$. **b.** A projeção lateral de um ponto está sempre no quadrante correspondente ao diedro em que se encontra o ponto. **c.** Invertendo a sequência dos passos, pode-se obter as projeções horizontal e vertical, P e P' , a partir da projeção lateral, P'' .

3. Projeção lateral de uma reta de perfil: A reta que passa pelas projeções laterais de dois pontos de uma reta de perfil é a projeção lateral ou terceira projeção desta reta. Na Figura 48-a, A'' e B'' são as projeções laterais de (A) e (B) ; assim a reta $A''B''$ é a projeção lateral da reta de perfil $(A)(B)$. Na Figura 48-b, C'' e D''

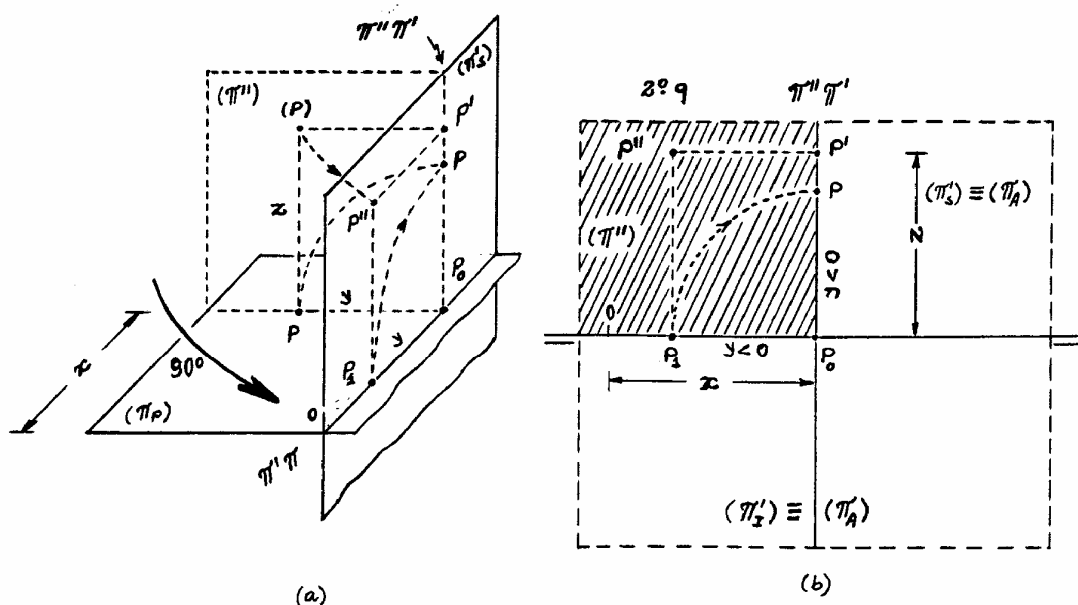


FIGURA 44. Plano lateral de projeção (π'') para um ponto (P) qualquer no 2º diedro.

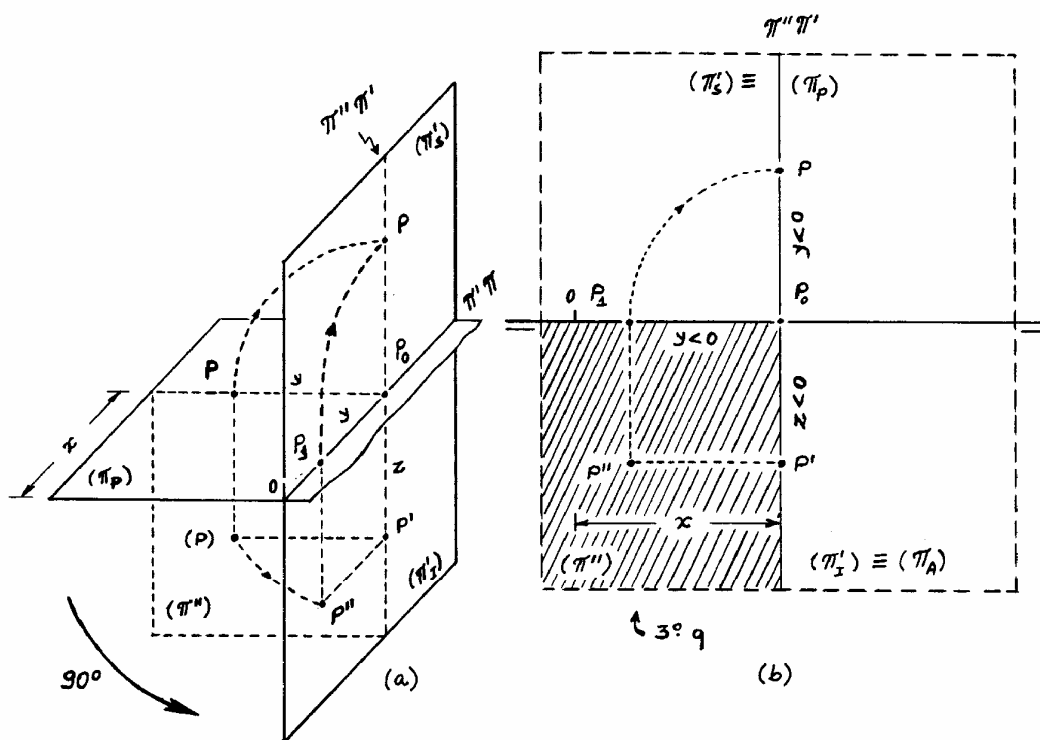


FIGURA 45. Plano lateral de projeção (π'') para um ponto (P) qualquer no 3º diedro.

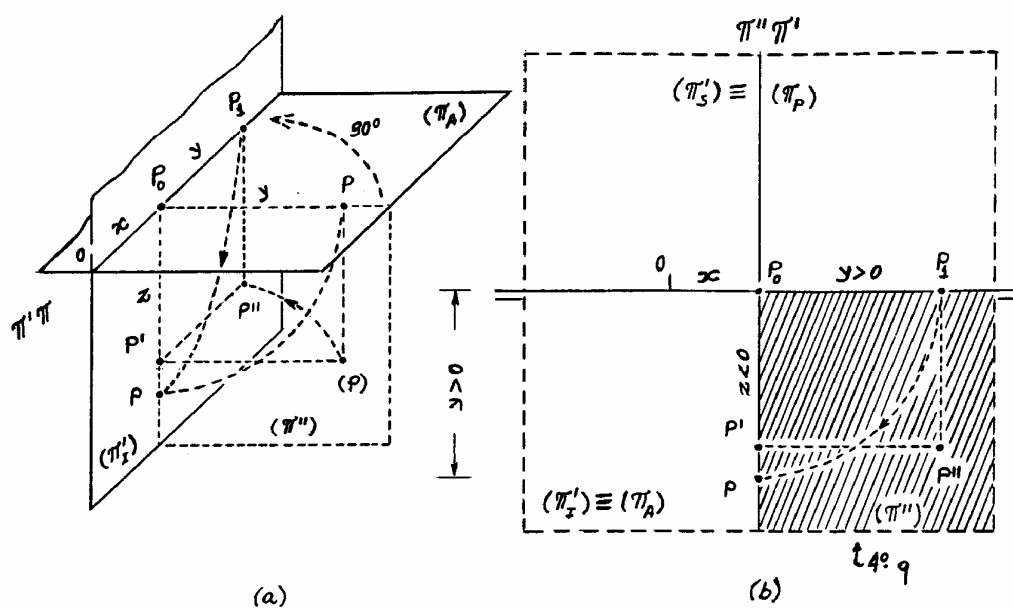


FIGURA 46. Plano lateral de projeção (π'') para um ponto (P) qualquer no 4º diedro.

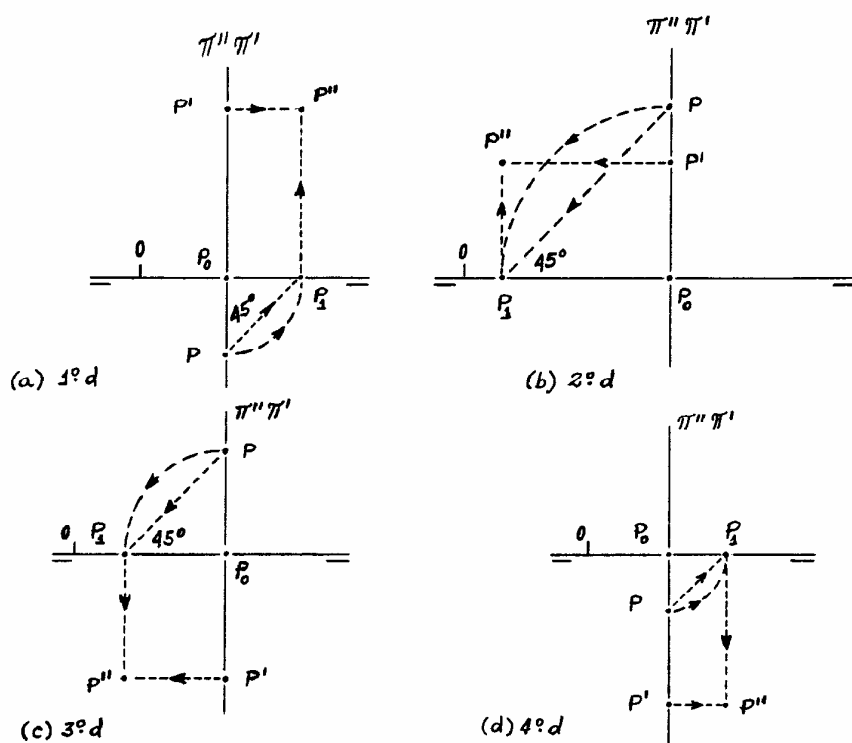


FIGURA 47. Obtenção da projeção lateral P'' de um ponto (P).

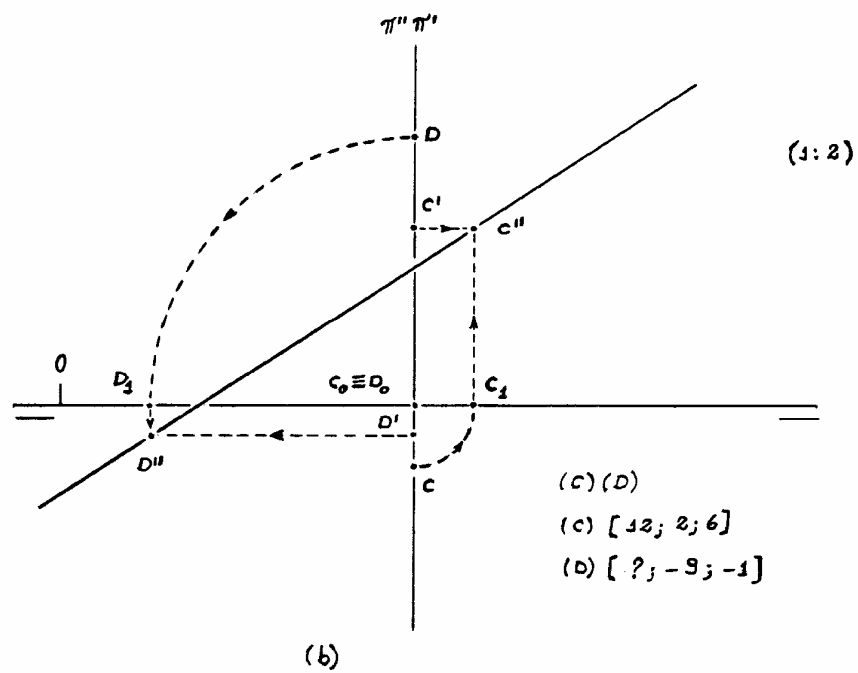
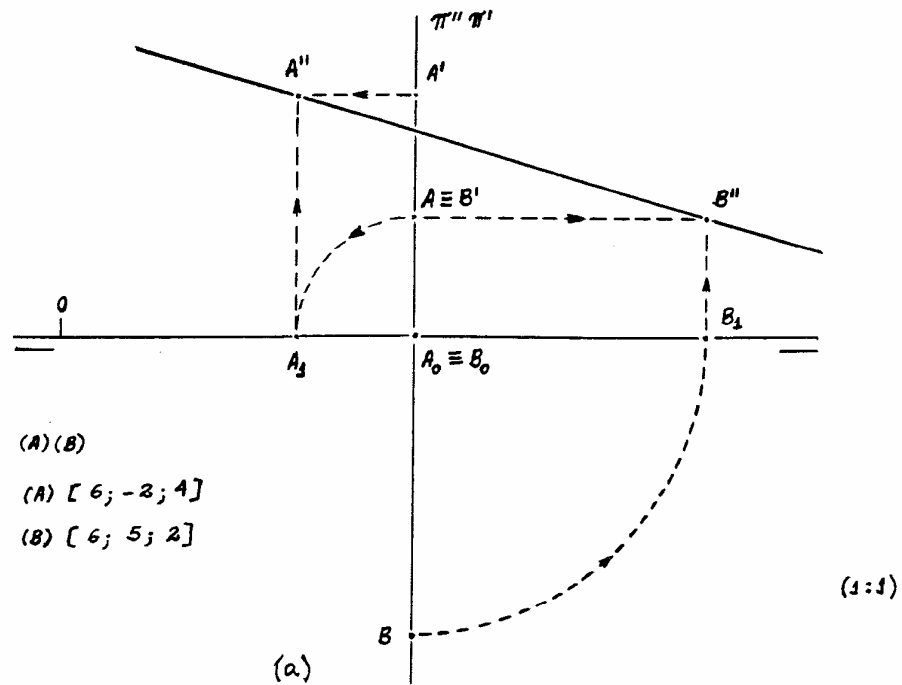


FIGURA 48. Projeção lateral de uma reta de perfil: (a) Reta (A) (B). (b) Reta (C) (D).

são as projeções laterais de (C) e (D); assim a reta C''D'' é a projeção lateral da reta de perfil (C) (D).

3.5. Pertinência de ponto e reta:

a. Reta qualquer (exceto a de perfil): Um ponto que pertence a uma reta qualquer tem as suas projeções ortogonais coincidentes com as respectivas projeções da reta e vice-versa; ou seja: quando um ponto (P) pertence a uma reta (r), a sua projeção horizontal P pertence à projeção horizontal r da reta e a sua projeção vertical P' pertence à projeção vertical r' da reta. Assim, na Figura 49, os pontos (A), (B) e (P) pertencem à reta (r), porque A, B e P pertencem a r e A', B' e P' também pertencem a r'. Entretanto (M) não pertence à reta (r), porque M' não pertence a r'; (N) não pertence a (r), porque N não pertence a r, e, (O) não pertence a (r), porque nem O pertence a r e nem O' pertence a r'; (O) é do terceiro diedro, enquanto o segmento de reta (A) (B) é do primeiro.

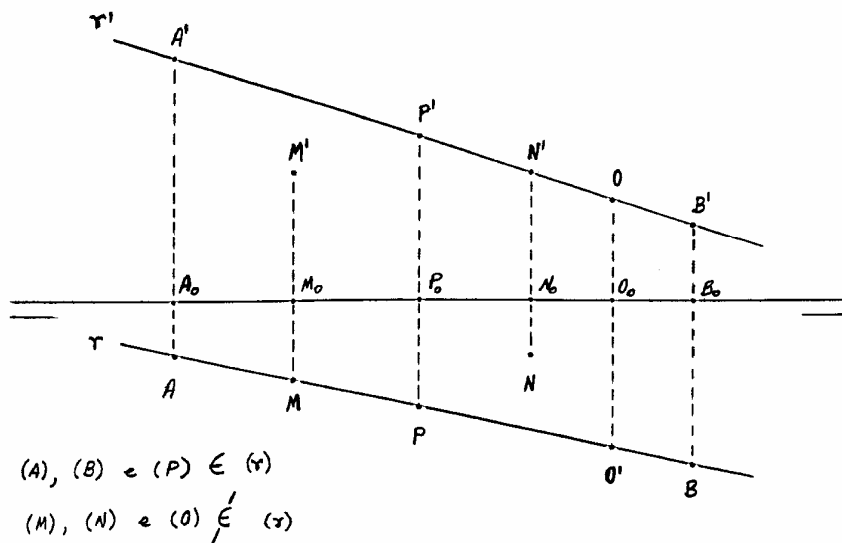


FIGURA 49. Pertinência de ponto e uma reta qualquer.

b. Reta de perfil:

b.1. Método gráfico: Um ponto pertence a uma reta de perfil quando a sua projeção lateral pertence à projeção lateral da reta. Na Figura 50, os pontos (A) e (B) pertencem à reta de perfil (r), porque A'' e B'' pertencem à projeção lateral da reta, r''; entretanto o ponto (P) não pertence à reta de perfil (r), porque P'' também não pertence à projeção lateral da reta de perfil, r''.

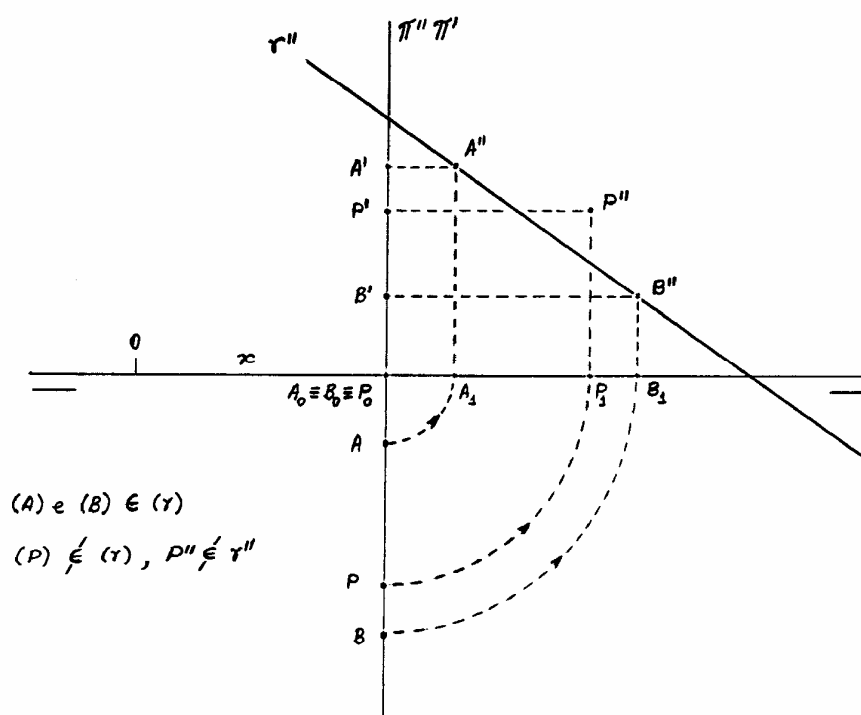


FIGURA 50. Pertinência de ponto e uma reta de perfil - método gráfico.

b.2. Método analítico (Figura 51): Um ponto (P) pertence a uma reta de perfil (A) (B) se a relação entre os segmentos horizontais PA/BA e a relação entre os segmentos verticais P'A'/B'A' forem iguais; daí tem-se que:

$$\{[y(P) - y(A)] / [y(B) - y(A)]\} = \{[z(P) - z(A)] / [z(B) - z(A)]\}$$

Na Figura 51, faz-se a demonstração baseando-se que uma reta tem apenas uma declividade (a tangente do ângulo α , $\tan \alpha$, é a mesma para os três triângulos retângulos considerados).

3.6. Razão de seção de um segmento de reta por um ponto (Figura 52): Devido as projetantes serem paralelas, quando um ponto pertencente a uma reta divide um seu segmento em duas seções ou partes, as projeções ortogonais deste ponto também dividem as respectivas projeções do segmento de reta na mesma razão ou proporção. Assim, sendo (P) um ponto pertencente à reta (A) (B), tem-se:

$$(AP/PB) = (A'P'/P'B') = (A_0P_0/P_0B_0) = [(A) (P) / (P) (B)] = k.$$

OBSERVAÇÃO: Se (P) for o ponto médio de (A) (B), a razão de seção será igual a 1 ($k = 1$) $\Rightarrow$ as projeções ortogonais, horizontal, vertical ou lateral, do ponto médio de um segmento de reta são os pontos médios das respectivas projeções desse segmento.

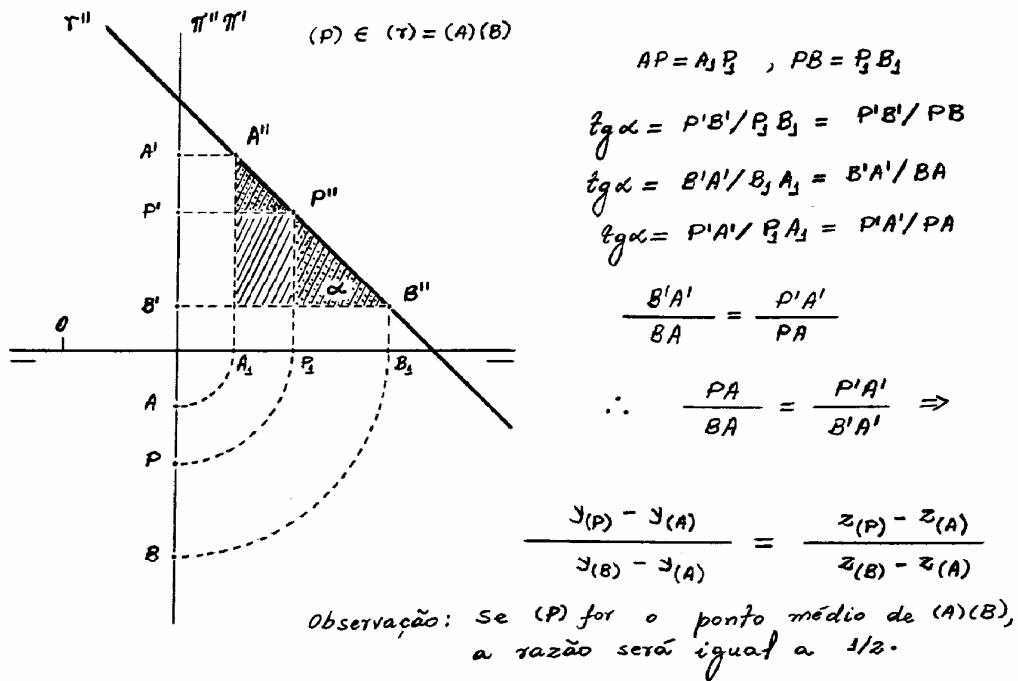


FIGURA 51. Pertinência de ponto e uma reta de perfil - método analítico.

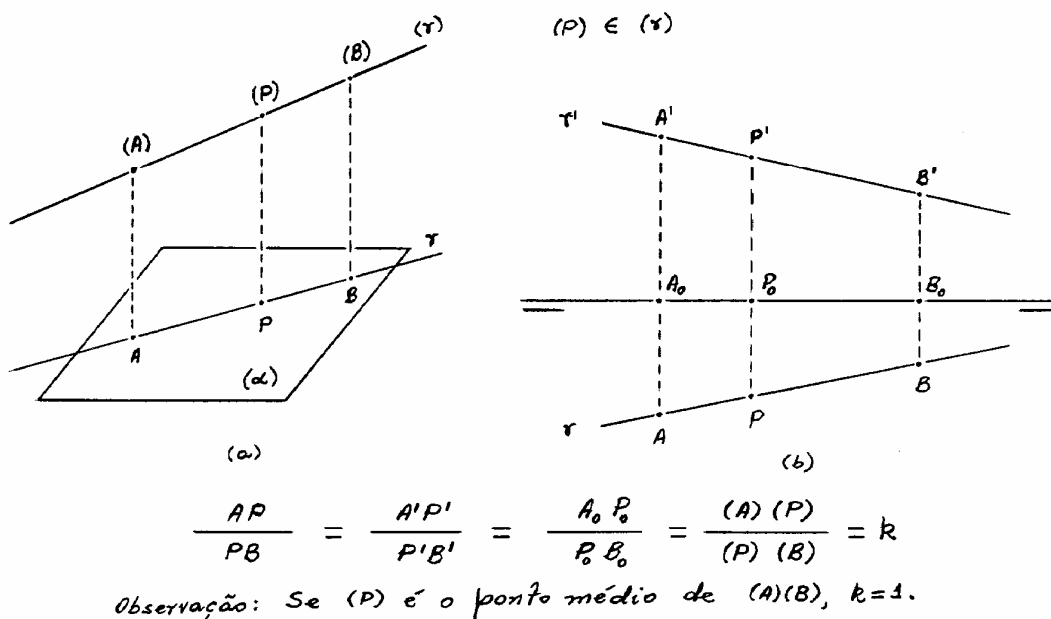


FIGURA 52. Razão de seção de um segmento de reta por um ponto.

3.7. EXERCÍCIOS

Retas qualquer e de perfil.

Objetivos: Representar a reta em épura. Localizar pontos em uma reta - pertinência de ponto e reta. Dada a razão entre a cota e o afastamento (z/y) de um ponto, determiná-lo em uma reta.

Conhecimentos necessários: Representação de um ponto em épura. Representação de reta qualquer e reta de perfil em épura. Razão de seção de um segmento de reta por um ponto.

Fontes: PINHEIRO, V. A. *Noções de Geometria Descritiva*; ponto, reta e plano. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970. Vol. I. p. 39-42.

PRÍNCIPE JÚNIOR, A. R. *Noções de geometria descritiva*. 37. ed. São Paulo: Nobel, 1990. Vol. I. p 69-98.

1. Na reta (A) (B), localizar os seguintes pontos:

- | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| 1. (M) [4; ?; ?]. | 2. (N) [-1; ?; ?]. | 3. (P) [?; 6; ?]. |
| 4. (Q) [?; -2; ?]. | 5. (R) [?; ?; 0]. | 6. (S) [?; ?; 3]. |

Sabe-se que (A) [3; 5; 0] e (B) [6; 1; -3].

OBSERVAÇÃO: Obter as coordenadas descritivas faltosas para cada ponto.

SUGESTÃO: Representar a épura da reta (A) (B). Para cada ponto tem-se pelo menos uma coordenada descritiva; deve-se procurar representá-la em épura. Através da linha de chamada, que é sempre perpendicular à linha de terra, determinar as demais projeções. As projeções horizontais dos pontos estão sobre a projeção horizontal da reta, AB, e as projeções verticais estão sobre a projeção vertical, A'B'.

2. Na reta de perfil (C) (D), localizar os pontos:

- | | | |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1. (E) [?; 5; ?]. | 2. (F) [?; -1; ?]. | 3. (G) [?; ?; 2]. |
| 4. (J) [?; ?; 0]. | 5. (L) [?; 0; ?]. | 6. (M) [?; -2; ?]. |

Dados: (C) [12; 2; 6] e (D) [?; -9; -1].

OBSERVAÇÃO: Obter as coordenadas descritivas faltosas para cada ponto.

SUGESTÃO: Se os pontos são de uma reta de perfil, todos apresentam a mesma abscissa. Representar a reta de perfil através da projeção lateral ou terceira projeção. Procurando-se localizar as projeções laterais dos pontos, por meio do afastamento determina-se a cota e vice-versa.

3. Verificar se o ponto (M) [6; 3; 1] pertence à reta (A) (B), sendo (A) [6; -2; 4] e (B) [6; 5; 2].

SUGESTÃO: Se o ponto pertence à reta de perfil (A) (B), a sua projeção lateral M'' pertence à projeção lateral da reta A''B''.

4. Sendo (A) [3; 5; -3] e (B) [8; 2; 4], localizar os seguintes pontos na reta (A) (B):

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|----------------------|
| 1. (M) / $y/z = 5/3$. | 3. (P) / $z/y = -1$. | 5. (R) / $z/y = 3$. |
| 2. (N) / $y/z = -3/4$. | 4. (Q) / $z/y = -1/5$. | 6. (I) / $z/y = 1$. |

OBSERVAÇÕES: a. z/y é a razão entre a cota e o afastamento; y/z é a razão entre o afastamento e a cota. b. **Recomenda-se representar uma épura para cada ponto a ser localizado.**

SUGESTÃO: Representar a reta em épura. Tomar um ponto (K) cuja cota seja igual à de um dos pontos, (A) por exemplo, tomando $K' \equiv A'$. Multiplicar a cota de (K) pela razão y/z ($y_{(K)} = (y/z) \times z_{(K)}$), obtendo o afastamento de (K). Representar K (a projeção horizontal de (K)) na linha de chamada de (K), que é a mesma de (A). Localizar a interseção entre a projeção vertical da reta, $A'B'$, e a linha de terra (para qualquer y/z , sendo a cota nula, o afastamento também é nulo). Traçar um segmento de reta auxiliar por este ponto e por K (juntamente com $A'B'$, esta reta auxiliar é o lugar geométrico dos pontos cuja razão entre o afastamento e a cota é y/z), até interceptar a projeção horizontal da reta (A) (B), AB, determinando a projeção horizontal do ponto que se deseja, P. Através da linha de chamada determinar as projeções vertical (P') e na linha de terra (P_0) do ponto desejado (pertinência de ponto e reta).

OBSERVAÇÃO: (P) é um ponto genérico ou qualquer, podendo ser (M), (N), (P) ou (Q) do exercício.

5. Sendo (A) [7; 4; 1] e (B) [7; 7; 8], localizar os seguintes pontos na reta (A) (B):

- | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|
| 1. (M) / $y/z = 5/2$. | 3. (P) / $z/y = -1$. | 5. (R) / $y/z = 3/4$. |
| 2. (N) / $y/z = -3$. | 4. (Q) / $z/y = -4/3$. | 6. (I) / $z/y = 1$. |

OBSERVAÇÃO: Construir uma épura para cada ponto pedido.

SUGESTÃO: Representar a épura da reta (A) (B), de perfil, em sua projeção lateral $A''B''$. A relação afastamento e cota y/z deve ser interpretada como y sendo o numerador e z o denominador; se $y/z = 5/2$, $y = 5$ e $z = 2$; se $y/z = -3$, $y = -3$ e $z = 1$, ou $y = 3$ e $z = -1$. Com o afastamento e a cota obtidos na relação y/z , representa-se a projeção lateral de um ponto (K), K'' . Para o item 1 tem-se (K_1) [7; 5; 2], para o 2 (K_2) [7; -3; 1] e assim por diante. Outro ponto de interesse é o resultante da interseção entre $\pi''\pi'$ e $\pi'\pi$, que apresenta afastamento e cota nulos - para $z = 0$, $y = 0$, para qualquer relação y/z . Traça-se o segmento de reta auxiliar por estes dois pontos (o lugar geométrico dos pontos cuja razão entre o afastamento e a cota é y/z), até interceptar a projeção lateral $A''B''$, determinando-se a projeção lateral do ponto desejado. Determinam-se as coordenadas descritivas de cada ponto.

6. Dividir o segmento (A) (B) harmonicamente na razão $|5/2|$, sendo (A) [2; 2; 1] e (B) [5; 3; 4].

SUGESTÃO: Representar a épura de (A) (B). A razão de seção de um segmento por um ponto conserva-se na projeção ortogonal; isto é: Se um ponto divide um segmento de reta em dois outros segmentos, a relação entre os comprimentos desses segmentos é a mesma para qualquer projeção ortogonal, horizontal, vertical ou lateral. Localizar um ponto (P) cuja projeção vertical P' divida a projeção vertical $A'B'$ em dois segmentos cuja relação entre seus comprimentos é $5/2$, ou seja $A'P'/P'B' = (A) (P) / (P) (B) = 5/2$. Dividir $A'B'$ em 7 partes ($5 + 2 = 7$), $A'P' = 5$ dessas partes e $P'B' = 2$ das partes. Pela linha de chamada, determinam-se P e P_0 . Conferir se $AP/PB = 5/2$. Obter as coordenadas descritivas de (P). Para dividir $A'B'$ em 7 partes iguais, traçar um segmento de reta auxiliar que forme um ângulo qualquer com $A'B'$ e se inicie em A' (ou em B'); marcar sobre este segmento auxiliar pontos que distam de seu início de 1,00, 2,00, 3,00, 4,00, 5,00, 6,00 e 7,00 cm; traçar um segmento de reta que passa pelo ponto dos 7,00 cm do segmento de reta auxiliar e pelo B' (ou A' , último ponto do segmento $A'B'$); traçar paralelas ao segmento de reta anterior pelos demais pontos até interceptar $A'B'$, os pontos resultantes dividem $A'B'$ em 7 partes iguais.

7. Traçar a épura da reta de perfil (C) (D), sendo (C) [2; 6; 2] e (D) [?; ?; 4], de modo que nenhum ponto da reta tenha a razão do afastamento para a cota igual a $-5/2$.

SUGESTÃO: Quando duas retas não possuem ponto comum, elas são paralelas. Representar a projeção lateral C'' . Traçar uma reta auxiliar, paralela a $\pi''\pi$, passando por D'' , a projeção vertical de (D) – esta reta é lugar geométrico das projeções laterais dos pontos com cota $z = 4$. De modo análogo ao do exercício 5, representar a projeção lateral de um segmento de reta que é o lugar

geométrico dos pontos em que a razão entre o afastamento e a cota é $-5/2$. Por C'' traçar paralela ao segmento obtido, obtendo D'' na interseção com a reta auxiliar de cota 4. Obter D , a projeção horizontal de (D) . Representar (D) por suas coordenadas descritivas.

8. Construir a épura de uma reta de perfil (E) (F) , sendo $2/3$ a razão dos afastamentos para as cotas de todos os pontos da reta. Sabe-se que (E) $[5; -4; ?]$ e (F) $[?; ?; 1]$.
OBSERVAÇÃO: Conhecem-se o afastamento de um ponto e a cota do outro e a relação entre o afastamento e a cota (y/z) de cada ponto da reta.
9. Dar a épura das retas (A) (B) e (C) (D) e descrevê-las, sendo: (A) $[1; 2; 1]$, (B) $[3; 1; 3]$, (C) $[-3; -2; -2]$ e (D) $[0; -2; 3]$.
10. Traçar uma reta paralela ao plano (π) e oblíqua em relação a (π') , que dista 2 cm do plano (π) contendo um ponto (A) no bisetor do 1º diedro e outro ponto (B) no (π'_s) .
11. Traçar a épura de uma reta (r) com um ponto no plano (π'_l) e outro no 3º diedro.
12. Dada a reta (A) (B) , sendo (A) $[0; -2; -1]$ e (B) $[4; 2; 2,5]$, pede-se: **a.** sua épura; **b.** os diedros que ela atravessa.
13. Um ponto (A) está situado no 2º bisetor. Pede-se traçar uma reta (B) (C) que contenha o ponto (A) . (A) $[3; 1,5; ?]$, (B) $[-0,5; 3; 2]$ e (C) $[5; ?; ?]$.
14. Traçar a épura de uma reta qualquer (A) (B) , com o ponto (A) no plano (π_A) e o ponto (B) no plano (π'_s) , e passando por um ponto (C) $[2; 1; 1]$.
15. Dada uma reta de perfil (A) (B) , sendo (A) $[0; 3; -3]$ e (B) $[?; 1; 2]$, pede-se: **a.** o comprimento do segmento de reta (A) (B) ; **b.** os diedros que atravessa.
16. Dada uma reta de perfil (A) (B) , sendo (A) $[2; -2; 3,5]$ e (B) $[?; 2,5; -1,5]$, pede-se: **a.** o comprimento do segmento de reta (A) (B) ; **b.** os diedros que atravessa.
17. Representar a reta (A) (B) sabendo-se que (A) $[3; ?; 2,5]$ pertence ao (β_P) e (B) $[3; ?; -2]$ está no (π'_l) .
18. Conhecendo-se uma das projeções de um ponto (C) sobre a reta (A) (B) , determinar a outra projeção do ponto. (A) $[-1; -3; -2]$, (B) $[-1; 2; 3]$ e (C) $[?; ?; 2]$.
19. Conhecendo-se uma das projeções de um ponto (C) sobre a reta (A) (B) , determinar a outra projeção do ponto. (A) $[0; 1; 4]$, (B) $[0; 3; 2]$ e (C) $[?; 2; ?]$.
20. Por um ponto (C) , traçar uma reta (C) (D) paralela a uma reta (A) (B) . (A) $[2; -3; 3]$, (B) $[2; 1; 1]$ e (C) $[4,5; 1,5; 2]$.
21. Dá-se uma reta de perfil (A) (B) e um ponto (M) no mesmo plano da reta. Pede-se traçar por (M) uma reta (M) (N) de 2 cm e paralela à reta (A) (B) . (A) $[0; 1; 1]$, (B) $[0; 3; 3]$ e (M) $[?; 5; 5,5]$.
22. Traçar a épura de duas retas de perfil (A) (B) e (C) (D) paralelas. (A) $[0; 1,5; 3]$, (B) $[0; 3; 0]$, (C) $[4; 1; 2]$ e (D) $[4; 2; ?]$.
23. Traçar uma reta de perfil (A) (B) que encontre ou intercepte uma reta (C) (D) . (A) $[2; 3,5; 3,5]$, (B) $[2; 1; ?]$, (C) $[1; 2; 1]$ e (D) $[6; 1; 3]$.
24. Conhecida a projeção horizontal da reta (A) (B) e a projeção vertical de um dos seus pontos, determinar a projeção vertical da reta sabendo-se que o outro ponto pertence a uma reta de perfil (C) (D) . (A) $[-1; 5; 3]$, (B) $[5; 1,5; ?]$, (C) $[?; 3; -3]$ e (D) $[?; -2; 3,5]$.

4. PONTOS NOTÁVEIS DE UMA RETA.

4.1. Introdução:

a. Objetivo: Determinar os pontos notáveis das retas através de suas projeções ortogonais (em *épura*).

b. Conceito: São os pontos da reta que situam-se nos planos de projeção e nos bissetores.

c. Os pontos notáveis de uma reta (Figura 53): Traço horizontal (H), traço vertical (V), traço no bissetor ímpar (I) e traço no bissetor par (P).

4.2. Definições:

a. Traço horizontal (H) (Figura 53-a e b): É o ponto em que a reta atravessa o plano horizontal de projeção (π), isto é, o ponto da reta que tem *cota nula* ($z = 0$) - (H) $[x; y; 0]$, $H' \equiv H_0$ e $H \equiv (H)$.

b. Traço vertical (V) (Figura 53-a e b): É o ponto em que a reta atravessa o plano vertical de projeção (π'), isto é, o ponto da reta que tem *afastamento nulo* ($y = 0$) - (V) $[x; 0; z]$, $V \equiv V_0$ e $V' \equiv (V)$.

c. Traço no bissetor ímpar (I) (Figura 53-b): É o ponto em que a reta atravessa o bissetor ímpar, isto é, o ponto da reta que tem *cota e afastamento iguais* ($z/y = 1$) - (I) $[x; y = z; z = y]$; *em épura, as projeções horizontal (I) e vertical (I') são simétricas*.

d. Traço no bissetor par (P) (Figura 53-b): É o ponto em que a reta atravessa o bissetor par, isto é, o ponto da reta que tem *cota e afastamento simétricos* ($z/y = -1$) - (I) $[x; y = -z; z = -y]$; *em épura, as projeções horizontal (P) e vertical (P') são coincidentes*.

4.3. Métodos de determinação dos traços de uma reta:

a. Reta qualquer (r): Traça-se a *épura* de (r).

a.1. Traço vertical (V): A projeção horizontal do traço vertical (V), V , é o ponto resultante da interseção entre a projeção horizontal da reta r e a linha de terra, uma vez que o afastamento do traço vertical é nulo ($y_{(V)} = 0$) e $V \equiv V_0$ (Figura 54, item 1). Pela linha de chamada, encontra-se $V' \equiv (V)$ em r' (Figura 54, item 2).

a.2. Traço horizontal (H): Encontra-se a projeção vertical do traço horizontal (H), H' , como sendo o ponto resultante da interseção entre a projeção vertical da reta, r' , e a linha de terra, uma vez que a cota de (H) é nula ($z_{(H)} = 0$) e $H' \equiv H_0$ (Figura 54, item 3). Pela linha de chamada, encontra-se a projeção horizontal $H \equiv (H)$ na projeção horizontal da reta r (Figura 54, item 4).

a.3. Traço no bissetor par (P): O traço da reta no bissetor par, (P), é encontrado na interseção das projeções horizontal e vertical da reta, r e r' , já que é o ponto da reta em que a cota e o afastamento são simétricos ($y = -z$ ou $y/z = -1$), determinando-se as projeções P e P' , sendo $P \equiv P'$ (Figura 54, item 5).

a.4. Traço no bissetor ímpar (I): Para determinar o traço da reta no bissetor ímpar (I), toma-se (K) qualquer, representando sua projeção vertical, K' , qualquer, na projeção vertical da reta r' (Figura 55, item 1). Por K' , traça-se a linha de chamada

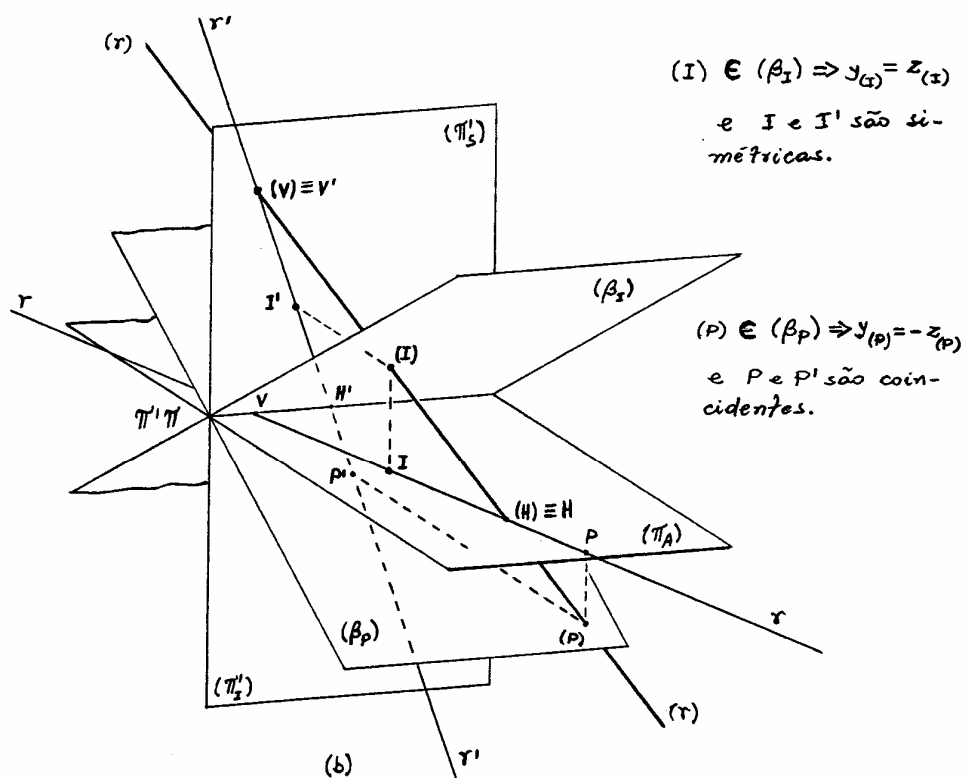
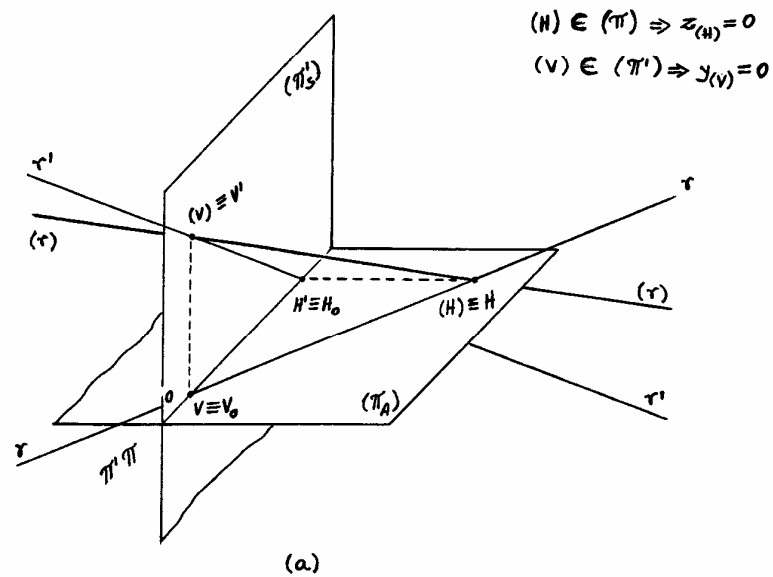


FIGURA 53. Traços horizontal (H), vertical (V), no bisetor ímpar (I), no bisetor par (P), de uma reta qualquer.

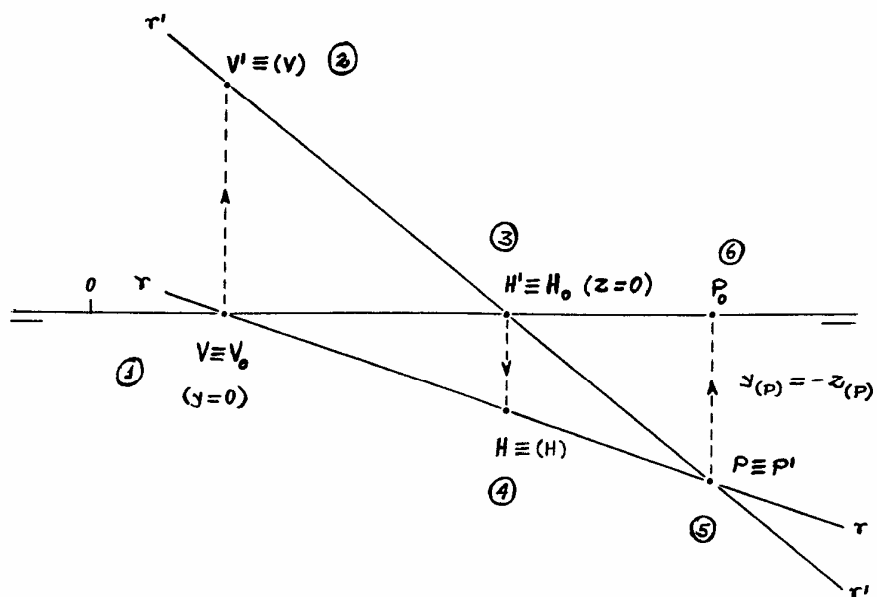


FIGURA 54. Determinação dos traços horizontal (H), vertical (V) e no bissetor par (P), de uma reta qualquer.

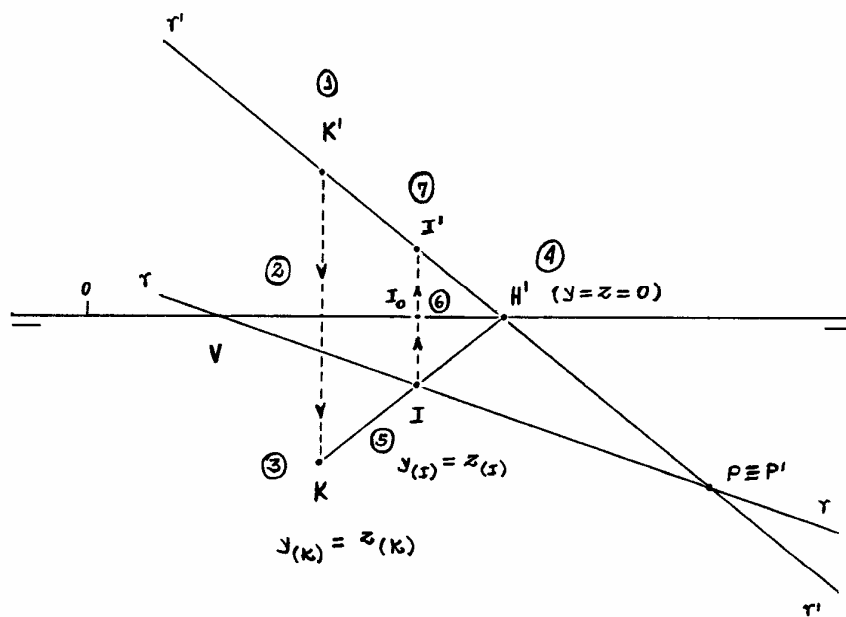


FIGURA 55. Determinação do traço no bissetor ímpar (I) de uma reta qualquer (Utilização da reta auxiliar KH').

(Figura 55, item 2). Na linha de chamada, determinar K simétrico a K' (utilizando o compasso, por exemplo), uma vez que o afastamento é igual à cota ($y_{(K)} = z_{(K)}$) (Figura 55, item 3). Por K e por H' , onde $y = z = 0$, traça-se a reta auxiliar KH' até interceptar a projeção horizontal da reta, r (Figura 55, item 4). A interseção entre KH' (KH' e r são os lugares geométricos dos pontos de cotas iguais aos afastamentos; são também simétricas em relação a $\pi' \pi$) e a projeção horizontal da reta, r , é a projeção horizontal I do traço no bisetor ímpar (I) (Figura 55, item 5). Pela linha de chamada determina-se a projeção vertical I' em r' (Figura 55, itens 6 e 7). OBSERVAÇÃO: Deve-se tomar K' o mais distante possível de H' .

Pode-se também tomar o ponto (K) qualquer, representando sua projeção horizontal K , qualquer, na projeção horizontal da reta, r (Figura 56, item 1). Por K , traça-se a linha de chamada (Figura 56, item 2). Na linha de chamada, determinar K' simétrico a K (utilizando o compasso, por exemplo), uma vez que a cota é igual ao afastamento ($z_{(K)} = y_{(K)}$) (Figura 56, item 3). Por K' e por V , onde $y = z = 0$, traça-se a reta auxiliar $K'V$ até interceptar a projeção vertical da reta, r' (Figura 56, item 4). A interseção entre $K'V$ ($K'V$ e r são os lugares geométricos dos pontos de cotas iguais aos afastamentos; são também simétricas em relação a $\pi' \pi$) e a projeção vertical da reta, r' , é a projeção vertical I' do traço no bisetor ímpar (I) (Figura 56, item 5). Pela linha de chamada determina-se a projeção horizontal I em r (Figura 56, itens 6 e 7). OBSERVAÇÃO: Deve-se tomar K o mais distante possível de V .

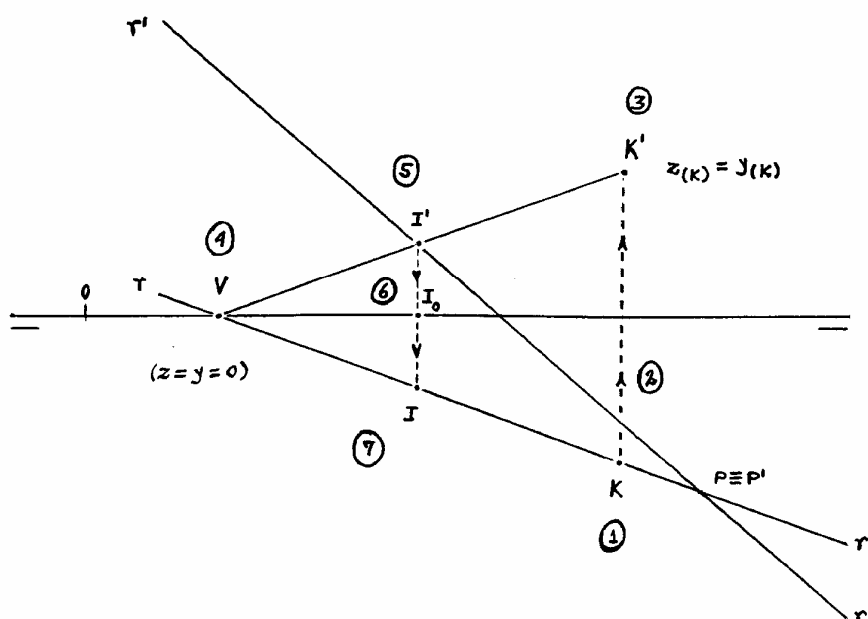


FIGURA 56. Determinação do traço no bisetor ímpar (I) de uma reta qualquer (Utilização da reta auxiliar $K'V$).

Em resumo: Traça-se a simétrica de uma das projeções da reta e localiza-se a sua interseção com a outra projeção; o ponto tomado da projeção pode ser qualquer - se se toma K na projeção horizontal, deve-se representar a projeção vertical K' e traçar a reta auxiliar K'V até interceptar a projeção vertical da reta, determinando-se I'; se se toma K' na projeção vertical, deve-se representar a projeção horizontal K e traçar KH' até interceptar a projeção horizontal da reta, determinando-se I. Deve-se sempre obter a reta simétrica, em relação a $\pi'\pi$, àquela projeção da reta, da qual se tomou a projeção inicial do ponto qualquer.

b. Reta de perfil (A) (B): Traça-se a épura de (A) (B), representando a sua projeção lateral A''B''.

b.1. Traço horizontal (H) e traço vertical (V) (Figura 57): Prolonga-se A''B'' até interceptar $\pi'\pi$ e $\pi''\pi'$. O ponto resultante da interseção entre A''B'' e $\pi'\pi$ é H'' $\equiv$ H₁; por rebatimento obtém-se H $\equiv$ (H). O ponto resultante da interseção entre A''B'' e $\pi''\pi'$ é V'' $\equiv$ V' $\equiv$ (V). As projeções vertical de (H), H', e horizontal de (V), V, são obtidas na interseção entre $\pi'\pi$ e $\pi''\pi'$, obtendo-se H' $\equiv$ V ($\equiv$ H₀ $\equiv$ V₀), já que apresentam respectivamente cota e afastamento nulos.

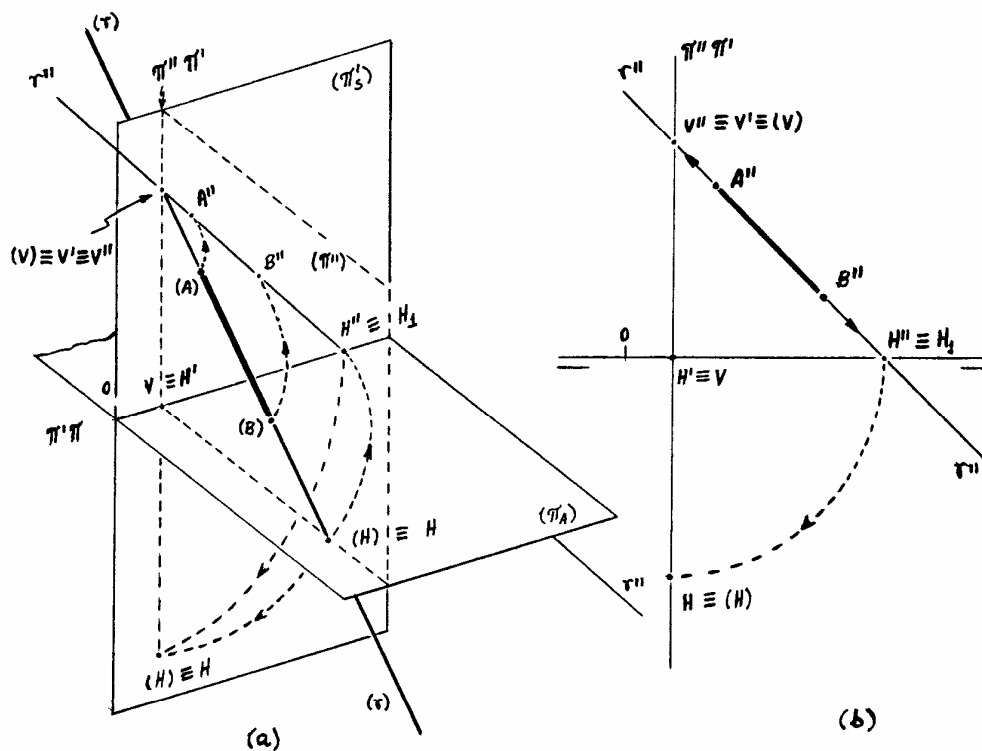


FIGURA 57. Determinação dos traços horizontal (H) e vertical (V) de uma reta de perfil.

b.2. Traço no bissetor ímpar (I) e traço no bissetor par (P) (Figura 58): Traçam-se as bissetrizes dos ângulos formados por $\pi'\pi$ e $\pi''\pi'$ (bissetrizes são retas que dividem os ângulos ao meio. No caso divide-se um ângulo de 90° em dois de 45° cada), que representam em corte os bissetores par e ímpar. A interseção entre a projeção lateral da reta $A''B''$ e a bissetriz que representa o bissetor par determina a projeção lateral do traço neste bissetor, P'' - determinam-se em seguida as projeções horizontal e vertical $P \equiv P'$. A interseção entre a projeção lateral da reta $A''B''$ e a bissetriz que representa o bissetor ímpar determina a projeção lateral do traço neste bissetor, I'' - determinam-se em seguida as projeções horizontal e vertical I e I' .

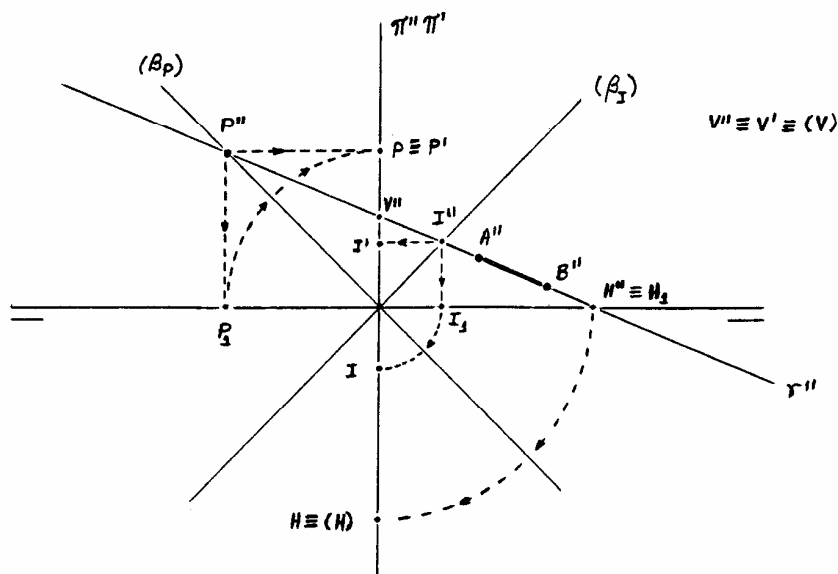


FIGURA 58. Determinação dos traços nos bissetores par (P) e ímpar (I), de uma reta de perfil.

OBSERVAÇÃO: Obtém-se a bissetriz de um ângulo:

a. Com a ponta seca do compasso na interseção entre $\pi'\pi$ e $\pi''\pi'$ e com uma única abertura qualquer, marcam-se dois pontos: um em $\pi'\pi$ e outro em $\pi''\pi'$.

b. Com a ponta seca em cada um destes pontos, de $\pi'\pi$ ou de $\pi''\pi'$, e com a mesma abertura do compasso do item a, traçam-se dois arcos de circunferência com centros em cada ponto.

c. A interseção entre os dois arcos de circunferência resulta em um ponto que, juntamente com a interseção entre $\pi'\pi$ e $\pi''\pi'$, determinam a reta que é a bissetriz do ângulo (no caso, dividindo o ângulo de 90° em dois ângulos de 45°).

No caso da reta de perfil, descreve-se a reta diretamente pela sua projeção lateral (Figura 60).

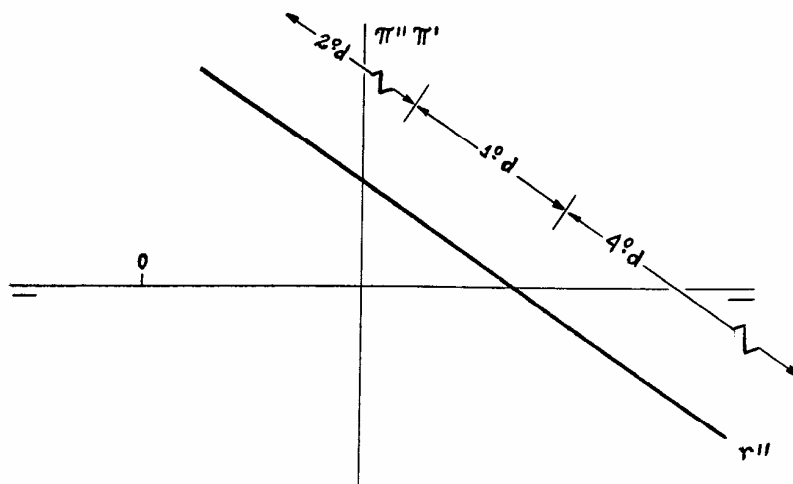


FIGURA 60. Descrição de uma reta de perfil.

4.6. Traços de uma reta que passa pela linha de terra, $\pi'\pi$:

A reta que passa ou concorre com a linha de terra, $\pi'\pi$, tem os quatro traços, $(H) \equiv (V) \equiv (P) \equiv (I) [x; 0; 0]$, coincidentes e localizados na linha de terra, uma vez que ela é comum aos planos (π) , (π') , (β_P) e (β_I) . Na Figura 61 mostram-se os traços de uma reta qualquer que passa pela linha de terra; na Figura 62, os de duas retas de perfil (r) e (s), que passam pelo mesmo ponto na linha de terra.

Evidentemente que uma reta que tem ponto na linha de terra, o dos traços, passa por dois diedros opostos (Figuras 61-b e 62-b); entretanto, esta reta pode estar contida em um dos planos de projeção, horizontal ou vertical, e não passar exatamente por dois diedros opostos, mas mesmo assim só apresenta traços coincidentes em um único ponto. O traço de uma reta em um plano em que ela está contida é indefinido.

4.7. Traços de uma reta paralela a um plano:

Pelo conceito de traço de uma reta, uma reta paralela a um plano não apresenta traço neste plano; ou apresenta traço impróprio (localizado no infinito). Se uma reta é paralela ao (π) , não apresenta traço (H); se é paralela ao (π') , não apresenta traço vertical (V); se é paralela ao (β_I) , não apresenta traço neste bisetor (I); se é paralela ao (β_P) , não apresenta traço neste bisetor (P).

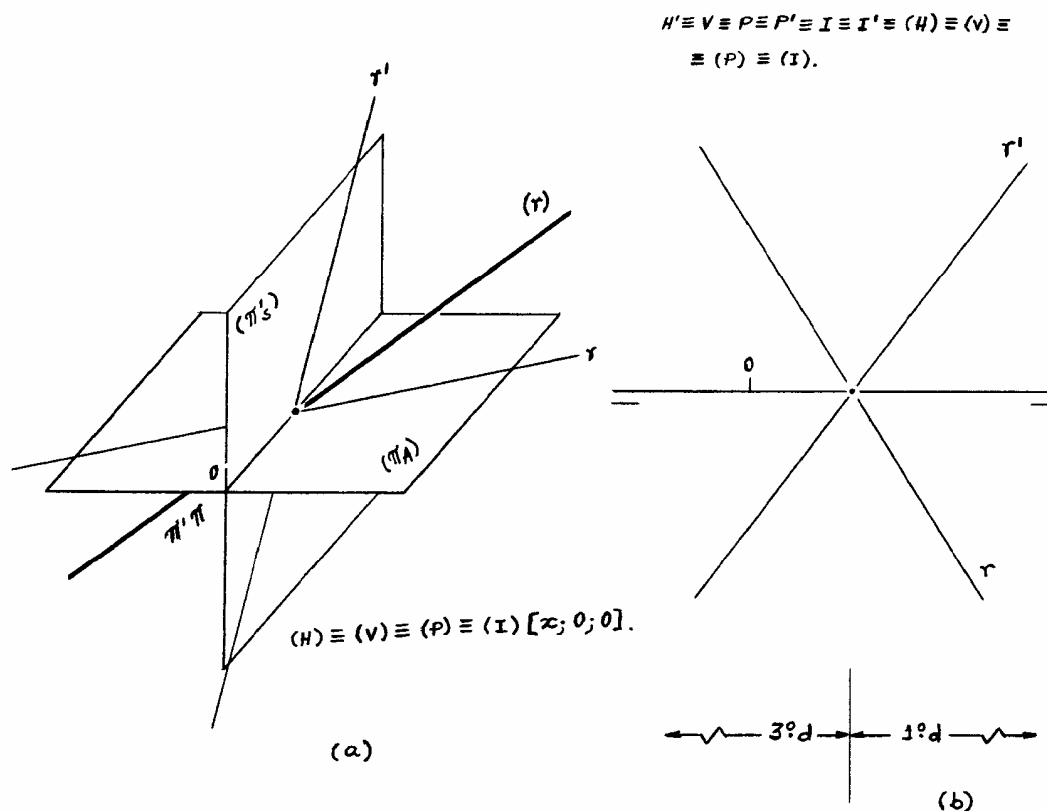


FIGURA 61. Traços de uma reta qualquer que passa pela linha de terra, $\pi'\pi$.

a. Reta paralela ao plano horizontal de projeção (π): A projeção vertical é paralela a $\pi'\pi$ (Quando a reta está no plano horizontal, a sua projeção vertical está em $\pi'\pi$). Na Figura 63 exemplifica-se o caso com uma reta horizontal, uma reta que, por ser paralela ao plano horizontal de projeção, apresenta cota constante.

b. Reta paralela ao plano vertical de projeção (π'): A projeção horizontal é paralela a $\pi'\pi$ (Quando a reta está no plano vertical, sua projeção horizontal está em $\pi'\pi$). Na Figura 64 exemplifica-se o caso com uma reta frontal, uma reta que, por ser paralela ao plano vertical de projeção, apresenta afastamento constante.

c. Reta paralela ao bisetor par (β_P): As projeções horizontal e vertical da reta são paralelas, uma vez que não existindo $P \equiv P'$, as projeções da reta não podem interceptarem-se; a não ser no infinito, onde $P \equiv P'$ é impróprio (Quando a reta está no bisetor par, as suas projeções são coincidentes, estando (H), (I) e (V) em $\pi'\pi$, sendo (P) indefinido). Na Figura 65 exemplifica-se o caso de uma reta paralela ao (β_P).

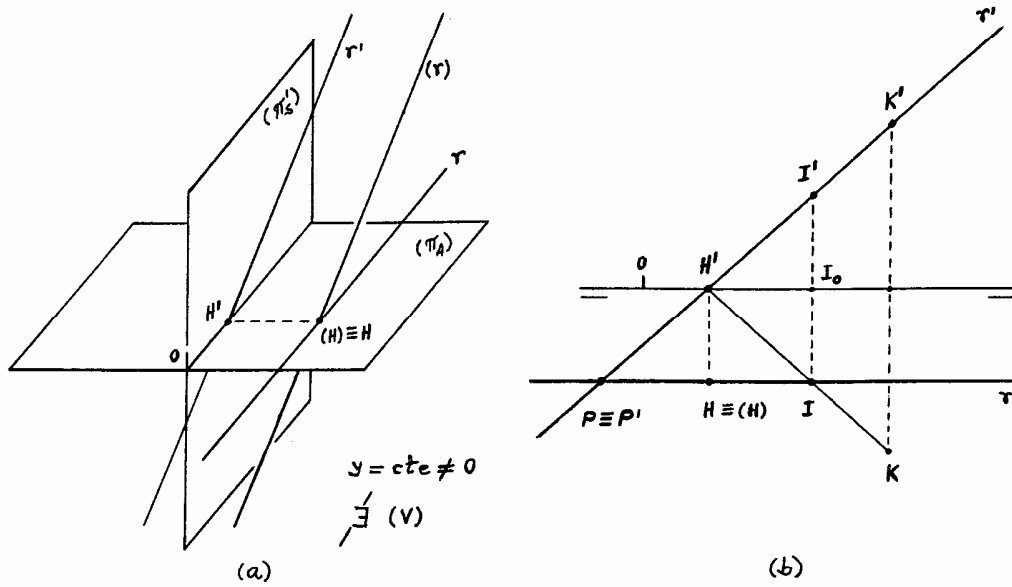


FIGURA 64. Traços de uma reta paralela ao plano de projeção vertical (π') - reta frontal ($y = cte \neq 0$).

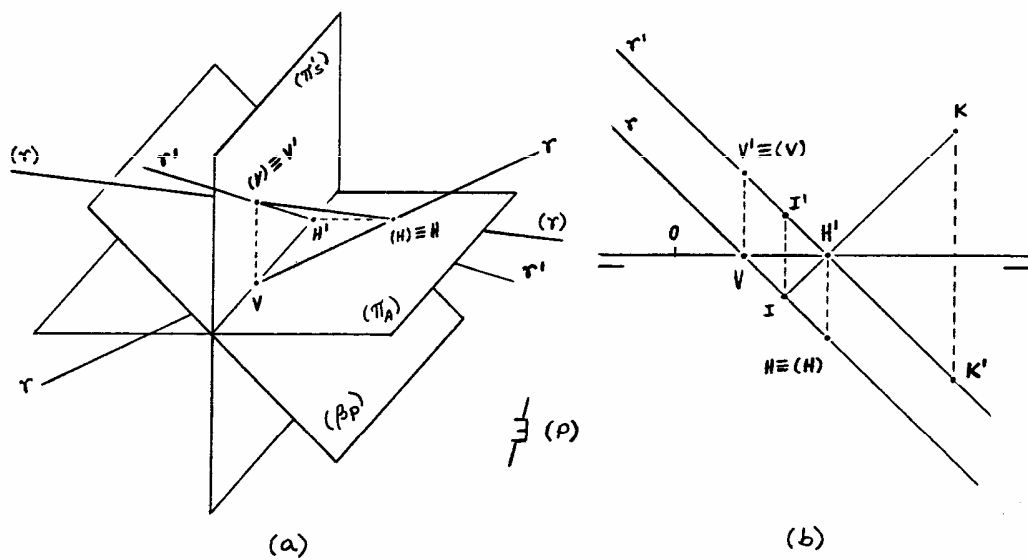


FIGURA 65. Traços de uma reta paralela ao bisetor par (β_P).

d. *Reta paralela ao bissetor ímpar (β_I)*: Qualquer uma das projeções desta reta é paralela à simétrica da outra, em relação a $\pi'\pi$. Na Figura 66-b, a projeção vertical r' é paralela a $K'V$ que é a simétrica da projeção horizontal r , relativamente a $\pi'\pi$. Na construção da épura, obtém-se primeiramente a reta auxiliar simétrica à projeção conhecida da reta, relativamente a $\pi'\pi$, traçando-se, em seguida, a outra projeção da reta, paralela à simétrica (Figura 66-b). Quando a reta está no bissetor ímpar, as suas projeções são simétricas a $\pi'\pi$ e os seus traços (H), (V) e (P) situam-se em $\pi'\pi$, sendo (I) indefinido.

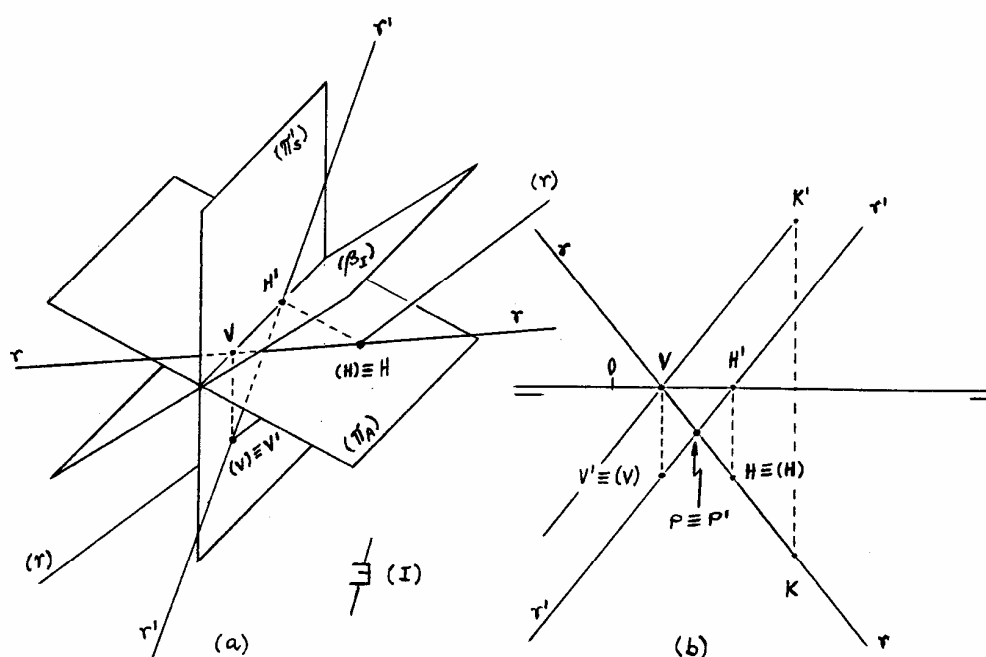


FIGURA 66. Traços de uma reta paralela ao bissetor ímpar (β_I).

4.8. EXERCÍCIOS

Pontos notáveis de uma reta.

Objetivos: Representar a reta em épura. Determinar os quatro pontos notáveis de uma reta.

Conhecimentos necessários: Representação de um ponto em épura. Leitura de épura.

Representação de reta qualquer e reta de perfil em épura. Bissetores. Relação entre afastamento e cota, y/z .

Fontes: PINHEIRO, V. A. *Noções de Geometria Descritiva*; ponto, reta e plano. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970. Vol. I. p. 47-48.
PRÍNCIPE JÚNIOR, A. R. *Noções de geometria descritiva*. 37. ed. São Paulo: Nobel, 1990. Vol. I. p 69-98.

1. Determinar os quatro pontos notáveis das retas abaixo indicadas:

1. (A) (B), sendo (A) [3; 2; -1] e (B) [7; 0,5; 2].
2. (C) (D), sendo (C) [6; -1; 3] e (D) [10; -6; 1].
3. (E) (F), sendo (E) [5; -2; 4] e (F) [11; 6; -1].
4. (G) (J), sendo (G) [6; 4; 1] e (J) [10; 2; -3].
5. (K) (L), sendo (K) [6; 1; 2] e (L) [6; 8; -3].
6. (M) (N), sendo (M) [6; 2; 5] e (N) [6; 1; 3,5].
7. (R) (Q), sendo (R) [6; -4; 6] e (Q) [6; 1; -8].
8. (T) (S), sendo (T) [3; 5; 4] e (S) [3; 2; -9].

SUGESTÕES: 1. *Reta qualquer* (tomando o item 1 como exemplo): Traça-se a épura de (A)(B).

a. Traço horizontal: Encontra-se a projeção vertical do traço horizontal (H), H' , como sendo o ponto resultante da interseção entre $A'B'$ e a linha de terra, uma vez que a cota de (H) é nula ($z_{(H)} = 0$) e $H' \equiv H_0$. Pela linha de chamada, encontra-se a projeção horizontal $H \equiv (H)$ na projeção horizontal da reta AB. **b. Traço vertical:** A projeção horizontal do traço vertical (V), V , é o ponto resultante da interseção entre a projeção horizontal da reta AB e a linha de terra, uma vez que o afastamento do traço vertical é nulo ($y_{(V)} = 0$) e $V \equiv V_0$. Pela linha de chamada, encontra-se V' em $A'B'$. **c. Traço no bisetor par:** O traço da reta no bisetor par, (P), é encontrado na interseção das projeções horizontal e vertical da reta, AB e $A'B'$, já que é o ponto da reta em que a cota e o afastamento são simétricos ($y = -z$ ou $y/z = -1$), determinando-se as projeções P e P' , sendo $P \equiv P'$. **d. Traço no bisetor ímpar:** Para determinar o traço da reta no bisetor ímpar (I), toma-se, por exemplo, $K' \equiv A'$, obtendo-se $z_{(K)} = z_{(A)}$; em seguida, na linha de chamada de K' , a mesma de A' , obtém-se a projeção horizontal K, já que $y_{(K)} = z_{(K)}$. Traça-se a reta auxiliar KH' , que juntamente com $A'B'$ é o lugar geométrico dos pontos de cotas e afastamentos respectivamente iguais (KH' e $A'B'$ são simétricas em relação a $\pi'\pi$), até interceptar AB, localizando-se a projeção horizontal I. Através da linha de chamada determina-se I' . Expressar os traços (H), (V), (P) e (I) através de suas coordenadas descritivas, identificando o plano de projeção ou o diedro em que se encontram.

2. *Reta de perfil* (tomando o item 5 como exemplo): Traça-se a épura de (K) (L), representando a sua projeção lateral $K''L''$. **a. Traços horizontal e vertical:** Prolonga-se $K''L''$ obtendo-se as interseções entre $K''L''$, $\pi'\pi$ e $\pi''\pi'$, resultando, respectivamente, $H'' \equiv H_1$ e $V'' \equiv V' \equiv (V)$. Obtém-se $H \equiv (H)$, por rebatimento. As projeções vertical de (H), H' , e horizontal de (V), V , são obtidos na interseção entre $\pi'\pi$ e $\pi''\pi'$, obtendo-se $H' \equiv V (\equiv H_0 \equiv V_0)$, já que apresentam respectivamente cota e afastamento nulos. **b. Traços nos bissetores:** Traçam-se as bissetrizes dos ângulos formados por $\pi'\pi$ e $\pi''\pi'$ (bissetrizes são retas que dividem os ângulos ao meio. No caso divide-se um ângulo de 90° em dois de 45° cada), que representam em corte os bissetores par e ímpar. A interseção entre a projeção lateral da reta $K''L''$ e a bissetriz que representa o bisetor par determina a projeção lateral do traço neste bisetor, P'' - determinam-se em seguida $P \equiv P'$. A interseção entre a projeção lateral da reta $K''L''$ e a bissetriz que representa o bisetor ímpar determina a projeção lateral do traço neste bisetor, I'' - determinam-se em seguida I e I' . Expressar os traços (H), (V), (P) e (I) através de suas coordenadas descritivas, identificando o plano de projeção ou o diedro em que se encontram.

2. Ler as épuras das retas do exercício anterior, indicando:

- a. a situação dos traços (H) e (V);
- b. a trajetória de cada reta, através dos diedros.

EXEMPLOS: a. (do item 1 do exercício 1) Traço horizontal anterior (localiza-se em (π_A)) e traço vertical superior (localiza-se em (π'_S)). b. (idem) A reta intercepta ou atravessa o bissetor par no 4º diedro em (P) [0,4; 3; -3], passa pelo ponto (A) [3; 2; -1] no 4º diedro, intercepta o plano horizontal anterior (π_A) em (H) [4,3; 1,5; 0], intercepta o bissetor ímpar no 1º diedro em (I) [5,7; 1; 1], passa pelo ponto (B) [7; 0,5; 2] no 1º diedro, intercepta o plano vertical superior (π'_S) em (V) [8,4; 0; 3,1] e segue pelo 2º diedro.

3. Construir as projeções ortogonais e determinar os traços da reta (A) (B) sabendo-se que ela passa pelo 2º diedro. Dados: (A) [3; 6; 2] (B) [8; ?; ?] (H) [6; ± 2 ; ?].

SUGESTÃO: Representam-se em écura (A), B_0 e H_0 . Como a cota do traço horizontal da reta é nula ($z_{(H)} = 0$), tem-se $H' \equiv H_0$. Traça-se $A'H'$, prolongando-a. Pela linha de chamada em B_0 determina-se B' em $A'H'$. Como (A) é um ponto do 1º diedro, para que a reta (A) (B) passe pelo 2º diedro é necessário que o afastamento de (H) seja igual a -2, devendo interceptar o plano horizontal posterior (π_P). Representa-se a projeção horizontal H e traça-se AH, prolongando-a. Pela linha de chamada determina-se B. Representar todos os pontos por suas coordenadas descritivas e descrever a trajetória da reta.

4. Obter os traços (H) e (V) da reta de perfil (I) (P), sendo dados seus traços (I) [6; -3; ?] e (P) [?; ?; -6] no (β_I) e no (β_P) , respectivamente.

SUGESTÃO: Se a reta é de perfil, todos os pontos têm a mesma abcissa, que é a de (I). A cota de (I) é igual ao seu afastamento ($z = y$ ou $z/y = 1$), já que é o traço da reta no (β_I) . O afastamento de (P) é simétrico à sua cota ($z = -y$ ou $z/y = -1$), já que é o traço da reta no (β_P) . Determinam-se (H) e (V), expressando-os por suas coordenadas descritivas e descrevendo a trajetória da reta.

5. Construir a écura da reta (M) (N) conhecendo seu traço no (β_I) e sabendo que ela não tem traço no (β_P) . Dados: (I) [5; ?; -4] (M) [2; 2; ?] (N) [?; ?; -1].

SUGESTÃO: O afastamento de (I) é igual à sua cota. Se a reta (M) (N) não tem traço no (β_P) é porque ela é paralela a esse bissetor e as projeções horizontal e vertical da reta, MN e $M'N'$, respectivamente, também são paralelas (o traço da reta no bissetor par é determinado pela interseção entre as projeções horizontal e vertical da reta). Traça-se MI, prolongando-a. Traça-se uma reta auxiliar paralela à linha de terra para a cota de (N) igual a -1. Por I' traça-se paralela a MI, localizando N' na reta auxiliar de cota $z_{(N)} = -1$. Através das linhas de chamada para cada ponto, determinam-se N e M' . Determinam-se os traços da reta, expressando-os por suas coordenadas descritivas e descrevendo a trajetória da reta.

6. Construir a écura da reta (R) (S) conhecendo seu traço no (β_P) e sabendo que ela não tem traço no (β_I) . Dados: (P) [5; ?; 4] (R) [0; ?; 0] (S) [8; ?; ?].

SUGESTÃO: O afastamento de (P) é simétrico à sua cota ($y/z = -1$). As projeções horizontal e vertical, RS e $R'S'$, respectivamente, da reta (R) (S), se interceptam em $P \equiv P'$. Traça-se $R'P'$. Determina-se $H' \equiv R'$. Uma vez que a reta (R) (S) não tem traço no bissetor ímpar, ela é paralela a esse bissetor, sendo sua projeção horizontal paralela a uma reta auxiliar simétrica a $R'S'$, que é um dos lugares geométricos em que as cotas dos pontos são iguais aos afastamentos ($z/y = 1$ ou $z = y$) - o outro lugar geométrico é $R'S'$ (Quando se obtém o traço de uma reta no (β_I) , determina-se a interseção entre esta reta auxiliar simétrica a $R'S'$ e a projeção horizontal da reta, obtendo-se a projeção horizontal I; como I não existe, as retas em questão são paralelas). Para traçar a reta auxiliar simétrica a $R'S'$, toma-se $K' \equiv P'$, obtendo-se K, já que $y_{(K)} = z_{(K)}$; traça-se $H'K$. A projeção horizontal da reta (R) (S), RS, é traçada paralela a $H'K$, passando por $P \equiv P'$ (nenhum ponto de RS será comum aos de $H'K$, pois elas não se interceptam, uma vez que são paralelas).

Determinam-se os traços da reta, expressando-os por suas coordenadas descritivas e descrevendo a trajetória da reta.

7. Construir as projeções da reta de perfil, cujo segmento (H) (V), limitado por estes traços, tem (S) [2; 3; 0,5] por ponto médio.
SUGESTÃO: Todos os pontos têm a mesma abscissa, porque a reta é de perfil. Representa-se a projeção lateral de (S), S'' . Se (S) é o ponto médio de (H) (V), S'' é o ponto médio de $H''V''$, a projeção lateral da reta, bem como S é o ponto médio de HV e S' é o de $H'V'$ (quando um ponto divide um segmento de reta em duas partes, as projeções ortogonais deste ponto dividem as respectivas projeções ortogonais do segmento na mesma proporção - Razão de seção de um segmento de reta por um ponto). Para complementação, determinam-se os traços da reta, expressando-os por suas coordenadas descritivas e descrevendo a trajetória da reta.
8. Determinar os traços das retas (A) (B) e (C) (D) e descrevê-las, sendo: (A) [1; 2; 1], (B) [3; 1; 3], (C) [-3; -2; -2] e (D) [0; -2; 3].
9. Determinar os traços de uma reta paralela ao plano (π) e oblíqua em relação a (π'), que dista 2 cm do plano (π) contendo um ponto (A) no bissetor do 1º diedro e outro ponto (B) no (π'_s).
10. Dada a reta (A) (B), sendo (A) [0; -2; -1] e (B) [4; 2; 2,5], pede-se: **a.** seus traços; **b.** os diedros que ela atravessa.
11. Um ponto (A) está situado no 2º bissetor. Pede-se determinar os traços de uma reta (B) (C) que contenha o ponto (A). (A) [3; 1,5; ?], (B) [-0,5; 3; 2] e (C) [5; ?; ?].
12. Obter os traços de uma reta qualquer (A) (B), com o ponto (A) no plano (π_A) e o ponto (B) no plano (π'_s), e passando por um ponto (C) [2; 1; 1].
13. Dada uma reta de perfil (A) (B), sendo (A) [0; 3; -3] e (B) [7; 1; 2], pede-se: **a.** os seus traços; **b.** os diedros que atravessa.
14. Dada uma reta de perfil (A) (B), sendo (A) [2; -2; 3,5] e (B) [7; 2,5; -1,5], pede-se: **a.** os seus traços; **b.** os diedros que atravessa.
15. Determinar os traços de uma reta (A) (B) sabendo-se que (A) [3; ?; 2,5] pertence ao (β_P) e (B) [3; ?; -2] está no (π'_I).
16. Conhecendo-se uma das projeções de um ponto (C) sobre a reta (A) (B), determinar a outra projeção do ponto. (A) [-1; -3; -2], (B) [-1; 2; 3] e (C) [7; ?; 2]. Determinar os traços de (A) (B).
17. Conhecendo-se uma das projeções de um ponto (C) sobre a reta (A) (B), determinar a outra projeção do ponto. (A) [0; 1; 4], (B) [0; 3; 2] e (C) [7; 2; ?]. Determinar os traços de (A) (B).
18. Por um ponto (C), traçar uma reta (C) (D) paralela a uma reta (A) (B). (A) [2; -3; 3], (B) [2; 1; 1] e (C) [4,5; 1,5; 2]. Determinar os traços das retas.
19. Dá-se uma reta de perfil (A) (B) e um ponto (M) no mesmo plano da reta. Pede-se traçar por (M) uma reta (M) (N) de 2 cm e paralela à reta (A) (B). (A) [0; 1; 1], (B) [0; 3; 3] e (M) [7; 5; 5,5]. Determinar os traços das retas.
20. Determinar os traços de duas retas de perfil (A) (B) e (C) (D) paralelas. (A) [0; 1,5; 3], (B) [0; 3; 0], (C) [4; 1; 2] e (D) [4; 2; ?].
21. Obter os traços de uma reta de perfil (A) (B) que encontre ou intercepte uma reta (C) (D). (A) [2; 3,5; 3,5], (B) [2; 1; ?], (C) [1; 2; 1] e (D) [6; 1; 3].

5. RETAS PARTICULARES.

5.1. Introdução.

a. *Objetivos*: Representar e identificar em é pura algumas retas particulares.

b. *Conceito*: São retas que, ocupando posições especiais em relação aos planos de projeção, a um dos bissetores, ou à linha de terra, apresentam propriedades características que permitem identificar, à simples vista da é pura, a posição particular da reta.

OBSERVAÇÃO: Qualifica-se uma reta particular pela posição que lhe confere maior número de atributos, isto é: aquela posição que acarreta nas demais.

c. *Tipos de retas particulares*: Horizontal, frontal, fronto-horizontal, vertical, de topo, de perfil, perpendicular ao (β_I) e perpendicular ao (β_P) (paralela ao (β_I) e paralela ao (β_P)).

5.2. Reta horizontal ou de nível (A) (V) (Figura 67).

a. *Definição*: É aquela que é paralela ao plano horizontal de projeção (π) e oblíqua em relação ao plano vertical de projeção (π') .

b. *Características*: Sendo a reta horizontal paralela ao plano horizontal de projeção (π) :

b.1. Todos os seus pontos apresentam uma *mesma cota* ((P) [x; y; z = cte]) e a sua *projeção vertical é paralela à linha de terra* (ou coincide com a linha de terra, quando $z = 0$).

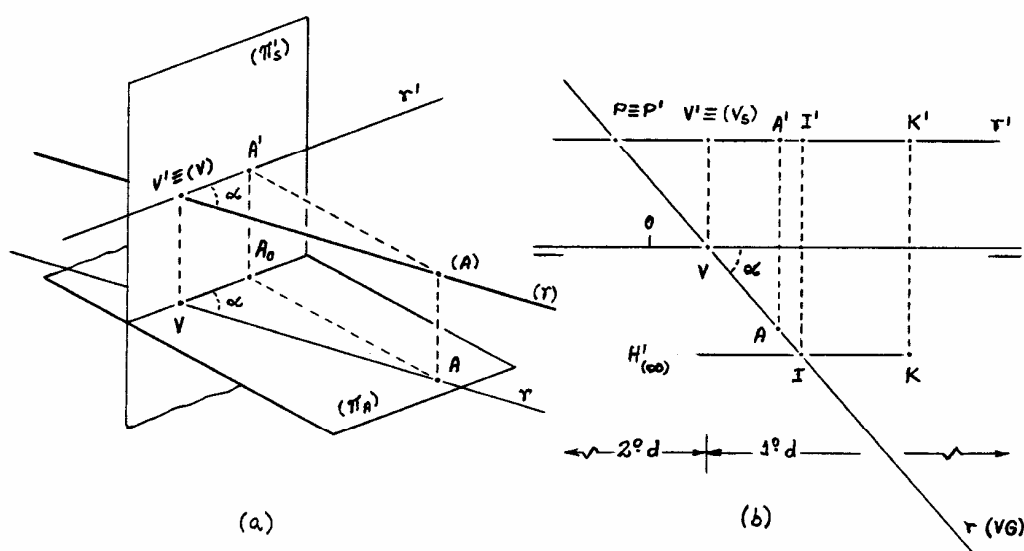


FIGURA 67. Reta horizontal ou de nível (A) (V) - $z = \text{cte}$.

b.2. Não apresenta traço horizontal (H).

b.3. Situa-se nos 1º e 2º diedros ($z > 0$) ou nos 3º e 4º diedros ($z < 0$) ou no plano horizontal de projeção (π) ($z = 0$).

b.4. Todo segmento de reta horizontal tem PROJEÇÃO HORIZONTAL EM VERDADEIRA GRANDEZA ($AV = (A)(V)$).

b.5. O ângulo que uma horizontal faz com o plano vertical de projeção (π') é igual ao ângulo que sua projeção horizontal faz com a linha de terra, porque são ângulos paralelos.

OBSERVAÇÃO: O ângulo entre duas retas concorrentes é o menor ângulo dentre os que elas formam.

c. Traços de uma reta horizontal: Os traços vertical ($(V) \equiv V'$), no (β_I) , (I), e no (β_P) , (P), são determinados como estabelecido anteriormente. Na Figura 67-b, utilizou-se a simétrica à projeção vertical da reta, determinando-se K, simétrico a K' qualquer, e traçando-se por K a reta auxiliar KH' paralela à projeção vertical, uma vez que H' situa-se no infinito (impróprio), até interceptar a projeção horizontal, determinando-se I.

5.3. Reta frontal ou de frente (A) (H) (Figura 68).

a. Definição: É aquela que é paralela ao plano vertical de projeção (π') e oblíqua em relação ao plano horizontal de projeção (π).

b. Características: Sendo a reta frontal paralela ao plano vertical de projeção (π'):

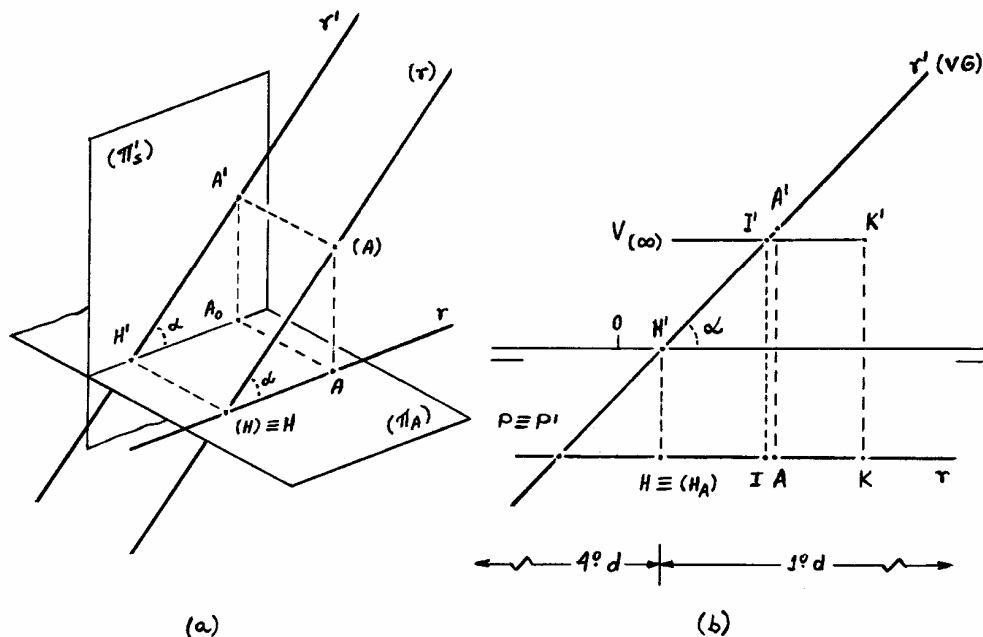


FIGURA 68. Reta frontal ou de frente (A) (H) - $y = \text{cte}$.

b.1. Todos os seus pontos apresentam um *mesmo afastamento* ((P) [x; y = cte; z]) e a sua *projeção horizontal é paralela à linha de terra* (ou coincide com a linha de terra, quando $y = 0$).

b.2. Não apresenta traço vertical (V).

b.3. Situa-se nos 1º e 4º diedros ($y > 0$) ou nos 2º e 3º diedros ($y < 0$) ou no plano vertical de projeção (π') ($y = 0$).

b.4. Todo segmento de reta frontal tem PROJEÇÃO VERTICAL EM VERDADEIRA GRANDEZA ($A'H' = (A)(H)$).

b.5. O ângulo que uma frontal faz com o plano horizontal é igual ao ângulo que sua projeção vertical faz com a linha de terra, porque são ângulos paralelos.

OBSERVAÇÃO: O ângulo entre duas retas concorrentes é o menor ângulo dentre os que elas formam.

c. Traços de uma reta frontal: Os traços horizontal ((H) $\equiv$ H), no (β_I), (I), e no (β_P), (P), são determinados como estabelecido anteriormente. Na Figura 68-b utilizou-se a simétrica à projeção horizontal da reta, determinando-se K' , simétrico a K qualquer, e traçando-se por K' a reta auxiliar $K'V$ paralela à projeção horizontal, uma vez que V situa-se no infinito (impróprio), até interceptar a projeção vertical, determinando-se I' .

5.4. Reta fronto-horizontal ou horizontal de frente (r) (Figura 69).

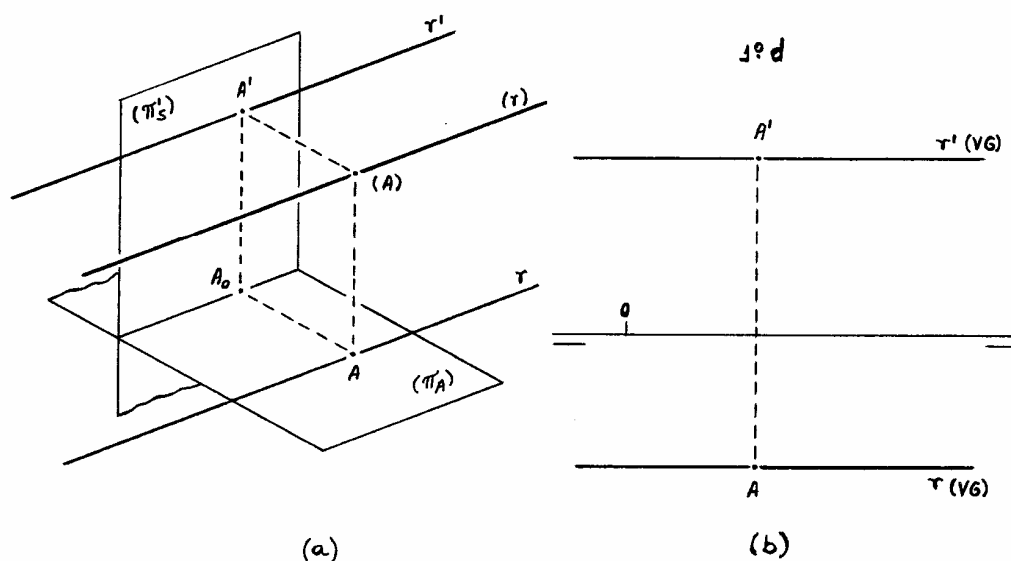


FIGURA 69. Reta fronto-horizontal ou horizontal de frente (r) - $y = \text{cte}$ e $z = \text{cte}$.

a. *Definição*: É aquela que é paralela à linha de terra; sendo simultaneamente paralela ao plano vertical de projeção (π') e ao plano horizontal de projeção (π).

b. *Características*: Sendo a reta fronto-horizontal paralela aos planos vertical e horizontal de projeção:

b.1. Todos os seus pontos apresentam um *mesmo afastamento* e uma *mesma cota* ((P) [x; y = cte; z = cte]) e suas *projeções horizontal e vertical são paralelas à linha de terra* (ou coincidem com a linha de terra).

b.2. *Não apresenta nenhum traço* (sendo paralela à linha de terra, é paralela aos planos de projeção e a qualquer bisetor).

b.3. *Situa-se nos* 1º ($y > 0$ e $z > 0$), 2º ($y < 0$ e $z > 0$), 3º ($y < 0$ e $z < 0$) e 4º ($y > 0$ e $z < 0$) diedros, no plano vertical (π') ($y = 0$ e $z \neq 0$) ou no plano horizontal (π) ($y \neq 0$ e $z = 0$) ou na linha de terra ($y = 0$ e $z = 0 \Rightarrow$ a linha de terra pode ser definida como a fronto-horizontal de cota e afastamento nulos). Quando no bisetor ímpar $y = z$ (projeções simétricas) e quando no bisetor par $y = -z$ (projeções coincidentes).

b.4. Todo segmento de reta fronto-horizontal tem PROJEÇÕES VERTICAL E HORIZONTAL EM VERDADEIRA GRANDEZA.

b.5. *Individualiza-se* uma reta fronto-horizontal por um qualquer de seus pontos, uma vez que a paralela à linha de terra que passa por um ponto é única.

c. A fronto-horizontal é ortogonal ao plano lateral de projeção (π''), o que equivale a dizer que a projeção lateral de uma fronto-horizontal reduz-se a um ponto (Figura 70).

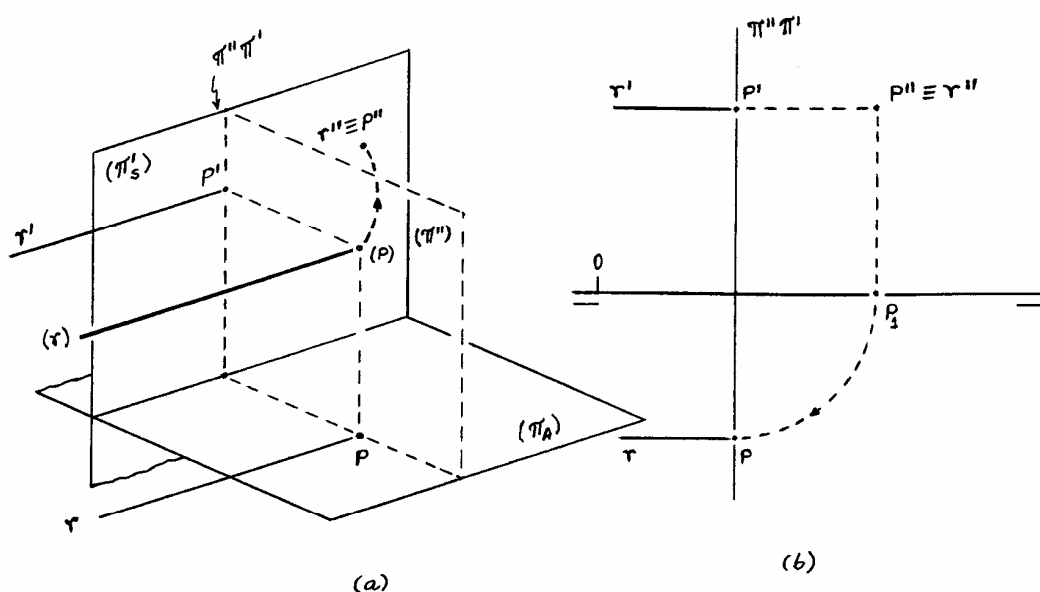


FIGURA 70. Projeção lateral de uma fronto-horizontal.

5.5. Reta vertical (r) (Figura 71).

a. *Definição*: É aquela que é ortogonal ao plano horizontal de projeção (π).

b. *Características*: Sendo a reta vertical ortogonal ao plano horizontal de projeção (π), e, portanto, *paralela ao plano vertical* (É um caso particular da frontal):

b.1. Todos os seus pontos apresentam uma *mesma abcissa* e um *mesmo afastamento* ((P) [x = cte; y = cte; z]) e sua *projeção horizontal reduz-se a um ponto* (que pode coincidir com a linha de terra, quando $y = 0$).

b.2. *Não apresenta traço vertical*.

b.3. *Situa-se nos 1º e 4º diedros* ($y > 0$), nos 2º e 3º diedros ($y < 0$), ou no plano vertical (π') ($y = 0 \Rightarrow$ a projeção horizontal é coincidente com a linha de terra).

b.4. Todo segmento de reta vertical tem PROJEÇÃO VERTICAL EM VERDADEIRA GRANDEZA.

b.5. *Individualiza-se* uma reta vertical por um qualquer de seus pontos, uma vez que a ortogonal ao plano horizontal que passa por um ponto é única.

b.6. *A projeção vertical de uma vertical é perpendicular à linha de terra*.

c. *Traços de uma reta vertical*: As projeções horizontais H ($\equiv$ (H)), I e P dos traços de uma vertical nos planos (π), (β_I) e (β_P), respectivamente, são coincidentes, já que a projeção horizontal da reta vertical reduz-se a um ponto. A projeção vertical do traço horizontal, H', situa-se na linha de terra ($z_{(H)} = 0$). A projeção vertical do traço

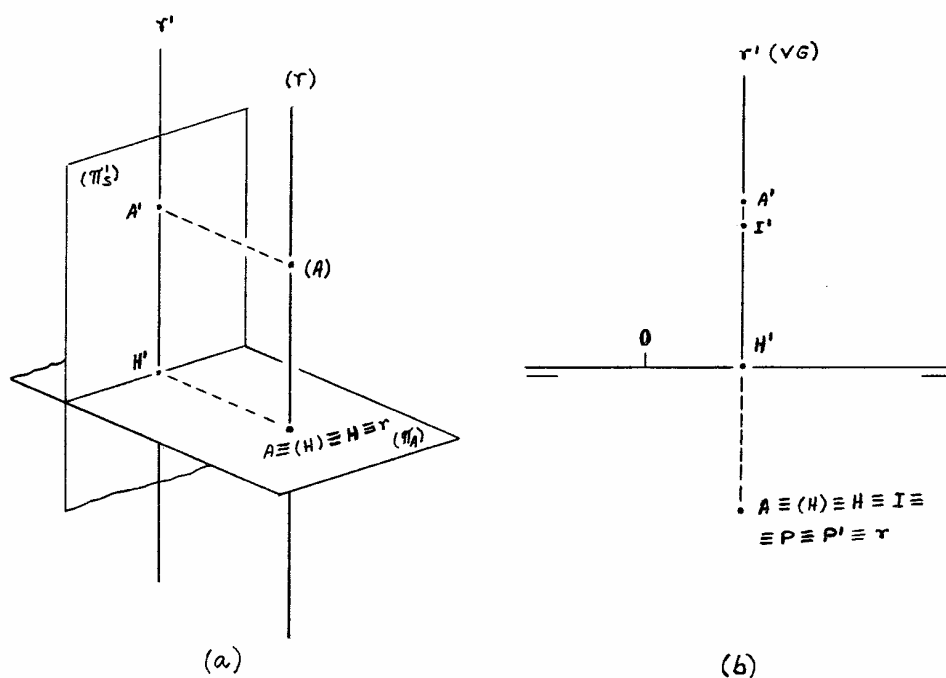


FIGURA 71. Reta vertical (r) - $x = \text{cte}$ e $y = \text{cte}$.

no (β_I) , I' , é o ponto da projeção vertical que tem cota igual ao afastamento constante da reta ($z_{(I)} = y_{(I)}$), sendo simétrica a I . A projeção vertical do traço no (β_P) , P' , é coincidente com P ($P \equiv P'$), já que $z_{(P)} = -y_{(P)}$.

5.6. Reta de topo (r) (Figura 72).

a. *Definição*: É aquela que é ortogonal ao plano vertical de projeção (π').

b. *Características*: Sendo a reta de topo ortogonal ao plano vertical de projeção (π'), e, portanto, *paralela ao plano horizontal* (É um caso particular da horizontal):

b.1. Todos os seus pontos apresentam uma *mesma abscissa* e uma *mesma cota* ((P) [$x = \text{cte}$; y ; $z = \text{cte}$]) e sua *projeção vertical reduz-se a um ponto* (que pode coincidir com a linha de terra, quando $z = 0$).

b.2. *Não apresenta traço horizontal*.

b.3. *Situa-se nos 1° e 2° diedros* ($z > 0$), nos 3° e 4° diedros ($z < 0$), ou no plano horizontal (π) ($z = 0 \Rightarrow$ a projeção vertical é coincidente com a linha de terra).

b.4. Todo segmento de reta de topo tem **PROJEÇÃO HORIZONTAL EM VERDADEIRA GRANDEZA**.

b.5. *Individualiza-se* uma reta de topo por um qualquer de seus pontos, uma vez que a ortogonal ao plano vertical que passa por um ponto é única.

b.6. *A projeção horizontal de uma reta de topo é perpendicular à linha de terra.*

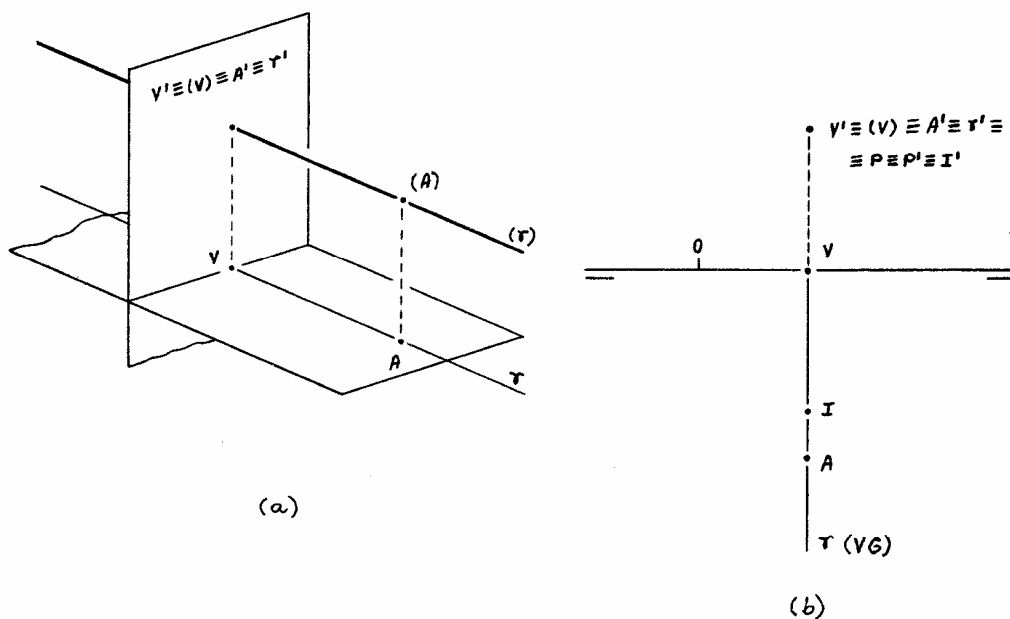


FIGURA 72. Reta de topo (r) - $x = \text{cte}$ e $z = \text{cte}$.

c. *Traços de uma reta de topo*: As projeções verticais V' ($\equiv (V)$), I' e P' dos traços de uma reta de topo nos planos (π') , (β_I) e (β_P) , respectivamente, são coincidentes, já que a projeção vertical da reta de topo reduz-se a um ponto. A projeção horizontal do traço vertical, V , situa-se na linha de terra ($y_{(V)} = 0$). A projeção horizontal do traço no (β_I) , I , é o ponto da projeção horizontal que tem afastamento igual à cota constante da reta ($y_{(I)} = z_{(I)}$), sendo simétrica a I' . A projeção horizontal do traço no (β_P) , P , é coincidente com P' ($P \equiv P'$), já que $y_{(P)} = -z_{(P)}$.

5.7. Reta perpendicular ao (β_I) (r) (Figura 73).

a. *Definição*: É aquela que é ortogonal ao (β_I) e, portanto, também paralela ao (β_P) .

b. *Características*: Sendo a reta perpendicular ao (β_I) *ortogonal* a este bisetor, senão a reta seria simplesmente paralela ao (β_P) :

b.1. Todos os seus pontos apresentam a *mesma abcissa* ((P) [$x = \text{cte}; y; z$]), sendo uma *reta de perfil* (podendo ser representada pela sua terceira projeção ou projeção lateral).

b.2. As projeções horizontal e vertical de um segmento de uma reta (A) (B) perpendicular ao (β_I) , além de perpendiculares à linha de terra, têm o mesmo comprimento e o mesmo sentido ($AB = A'B'$), uma vez que o ângulo formado pelo (β_I) e os planos de projeção é 45° . Podendo ser identificada em *épura* simplesmente por esta característica.

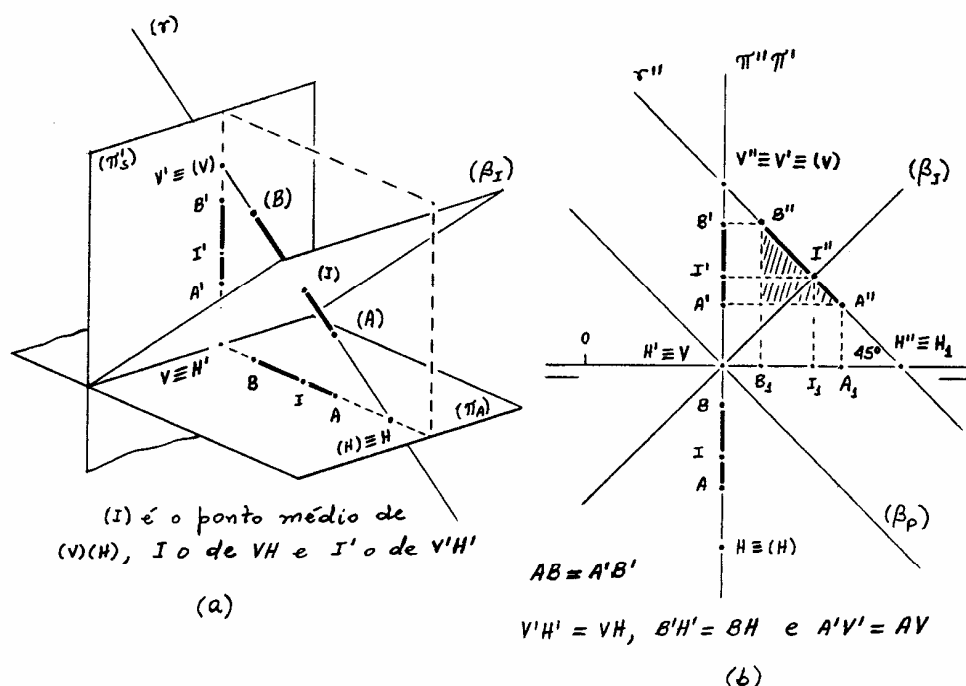


FIGURA 73. Reta perpendicular ao (β_I) .

b.3. Não apresenta traço no (β_P) , uma vez que é paralela a este bissetor.

b.4. Situa-se nos 2º, 1º e 4º diedros ou nos 2º, 3º e 4º diedros ou no (β_P) .

b.5. Todo segmento de reta perpendicular ao (β_I) tem sua PROJEÇÃO LATERAL em VERDADEIRA GRANDEZA.

b.6. Individualiza-se uma reta perpendicular ao (β_I) por um qualquer de seus pontos, pois a ortogonal a um plano por um ponto é única.

c. Traços de uma reta perpendicular ao (β_I) : Os traços (H), (V) e (I) podem ser obtidos através da terceira projeção ou projeção lateral da reta, uma vez que ela é de perfil; entretanto, desta projeção lateral, pode-se obter dados que permitem a obtenção das projeções ortogonais da reta, bem como os traços da reta.

c.1. $V \equiv H'$ situa-se na linha de terra;

c.2. $B'H' = BH$ e $A'V' = AV$ ou $A'H' = AH$ e $BV = B'V'$ (As igualdades são em comprimento e sentido, de acordo com a ordem alfabética indicada).

c.3. $VH = V'H'$, estando $H \equiv (H)$ na projeção horizontal da reta e $V' \equiv (V)$ na projeção vertical;

c.4. (I) é o ponto médio de (V) (H), uma vez que I'' é o ponto médio de $V''H''$, e I é o ponto médio de VH e I' é o ponto médio de $V'H'$.

OBSERVAÇÃO: Quando a reta perpendicular ao (β_I) está contida no (β_P) (Figura 74), os seus traços são coincidentes com a linha de terra, sendo $I \equiv I' \equiv (I) \equiv V \equiv V' \equiv (V) \equiv H \equiv (H) \equiv H'$ (As projeções vertical e horizontal de cada ponto da reta são coincidentes, uma vez que a cota e o afastamento de um ponto no (β_P) são simétricos).

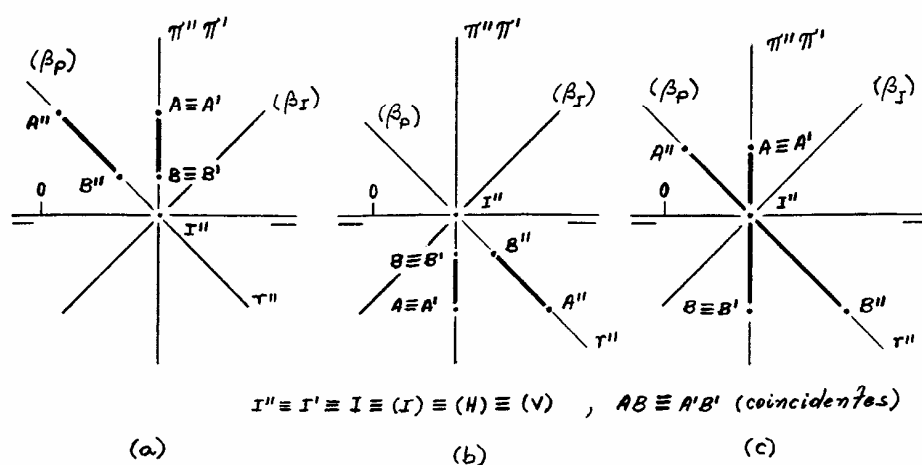


FIGURA 74. Reta perpendicular ao (β_I) contida no (β_P) .

5.8. Reta perpendicular ao (β_P) (r) (Figuras 75 e 76).

a. *Definição*: É aquela que é ortogonal ao (β_P) e, portanto, também paralela ao (β_I) .

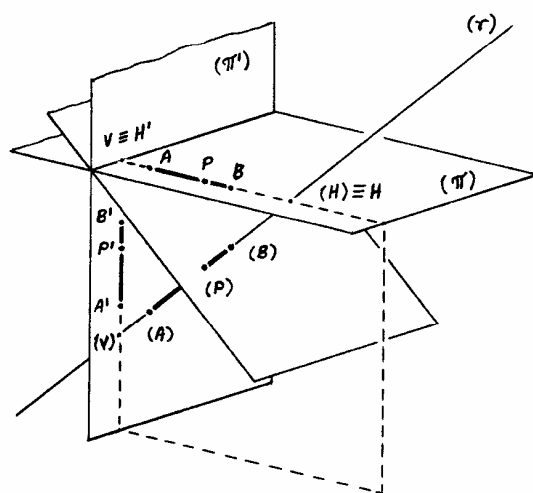
b. *Características*: Sendo a reta perpendicular ao (β_P) *ortogonal* a este bisetor, senão a reta seria simplesmente paralela ao (β_I) :

b.1. Todos os seus pontos apresentam a *mesma abcissa* ((P) $[x = \text{cte}; y; z]$), sendo uma *reta de perfil* (podendo ser representada pela sua terceira projeção ou projeção lateral).

b.2. As projeções horizontal e vertical de um segmento de uma reta (A) (B) perpendicular ao (β_P) , além de perpendiculares à linha de terra, têm o mesmo comprimento e sentidos contrários ($AB = -A'B'$), uma vez que o ângulo formado pelo (β_P) e os planos de projeção é 45° . Podendo ser identificada em *épura* simplesmente por esta característica.

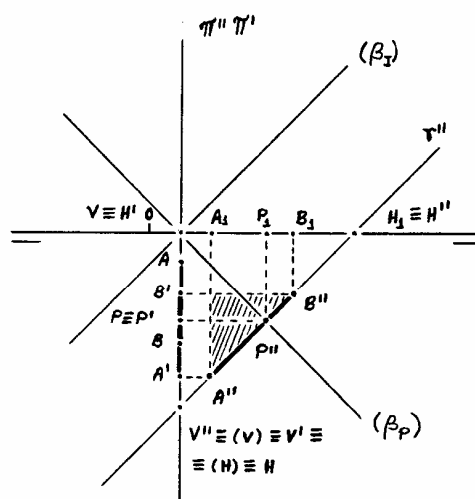
b.3. Não apresenta traço no (β_I) , uma vez que é paralela a este bisetor.

b.4. Situa-se nos 1° , 2° e 3° diedros (Figura 76) ou nos 1° , 4° e 3° diedros (Figura 75) ou no (β_I) .



(P) é o ponto médio de (V)(H),
P o de VH e P' o de V'H'

(a)



$AB = -A'B'$ (simétricas)

$V'H' = -VH$, $BH = -B'H'$ e $AV = -A'V'$

(b)

FIGURA 75. Reta perpendicular ao (β_P) passando pelos 3° , 4° e 1° diedros.

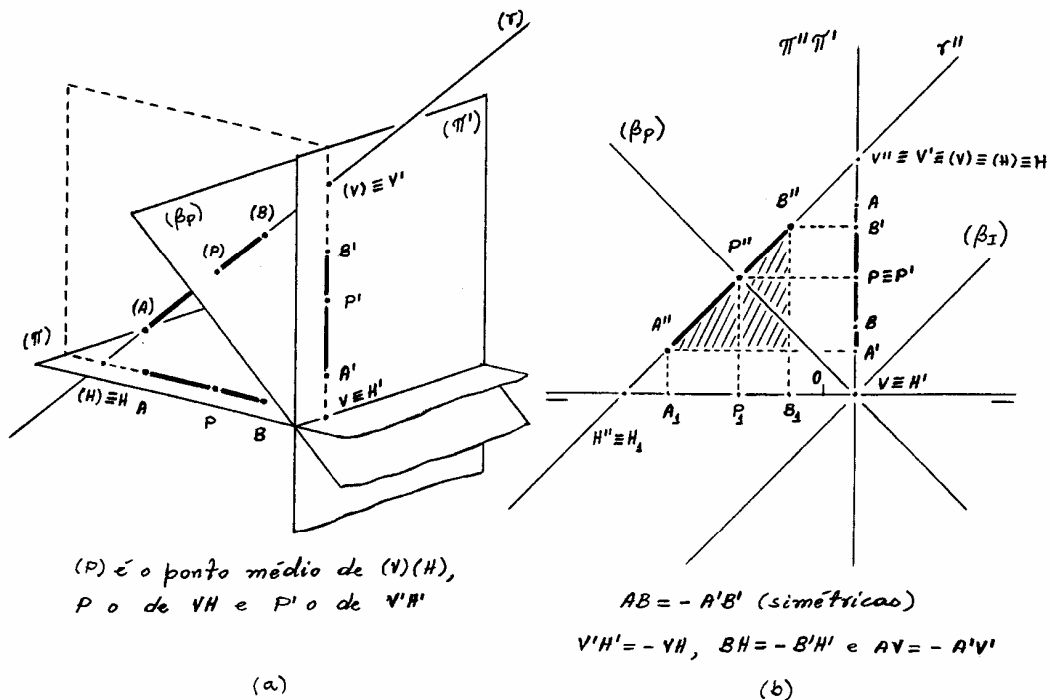


FIGURA 76. Reta perpendicular ao (β_P) passando pelos 3º, 2º e 1º diedros.

b.5. Todo segmento de reta perpendicular ao (β_P) tem sua PROJEÇÃO LATERAL em VERDADEIRA GRANDEZA.

b.6. Individualiza-se uma reta perpendicular ao (β_P) por um qualquer de seus pontos, pois a ortogonal a um plano por um ponto é única.

c. Traços de uma reta perpendicular ao (β_P) . Os traços (H) , (V) e (P) podem ser obtidos através da terceira projeção ou projeção lateral da reta, uma vez que ela é de perfil; entretanto, desta projeção lateral, pode-se obter dados que permitem a obtenção das projeções ortogonais da reta, bem como os traços da reta:

c.1. $V \equiv H'$ situa-se na linha de terra;

c.2. $B'H' = -BH$ e $A'V' = -AV$ ou $A'H' = -AH$ e $BV = -B'V'$ (Os comprimentos são iguais, mas os sentidos são opostos, de acordo com a ordem alfabética indicada - poderia ser dito: $B'H' = HB$ e $A'V' = VA$ ou $A'H' = HA$ e $BV = V'B'$).

c.3. $VH = -V'H'$ ou $VH = H'V'$, sendo $H \equiv (H) \equiv V' \equiv (V)$;

c.4. (P) é o ponto médio de $(V)(H)$, uma vez que P'' é o ponto médio de $V''H''$, e $P \equiv P'$ é o ponto médio de $VH = -V'H'$ (ou $VH \equiv H'V'$, coincidentes).

OBSERVAÇÃO: Quando a reta perpendicular ao (β_P) está contida no (β_I) (Figura 77), os seus traços são coincidentes com a linha de terra, sendo $P \equiv P' \equiv (P) \equiv V \equiv V' \equiv (V) \equiv H \equiv (H) \equiv H'$ (As projeções vertical e horizontal de cada ponto da reta são simétricas, uma vez que a cota e o afastamento de um ponto no (β_I) são iguais).

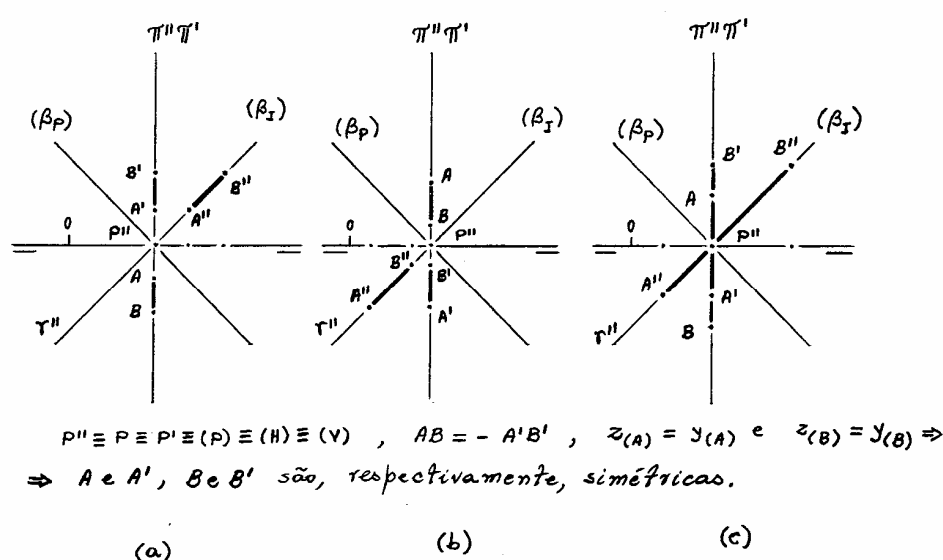


FIGURA 77. Reta perpendicular ao (β_P) contida no (β_I) .

5.9. EXERCÍCIOS

Retas particulares.

Objetivos: Representar e identificar, em épura, as retas: Horizontal ou de nível, frontal ou de frente, fronto-horizontal (horizontal de frente), vertical e de topo.

Conhecimentos necessários: Representação de uma reta em épura. Leitura de épura. Verdadeira grandeza. Retas particulares.

Fontes: PINHEIRO, V. A. *Noções de Geometria Descritiva*; ponto, reta e plano. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970. Vol. I. p. 58-59.

PRÍNCIPE JÚNIOR, A. R. *Noções de geometria descritiva*. 37. ed. São Paulo: Nobel, 1990. Vol. I. p. 69-98.

1. Construir as projeções da horizontal (A) (B) e determinar-lhe os traços no plano (π'), (β_I) e (β_P). Dados: (A) [2; 4; -2] e (B) [8; -3; ?].

SUGESTÃO: Representam-se (A) e B. Traça-se AB. A projeção vertical de uma reta horizontal é paralela à linha de terra; por A' traça-se paralela a $\pi'\pi$. Pela linha de chamada, determina-se B'. Determinam-se os traços da reta, expressando-os por suas coordenadas descritivas e descrevendo a trajetória da reta.

2. Traçar a épura do segmento horizontal (V) (I) = 6, sabendo-se que (V) situa-se em (π') e (I), no (β_I). Dá-se: (V) [3; ?; 2].

OBSERVAÇÃO: A abcissa de (I) é maior que a de (V).

SUGESTÃO: Representa-se (V). Como o segmento é horizontal, a sua projeção vertical é paralela à linha de terra, passando por V'. Devido o segmento ser horizontal, a cota de (I) é igual à de (V). Como (I) é o traço da reta no (β_I), seu afastamento é igual à sua cota ($y = z = 2$). Traça-se uma reta auxiliar constituída pelos pontos de afastamento 2 (obviamente que será paralela à linha de terra). Como a reta horizontal é paralela à sua projeção horizontal, a projeção horizontal de qualquer segmento da reta está em verdadeira grandeza; isto é: apresenta o mesmo comprimento que o segmento de reta objeto. Assim (V) (I) = VI = 6 (6 cm). Com centro em V e raio igual a 6, determina-se na reta auxiliar de afastamento 2, a projeção horizontal I. Pela linha de chamada determina-se I'. Complementando o exercício, determinam-se os traços da reta, expressando-os por suas coordenadas descritivas e descrevendo a trajetória da reta.

3. Um segmento de nível (I) (P) forma com o plano (π') ângulo de 30° . Determinar seu traço vertical (V) e indicar os diedros por que passa seu suporte. Sabe-se que (I) [8; -2; ?] situa-se no (β_I), (P) no (β_P) e que a abcissa de (P) é menor que a de (I).

SUGESTÃO: $30^\circ = +30^\circ$, é medido a partir de $\pi'\pi$ no sentido anti-horário. Suporte é a reta que contém um segmento. O ângulo que a reta horizontal ou de nível forma com o plano vertical é o mesmo formado por sua projeção horizontal e a linha de terra. A cota de (I) é igual ao seu afastamento. Representa-se (I). Por I' traça-se paralela à linha de terra, representando a projeção vertical da reta (I) (P). Por I traça-se uma reta formando 30° com a linha de terra. Complementando o exercício, determinam-se os traços da reta, expressando-os por suas coordenadas descritivas e descrevendo a trajetória da reta.

4. Uma frontal (A) (B) tem afastamento $y = 2$. Pede-se determinar seus traços nos planos (π), (β_I) e (β_P), sabendo-se que: (A) [2; ?; 4] e (B) [4; ?; 1].

SUGESTÃO: Se a reta é frontal, todos os seus pontos têm o mesmo afastamento, $y = 2$. Representam-se as projeções da reta em épura. Complementando o exercício, determinam-se os traços da reta, expressando-os por suas coordenadas descritivas e descrevendo a trajetória da reta.

5. Traçar a épura do segmento frontal (M) (N) = 5, cujo suporte faz 45° com o plano (π). Dado: (M) [3; 2; 1].

OBSERVAÇÃO: O segmento (M) (N) é do 1° diedro e $x_{(N)} > x_{(M)}$.

SUGESTÃO: Representa-se (M). Como a reta é frontal, todos os seus pontos têm o mesmo afastamento ($y = 2$); por M, traça-se paralela à linha de terra. O ângulo que a reta frontal forma com o plano horizontal é o mesmo que sua projeção vertical forma com a linha de terra. Por M' traça-se a projeção vertical da reta formando um ângulo de 45° com a linha de terra. Como uma reta frontal é paralela ao plano vertical, a projeção vertical de qualquer segmento desta reta está em verdadeira grandeza. A partir de M', ao longo da projeção vertical, para a direita (pois $x_{(N)} > x_{(M)}$ - a abcissa de (N) é maior que a de (M)), mede-se 5 cm, determinando-se N'. Pela linha de chamada determina-se N. Complementando o exercício, determinam-se os traços da reta, expressando-os por suas coordenadas descritivas e descrevendo a trajetória da reta.

6. Dada a frontal (A) (B), pede-se obter as projeções da reta (C) (D), simétrica de (A) (B) em relação ao (β_P) . Ler a épura de (C) (D), identificando sua eventual posição particular. Sabe-se que (A) [3; 2; 5] e (B) [5; ?; 1].

SUGESTÃO: Considerar a reta (A) (B) $\equiv (r)$ e a reta (C) (D) $\equiv (s)$. O afastamento de (B) é igual ao de (A), pois a reta é frontal. Representa-se a épura de (A) (B). Sendo a reta (C) (D) simétrica em relação ao bisetor par à reta (A) (B), (C) é simétrico a (A) e (D) é simétrico a (B) em relação a esse bisetor - pontos simétricos em relação ao (β_P) têm a mesma abscissa e apresentam afastamentos e cotas simétricos ($y_{(C)} = -z_{(A)}$ e $z_{(C)} = -y_{(A)}$; $y_{(D)} = -z_{(B)}$ e $z_{(D)} = -y_{(B)}$); assim: (C) [3; -5; -2] e (D) [5; -1; -2]. Representa-se (C) (D) em épura. (O segmento (C) (D) é horizontal, situado no 3º diedro $\Rightarrow$ a reta horizontal (C) (D) passa pelos 3º e 4º diedros).

7. Dá-se a frontal (A) (B) e pede-se representar por suas projeções a simétrica (C) (D) de (A) (B) em relação ao (β_I) . Identificar a eventual posição particular de (C) (D). Sabe-se que (A) [2; 1; 2] e (B) [7; ?; 5].

SUGESTÃO: Considerar a reta (A) (B) $\equiv (r)$ e a reta (C) (D) $\equiv (s)$. O afastamento de (B) é igual ao de (A), pois a reta é frontal. Representa-se a épura de (A) (B). Sendo a reta (C) (D) simétrica em relação ao bisetor ímpar à reta (A) (B), (C) é simétrico a (A) e (D) é simétrico a (B) em relação a esse bisetor - pontos simétricos em relação ao (β_I) têm a mesma abscissa e apresentam afastamentos e cotas iguais ($y_{(C)} = z_{(A)}$ e $z_{(C)} = y_{(A)}$; $y_{(D)} = z_{(B)}$ e $z_{(D)} = y_{(B)}$); assim: (C) [2; 2; 1] e (D) [7; 5; 1]. Representa-se (C) (D) em épura. (O segmento (C) (D) é horizontal, situado no 1º diedro $\Rightarrow$ a reta horizontal (C) (D) passa pelos 1º e 2º diedros).

8. Pelos pontos (A), (B), (C) e (D) construir as fronto-horizontais (r), (s), (t) e (u), respectivamente, sabendo-se que: (A) [2; 5; ?], estando (r) no plano (π) ; (B) [7; -2; ?], sendo (s) uma reta do (β_I) ; (C) [12; -3; 1]; (D) [15; ?; -3], situado no plano (π') .

OBSERVAÇÃO: Utilizar uma só linha de terra.

SUGESTÃO: (A), por estar situado no plano horizontal, apresenta cota nula. (B), por estar situado no bisetor ímpar, apresenta cota igual ao afastamento. (D), por estar situado no plano vertical, apresenta afastamento nulo. Representam-se os pontos. As retas fronto-horizontais, por serem paralelas à linha de terra (e, portanto, aos planos de projeção), apresentam projeções paralelas à linha de terra. Pelas projeções dos pontos pertencentes a cada reta, traçam-se paralelas à linha de terra, obtendo-se as respectivas projeções das retas.

9. Traçar por (M) a vertical (M) (H) e a reta de topo (M) (V), determinando os traços de ambas nos planos bisetores. Sabe-se que (M) [6; 5; 2] e que (H) e (V) situam-se, respectivamente, no plano (π) e no plano (π') .

SUGESTÕES: Representa-se (M). 1. Para a vertical (M) (H): (H) e (M) têm de apresentar a mesma abscissa e o mesmo afastamento, sendo a cota do traço horizontal (H) nula: (H) [6; 5; 0]. Para a determinação dos traços no (β_I) e no (β_P) , tem-se de considerar que a reta vertical (M) (H) os atravessa em pontos de abscissas e afastamentos iguais aos de (M) e (H), ou seja: $x_{(H)} = x_{(P)} = x_{(M)} = x_{(H)} = 6$ e $y_{(H)} = y_{(P)} = y_{(M)} = y_{(H)} = 5$. Portanto: (I) [6; 5; 5], porque sua cota e seu afastamento são iguais, e (P) [6; 5; -5], porque sua cota e seu afastamento são simétricos. 2. Para a reta de topo (M) (V): (V) e (M) têm de apresentar a mesma abscissa e a mesma cota, sendo o afastamento do traço vertical (V) nulo: (V) [6; 0; 2]. Para a determinação dos traços no (β_I) e no (β_P) , tem-se de considerar que a reta de topo (M) (V) os atravessa em pontos de abscissas e cotas iguais aos de (M) e (V), ou seja: $x_{(V)} = x_{(P)} = x_{(M)} = x_{(H)} = 6$ e $z_{(V)} = z_{(P)} = z_{(M)} = z_{(H)} = 2$. Portanto: (I) [6; 2; 2], porque sua cota e seu afastamento são iguais, e (P) [6; -2; 2], porque sua cota e seu afastamento são simétricos.

10. Traçar uma frontal distante 3 cm do plano (π') contendo um ponto (A) no bisetor do 1º diedro e outro ponto (B) no (π_A) . Dados complementares: $x_{(A)} = 3$ e $x_{(B)} = 7$.

6. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS.

Retas reversas, concorrentes e paralelas.

6.1. Introdução:

a. Objetivos:

a.1. Representar e identificar duas retas concorrentes, paralelas ou reversas.

a.2. Verificar a posição relativa de duas retas.

b. Retas coplanares (Figura 78): Duas retas são *coplanares* quando situam-se em um mesmo plano. As retas coplanares podem ser:

b.1. Retas concorrentes (Figura 78-a): Duas retas coplanares são *concorrentes* ou *incidentes*, quando têm um ponto comum (I) próprio.

b.2. Retas paralelas (Figura 78-b): Duas retas coplanares são *paralelas*, quando não têm ponto comum ou ele é impróprio (localiza-se no infinito, I_∞).

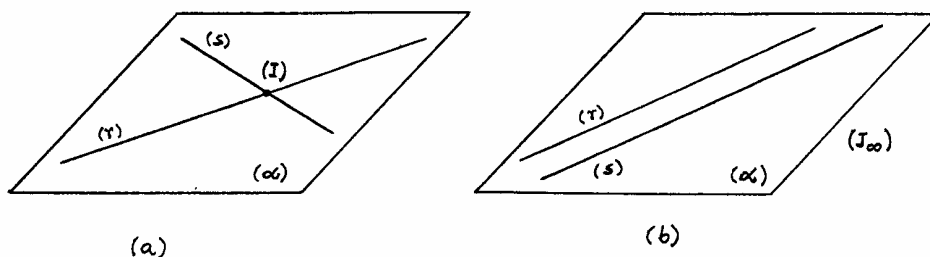


FIGURA 78. Retas coplanares: (a) concorrentes; (b) paralelas. (As retas não podem ser reversas ou cruzadas).

c. Retas não coplanares (Figura 79): Duas retas são *não coplanares* quando não se situam em um mesmo plano. As retas não coplanares podem ser:

c.1. Retas reversas (Figura 79-a): Duas retas não coplanares são *reversas* ou *cruzadas*, quando apenas um ponto de uma delas se situa no plano que contém a outra (as retas se cruzam mas não se interceptam).

c.2. Retas concorrentes (Figura 79-b): Duas *retas não coplanares* são *concorrentes* quando o ponto de uma das retas e o plano que contém a outra reta é um ponto desta outra reta (as retas se interceptam).

OBSERVAÇÃO: Nos casos c.1 e c.2 as retas podem ser reversas ou concorrentes, mas nunca paralelas.

c.3. Retas contidas em planos paralelos (Figura 80): Duas retas não coplanares contidas em planos paralelos podem ser *paralelas* (Figura 80-a) ou *reversas* (Figura 80-b), mas nunca concorrentes (as retas não podem se interceptar).

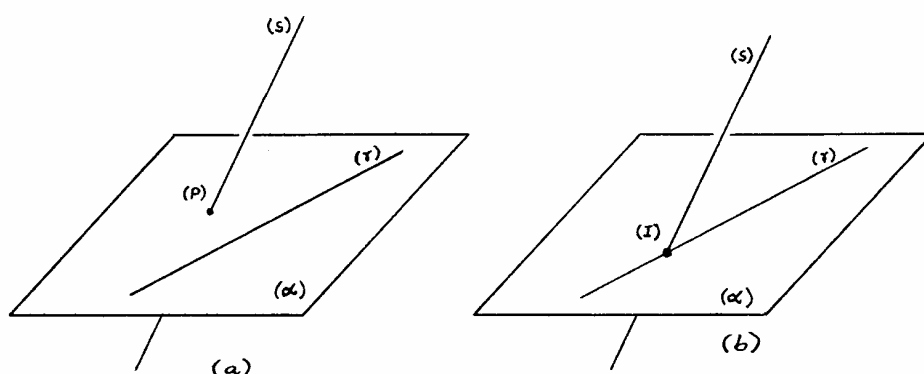


FIGURA 79. Retas não coplanares: (a) reversas ou cruzadas; (b) concorrentes. (As retas não podem ser paralelas).

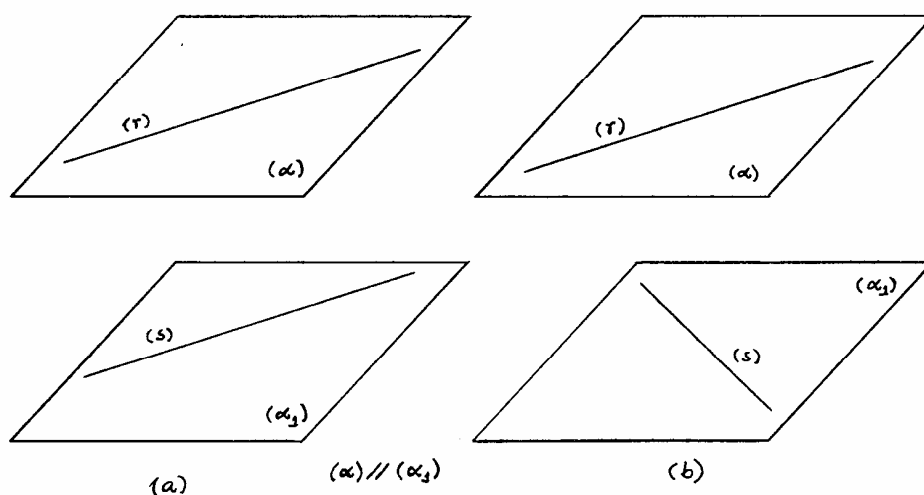


FIGURA 80. Retas não coplanares contidas em planos paralelos: (a) paralelas; (b) reversas ou cruzadas. (As retas não podem ser concorrentes).

6.2. Retas concorrentes: Excetuando-se retas de perfil, *duas retas são concorrentes quando:*

a. As projeções horizontais das retas, bem como as projeções verticais, são concorrentes e os pontos de interseção ou de concorrência estão numa mesma linha de

chamada. Na Figura 81, mostram-se duas retas quaisquer concorrentes; I , o ponto de concorrência das projeções horizontais r e s , e I' , o ponto de concorrência das projeções verticais r' e s' , estão na mesma linha de chamada, significando que são, respectivamente, as projeções horizontal e vertical de um ponto (I) que pertence às retas (r) e (s). Se I e I' não estivessem na mesma linha de chamada, as retas (r) e (s) seriam reversas ou cruzadas.

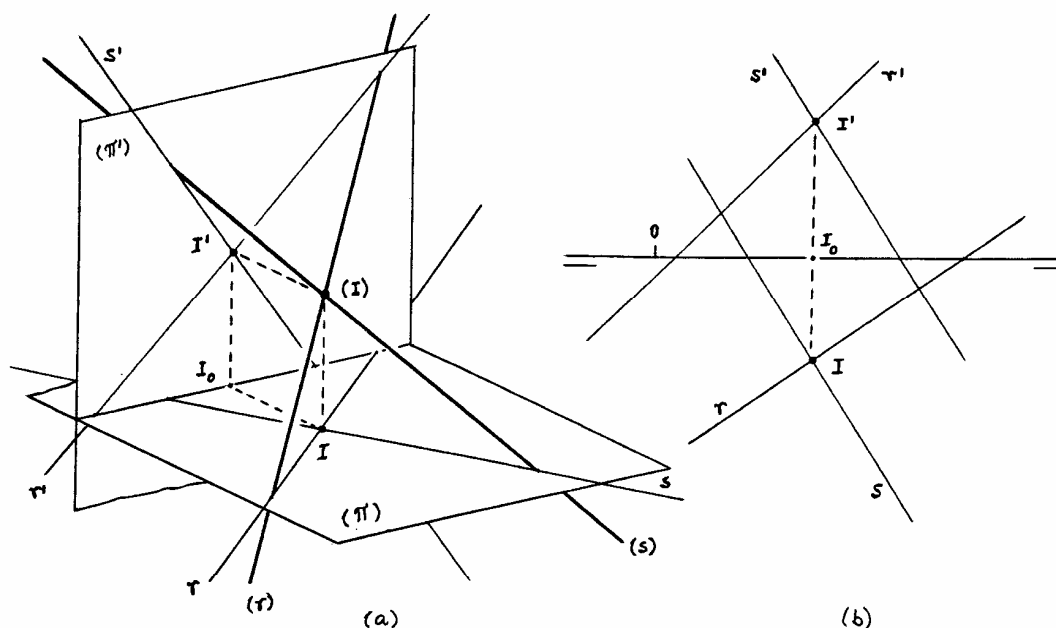


FIGURA 81. Duas retas quaisquer concorrentes.

b. Duas projeções de mesmo nome são concorrentes e as outras duas são coincidentes ou se confundem (isto acontece quando as duas retas concorrentes admitem um mesmo plano projetante). Na Figura 82, mostram-se duas retas frontais concorrentes (os afastamentos são iguais, senão as retas seriam reversas) e na Figura 83, duas retas horizontais concorrentes (as cotas são iguais, senão as retas seriam reversas).

c. Duas projeções de mesmo nome são concorrentes e uma das projeções de uma das retas reduz-se a um ponto situado sobre a projeção de mesmo nome da outra reta (além das duas retas admitirem o mesmo plano projetante, uma delas é ortogonal ao plano de projeção). Na Figura 84, mostram-se duas retas, uma frontal e outra vertical, concorrentes (os afastamentos são iguais, senão as retas seriam reversas) e na Figura 85, duas retas, uma horizontal e outra de topo, concorrentes (as cotas são iguais, senão as retas seriam reversas).

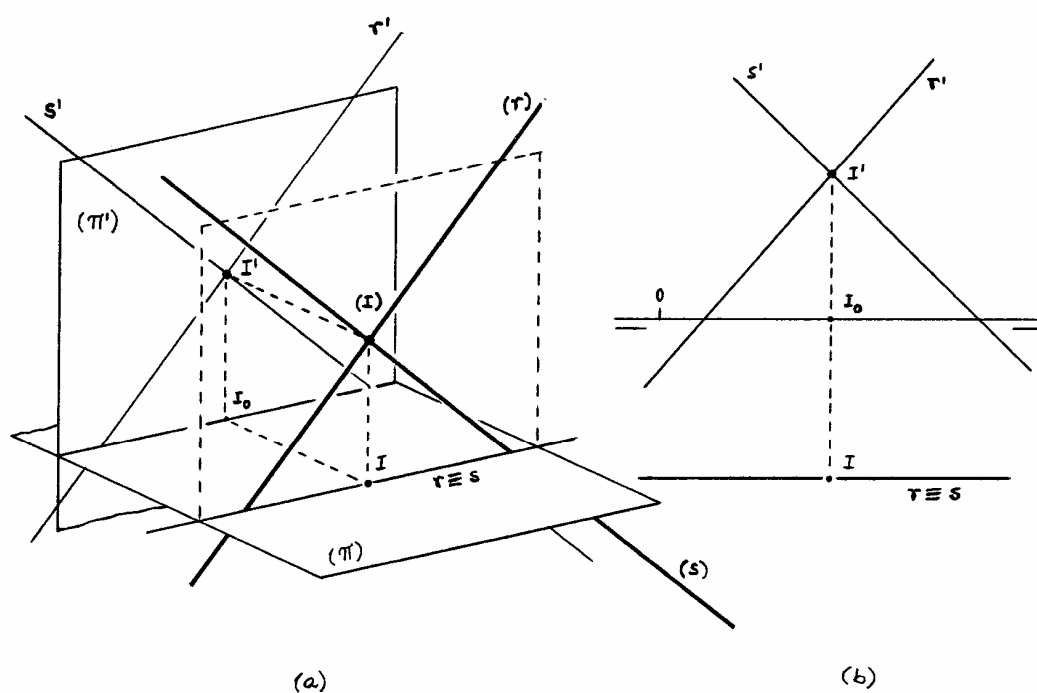


FIGURA 82. Duas retas frontais concorrentes (os afastamentos são iguais, senão as retas seriam reversas ou cruzadas).

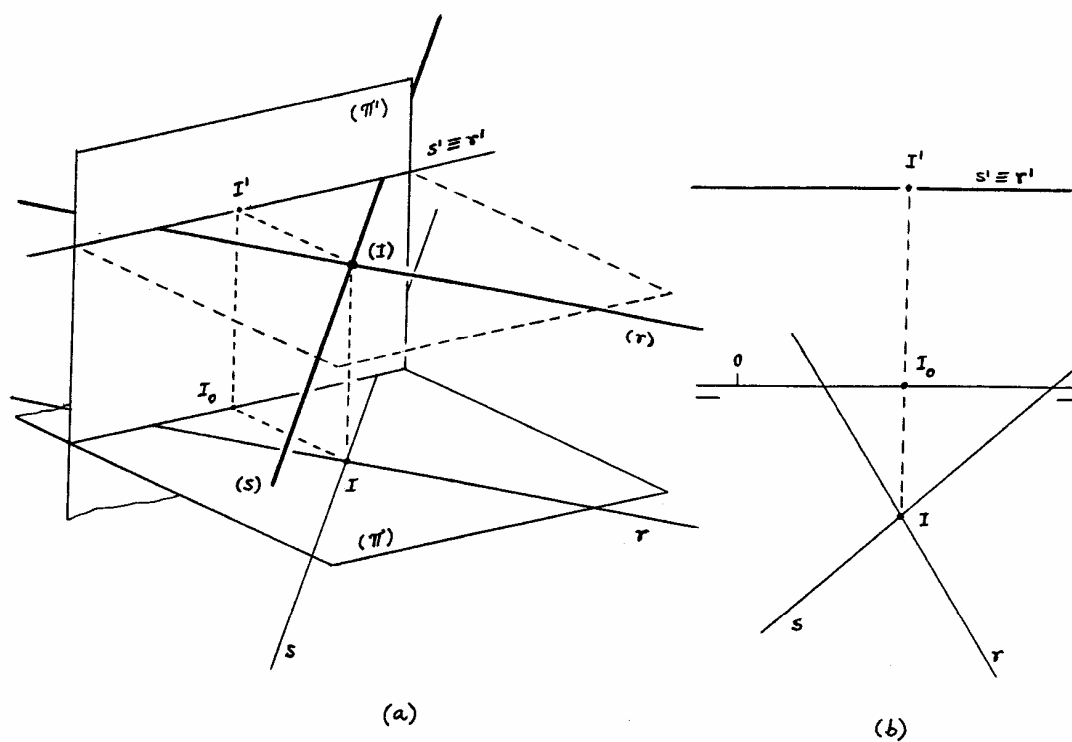


FIGURA 83. Duas retas horizontais concorrentes (as cotas são iguais, senão as retas seriam reversas ou cruzadas).

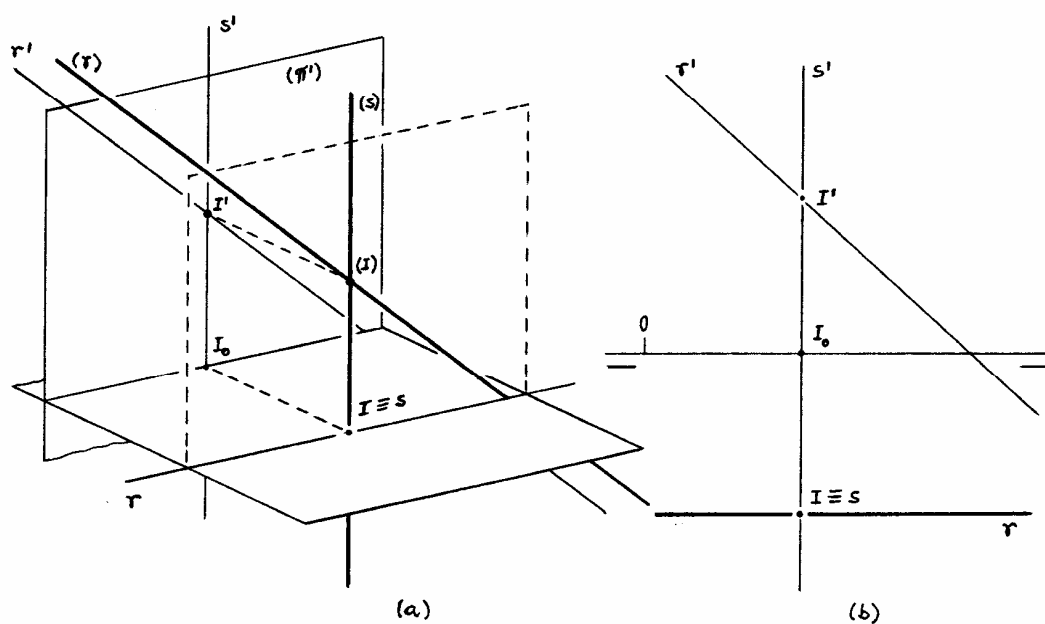


FIGURA 84. Retas frontal e vertical concorrentes (os afastamentos são iguais, senão as retas seriam reversas ou cruzadas).

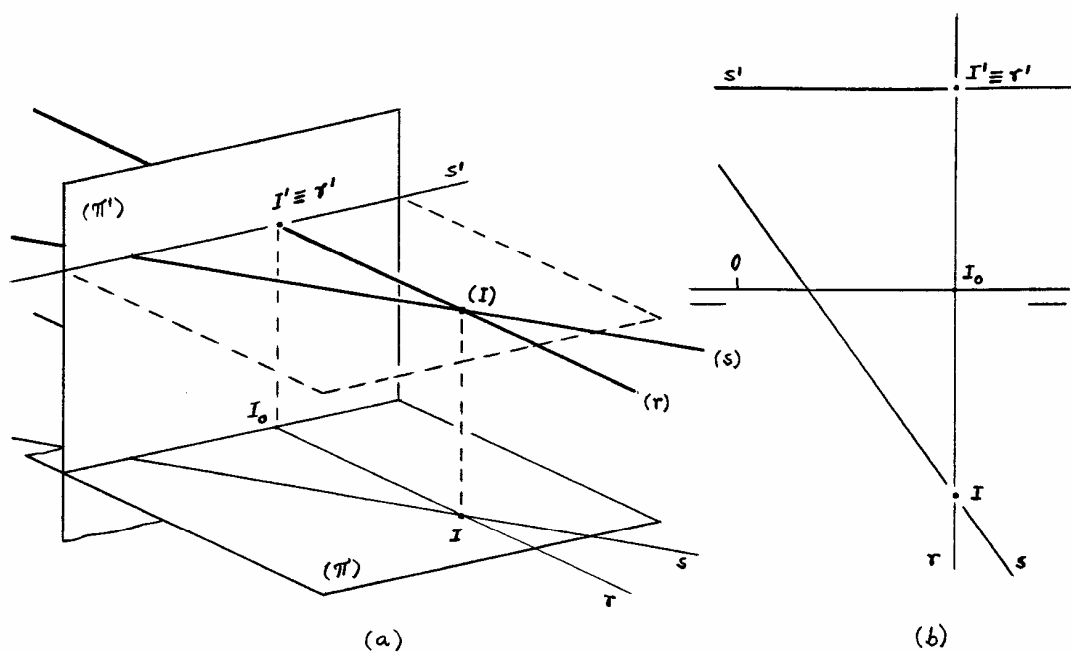


FIGURA 85. Retas horizontal e de topo concorrentes (as cotas são iguais, senão as retas seriam reversas ou cruzadas).

6.3. Retas paralelas: Excetuando-se retas de perfil, *duas retas são paralelas quando:*

a. As projeções horizontais, bem como as projeções verticais, são paralelas. Na Figura 86, mostram-se duas retas quaisquer paralelas; as projeções horizontais r e s são paralelas e as projeções verticais r' e s' também são paralelas.

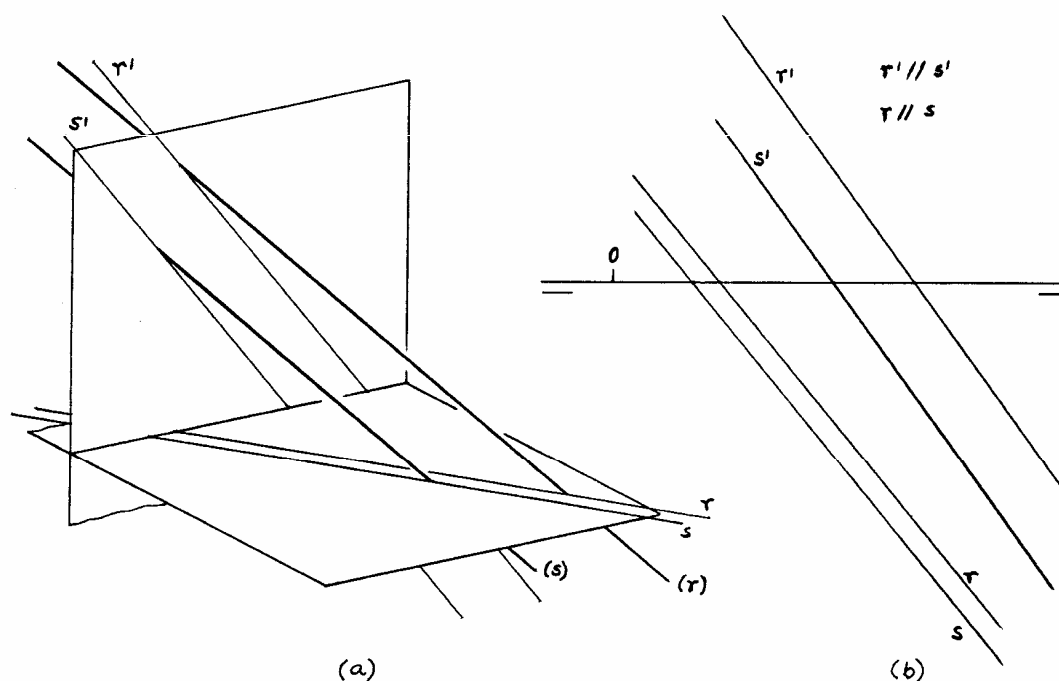


FIGURA 86. Duas retas quaisquer paralelas.

b. Duas projeções de mesmo nome são paralelas e as outras duas coincidem ou se confundem (isto acontece quando as duas retas paralelas admitem o mesmo plano projetante). Na Figura 87, mostram-se duas retas frontais paralelas num mesmo plano frontal e na Figura 88 duas retas horizontais paralelas num mesmo plano horizontal.

c. Duas projeções de mesmo nome são paralelas ou coincidentes e as outras duas se reduzem a um ponto cada uma (além das duas retas admitirem o mesmo plano projetante, são ortogonais ao plano de projeção). Na Figura 89, mostram-se duas retas verticais paralelas em um plano frontal. Na Figura 90, duas retas verticais paralelas em um plano de perfil. Na Figura 91, duas retas verticais paralelas em um plano vertical. Na Figura 92, duas retas de topo paralelas em um plano horizontal. Na Figura 93, duas retas de topo paralelas em um plano de perfil. Na Figura 94, duas retas de topo paralelas em um plano de topo.

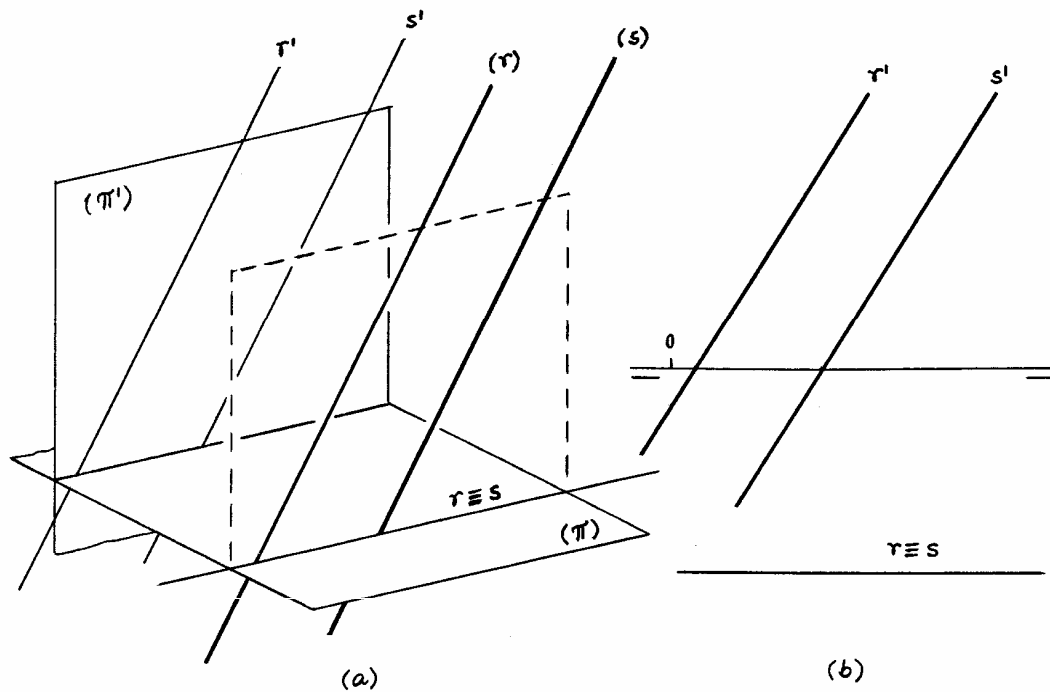


FIGURA 87. Duas retas frontais paralelas, num mesmo plano projetante (frontal - poderia ser num plano de topo $\Rightarrow r' \equiv s'$ e $r \parallel s$).

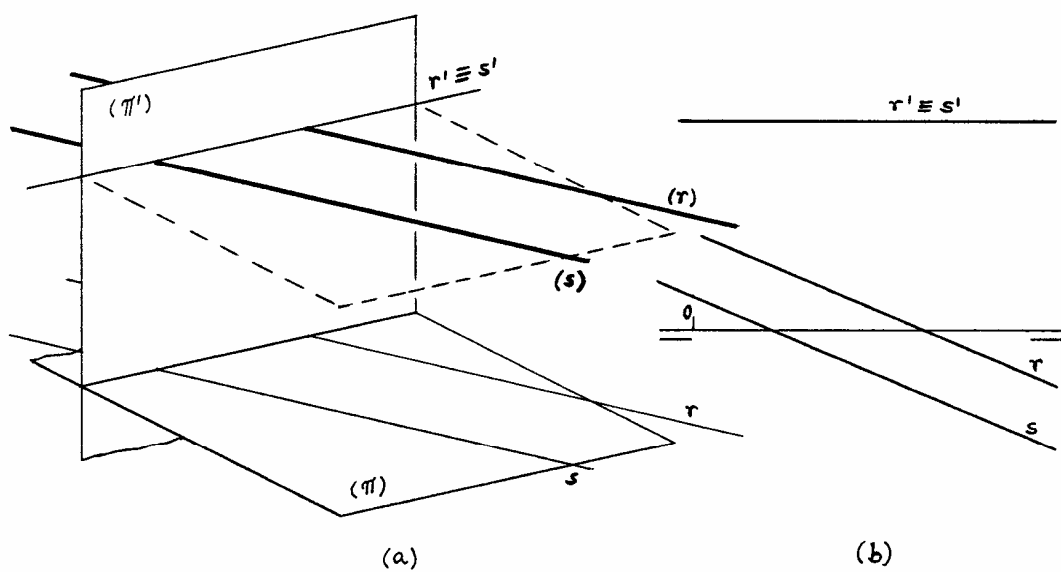


FIGURA 88. Duas retas horizontais, num mesmo plano projetante (horizontal - poderia ser num plano vertical $\Rightarrow r \equiv s$ e $r' \parallel s'$).

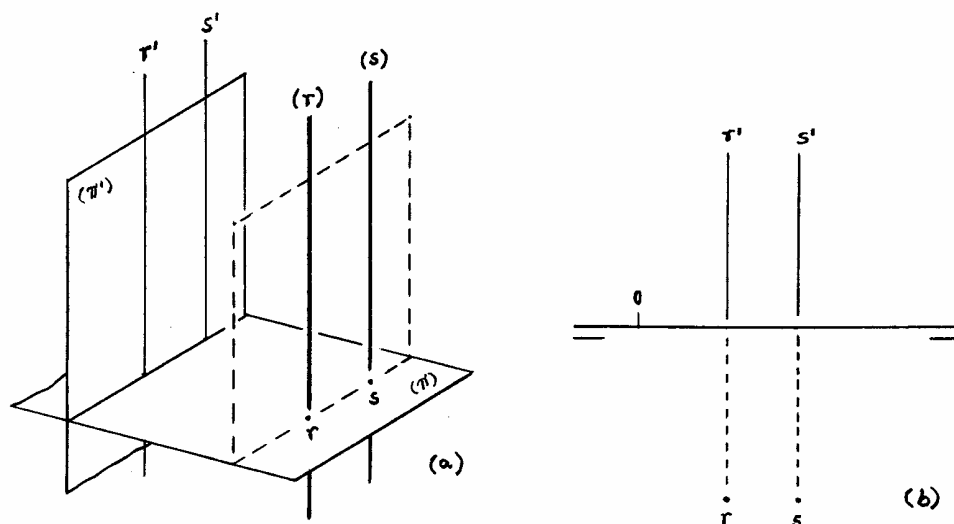


FIGURA 89. Retas verticais paralelas em um plano frontal.

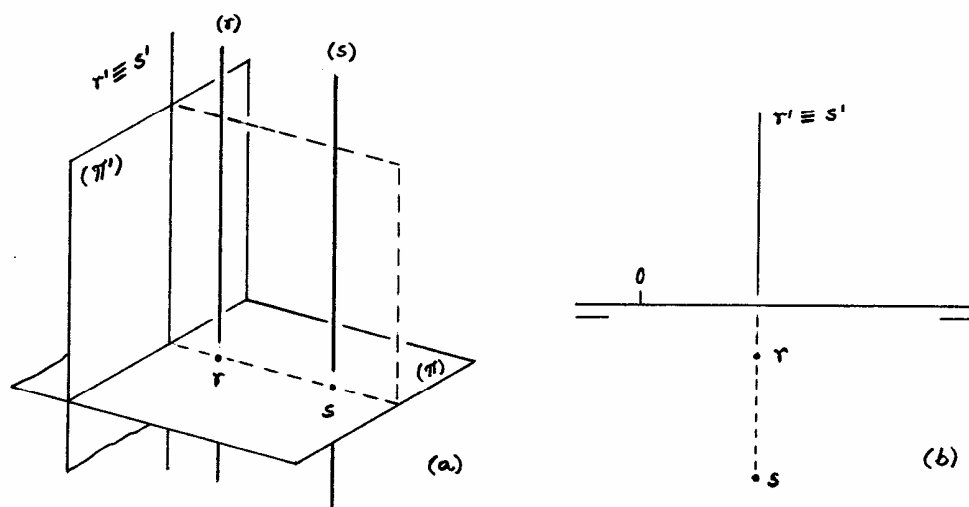


FIGURA 90. Retas verticais paralelas em um plano de perfil.

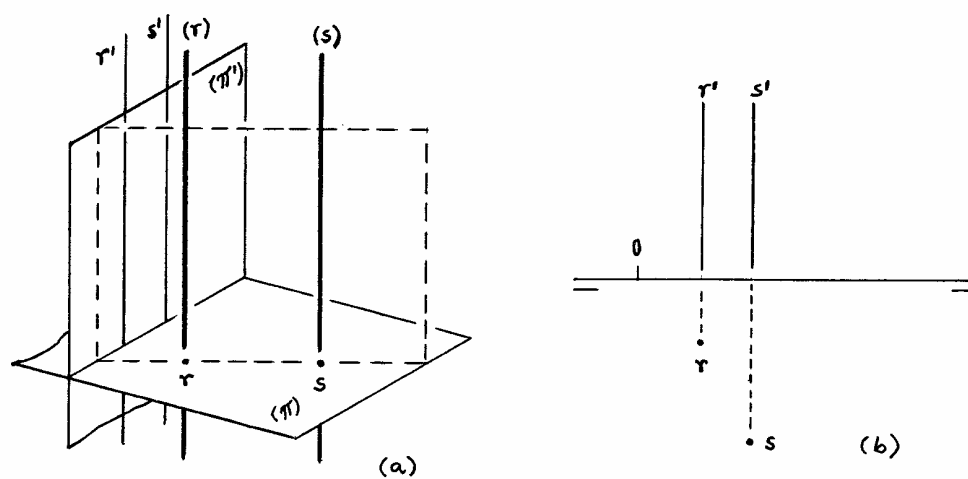


FIGURA 91. Retas verticais paralelas em um plano vertical.

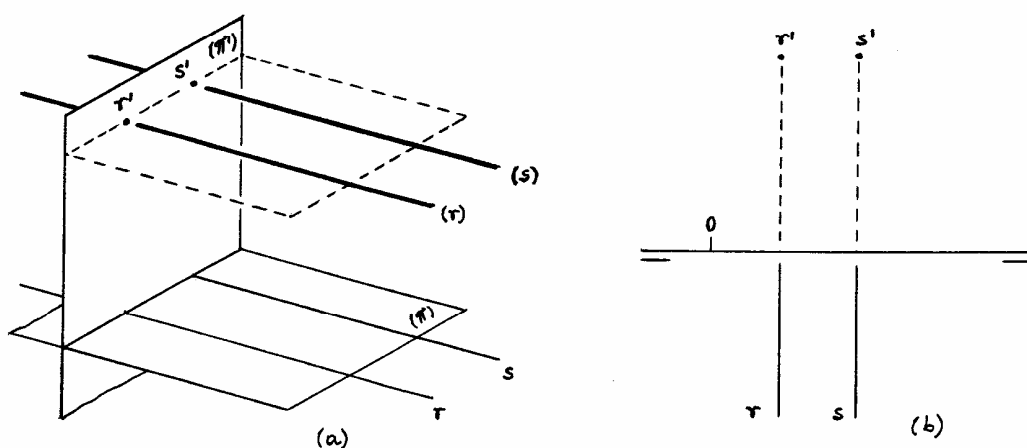


FIGURA 92. Retas de topo paralelas em um plano horizontal.

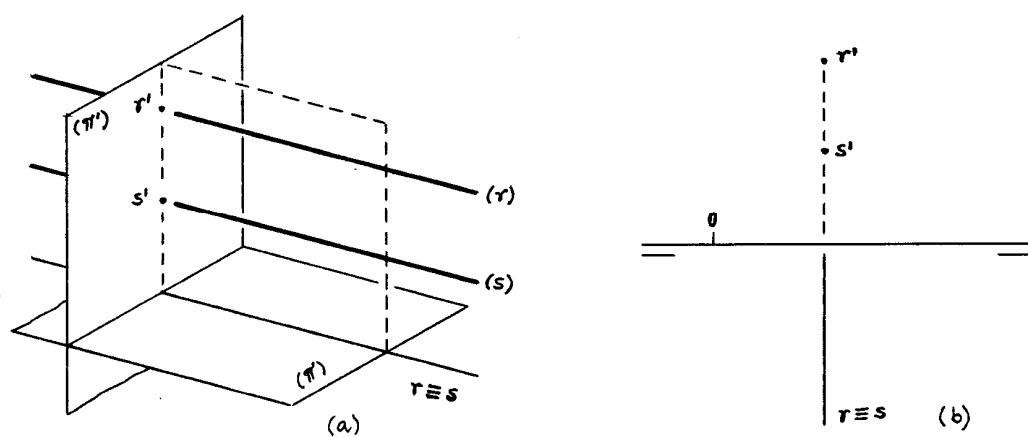


FIGURA 93. Retas de topo paralelas em um plano de perfil.

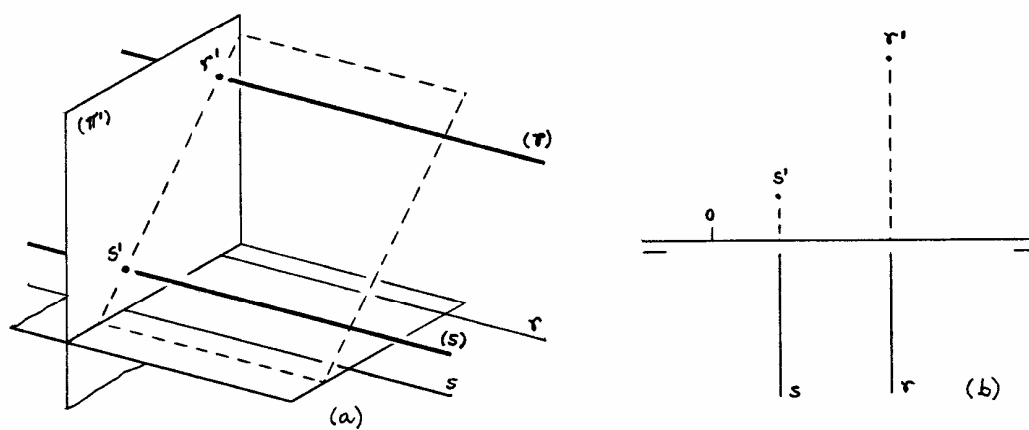


FIGURA 94. Retas de topo paralelas em um plano de topo.

6.4. Posição relativa de duas retas envolvendo retas de perfil:

a. Posição relativa de uma reta qualquer e uma de perfil. As duas retas são não coplanares e só podem ser concorrentes ou reversas (não podendo ser paralelas) (Figura 95). Têm-se dois métodos para verificação:

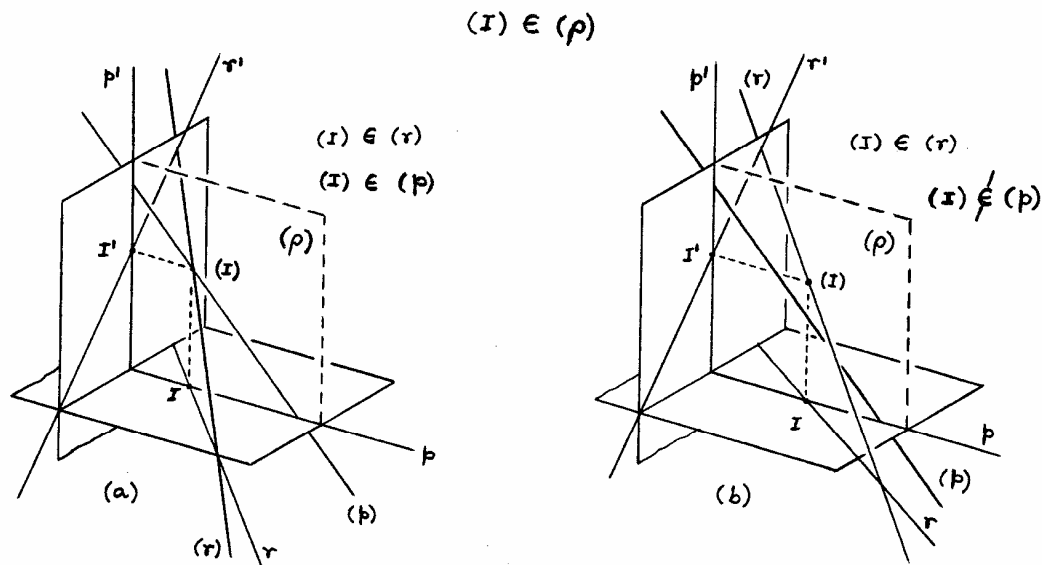


FIGURA 95. Retas qualquer (r) e de perfil (p): (a) concorrentes. (b) reversas.

a.1. Projeções laterais do possível ponto de concorrência e da reta de perfil (Figuras 96 e 97): Sendo dadas em é pura as projeções de uma reta qualquer e de uma

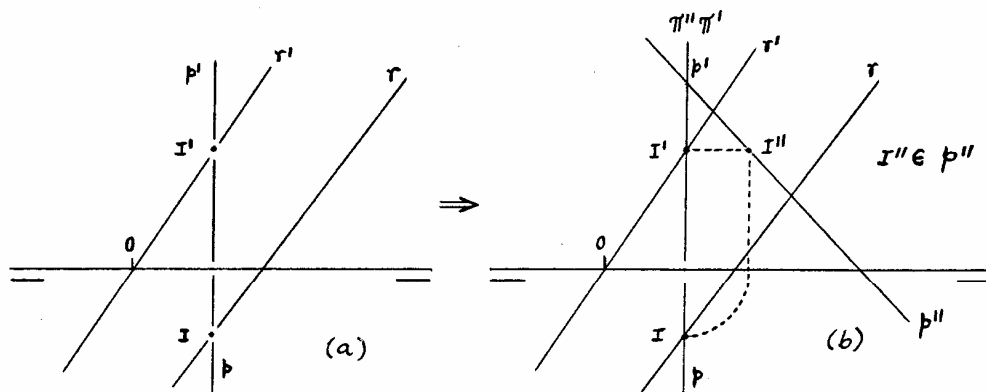


FIGURA 96. Retas qualquer (r) e de perfil (p) concorrentes - projeção lateral.

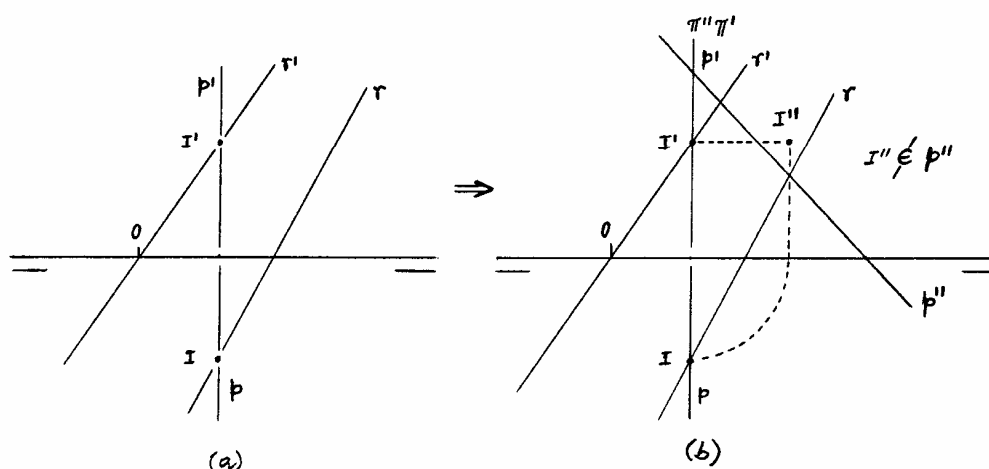


FIGURA 97. Retas qualquer (r) e de perfil (p) reversas - projeção lateral.

reta de perfil, elas se interceptarão em pontos correspondentes às respectivas projeções de um ponto (I e I' de um ponto (I)). *Esse ponto será o de incidência ou concorrência entre as retas se a sua projeção lateral pertencer à projeção lateral da reta de perfil* (Figura 96-b); *se não pertencer, as retas são reversas* (Figura 97-b).

OBSERVAÇÃO: (I) é o ponto onde a reta qualquer intercepta o plano da reta de perfil (um plano de perfil) (Figura 95).

a.2. Emprego de retas auxiliares apoiadas na reta qualquer e na reta de perfil: Sendo dadas em écura as projeções de uma reta qualquer e de uma reta de perfil (A) (B) (Figuras 98 e 99). *Na reta qualquer* toma-se arbitrariamente dois pontos (1) e (2), que terão projeções horizontais 1 e 2 na projeção horizontal dessa reta e projeções verticais 1' e 2' na projeção vertical da mesma reta (Pertinência de ponto e reta). Representa-se uma reta auxiliar passando pelo ponto (1) da reta qualquer e pelo ponto (A) da *reta de perfil*, através de suas projeções (Esta reta auxiliar tem sua projeção horizontal 1A e sua projeção vertical 1'A'). Representa-se outra reta auxiliar passando pelo ponto (2) da reta qualquer e pelo ponto (B) da *reta de perfil* (Esta reta auxiliar tem sua projeção horizontal 2B e sua projeção vertical 2'B'). **As projeções horizontais das retas auxiliares se interceptam em um ponto P; as projeções verticais das retas auxiliares se interceptam em outro ponto P'.** *Se P e P' tiverem a mesma linha de chamada, caracterizando o ponto (P), a reta qualquer e a reta de perfil são concorrentes* (Figura 98-b); *se as linhas de chamada de P e P' não forem a mesma, a reta qualquer e a de perfil são reversas* (Figura 99-b). Poder-se-ia traçar as retas auxiliares (2) (A) e (1) (B), como na Figura 99-b.

b. Posição relativa de duas retas de perfil.

b.1. Retas de perfil coplanares: As duas retas situam-se num mesmo plano de perfil (os pontos das retas apresentam a mesma abscissa) e *só podem ser concorrentes*

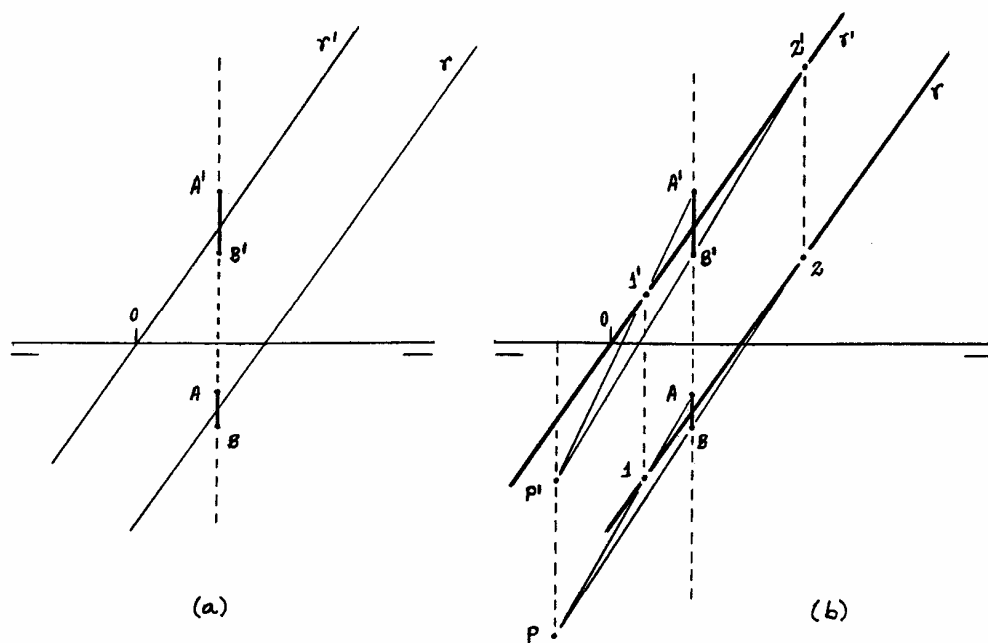


FIGURA 98. Retas qualquer (r) e de perfil (A) (B) concorrentes - emprego de retas auxiliares.

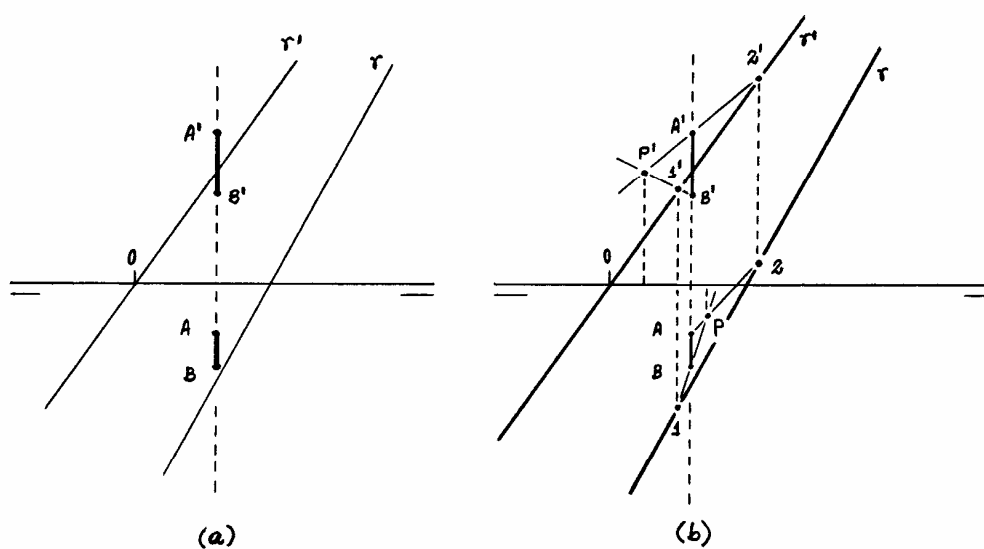


FIGURA 99. Retas qualquer (r) e de perfil (A) (B) reversas - emprego de retas auxiliares.

(Figura 100) ou paralelas (Figura 101), não podendo ser reversas. Representam-se as

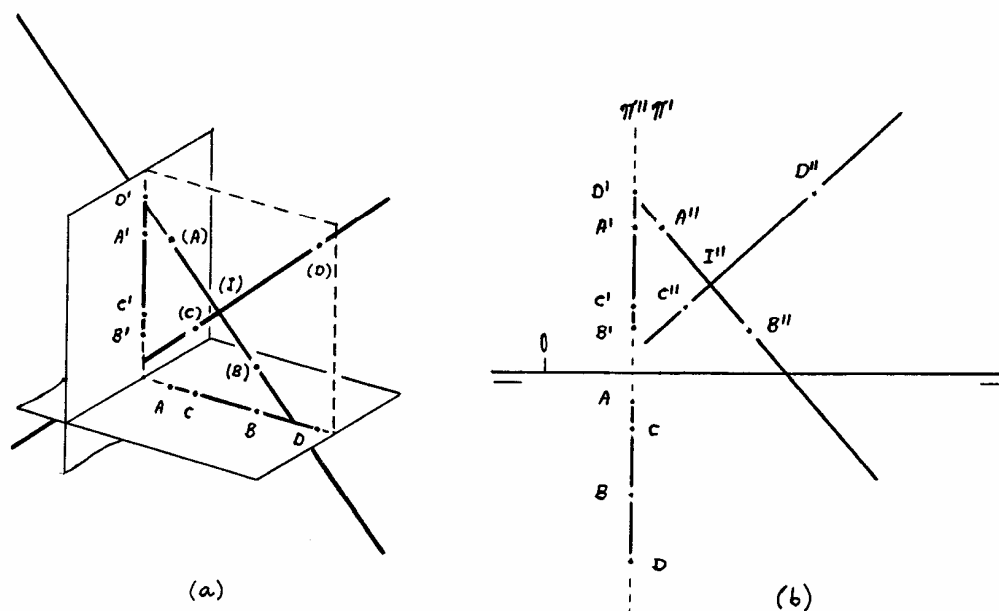


FIGURA 100. Retas de perfil coplanares - concorrentes.

retas através de suas projeções laterais, se elas são paralelas, as retas de perfil são paralelas; caso contrário elas são concorrentes, podendo-se determinar o ponto de incidência através da interseção entre as duas projeções laterais (determina-se I'' e em seguida I e I').

OBSERVAÇÕES:

1. Sendo dadas duas retas de perfil (A) (B) e (C) (D), elas serão obviamente concorrentes se os vetores AB e CD forem de mesmo sentido e os vetores A'B' e C'D' de sentidos contrários ou vice-versa, e pela simples inspeção da écura pode-se verificar que elas são concorrentes (Figura 100-b).

2. Quando uma das retas de perfil é vertical (Figura 102), ela concorrerá com a outra, sendo o ponto de incidência ou de concorrência o ponto da reta de perfil que apresenta o mesmo afastamento da reta vertical. É preciso representar a reta de perfil e o ponto de incidência em projeção lateral, para se determinar a cota desse ponto.

3. Quando uma das retas de perfil é de topo (Figura 103), ela concorrerá com a outra, sendo o ponto de incidência ou de concorrência o ponto da reta de perfil que apresenta a mesma cota da reta de topo. É preciso representar a reta de perfil e o ponto de incidência em projeção lateral, para se determinar o afastamento desse ponto.

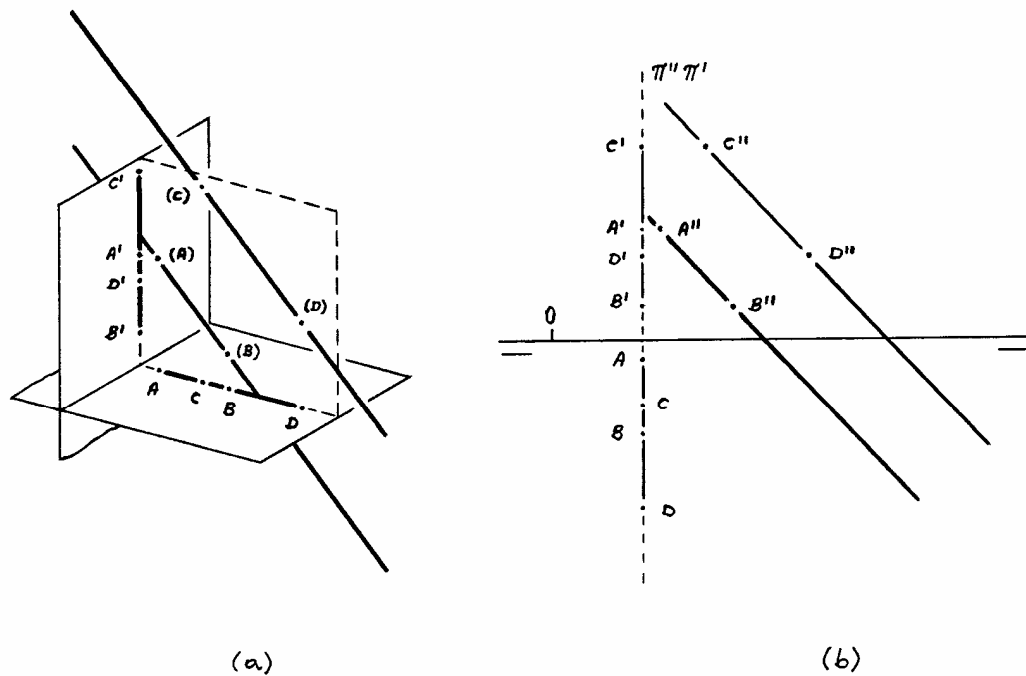


FIGURA 101. Retas de perfil coplanares - paralelas.

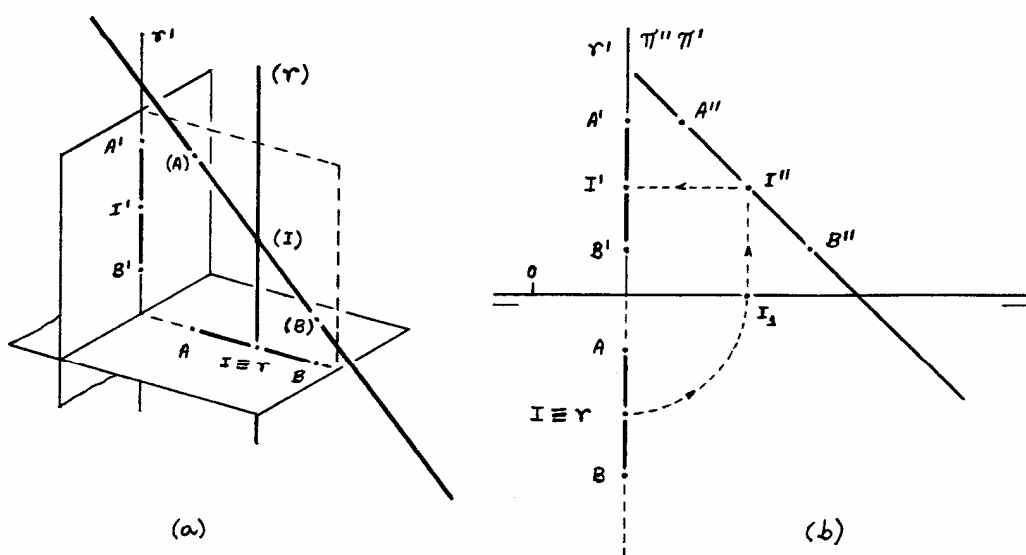


FIGURA 102. Retas vertical (r) e de perfil (A) (B) coplanares $\Rightarrow$ concorrentes.

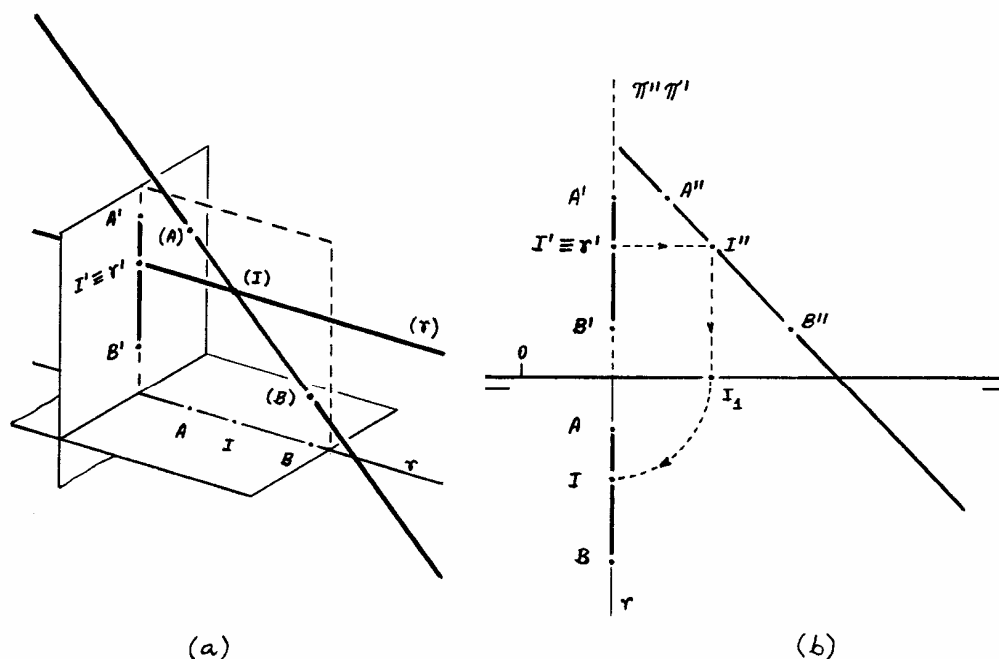


FIGURA 103. Retas de topo (r) e de perfil (A) (B) coplanares $\Rightarrow$ concorrentes.

b.2. Retas de perfil não coplanares: As duas retas situam-se em planos de perfil paralelos e só podem ser paralelas (Figura 104) ou reversas (Figura 105), não podendo ser concorrentes.

1. Projeções laterais das retas: Duas retas de perfil não coplanares (diferentes abscissas) serão paralelas se suas projeções laterais o forem (Figura 104); caso contrário serão reversas (Figura 105).

OBSERVAÇÃO: Sendo dadas duas retas de perfil (A) (B) e (C) (D), elas serão obviamente paralelas se as projeções de mesmo nome da reta forem de mesma grandeza e mesmo sentido; isto é $A'B' = C'D'$ e $AB = CD$. A simples inspeção em *épura* permite verificar que as retas que possuem tais projeções são paralelas. Do mesmo modo, basta que duas projeções de mesmo nome tenham sentidos contrários para assegurar-se que as retas são reversas.

2. Emprego de retas auxiliares apoiadas nas retas de perfil: Sejam as retas de perfil em planos distintos (A) (B) e (C) (D) (Figuras 106 e 107). Representam-se duas retas auxiliares concorrentes através de suas projeções: Uma passa por (A) e (C), a outra por (B) e (D), resultando na interseção das projeções horizontais AC e BD, a projeção horizontal P, e na interseção das projeções verticais $A'C'$ e $B'D'$, a projeção vertical P'; se essas projeções do ponto (P) tiverem a mesma linha de chamada, as retas serão paralelas (Figura 106-b); caso contrário serão reversas (Figura 107-b).

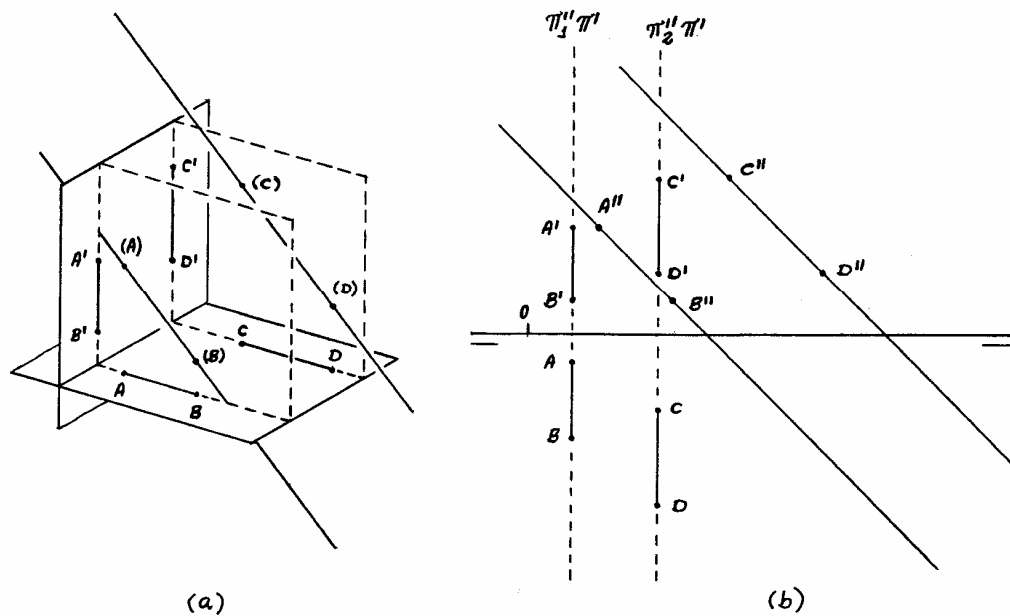


FIGURA 104. Retas de perfil não coplanares paralelas - projeção lateral.

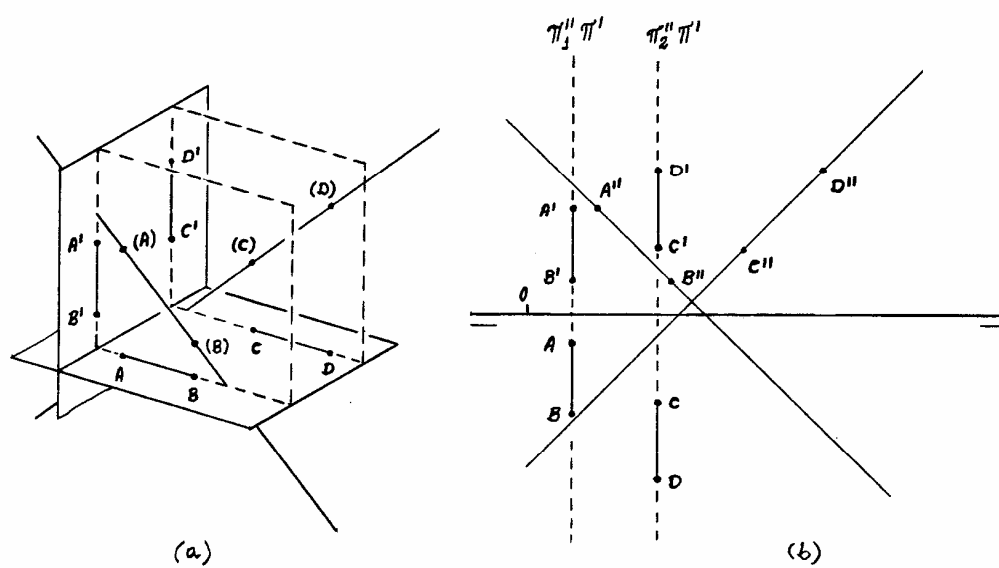


FIGURA 105. Retas de perfil não coplanares reversas - projeção lateral.

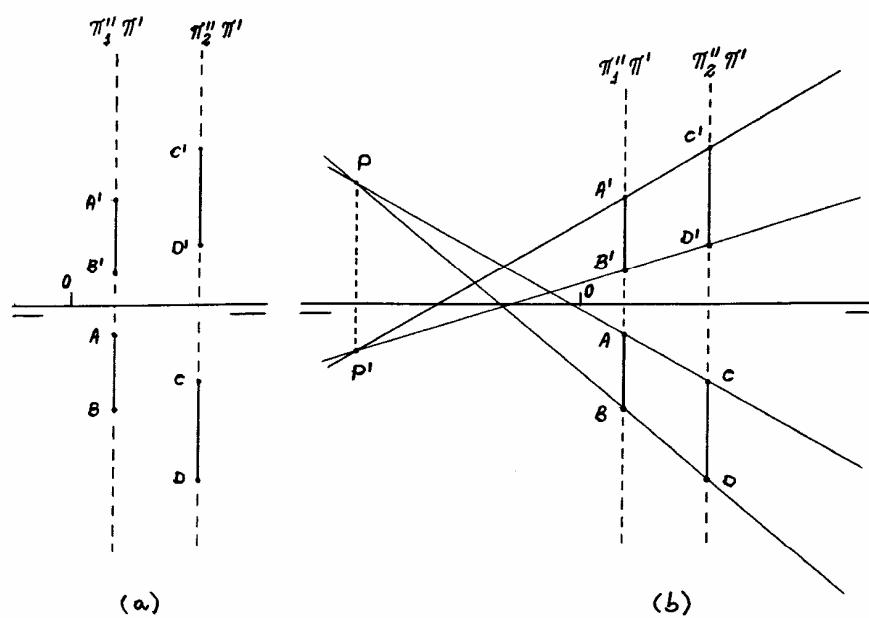


FIGURA 106. Retas de perfil não coplanares paralelas - emprego de retas auxiliares.

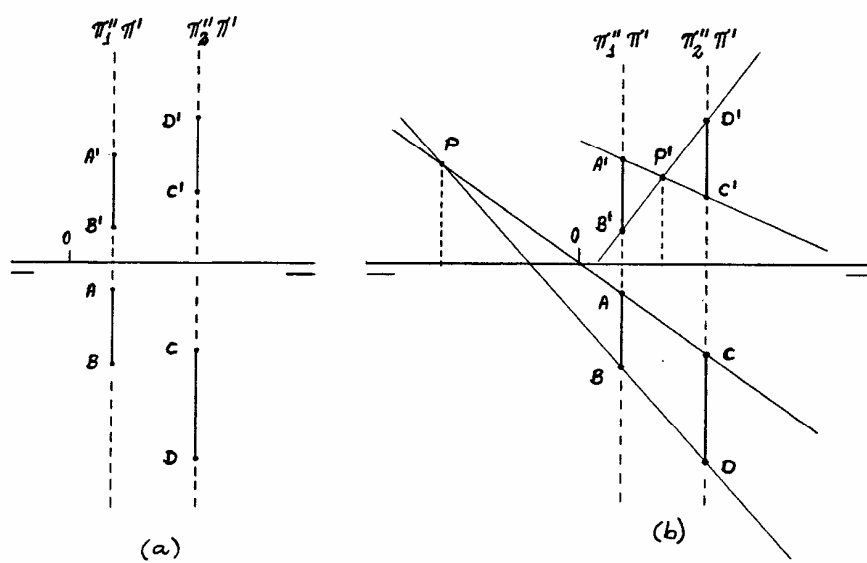


FIGURA 107. Retas de perfil não coplanares reversas - emprego de retas auxiliares.

Também poderiam ser utilizadas as retas auxiliares (A) (D) e (B) (C) - se os pontos resultantes das interseções entre as projeções das retas auxiliares tiverem uma mesma linha de chamada, as retas de perfil são paralelas; caso contrário, são reversas.

OBSERVAÇÃO: Se as retas auxiliares, em vez de concorrentes, fossem paralelas (com ponto de incidência impróprio), as retas de perfil dadas também seriam paralelas (obviamente que se poderia também obter retas auxiliares concorrentes).

6.5. EXERCÍCIOS

Posições relativas de duas retas. Retas concorrentes e retas paralelas.

Objetivos: Representar e identificar, em épura, as retas concorrentes e as retas paralelas.

Conhecimentos necessários: Representação de uma reta em épura. Leitura de épura.

Fontes: PINHEIRO, V. A. *Noções de Geometria Descritiva*; ponto, reta e plano. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970. Vol. I. p. 79-80 e 87-88.

PRÍNCIPE JÚNIOR, A. R. *Noções de geometria descritiva*. 37. ed. São Paulo: Nobel, 1990. Vol. I. p. 69-98.

SOUZA, E. B. de. *Noções de projeção*; II unidade; lista de exercícios. Mossoró: ESAM.

1. Representar em épura duas retas (A) (B) e (C) (D) concorrentes. Sendo: (A) $[-2,5; 1; 3]$, (B) $[6; -2; -2]$, (C) $[6; 1,5; 3]$ e (D) $[0; ?; -6]$.
SUGESTÃO: Representar (A) (B) por suas projeções ortogonais. Representar (C) , D_0 e D' . Traçar $C'D'$. Localizar o ponto de incidência I' entre $A'B'$ e $C'D'$. Por I' traçar a linha de chamada até interceptar AB , localizando o ponto de incidência I entre AB e CD . Por I traçar o segmento CI , prolongando-o até interceptar a linha de chamada de (D), determinando a projeção horizontal D .
2. Por um ponto (A) $[2; 2; 2]$, traçar uma reta (A) (B) paralela a uma reta (C) (D). Sendo: (B) $[0; ?; ?]$, (C) $[-1; -1; 3]$ e (D) $[3; 0; -1]$.
SUGESTÃO: Representar através de suas projeções ortogonais (A), (C) e (D). Representar B_0 e traçar a linha de chamada de (B). Traçar CD e $C'D'$. Por A , traçar paralela a CD até interceptar a linha de chamada de (B), determinando a projeção horizontal B . Por A' , traçar paralela a $C'D'$ até interceptar a linha de chamada de (B), determinando a projeção vertical B' .
3. Por um ponto (C) traçar uma reta (C) (D) paralela a uma reta de perfil (A) (B). Sendo: (A) $[2; -3; 3]$, (B) $[2; 1; 1]$ e (C) $[4,5; 1,5; 2]$.
SUGESTÃO: A reta (C) (D) também é de perfil, uma vez que é paralela à (A) (B) que é de perfil. Representam-se as projeções laterais da reta (A) (B) e do ponto (C). Por C'' , traça-se paralela a $A''B''$. Não é necessário e nem possível determinar o ponto (D).
4. Determinar a reta que contenha o ponto (N) $[1; 2; 3]$ e que seja paralela à reta (E) (F). Sendo: (E) $[6; 3; -2]$ e (F) $[6; -4; 3]$.
SUGESTÃO: Se (E) (F) é de perfil, a reta paralela a ela e que passa por (N) também é de perfil. Representam-se as projeções laterais da reta (E) (F) e do ponto (N). Por N'' , traça-se paralela a $E''F''$.
5. Dão-se duas retas (A) (B) e (C) (D) e a projeção horizontal EF de uma terceira reta (E) (F) que nelas se apoia. Determinar $E'F'$. Sabe-se que: (A) $[0; 0; 3]$ (B) $[2; 7; 5]$ (C) $[4; 5; 6]$ (D) $[7; 2; -2]$ (E) $[3; 4; ?]$ (F) $[5; 3; ?]$.

SUGESTÃO: UMA RETA SE APOIA EM OUTRAS DUAS QUANDO CONCORRE COM ESTAS DUAS RETAS. Traçam-se as projeções de (A) (B) e (C) (D). Traça-se a projeção horizontal EF, prolongando-a até atingir AB e CD, determinando-se M e N, que são as projeções horizontais dos pontos de apoio. Através das linhas de chamada determinam-se M' e N', que são os pontos de apoio em A'B' e C'D'. Traça-se M'N'. Através das linhas de chamada em E e F, até interceptar M'N', determinam-se E' e F'.

6. Dão-se duas retas (M) (N) e (P) (Q) e a projeção vertical R'S' de uma terceira reta (R) (S) que nelas se apoia. Determinar RS. Sabe-se que: (M) [1; 1,5; 3] (N) [3; 6; 5] (P) [8; 2; 4] (Q) [8; 5; 2] (R) [4; ?; 4] (S) [7; ?; 3].

SUGESTÃO: Traçam-se (M) (N), (P) (Q) e R'S'. Prolonga-se R'S' até interceptar M'N' e P'Q', determinando-se, respectivamente, as projeções verticais A' e B' dos pontos de apoio. Pela linha de chamada de (A) determina-se a projeção horizontal A em MN. Representando-se (P) (Q) pela sua terceira projeção, P''Q'', tem-se que a projeção lateral de (B), B'', pertence à projeção lateral P''Q'' da reta - se a reta (R) (S) se apoia em (M) (N) e (P) (Q) é porque ela é concorrente com estas duas. Através da projeção lateral B'' determina-se a projeção horizontal B. Traça-se AB. Através das respectivas linhas de chamada, determinam-se R e S em AB.

7. Construir pelo ponto (O) a frontal (r) que se apoia na reta (A) (B). Sabe-se que: (O) [6; -1; -3] (A) [2; 0; 5] (B) [4; 3; 2,5].

SUGESTÃO: Traçam-se as projeções de (A) (B) e representa-se (O). A reta frontal (r) passa pelo ponto (O) $\Rightarrow$ a projeção horizontal da frontal r passa pela projeção horizontal O do ponto (O); traça-se por O, r paralela a $\pi'\pi$, até interceptar AB, obtendo-se C. Através da linha de chamada, determina-se C' em A'B'. Traça-se C'O' $\equiv$ r'.

8. Duas retas (A) (B) e (C) (D) são concorrentes. Representá-las por suas projeções, supondo inacessível o ponto de concurso de duas quaisquer projeções de mesmo nome. Dados: (A) [2; 2; 5] (B) [7; 3; 8] (C) [5; 5; 3] (D) [9; ?; 7].

SUGESTÃO: DUAS RETAS APOIADAS (em pares de pontos distintos) EM DUAS RETAS CONCORRENTES SÃO CONCORRENTES (de maneira análoga: retas que se apoiam em pares de pontos distintos de duas retas reversas, são reversas). Traçam-se (A) (B) e C'D'. Uma vez que (A) (B) e (C) (D) são concorrentes, as retas auxiliares (A) (D) e (B) (C) também serão concorrentes. Traçam-se A'D' e (B) (C). Localiza-se o ponto I' de concorrência entre A'D' e B'C'. Pela linha de chamada localiza-se I em BC. Traça-se AI, prolongando-o. Pela linha de chamada de (D), localiza-se D em AI. Traça-se CD.

9. Traçar por (C) a paralela (C) (D) à reta (A) (B). Dados: (A) [3; 1; 2] (B) [3; 2,5; 5] (C) [6; -3; -1,5] (D) [?; ?; 4].

SUGESTÃO: A reta (A) (B) é de perfil. Para que a reta (C) (D) seja paralela à (A) (B), ela tem que ser também de perfil. Como as abcissas são diferentes, as retas pertencem a dois planos de perfil diferentes. QUANDO DUAS RETAS DE PERFIL SITUADAS EM PLANOS DE PERFIL DIFERENTES SÃO PARALELAS, AS RETAS AUXILIARES NELAS APOIADAS SÃO CONCORRENTES OU PARALELAS. Representam-se, por suas projeções ortogonais, (A) (B), (C) e D'. Traçam-se as projeções das retas auxiliares AC, A'C' e B'D'. A interseção entre A'C' e B'D' determina o ponto P', projeção vertical do ponto de incidência entre (A) (C) e (B) (D). Por P' traça-se a linha de chamada, determinando-se P em AC (P é a projeção horizontal do ponto de incidência entre (A) (C) e (B) (D)). Por P traça-se OB, prolongando-a até interceptar a linha de chamada dos pontos da reta (C) (D), determinando-se D. **OBSERVAÇÃO:** Também pode-se considerar que as retas de perfil sendo paralelas, suas projeções laterais também são paralelas.

10. Traçar a épura de duas retas de perfil (A) (B) e (C) (D) paralelas, sem recorrer ao rebatimento (ou ao método da projeção lateral). (A) [0; 1,5; 3], (B) [0; 3; 0], (C) [4; 1; 2] e (D) [4; 2; ?].

7. O PLANO.

7.1. Introdução:

Objetivos: Representar e identificar um plano em é pura.

7.2. Definições:

a. Geral: **Três pontos não alinhados** determinam um plano (Figura 108-a). Um fio de arame retilíneo (um segmento de reta) pode ser suspenso por apenas dois pontos; entretanto, um corpo em forma de lâmina, como uma folha de isopor, uma tábua, etc. (um plano), só pode ser mantido na horizontal, quando suspenso pelo menos por três de seus pontos.

b. Conseqüentes:

b.1. Uma reta e um ponto que não pertença a esta reta determinam um plano - porque este ponto e dois quaisquer da reta determinam um plano, ao qual pertence a reta (Figura 108-b).

b.2. Duas retas concorrentes determinam um plano - porque seu ponto comum e mais um de cada reta determinam um plano, ao qual pertencem as retas (Figura 107-c).

b.3. Duas retas paralelas determinam um plano - porque dois pontos de uma delas e um ponto qualquer da outra determinam um plano, ao qual pertencem as retas (Figura 108-d).

OBSERVAÇÃO: Os pontos (A), (B) e (C) são os mesmos nos quatro itens da Figura 108.

7.3. Representação de um plano em é pura:

a. Três pontos não alinhados - três pontos tais que a reta definida por dois quaisquer deles não contenha o outro (Figuras 109-a e b).

b. Uma reta e um ponto exterior à reta (Figura 109-b; o ponto (C) não pertence à reta definida pelos pontos (A) e (B)).

c. Duas retas concorrentes (Figura 109-c).

d. Duas retas paralelas (Figura 109-d).

OBSERVAÇÃO: Todas essas representações são redutíveis umas às outras, e, em particular, qualquer das duas primeiras transforma-se imediatamente em qualquer das duas outras.

CONVENÇÃO: No nosso estudo, planos definidos por três pontos não alinhados ou por uma reta e um ponto exterior à reta, devem ser imediatamente transformados em planos definidos por duas retas concorrentes ou paralelas.

7.4. Traços de um plano.

a. Conceito: São as retas resultantes das interseções entre o plano e os planos de projeção horizontal e vertical (Figura 110). De maneira geral, traço de um plano em outro é a reta resultante da interseção entre estes planos.

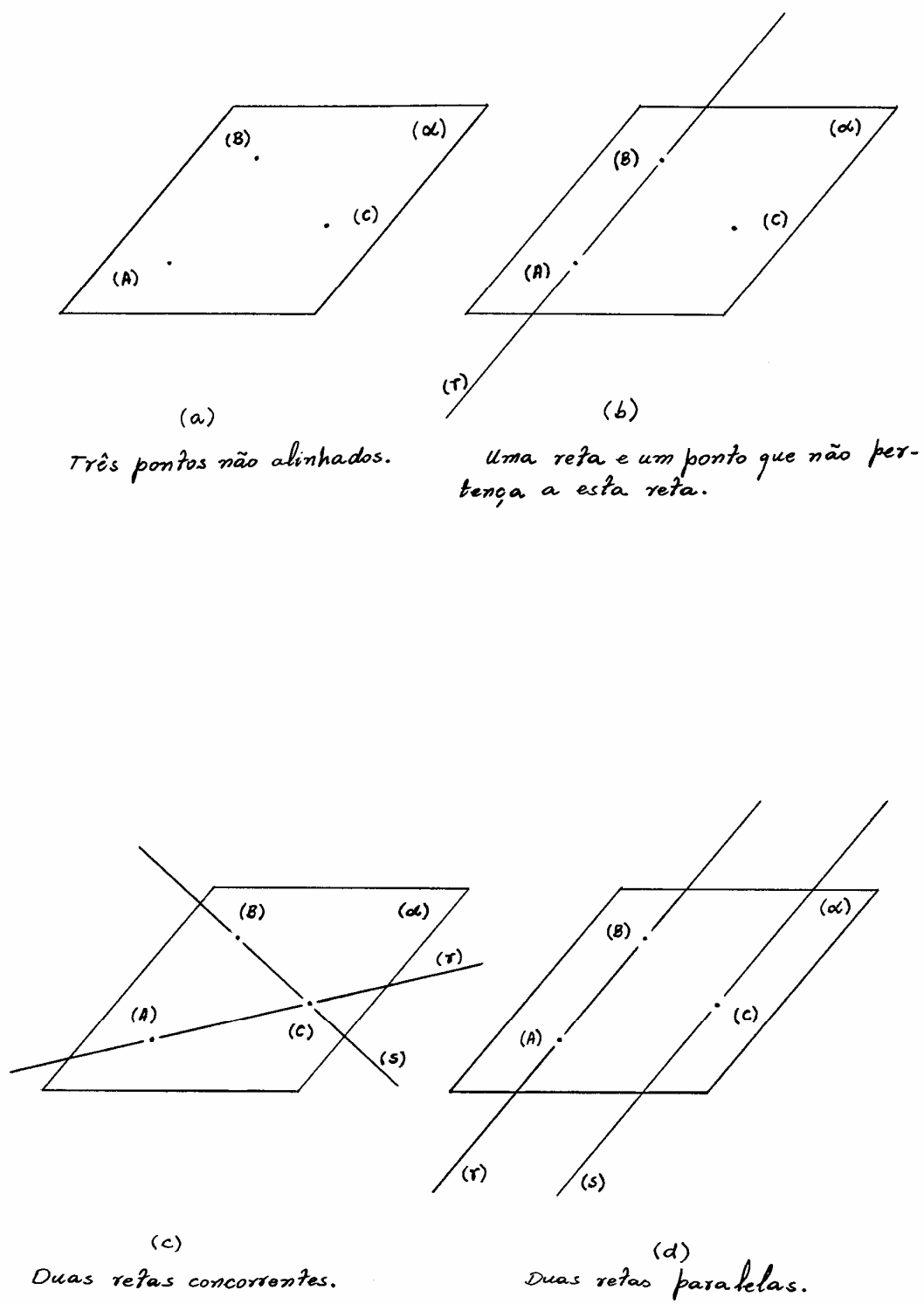
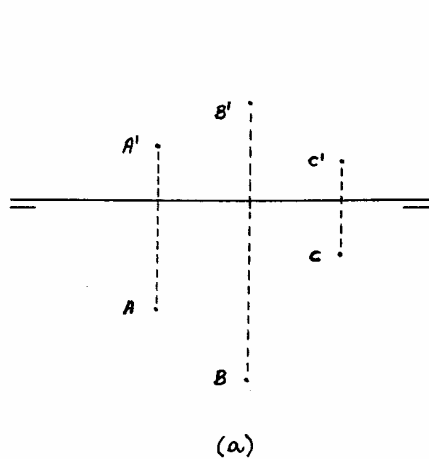
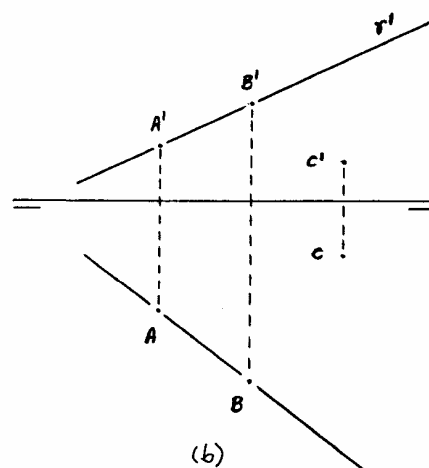


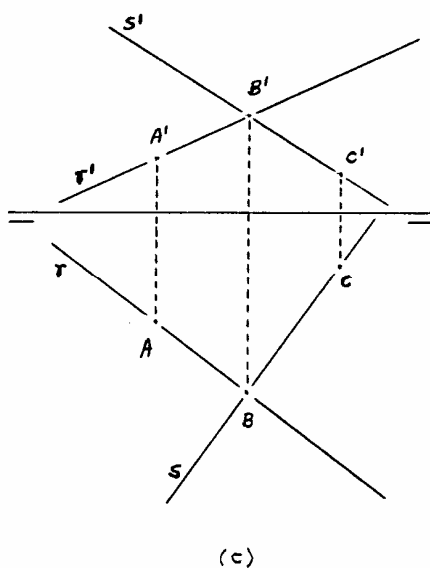
FIGURA 108. Determinação de um plano.



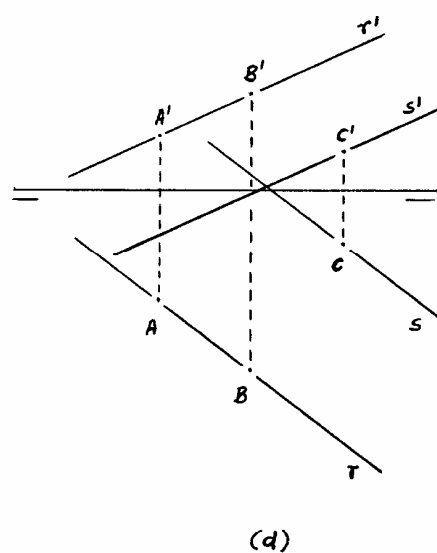
Três pontos não alinhados.



Uma reta e um ponto que não pertença à reta.



Duas retas concorrentes.



Duas retas paralelas.

FIGURA 109. Representação de um plano em épura.

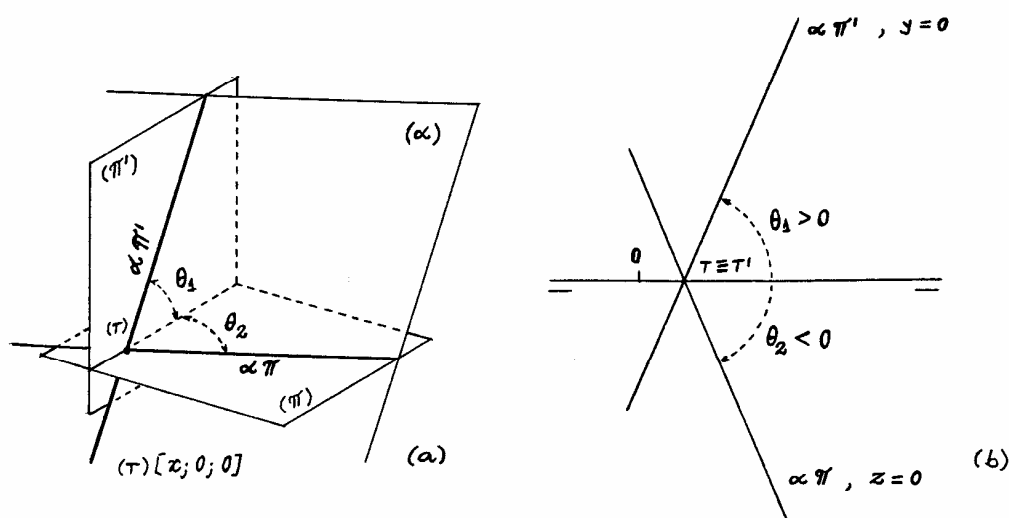


FIGURA 110. Traços de um plano qualquer.

b. Definições:

1. *Traço horizontal*, $\alpha\pi$ - é a reta segundo a qual o plano (α) corta ou atravessa o plano (π), isto é, o *lugar geométrico dos pontos do plano (α) que apresentam cota nula* (Figura 110).

2. *Traço vertical*, $\alpha\pi'$ - é a reta segundo a qual o plano (α) corta ou atravessa o plano (π'), isto é, o *lugar geométrico dos pontos do plano (α) que apresentam afastamento nulo* (Figura 110).

OBSERVAÇÃO: A interseção entre os traços horizontal e vertical de um plano determina um ponto (T) sobre a linha de terra, que, em é pura, é representado por suas projeções ortogonais $T \equiv T'$ (Figura 110).

7.5. Características dos traços de um plano:

a. *Cada traço de um plano tem sua projeção de nome contrário na linha de terra* ($\alpha\pi$ é uma reta do plano horizontal (π), apresentando projeção vertical na linha de terra; $\alpha\pi'$ é uma reta do plano vertical (π'), apresentando projeção horizontal na linha de terra). A Figura 111 mostra as projeções dos traços de um plano qualquer e a Figura 112 as projeções dos traços de um plano paralelo à linha de terra.

b. *Todo plano tem pelo menos um traço* - um plano não pode ser simultaneamente paralelo aos dois planos de projeção; se é paralelo ao (π) só apresenta o traço vertical $\alpha\pi'$, se é paralelo a (π') só apresenta traço horizontal $\alpha\pi$.

b.1. Plano paralelo ao (π) (Figura 113).

b.2. Plano paralelo ao (π') (Figura 114).

c. *Um plano que passa pela linha de terra apresenta traços coincidentes*, $\gamma\pi \equiv \gamma\pi'$ (Figura 115).

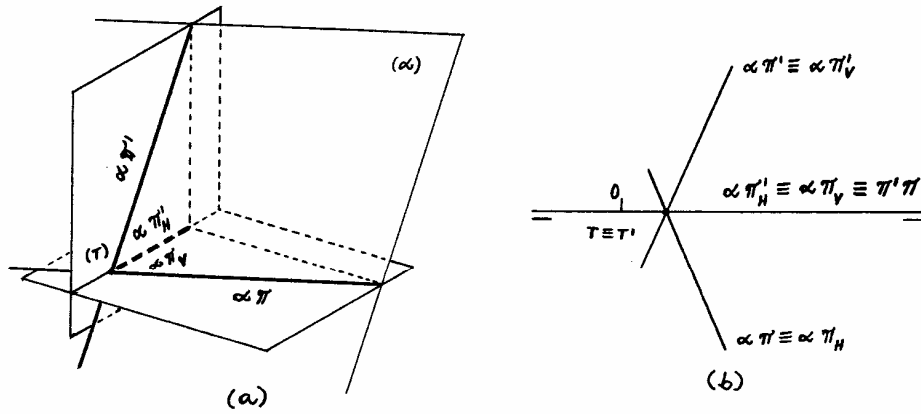


FIGURA 111. Projeções dos traços de um plano qualquer.

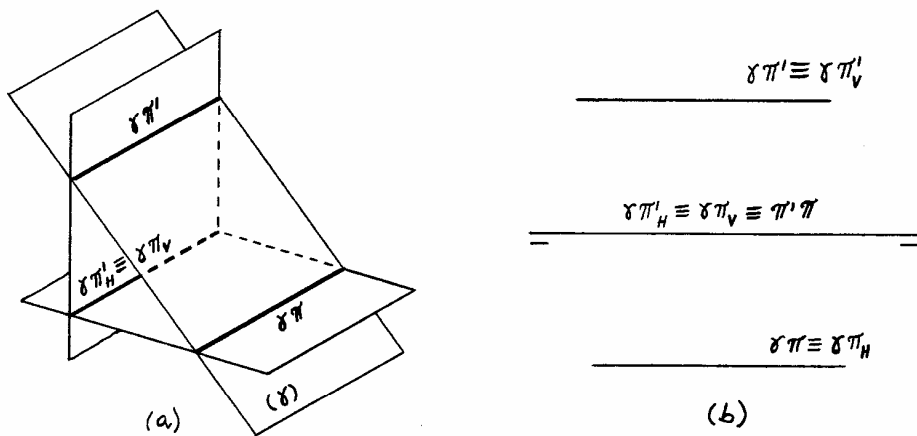


FIGURA 112. Projeções dos traços de um plano paralelo à linha de terra.

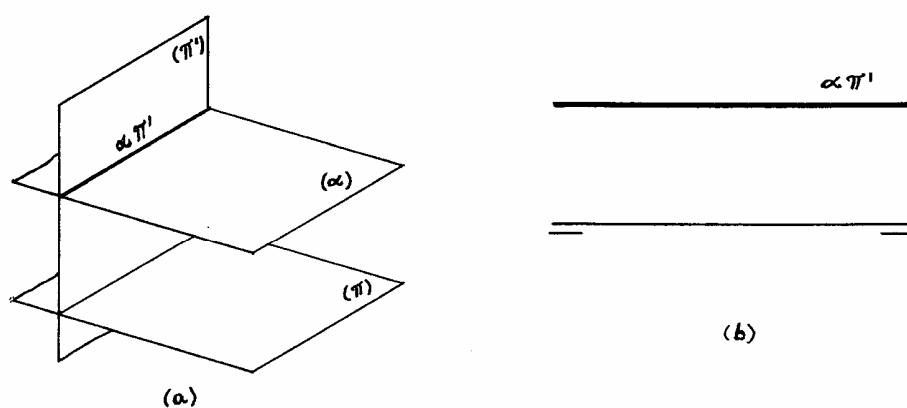


FIGURA 113. Traço único de um plano paralelo ao plano horizontal de projeção (π) - plano horizontal.

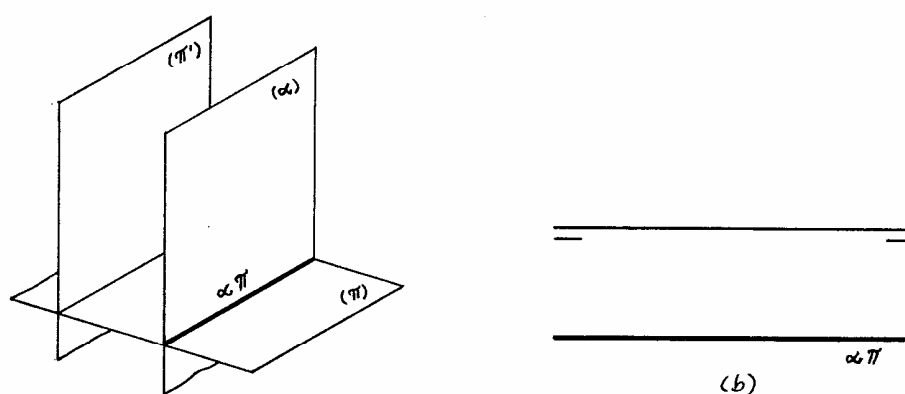


FIGURA 114. Traço único de um plano paralelo ao plano vertical de projeção (π') - plano frontal.

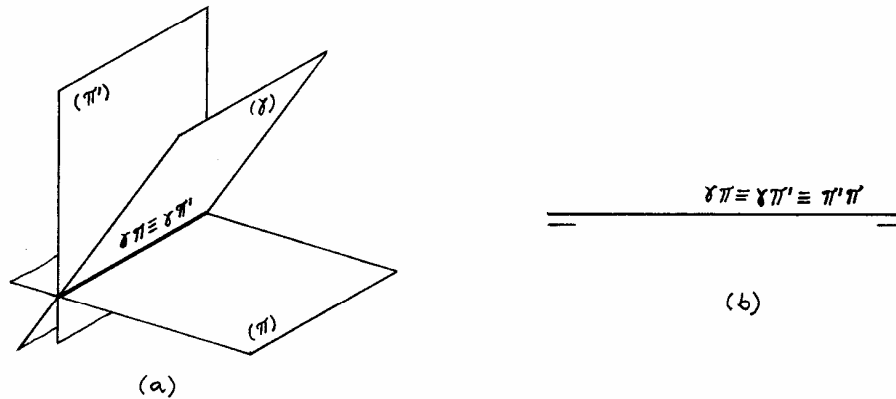


FIGURA 115. Traços coincidentes de um plano que passa pela linha de terra.

7.6. Representação em é pura dos traços de um plano:

a. Plano qualquer (Figura 116-a): Os traços horizontal e vertical são oblíquos à linha de terra e nela se interceptam determinando o ponto $(T) [x; 0; 0]$ (Figura 110), de projeções $T \equiv T'$ coincidentes com a linha de terra. Um plano qualquer situa-se, atravessa ou passa, nos quatro diedros.

O ângulo $\theta_1 > 0$, com vértice em $T \equiv T'$ e lados iguais a $\pi'\pi$ e $\alpha\pi'$, é medido no sentido anti-horário e o ângulo $\theta_2 < 0$, com vértice em $T \equiv T'$ e lados iguais a $\pi'\pi$ e $\alpha\pi$, é medido no sentido horário.

Os ângulos θ_1 e θ_2 e o ponto $T \equiv T'$, na linha de terra, servem para determinar os traços de um plano qualquer, caracterizando o plano.

b. Plano paralelo ao (π) (Figura 116-b): Só existe o traço $\alpha\pi'$, paralelo à linha de terra. Este plano passa por dois diedros.

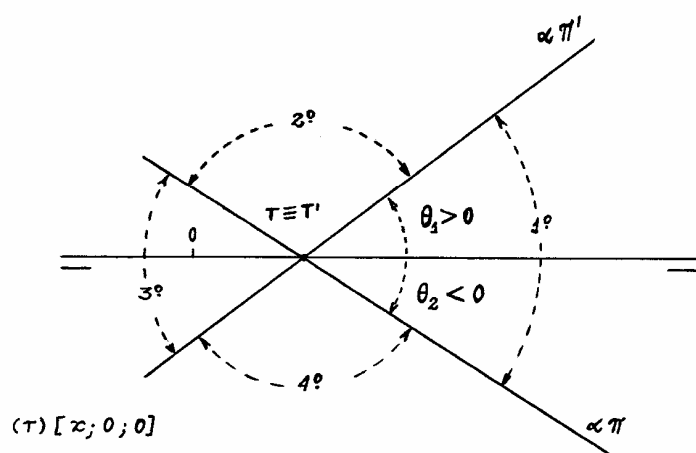
c. Plano paralelo ao (π') (Figura 116-c): Só existe o traço $\alpha\pi$, paralelo à linha de terra. Este plano passa por dois diedros.

d. Plano paralelo à linha de terra (Figura 116-d): Os traços horizontal e vertical são paralelos à linha de terra ($\gamma\pi$ e $\gamma\pi'$). Este plano passa por três diedros.

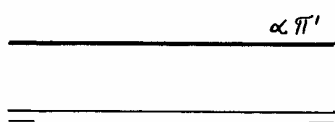
e. Plano que passa pela linha de terra (Figura 116-e): Os traços horizontal e vertical são coincidentes com a linha de terra ($\gamma\pi \equiv \gamma\pi' \equiv \pi'\pi$). Este plano passa por dois diedros, os quais não podem ser identificados apenas pelos traços do plano $\Rightarrow$ os traços de um plano paralelo à linha de terra não identifica-o ou determina-o.

7.7. Classificação dos traços de um plano:

a. Plano qualquer (Figura 117-a): Traço horizontal anterior, $\alpha\pi_A$ ($y > 0$), e traço horizontal posterior, $\alpha\pi_P$ ($y < 0$); traço vertical superior, $\alpha\pi'_S$ ($z > 0$), e traço vertical inferior, $\alpha\pi'_I$ ($z < 0$).



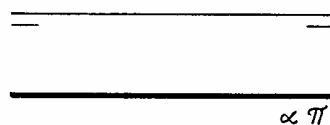
(a) Plano qualquer.



$Z > 0 \Rightarrow 1^\circ \text{ e } 2^\circ \text{ diedros.}$

$Z < 0 \Rightarrow 3^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ diedros.}$

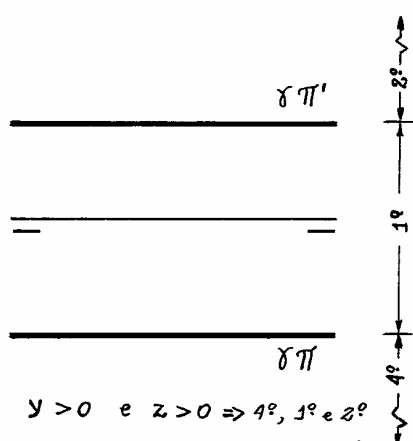
(b) Plano paralelo ao (π) .



$Y > 0 \Rightarrow 1^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ diedros.}$

$Y < 0 \Rightarrow 2^\circ \text{ e } 3^\circ \text{ diedros.}$

(c) Plano paralelo ao (π') .



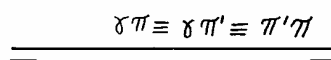
$Y > 0 \text{ e } Z > 0 \Rightarrow 4^\circ, 1^\circ \text{ e } 2^\circ$

$Y > 0 \text{ e } Z < 0 \Rightarrow 3^\circ, 4^\circ \text{ e } 1^\circ$

$Y < 0 \text{ e } Z < 0 \Rightarrow 2^\circ, 3^\circ \text{ e } 4^\circ$

$Y < 0 \text{ e } Z > 0 \Rightarrow 3^\circ, 2^\circ \text{ e } 1^\circ$

(d) Plano paralelo a $\pi' \pi$.



Não é possível identificar os dois diedros por onde passa o plano, apenas por seus traços.

(e) Plano que passa pela linha de terra.

FIGURA 116. Representação em épora dos traços de um plano.

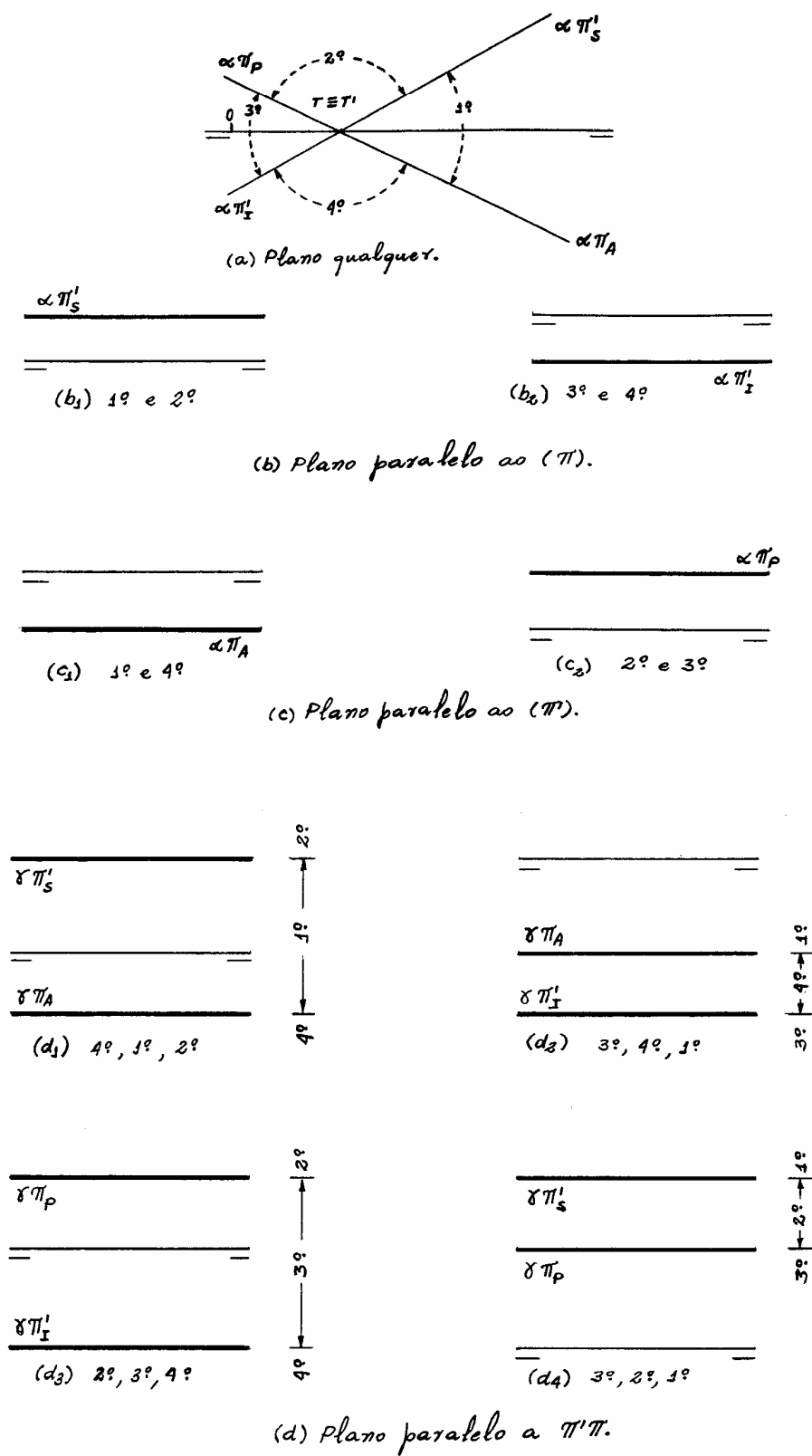


FIGURA 117. Classificação dos traços de um plano, porções úteis de um plano nos diedros e representação de um plano por seus traços.

b. Plano paralelo ao (π) (Figura 117-b): Traço vertical superior, $\alpha\pi'_s$, e traço vertical inferior, $\alpha\pi'_i$.

c. Plano paralelo ao (π') (Figura 117-c): Traço horizontal anterior, $\alpha\pi_A$, e traço horizontal posterior, $\alpha\pi_P$.

d. Plano paralelo à linha de terra (Figura 117-d): Traço horizontal anterior, $\gamma\pi_A$, e traço horizontal posterior, $\gamma\pi_P$; traço vertical superior, $\gamma\pi'_s$, e traço vertical inferior, $\gamma\pi'_i$.

7.8. Porções úteis de um plano nos diedros: Os traços de um plano indicam as porções úteis do plano nos diedros pelos quais ele situa ou passa:

a. Plano qualquer (Figura 117-a): O plano situa nos quatro diedros.

a.1. $\alpha\pi_A$ e $\alpha\pi'_s \Rightarrow$ região do plano que se situa no 1º diedro.

a.2. $\alpha\pi_P$ e $\alpha\pi'_s \Rightarrow$ região do plano que se situa no 2º diedro.

a.3. $\alpha\pi_P$ e $\alpha\pi'_i \Rightarrow$ região do plano que se situa no 3º diedro.

a.4. $\alpha\pi_A$ e $\alpha\pi'_i \Rightarrow$ região do plano que se situa no 4º diedro.

b. Plano paralelo ao (π): O plano passa por dois diedros.

b.1. $\alpha\pi'_s \Rightarrow$ o plano passa nos 1º e 2º diedros (Figura 117-b₁).

b.2. $\alpha\pi'_i \Rightarrow$ o plano passa nos 3º e 4º diedros (Figura 117-b₂).

c. Plano paralelo ao (π'): O plano passa por dois diedros.

c.1. $\alpha\pi_A \Rightarrow$ o plano passa nos 1º e 4º diedros (Figura 117-c₁).

c.2. $\alpha\pi_P \Rightarrow$ o plano passa nos 2º e 3º diedros (Figura 117-c₂).

d. Plano paralelo à linha de terra: O plano passa por três diedros.

d.1. $\gamma\pi_A$ e $\gamma\pi'_s \Rightarrow$ 1º diedro $\Rightarrow$ o plano passa pelo 4º, 1º e 2º diedros (Figura 117-d₁).

d.2. $\gamma\pi_A$ e $\gamma\pi'_i \Rightarrow$ 4º diedro $\Rightarrow$ o plano passa pelo 3º, 4º e 1º diedros (Figura 117-d₂).

d.3. $\gamma\pi_P$ e $\gamma\pi'_i \Rightarrow$ 3º diedro $\Rightarrow$ o plano passa pelo 2º, 3º e 4º diedros (Figura 117-d₃).

d.4. $\gamma\pi_P$ e $\gamma\pi'_s \Rightarrow$ 2º diedro $\Rightarrow$ o plano passa pelo 3º, 2º e 1º diedros (Figura 117-d₄).

7.9. Determinação de um plano que passa pela linha de terra:

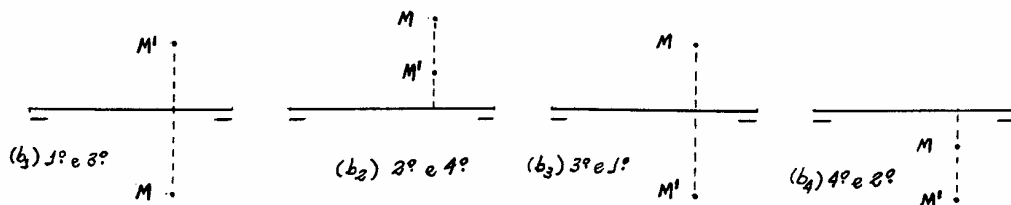
Os traços deste plano são coincidentes com a linha de terra ($\gamma\pi \equiv \gamma\pi' \equiv \pi'\pi$), não ficando, portanto, caracterizado ou individualizado por seus traços (Figura 118-a).

Completa-se a determinação, caracterização ou individualização do plano que passa pela linha de terra, com um ponto (M) qualquer do plano, ficando esse plano definido por uma reta, a $\pi'\pi$, e o ponto (M) (Figura 119-b).

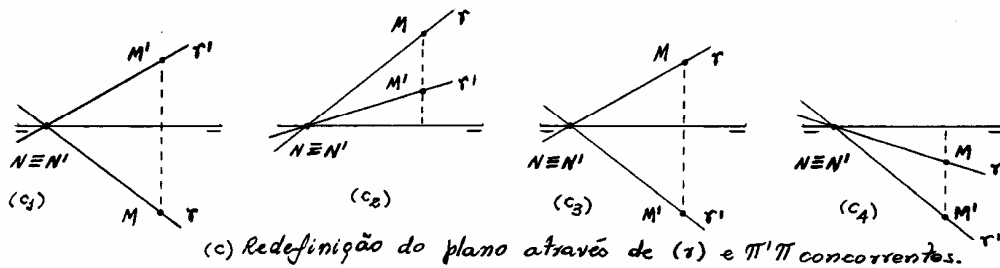
É possível redefinir o plano por duas retas concorrentes (Figura 118-c): Toma-se um ponto qualquer de $\pi'\pi$, $N \equiv N' \equiv (N)$; traça-se (M) (N) que juntamente com a linha de terra são concorrentes e definem o plano. Pode-se também tomar dois pontos da linha de terra (P) e (N) e juntamente com (M) traçar (M) (P) e (M) (N), que, concorrentes e definidas por pontos do plano, representam-no (Figura 118-d).

$$\gamma\pi \equiv \gamma\pi' \equiv \pi'\pi$$

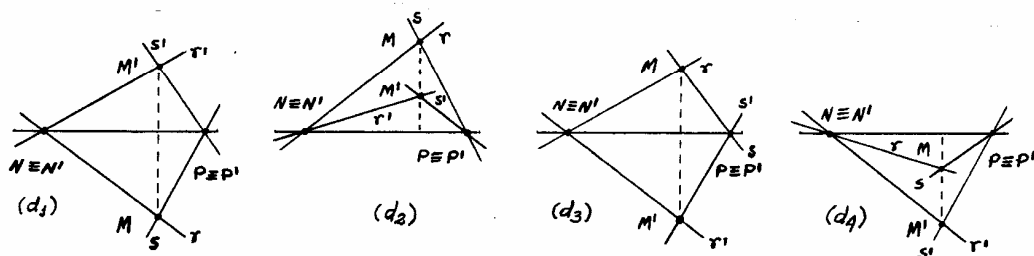
(a) Traços de um plano que passa por $\pi'\pi$.



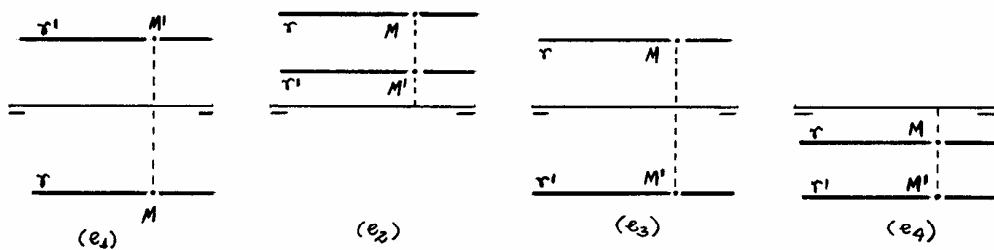
(b) Determinação de um plano que passa por $\pi'\pi$.



(c) Redefinição do plano através de (r) e $\pi'\pi$ concorrentes.



(d) Redefinição do plano através de (r) e (s) concorrentes.



(e) Redefinição do plano através de (r) , fronto-horizontal, e $\pi'\pi$ paralelas.

FIGURA 118. Representação em é pura de um plano (γ) que passa pela linha de terra - $\pi'\pi$.

Também é possível redefinir o plano por duas retas paralelas (Figura 118-e): Por (M) traça-se uma fronto-horizontal, ficando o plano definido por duas retas paralelas, esta fronto-horizontal e a linha de terra.

7.10. Pertinência de reta e plano: Uma reta pertence a um plano quando dois quaisquer de seus pontos pertencem ao plano (Figura 119).

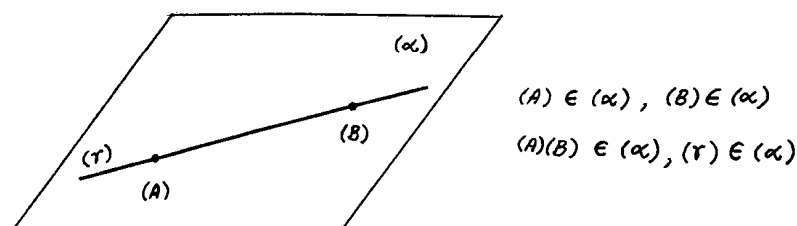


FIGURA 119. Reta qualquer (r) pertencente ao plano (α).

a. O plano é definido por duas retas (concorrentes ou paralelas):

a.1. *Toda reta concorrente com outras duas retas de um plano (concorrentes ou paralelas), em pontos distintos, pertence ao plano (se uma reta está apoiada ou concorre com outras duas que definem um plano, esta reta também pertence ao plano, uma vez que duas a duas elas definem planos que são coincidentes ou é o mesmo plano).*

Na Figura 120, as retas (r) e (s) concorrentes pertencem ao plano (α), ou o plano (α) é definido por (r) e (s) concorrentes; a reta (t) também pertence ao plano (α) uma vez que ela concorre com as retas, ou se apoia nas retas, (r) e (s), respectivamente nos pontos (A) e (B). Em *épura* (Figura 120-b), a projeção horizontal t concorre com as projeções horizontais r e s, nas projeções horizontais A e B, e a projeção vertical t' concorre com as projeções verticais r' e s', nas projeções verticais A' e B'; além disto as projeções A e A', e B e B' estão nas suas respectivas linhas de chamada indicando a existência de (A) e (B), os pontos de apoio ou de concorrência.

Na Figura 121, as retas (r) e (s) paralelas pertencem ao plano (α), ou o plano (α) é definido por (r) e (s) paralelas; a reta (t) também pertence ao plano (α) uma vez que ela concorre com as retas, ou se apoia nas retas, (r) e (s), respectivamente nos pontos (A) e (B). Em *épura* (Figura 121-b), a projeção horizontal t concorre com as projeções horizontais r e s, nas projeções horizontais A e B, e a projeção vertical t' concorre com as projeções verticais r' e s', nas projeções verticais A' e B'; além disto as projeções A e A', e B e B' estão nas suas respectivas linhas de chamada indicando a existência de (A) e (B), os pontos de apoio ou de concorrência.

a.2. *Toda reta concorrente com uma reta de um plano e paralela à outra do plano, pertence ao plano* (Figura 122): Duas retas concorrentes definem um plano e duas retas paralelas também definem um plano; se uma reta é concorrente com uma de um plano, as duas definem um plano, se a mesma reta é paralela à outra reta do

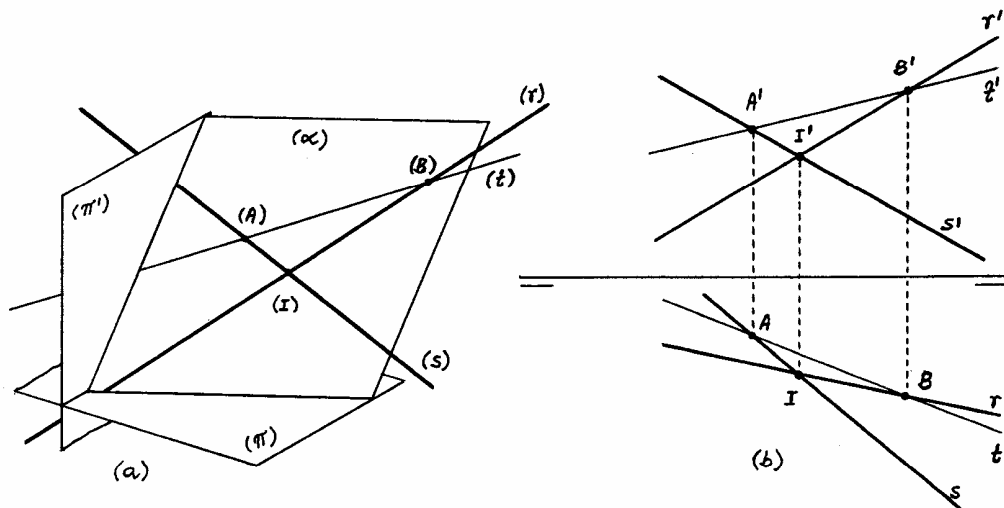


FIGURA 120. Reta qualquer (t) pertencente ao plano (α) determinado por (r) e (s) concorrentes - (t) se apoia em (r) e (s).

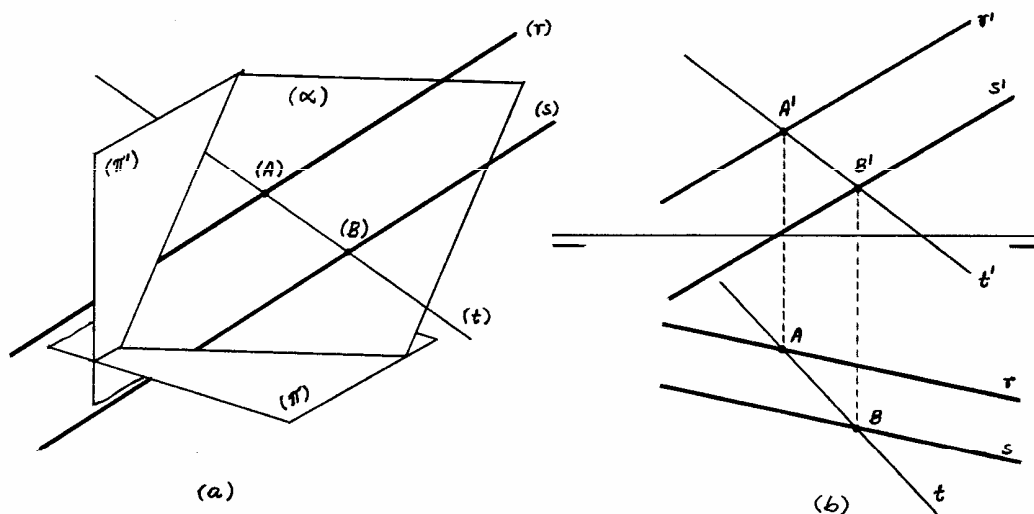


FIGURA 121. Reta qualquer (t) pertencente ao plano (α) determinado por (r) e (s) paralelas - (t) se apoia em (r) e (s).

plano, as duas definem um plano, que, neste caso, são coincidentes ou é o mesmo plano.

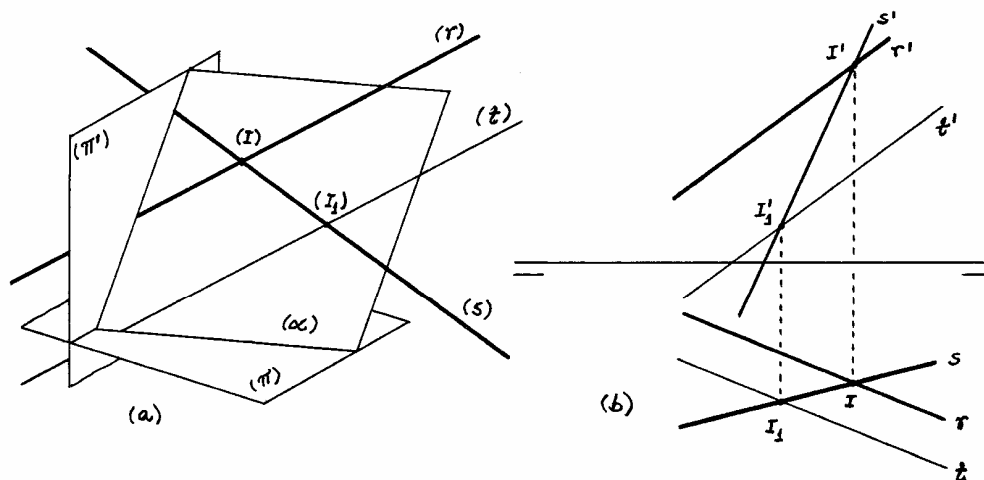


FIGURA 122. Reta qualquer (t) pertencente ao plano (α) determinado por (r) e (s) concorrentes - (t) é paralela a (r) e concorrente com (s).

b. O plano é definido por seus traços horizontal e vertical:

b.1. Quando uma reta tem seus traços horizontal e vertical situados, respectivamente, nos traços horizontal e vertical do plano, esta reta pertence ao plano.

Na Figura 123 mostra-se uma reta qualquer pertencente a um plano qualquer (α), pode-se observar em (a) que os traços horizontal e vertical da reta coincidem respectivamente com os traços horizontal e vertical do plano; em (b), (H) $\equiv$ H é o traço horizontal da reta que é um ponto do traço horizontal $\alpha\pi$ do plano (α), e (V) $\equiv$ V' é o traço vertical da reta que é um ponto do traço vertical $\alpha\pi'$ do plano (α).

OBSERVAÇÕES:

a. Por meio de uma reta de um plano qualquer e o ponto (T) $[x; 0; 0]$, também do plano, determinam-se os traços deste plano (Figura 123-b).

b. Ficam excluídos desta consideração os planos que passam pela linha de terra, pois tais planos não ficam definidos apenas por seus traços.

b.2. Quando duas ou mais retas pertencem ao plano, os seus traços horizontais pertencem ao traço horizontal do plano e os seus traços verticais pertencem ao traço vertical do plano.

Na Figura 124, as retas (r) e (s) pertencem ao plano qualquer (α), portanto os traços dessas retas pertencem aos respectivos traços do plano. Em épura (Figura 124-b), determinam-se os traços horizontais e verticais das retas (r) e (s); o traço horizontal $\alpha\pi$ do plano é a reta que passa pelo traços horizontais das retas, (H_r) $\equiv$ H_r e (H_s) $\equiv$ H_s ;

o traço vertical $\alpha\pi'$ do plano é a reta que passa pelo traços verticais das retas, $(V_r) \equiv V'_r$ e $(V_s) \equiv V'_s$. O ponto de interseção dos traços do plano é (T) $[x; 0; 0]$ e localiza-se na linha de terra.

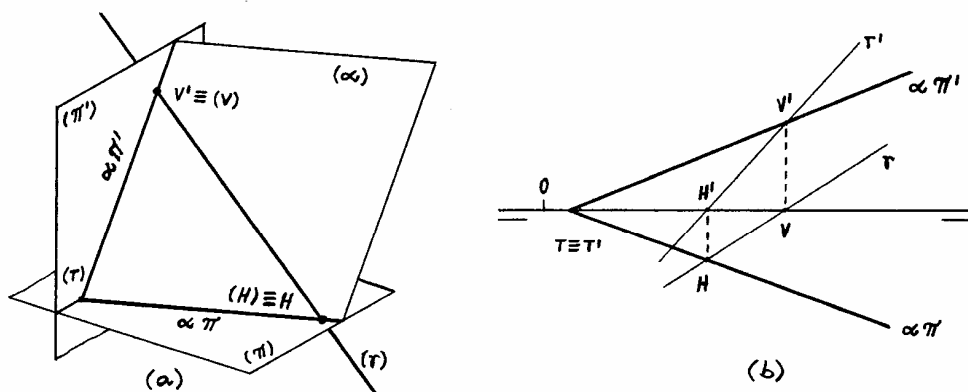


FIGURA 123. Reta qualquer (r) pertencente ao plano (α) determinado por seus traços - os traços horizontal (H) e vertical (V) da reta pertencem aos respectivos traços do plano, $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$.

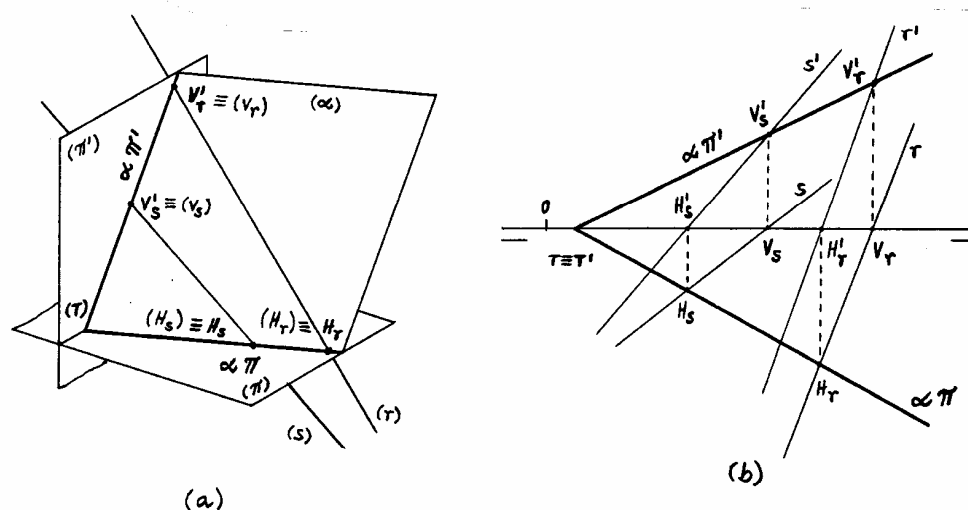


FIGURA 124. Retas quaisquer (r) e (s) pertencentes ao plano (α) determinado por seus traços - os traços horizontais, (H_r) e (H_s), e verticais, (V_r) e (V_s), das retas pertencem aos respectivos traços do plano, $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$.

7.11. Retas auxiliares: À exceção das retas definidoras de um plano, todas as demais retas apostas no plano são denominadas auxiliares. A construção de retas auxiliares num plano é um recurso de grande emprego no tratamento descritivo dos problemas que lhe dizem respeito. Deve-se desenhar as retas auxiliares com traços mais estreitos e claros, e as definidoras do plano com traços mais largos e escuros.

7.12. EXERCÍCIOS

O plano.

Objetivos: Representar e identificar o plano, em *épura*.

Conhecimentos necessários: Representação de uma reta. Retas concorrentes e paralelas.

Traços de uma reta e de um plano. Pertinência de reta e plano.

Fontes: PINHEIRO, V. A. *Noções de Geometria Descritiva*; ponto, reta e plano. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970. Vol. I. p. 111-114.

PRÍNCIPE JÚNIOR, A. R. *Noções de geometria descritiva*. 37. ed. São Paulo: Nobel, 1990. Vol. I. p 151-164.

1. Dado o plano (α), definido pelos pontos (A) [1; 4; 1], (B) [4; 0; 4] e (C) [6; 1; 2], defini-lo pelas retas (A) (B) $\equiv$ (r) e (B) (C) $\equiv$ (s).
SUGESTÃO: Representar as retas (A) (B) e (B) (C) por suas projeções ortogonais (representá-las em *épura*). Por que as retas (A) (B) e (B) (C) definem o plano?
2. Dado o plano (α), definido pelos pontos (A) [1; 4; 1], (B) [4; 0; 4] e (C) [6; 1; 2], defini-lo pela reta (A) (B) e outra reta (r), paralela a (A) (B), que passa por (C).
SUGESTÃO: Representar em *épura* a reta (A) (B) e o ponto (C). Traçar r por C e r' por C' paralelas respectivamente a AB e A'B'. Por que as retas (A) (B) e (r) definem o plano?
3. Dado o plano (α), definido pelos pontos (A) (B) e (C), representá-lo pela mediana (A) (M) do triângulo (A) (B) (C) e pela mediana (M) (N) do triângulo (A) (M) (C). (A) [1; 4; 1], (B) [4; 0; 4] e (C) [6; 1; 2].
SUGESTÃO: Representam-se os pontos (A) (B) e (C). A mediana (A) (M) é a reta que passa pelo vértice (A) e pelo ponto médio (M) do lado oposto (B) (C) - Determina-se (M) como o ponto médio de (B) (C); traça-se (A) (M). Determina-se (N) como o ponto médio de (A) (C). Traça-se (M) (N). O plano, inicialmente representado por três pontos não alinhados, fica representado pelas retas concorrentes (A) (M) e (M) (N). OBSERVAÇÃO: (A) (M) e (M) (N) representam o plano (α) por estarem apoiadas em retas do plano.
4. Determinar os traços do plano (α) definido pela reta (A) (B) e pelo ponto (C). (A) [2; 1; 4], (B) [6; 2; 1] e (C) [4; 0; 4].
SUGESTÃO: Representam-se (A) (B) e (C). Traça-se (B) (C), concorrente com (A) (B). O plano (α) fica representado por (A) (B) e (B) (C). Determinam-se os traços horizontais e verticais das retas (A) (B) $\equiv$ (s) e (B) (C) $\equiv$ (r), obtendo-se H_s , H_r , V'_s e V'_r . Traça-se o traço horizontal do

plano $\alpha\pi$ passando pelos traços horizontais das retas H_s e H_r . Traça-se o traço vertical $\alpha\pi'$ passando pelos traços verticais das retas V'_s e V'_r . OBSERVAÇÃO: $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$ são concorrentes com $\pi'\pi$, passando o plano α pelos 4 diedros, a porção útil do plano está no primeiro diedro - os afastamentos de $\alpha\pi$ são positivos ($\alpha\pi_A$) e as cotas de $\alpha\pi'$ são positivas ($\alpha\pi'_s$).

5. Obter os traços do plano (γ) determinado pelas retas (M) (N) e (N) (P). (M) [4; 0; 0], (N) [9; 3,5; 1] e (P) [7; 6; 4].

SUGESTÃO: Traçam-se (M) (N) $\equiv$ (r) e (N) (P) $\equiv$ (s). (M) (N) é concorrente com a linha de terra em $M \equiv M' \equiv (M)$, por isto seus traços são coincidentes com este ponto, isto é: $M \equiv M' \equiv (M) \equiv H_r \equiv V'_r$. Obtêm-se os traços horizontal e vertical, H_s e V'_s , da reta (N) (P) $\equiv$ (s). Por H_r e H_s , traça-se o traço horizontal do plano $\gamma\pi$; por V'_r e V'_s , traça-se o traço vertical $\gamma\pi'$. OBSERVAÇÃO: Os traços são de um plano qualquer e a porção compreendida entre eles é do 4º diedro; os afastamentos de $\gamma\pi$ são positivos ($\gamma\pi_A$) e as cotas de $\gamma\pi'$ são negativas ($\gamma\pi'_I$).

6. Representar por seus traços o plano (α) definido pela fronto-horizontal (r) que contém o ponto (M) do (β_P) e pela fronto-horizontal (s) que contém (N) do (β_I). (M) [4; -2; ?] e (N) [8; ?; 1].

SUGESTÃO: (M) [4; -2; 2], do (β_P), e (N) [8; 1; 1], do (β_I). Representam-se (r) e (s). Duas retas fronto-horizontais, portanto paralelas, definem o plano (α), isto significa que os traços deste plano são paralelos à linha de terra. Para localizar os traços do plano, traça-se uma reta auxiliar (1) (2) $\equiv$ (t), qualquer, apoiada nas retas fronto-horizontais (r) e (s) que definem o plano (sendo, portanto, a reta auxiliar (t) uma reta do plano); determinam-se os traços horizontal e vertical dessa reta auxiliar (t), obtendo-se H_t e V'_t . Por H_t traça-se paralela à linha de terra, determinando-se o traço horizontal do plano $\alpha\pi$. Por V'_t traça-se paralela à linha de terra, determinando-se o traço vertical do plano $\alpha\pi'$.

7. Construir os traços do plano (γ) determinado pela reta de perfil (A) (B) e o ponto (M). (A) [8; -2; 6], (B) [?; 4; 4] e (M) [4; 2; 1].

SUGESTÃO: Representar (A) (B) e (M). Traçar as retas auxiliares (M) (A) $\equiv$ (r) e (M) (B) $\equiv$ (s), que redefinem o plano (γ), pois são concorrentes. Determinam-se os traços horizontais e verticais das retas auxiliares. Traçam-se as retas passando por H_r e H_s e por V'_r e V'_s , determinando-se $\gamma\pi$ e $\gamma\pi'$, respectivamente.

8. Dar os traços do plano (α) definido pelas retas (A) (B) e (A) (C), sendo (A) [3; 1; 2], (B) [6; 2,5; 5] e (C) [7; 1; 2].

SUGESTÃO: Representam-se (A) (B) $\equiv$ (r) e (A) (C) $\equiv$ (s). (r) incide sobre $\pi'\pi$, o que significa que seus traços são também coincidentes com $\pi'\pi$ neste ponto ($H_r \equiv V'_r \equiv \pi'\pi$). (A) (C) $\equiv$ (s) é fronto-horizontal, sendo suas projeções paralelas a $\pi'\pi$; pode-se considerar que os traços dessa reta estejam situados sobre $\pi'\pi$, no infinito. Assim, por H_r traça-se uma reta sobre $\pi'\pi$, obtendo-se $\alpha\pi$; por V'_r traça-se uma reta sobre $\pi'\pi$, obtendo-se $\alpha\pi'$. QUANDO UMA DAS RETAS DEFINIDORAS DO PLANO É FRONTO-HORIZONTAL E A OUTRA CONCORRE COM A LINHA DE TERRA, O PLANO CONTÉM A LINHA DE TERRA E SEUS TRAÇOS SÃO COM ELA COINCIDENTES, OU SEJA: $\alpha\pi \equiv \alpha\pi' \equiv \pi'\pi$.

9. Dado o plano (α) por seus traços, construir as projeções da reta (T) (U) do plano. (T) [2; 0; 0], $\alpha\pi = 30^\circ$, $\alpha\pi' = -45^\circ$ e (U) [6; ?; 4].

SUGESTÃO: Representa-se (T). Com vértice em $T \equiv T'$, traçam-se as retas que juntamente com a linha de terra definem os ângulos de 30° e -45° (por convenção, $+30^\circ$ é medido a partir de $\pi'\pi$ no sentido anti-horário, -45° é medido no sentido horário); estas retas são justamente $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$, respectivamente. Representa-se U' . Traça-se $T'U' \equiv r'$. Por U' , traça-se a projeção vertical s' de uma reta auxiliar qualquer (s) que venha interceptar os dois traços do plano $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$. O ponto de interseção entre a projeção vertical da reta auxiliar s' e o traço do plano $\alpha\pi'$ é o traço vertical da

reta auxiliar V'_s . O ponto de interseção entre a projeção vertical da reta s' e a linha de terra é H'_s . Pelas respectivas linhas de chamada determinam-se V_s em $\pi'\pi$ e H_s no traço $\alpha\pi$. Traça-se a projeção horizontal da reta auxiliar s , passando por V_s e H_s , até interceptar a linha de chamada de (U), determinando-se a projeção horizontal U. Traça-se a projeção horizontal da reta (T) (U), $TU \equiv r$.

10. Dado o plano (γ), paralelo à linha de terra, construir as projeções da reta (M) (N) do plano. $\gamma\pi' = 2$, $\gamma\pi = 3$, (M) [2; 4; ?] e (N) [7; 4; ?].
SUGESTÃO: $\gamma\pi' = 2 \Rightarrow 2$ é a cota de $\gamma\pi'$. $\gamma\pi = 3 \Rightarrow 3$ é o afastamento de $\gamma\pi$. Traçam-se $\gamma\pi$ e $\gamma\pi'$ paralelos a $\pi'\pi$. Representam-se M e N. Traça-se a projeção horizontal MN. Como MN é paralela a $\pi'\pi$ e os traços do plano também são paralelos a $\pi'\pi$, a reta (M) (N) é fronto-horizontal, sendo $M'N'$ também paralela a $\pi'\pi$. Por M traça-se a projeção horizontal r de uma reta auxiliar qualquer (r), que intercepte os dois traços $\gamma\pi$ e $\gamma\pi'$. A interseção de r com $\pi'\pi$ é a projeção horizontal V_r e a interseção de r com $\gamma\pi$ é a projeção horizontal H_r . Pelas linhas de chamada passando por V_r e por H_r , respectivamente, determinam-se V'_r e H'_r . Traça-se por V'_r e H'_r a projeção vertical r' da reta auxiliar (r). O ponto de interseção entre r' e a linha de chamada de (M) é a projeção vertical M' . Por M' traçar paralela à linha de terra, obtendo-se s' .
11. Determinar os traços do plano (α) definido pela reta (A) (B) e pelo ponto (C). (A) [2; 1; 3], (B) [5; 3; 1] e (C) [6; 0; 2].
12. Determinar os traços de um plano do qual se conhecem uma reta fronto-horizontal (A) (B) e um ponto (C). (A) [1; 1; 2], (B) [4; ?; ?] e (C) [3,5; 2; 1].
13. Determinar os traços de um plano do qual se conhecem uma reta (A) (B) e um ponto (C). (A) [0; -0,5; 2,5], (B) [3,5; -1,5; 0] e (C) [2; 2; -3].
14. Um plano é definido por três pontos (A), (B) e (C). Pede-se: **a.** os traços do plano; **b.** uma frontal do plano que contenha o ponto (M). (A) [0; 4; 1], (B) [2; 1; 3], (C) [5,5; 0; 1,5] e (M) [1; ?; 1].
15. Determinar os traços de um plano dado por duas retas concorrentes, uma (A) (B) qualquer e outra (B) (C) de perfil. (A) [1; 3; 0], (B) [3; 0; 4] e (C) [?; 1,5; 1].
16. Determinar os traços de um plano dado por duas retas concorrentes, uma (A) (B) qualquer e outra (B) (C) de perfil. (A) [1,5; -2; 2], (B) [4; -4; 4] e (C) [4; 2; 0,5].
17. Determinar os traços de um plano dado por duas retas concorrentes (A) (B) e (C) (D), em que as duas projeções de cada uma delas coincidem com as projeções de nomes contrários da outra. (A) [2; 0; 0], (B) [8; 3; 5], (C) [3; ?; ?] e (D) [6; ?; ?].
18. Determinar uma reta de perfil que pertença a um plano (α), que contém o ponto (T) [0; 0; 0]. $\alpha\pi' = + 50^\circ$ e $\alpha\pi = - 40^\circ$.
19. Determinar os traços de um plano dado por duas retas paralelas, uma (A) (B) e outra (C) (D). (A) [1,5; -2; 2], (B) [4; -4; 4], (C) [2; 2; ?] e (D) [5; ?; 2].
20. Determinar os traços de um plano dado por duas retas paralelas, uma (A) (B) e outra (C) (D). (A) [1; 2; -3], (B) [3; -3; 1], (C) [1; 3; ?] e (D) [3; ?; 3].
21. Determinar os traços de um plano dado por duas retas paralelas, uma (A) (B) e outra (C) (D). (A) [1,5; -2; ?], (B) [4; ?; 4], (C) [2; 2; 3] e (D) [5; 1; 2].

8. PLANOS PARTICULARES.

8.1. Introdução.

a. *Objetivos*: Representar e identificar em é pura alguns planos particulares.

b. *Conceito*: São planos que, ocupando posições especiais em relação aos planos de projeção, a um dos bissetores, ou à linha de terra, apresentam propriedades características que permitem identificar, à simples vista da é pura, a posição particular do plano.

OBSERVAÇÃO: Qualifica-se um plano particular pela posição que lhe confere maior número de atributos, isto é: aquela posição que acarreta nas demais.

c. *Tipos de planos particulares*: Vertical, de topo, de perfil, horizontal, frontal, paralelo à linha de terra, plano que passa pela linha de terra (perpendicular ao (β_I) , perpendicular ao (β_P) , paralelo ao (β_I) e paralelo ao (β_P)).

8.2. Plano vertical.

a. *Definição* (Figura 125): É aquele que é perpendicular ao plano horizontal de projeção (π) e oblíquo ao plano vertical de projeção (π').

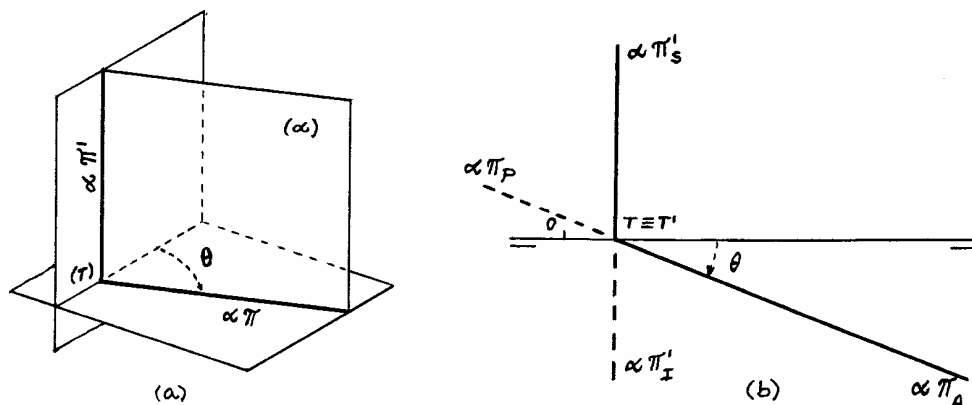


FIGURA 125. Plano vertical e seus traços.

b. *Características*: Sendo o plano vertical perpendicular ao plano horizontal de projeção, todo plano vertical:

b.1. Tem *traço vertical* $\alpha\pi'$ perpendicular à linha de terra (Figura 125).

b.2. Tem *traço horizontal* $\alpha\pi$ oblíquo à linha de terra, ficando individualizado por este traço. Na Figura 125-b pode-se observar que conhecido o traço horizontal

$\alpha\pi$, determina-se $T \equiv T'$ na linha de terra; o traço vertical $\alpha\pi'$ é sempre perpendicular à linha de terra.

b.3. *Passa pelos quatro diedros, sendo seus traços horizontal $\alpha\pi$ e vertical $\alpha\pi'$ concorrentes com a linha de terra, em (T) $[x; 0; 0]$ (Figura 125).*

b.4. *O traço horizontal $\alpha\pi$ é o lugar geométrico das projeções horizontais dos pontos do plano; isto é: qualquer ponto do plano vertical tem projeção horizontal pertencente ao traço horizontal $\alpha\pi$ (Figura 126).*

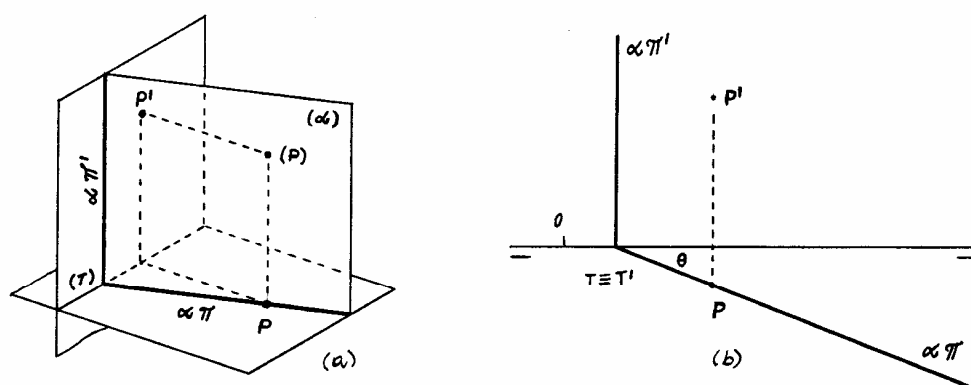


FIGURA 126. A projeção horizontal P de um ponto qualquer (P) de um plano vertical (α) pertence ao traço horizontal $\alpha\pi$ do plano.

b.5. O ângulo que um plano vertical faz com o plano vertical de projeção (π') é medido pelo ângulo que seu traço horizontal $\alpha\pi$ forma com a linha de terra ($\pi'\pi$) (Figura 125). Conhecido este ângulo e um ponto qualquer do plano vertical, pode-se representá-lo (Figura 126-b): Pela projeção horizontal do ponto traça-se o traço horizontal do plano formando o ângulo θ dado com $\pi'\pi$; na concorrência desse traço com $\pi'\pi$, em $T \equiv T'$, traça-se o traço vertical perpendicular a $\pi'\pi$.

b.6. *O plano de duas retas cujas projeções horizontais coincidem é vertical.* A Figura 127 mostra duas retas quaisquer contidas em um plano vertical, as suas projeções horizontais são coincidentes.

b.7. *Retas contidas em um plano vertical* (Figura 128): Horizontal ou de nível (h), vertical (v) e qualquer (q). As retas qualquer e horizontal de um plano vertical caracteriza ou determina-o, apenas a reta vertical isoladamente não determina-o, porque sua projeção horizontal é um ponto.

b.8. *O plano projetante vertical de uma reta qualquer (q), em (π)* (Figura 129), *fica determinado pela projeção horizontal da reta q, uma vez que essa projeção coincide com o traço horizontal do plano ($\rho\pi \equiv q$), sendo o traço vertical $\rho\pi'$ perpendicular à linha de terra e concorrente com o ponto de incidência entre $\rho\pi \equiv q$ e*

$\pi' \pi$, o ponto $T \equiv T'$. O mesmo é válido para o plano projetante vertical da reta horizontal em (π) (Figura 130), entretanto o plano projetante da reta vertical em (π)

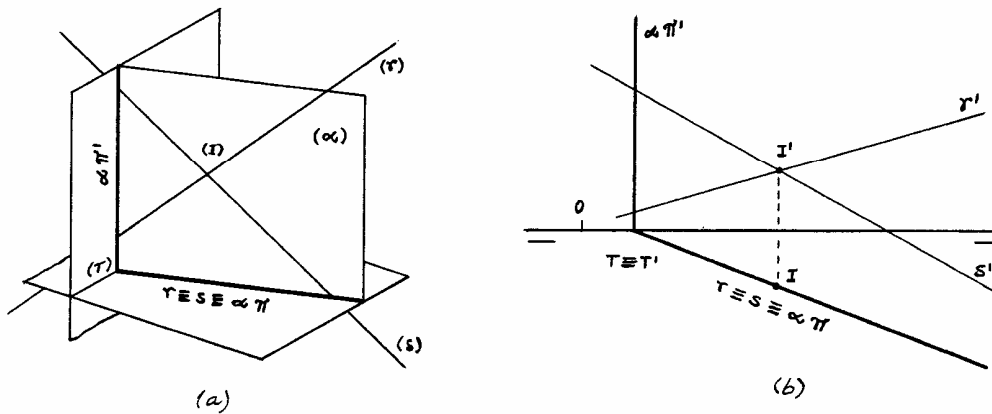


FIGURA 127. O plano de duas retas cujas projeções horizontais coincidem é vertical ($T \equiv T' \equiv V_s \equiv V_r$).

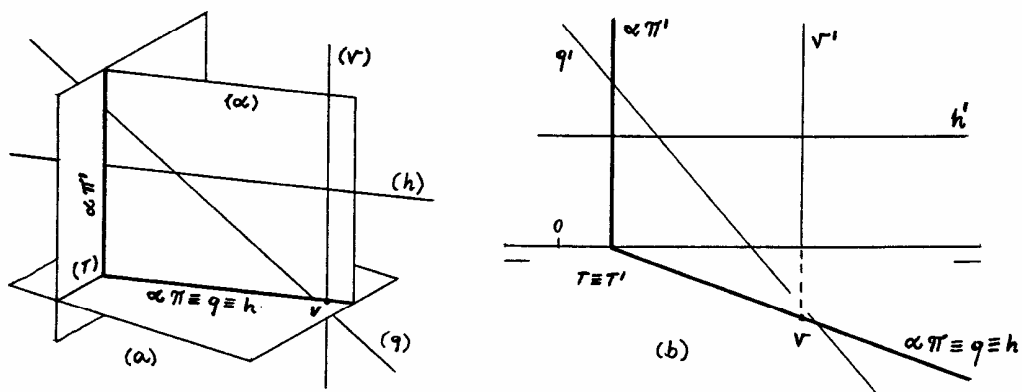


FIGURA 128. Retas contidas em um plano vertical ($T \equiv T' \equiv V_q \equiv V_h$).

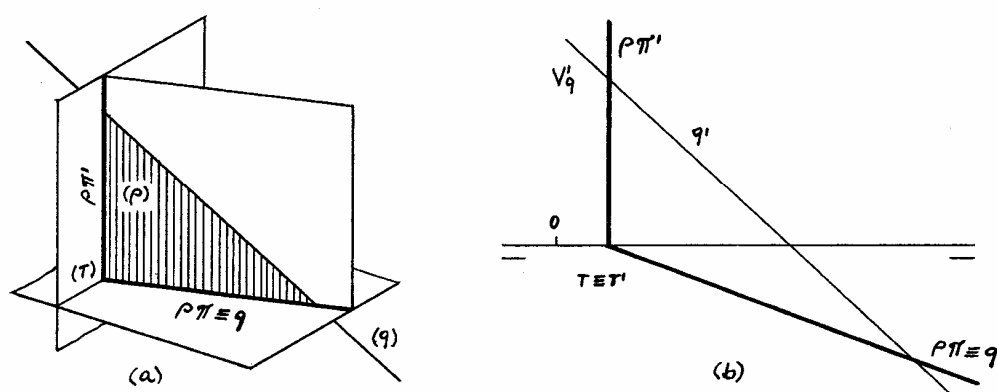


FIGURA 129. O plano projetante de uma reta qualquer em (π) , (ρ) , é vertical e fica determinado pela projeção horizontal da reta ($T \equiv T' \equiv V_q$).

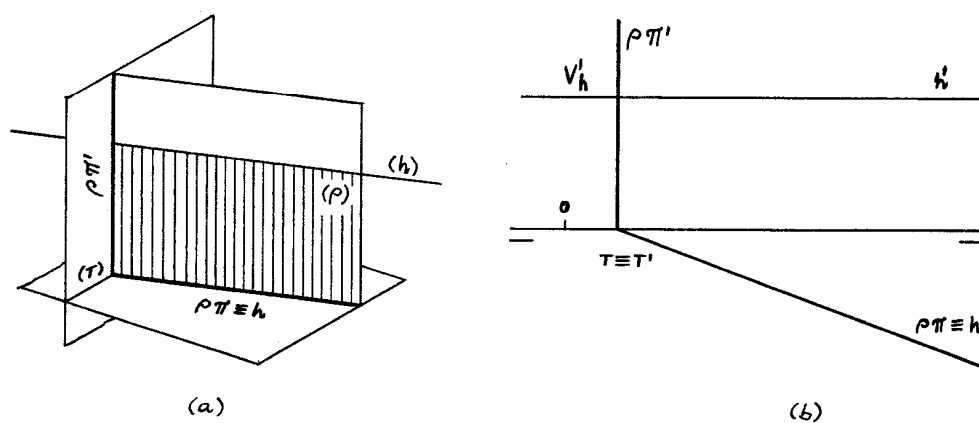


FIGURA 130. O plano projetante de uma reta horizontal em (π) , (ρ) , é vertical e fica determinado pela projeção horizontal da reta ($T \equiv T' \equiv V_h$).

reduz-se à própria reta vertical, o que pode ser visto na Figura 128: $(\rho) \equiv (v) \Rightarrow$ qualquer reta de um plano vertical, excetuando-se a vertical, determina-o.

8.3. Plano de topo.

a. *Definição*: É aquele que é perpendicular ao plano vertical de projeção (π') e oblíquo ao plano horizontal de projeção (π) (Figura 131).

b. *Características*: Sendo o plano de topo perpendicular ao plano vertical de projeção, todo plano de topo:

b.1. Tem traço horizontal $\alpha\pi$ perpendicular à linha de terra (Figura 131).

b.2. Tem traço vertical $\alpha\pi'$ oblíquo à linha de terra, ficando individualizado por este traço (Figura 131).

b.3. Passa pelos quatro diedros, sendo seus traços horizontal $\alpha\pi$ e vertical $\alpha\pi'$ concorrentes com a linha de terra, em (T) $[x; 0; 0]$ (Figura 131).

b.4. O traço vertical ($\alpha\pi'$) é o lugar geométrico das projeções verticais dos pontos do plano; isto é: qualquer ponto do plano de topo tem projeção vertical pertencente ao traço vertical ($\alpha\pi'$) (Figura 132).

b.5. O ângulo que um plano de topo faz com o plano horizontal de projeção (π) é medido pelo ângulo que seu traço vertical $\alpha\pi'$ forma com a linha de terra ($\pi'\pi$) (Figura 131). Conhecido este ângulo e um ponto qualquer do plano de topo, pode-se

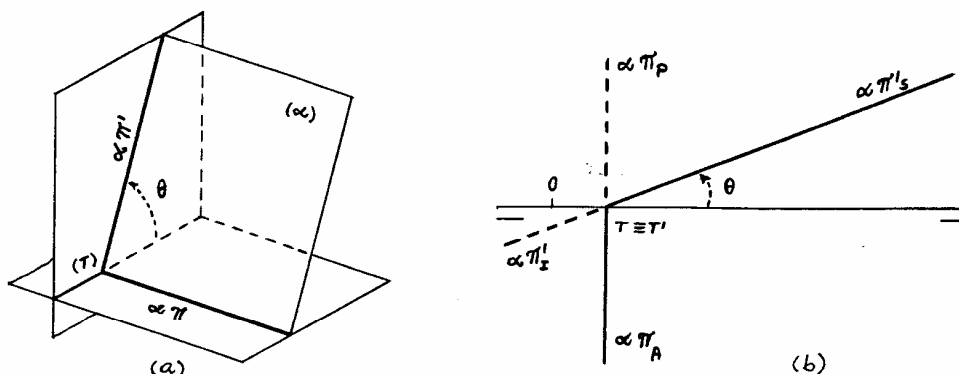


FIGURA 131. Plano de topo e seus traços.

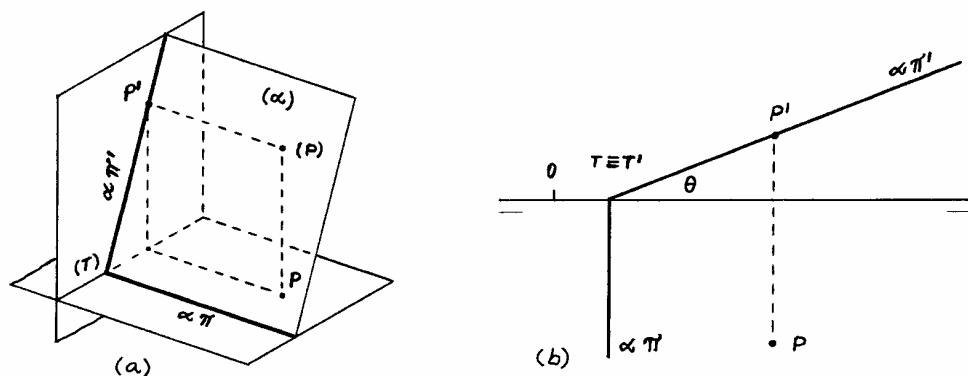


FIGURA 132. A projeção vertical P' de um ponto qualquer (P) de um plano de topo (α) pertence ao traço vertical $\alpha \pi'$ do plano.

representá-lo (Figura 132-b): Pela projeção vertical do ponto, traça-se o traço vertical do plano formando o ângulo θ dado com $\pi' \pi$; na sua concorrência com $\pi' \pi$, em $T \equiv T'$, traça-se o traço horizontal perpendicular a $\pi' \pi$.

b.6. *O plano de duas retas cujas projeções verticais coincidem é de topo.* A Figura 133 mostra duas retas quaisquer contidas em um plano de topo, as suas projeções verticais são coincidentes.

b.7. *Retas contidas em um plano de topo* (Figura 134): Frontal (f), de topo (t) e qualquer (q). As retas qualquer e frontal de um plano vertical caracteriza ou determina-o, apenas a reta de topo isoladamente não determina-o, porque sua projeção vertical é um ponto.

b.8. *O plano projetante de topo de uma reta qualquer (q), em (π')* (Figura 135), *fica determinado pela projeção vertical da reta q' , uma vez que esta projeção coincide com o traço vertical do plano ($\sigma \pi' \equiv q'$), sendo o traço horizontal $\sigma \pi$ perpendicular à linha de terra e concorrente com o ponto de incidência entre $\sigma \pi' \equiv q'$ e $\pi' \pi$, o ponto $T \equiv T'$.* O mesmo é válido para o plano projetante de topo da reta frontal em (π') (Figura 136); entretanto, o plano projetante da reta de topo em (π') reduz-se à própria reta de topo, o que pode ser visto na Figura 134: $(\sigma) \equiv (t) \Rightarrow$ *qualquer reta de*

um plano de topo, excetuando-se a de topo, determina-o, uma vez que a projeção vertical de uma reta de topo é um ponto.

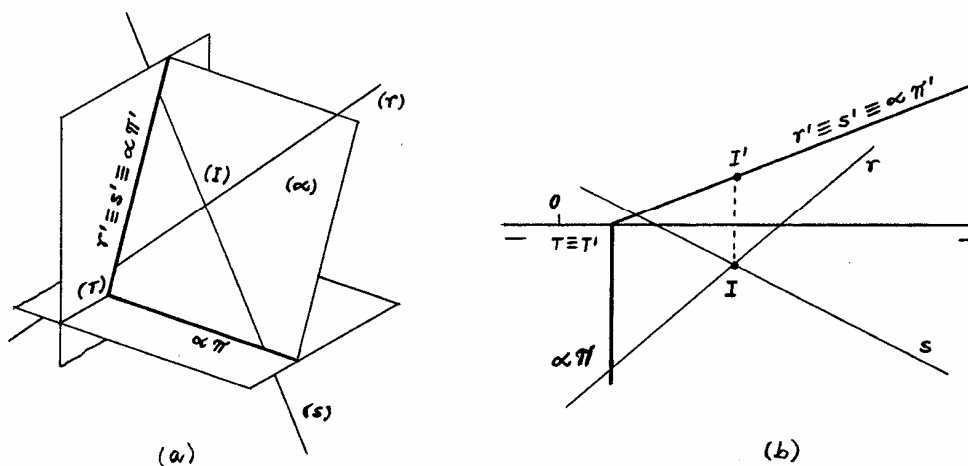


FIGURA 133. O plano de duas retas cujas projeções verticais coincidem é de topo ($T \equiv T' \equiv H'_r \equiv H'_s$).

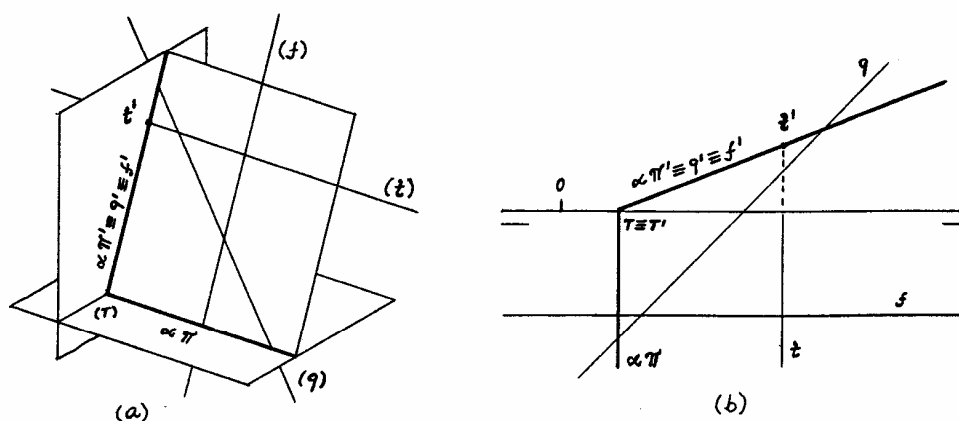


FIGURA 134. Retas contidas em um plano de topo ($T \equiv T' \equiv H'_q \equiv H'_f$).

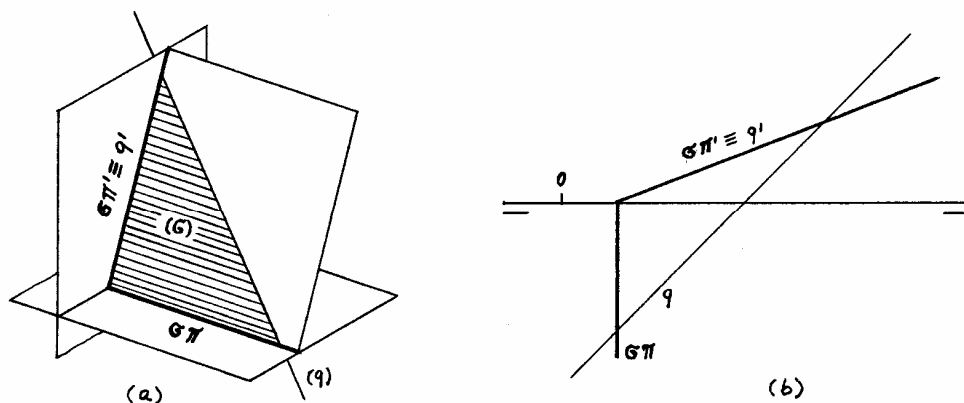


FIGURA 135. O plano projetante de uma reta qualquer em (π') , (σ) , é de topo e fica determinado pela projeção vertical da reta ($T \equiv T' \equiv H'_q$).

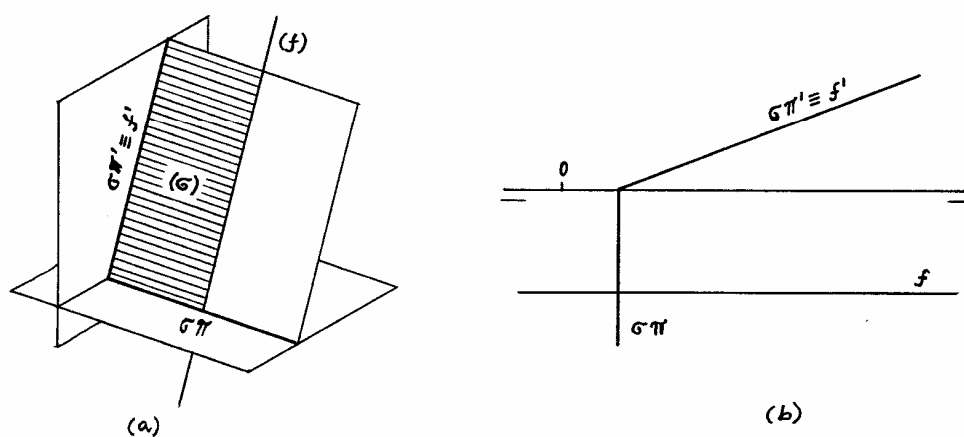


FIGURA 136. O plano projetante de uma reta frontal em (π') , (σ) , é de topo e fica determinado pela projeção vertical da reta ($T \equiv T' \equiv H'_f$).

8.4. Plano de perfil.

a. *Definição*: É aquele que é perpendicular à linha de terra, sendo perpendicular ao plano vertical de projeção (π') e ao plano horizontal de projeção (π) (Figura 137).

b. *Características*: Sendo o plano de perfil perpendicular aos planos horizontal e vertical de projeção, todo plano de perfil:

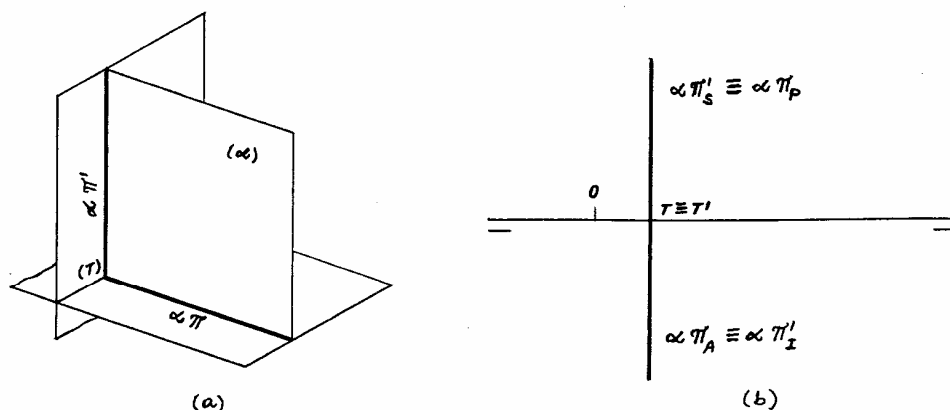


FIGURA 137. Plano de perfil e seus traços ($T \equiv T' \equiv H'_p \equiv V_p$).

b.1. Tem traços horizontal $\alpha\pi$ e vertical $\alpha\pi'$ perpendiculares à linha de terra (Figura 137).

b.2. Passa pelos quatro diedros, sendo seus traços horizontal $\alpha\pi$ e vertical $\alpha\pi'$ coincidentes e perpendiculares à linha de terra (Figura 137). Na Figura 137-b pode-se observar que $\alpha\pi_A \equiv \alpha\pi'_I$ e $\alpha\pi'_S \equiv \alpha\pi_P$.

b.3. Cada plano de perfil é o lugar geométrico dos pontos que têm uma mesma abcissa (Figura 138). Dar a abcissa de um ponto equivale a situá-lo num plano de perfil, e reciprocamente.

b.4. Todo ponto contido num plano de perfil tem ambas as projeções situadas nos traços de mesmo nome do plano (Figura 138).

O traço vertical ($\alpha\pi'$) é o lugar geométrico das projeções verticais dos pontos do plano; isto é: qualquer ponto (P) do plano de perfil tem projeção vertical P' coincidente com o traço vertical ($\alpha\pi'$).

O traço horizontal ($\alpha\pi$) é o lugar geométrico das projeções horizontais dos pontos do plano; isto é: qualquer ponto (P) do plano de perfil tem projeção horizontal P coincidente com o traço horizontal ($\alpha\pi$).

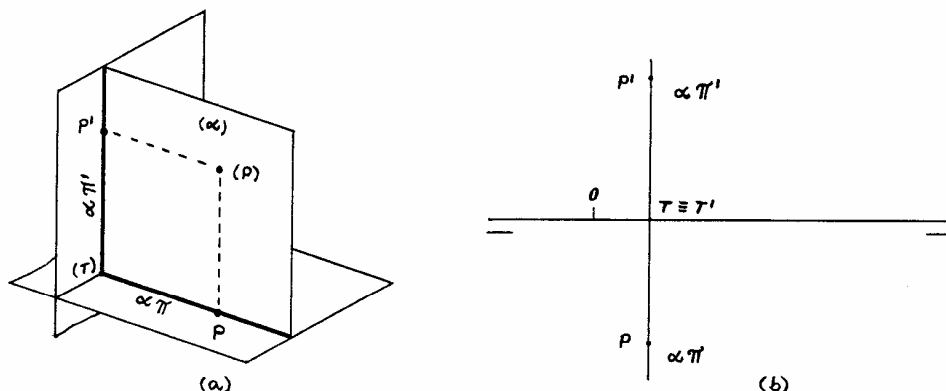


FIGURA 138. As projeções horizontal P e vertical P' de qualquer ponto (P) de um plano de perfil situam-se nos respectivos traços do plano, $\alpha\pi$ e $\alpha\pi'$.

b.5. *Qualquer ponto de um plano de perfil determina-o* (Figura 138). Cada traço do plano, que é perpendicular à linha de terra, contém a projeção de mesmo nome do ponto.

b.6. O plano de perfil é paralelo ao terceiro plano de projeção (π''), uma vez que ambos são perpendiculares à linha de terra (Figura 139). Toda figura (objeto) contida em um plano de perfil tem projeção lateral em verdadeira grandeza (VG).

b.7. *Retas contidas em um plano de perfil* (Figura 140): Vertical (v), de topo (t) e de perfil (p). Qualquer uma destas retas permite a determinação do plano de perfil em que elas **estão contidas**. Isoladamente, apenas a reta de perfil caracteriza um plano de perfil; as retas vertical e de topo podem estar em outros planos que não o de perfil. Entretanto, quando se sabe que as retas vertical e de topo **estão contidas** em um plano de perfil, pode-se determiná-lo por meio de cada uma destas retas.

b.8. *Plano projetante:*

a. Da reta de perfil nos planos de projeção horizontal (π) e vertical (π') (Figura 141): $(\rho) \equiv (\sigma) \equiv (\gamma)$ é de perfil.

b. Da reta de topo no plano horizontal de projeção (π) (Figura 142): (ρ) é de perfil.

c. Da reta de topo no plano vertical de projeção (π') (Figura 142): $(\sigma) \equiv (t) \Rightarrow$ o plano projetante reduz-se à própria reta de topo.

d. Da reta vertical no plano vertical de projeção (π') (Figura 143): (σ) é de perfil.

e. Da reta vertical no plano horizontal de projeção (π) (Figura 143): $(\rho) \equiv (v) \Rightarrow$ o plano projetante reduz-se à própria reta vertical.

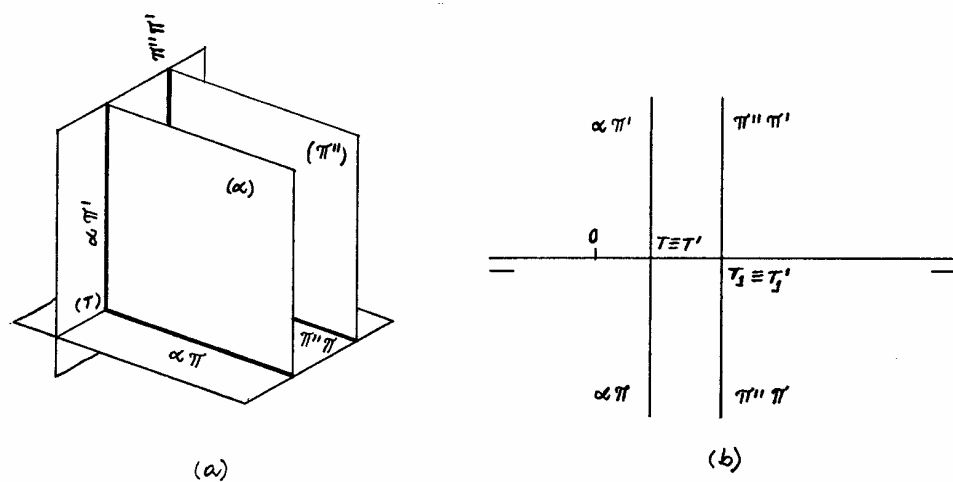


FIGURA 139. Os planos de perfil (α) e lateral de projeção (π'') são paralelos.

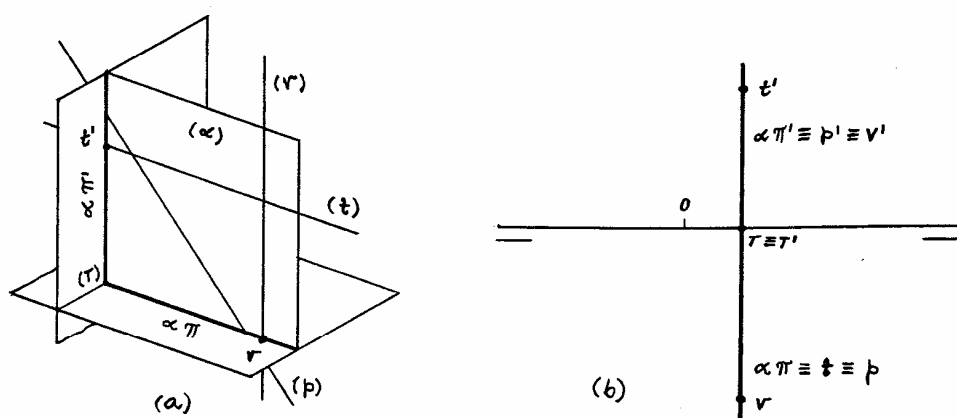


FIGURA 140. Retas contidas em um plano de perfil.

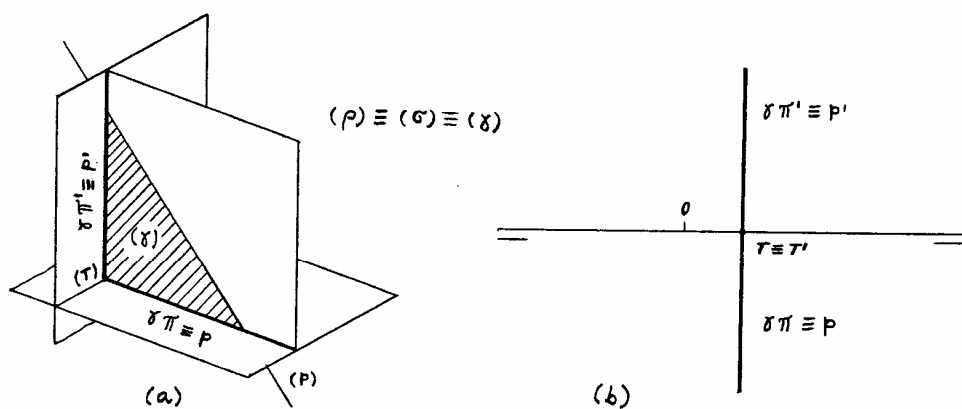


FIGURA 141. Os planos projetantes de uma reta de perfil em (π) , (ρ) , e em (π') , (σ) , são de perfil e coincidentes: $(\rho) = (\sigma) = (\gamma)$.

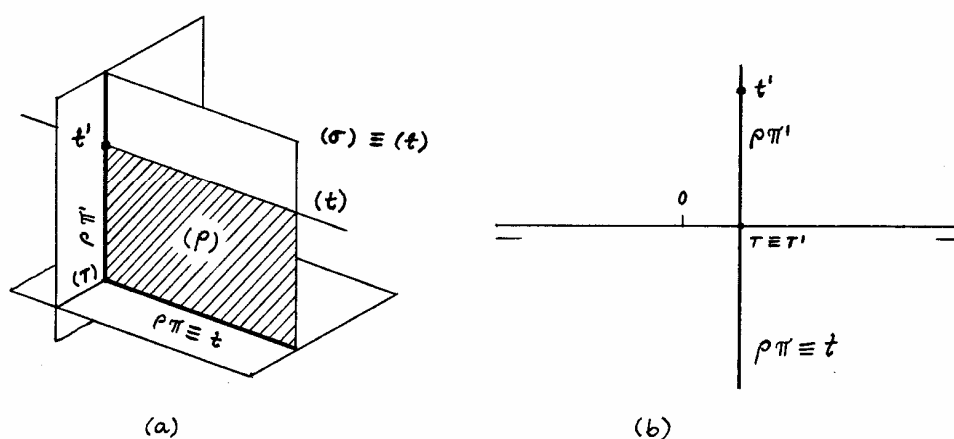


FIGURA 142. O plano projetante de uma reta de topo em (π) , (ρ) , é de perfil; o plano projetante de uma reta de topo em (π') , (σ) , reduz-se à própria reta (t) , $(\sigma) = (t)$.

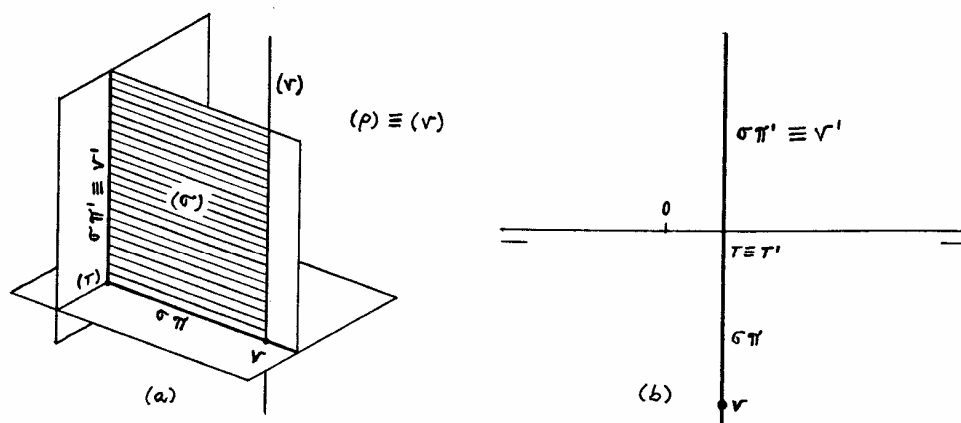


FIGURA 143. Plano projetante de uma reta vertical em (π') , (σ) , é de perfil; o plano projetante de uma reta vertical em (π) , (ρ) , reduz-se à própria reta (v) , $(\rho) \equiv (v)$.

8.5. Plano horizontal ou de nível.

a. *Definição*: É aquele que é paralelo ao plano horizontal de projeção (π) (Figura 144).

b. *Características*: Sendo o plano horizontal ou de nível paralelo ao plano horizontal de projeção (π) , e, portanto, perpendicular ao plano vertical de projeção (π') , todo plano horizontal ou de nível:

b.1. Tem *traço vertical* $\alpha\pi'$ único e paralelo à linha de terra (Figura 144).

b.2. Atravessa os 1º e 2º diedros ($\alpha\pi'_s$) ou os 3º e 4º diedros ($\alpha\pi'_l$) (Figura 144).

b.3. Cada plano horizontal ou de nível é o lugar geométrico dos pontos que têm uma mesma cota (Figura 144). Dar a cota de um ponto equivale a situá-lo num plano horizontal ou de nível, e reciprocamente.

b.4. Todo ponto contido num plano horizontal ou de nível tem sua projeção vertical situada no traço do plano ($\alpha\pi'$), sendo este o lugar geométrico das projeções verticais dos pontos do plano (Figura 144).

b.5. Qualquer ponto de um plano horizontal ou de nível determina-o (Figura 144). Constrói-se o plano horizontal ou de nível, determinado por um ponto (P), traçando-se pela projeção vertical P' a paralela $\alpha\pi'$ à linha de terra (Figura 144-b).

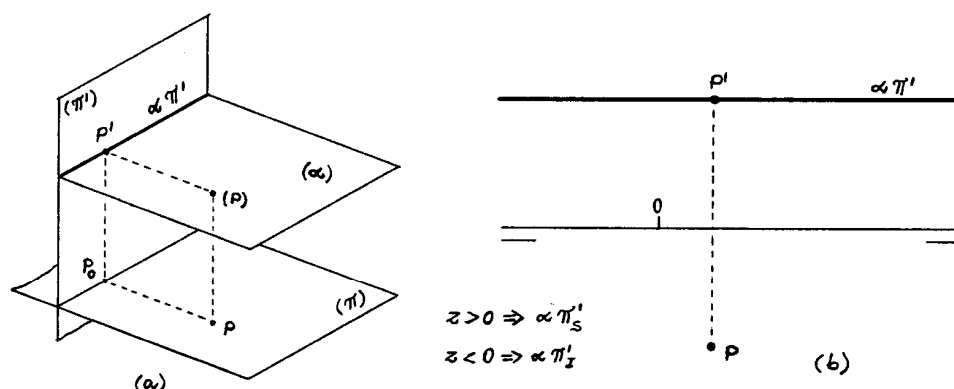


FIGURA 144. Plano horizontal ou de nível.

b.6. *Retas contidas em um plano horizontal ou de nível* (Figura 145): Horizontal ou de nível (h), fronto-horizontal (fh) e de topo (t). Qualquer uma destas retas **contidas** em um plano horizontal determina-o.

b.7. *Plano projetante:*

1. De uma horizontal no plano vertical de projeção (π') (Figura 146): (σ) é horizontal.

2. De uma fronto-horizontal no plano vertical de projeção (π') (Figura 147): (σ) é horizontal.

b.8. TODA FIGURA (OBJETO) CONTIDA EM UM PLANO HORIZONTAL OU DE NÍVEL TEM PROJEÇÃO HORIZONTAL EM VERDADEIRA GRANDEZA (Figura 148). Uma vez que todos elementos lineares da figura são horizontais e todos ângulos da mesma têm seus lados paralelos às respectivas projeções horizontais. Isto é válido para figuras mistilíneas e curvilíneas, e, em particular, para o círculo.

8.6. *Plano frontal ou de frente.*

a. *Definição:* É aquele que é paralelo ao plano vertical de projeção (π') (Figura 149).

b. *Características:* Sendo o plano frontal ou de frente paralelo ao plano vertical de projeção (π'), e, portanto, perpendicular ao plano horizontal de projeção (π), todo plano frontal ou de frente:

b.1. Tem *traço horizontal* $\alpha \pi$ único e paralelo à linha de terra (Figura 149).

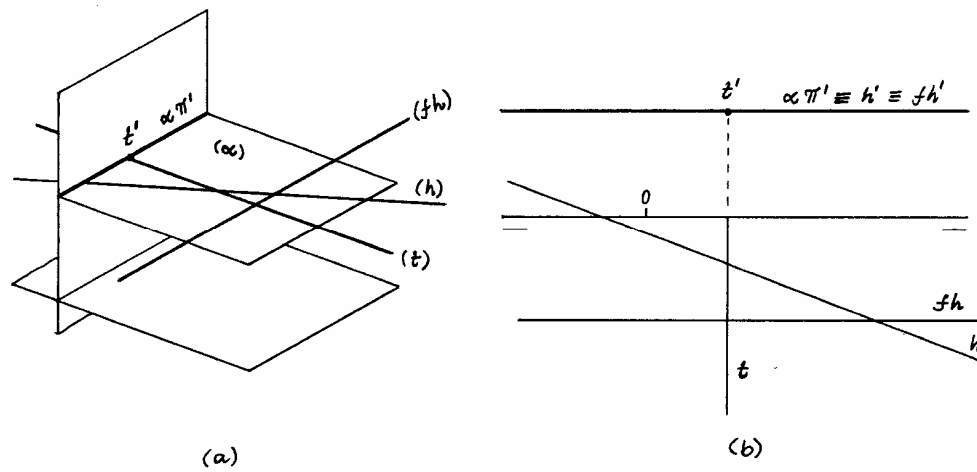


FIGURA 145. Retas contidas em um plano horizontal.

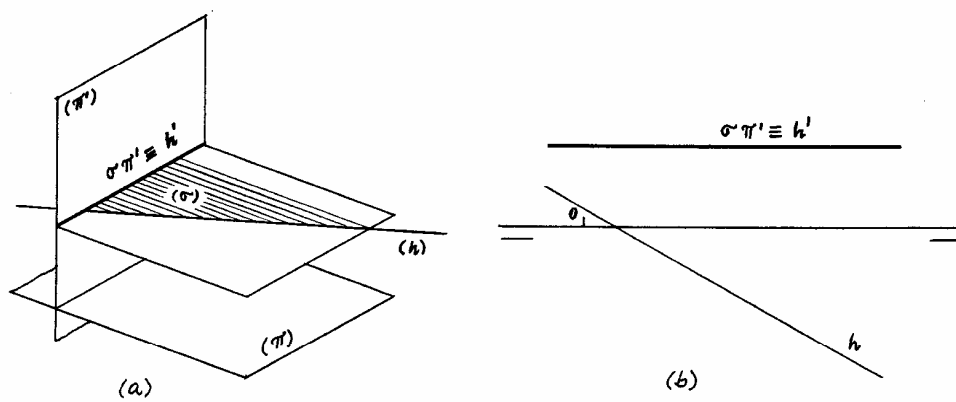


FIGURA 146. O plano projetante de uma reta horizontal em (π') é horizontal.

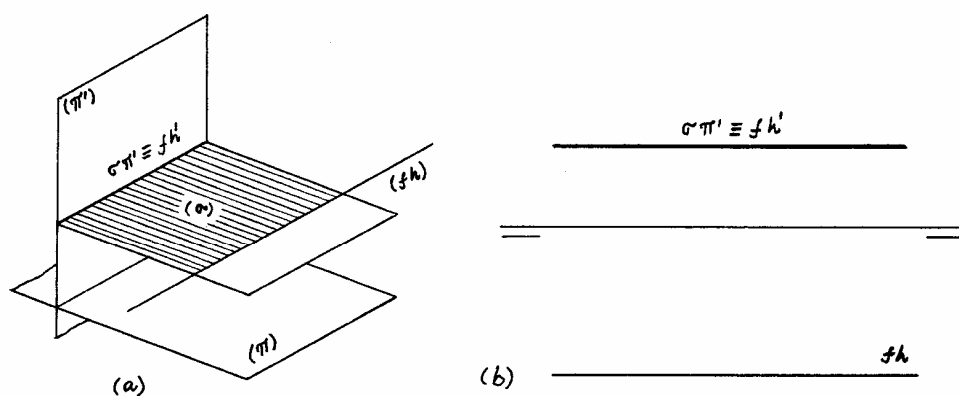


FIGURA 147. O plano projetante de uma reta fronto-horizontal em (π') é horizontal.

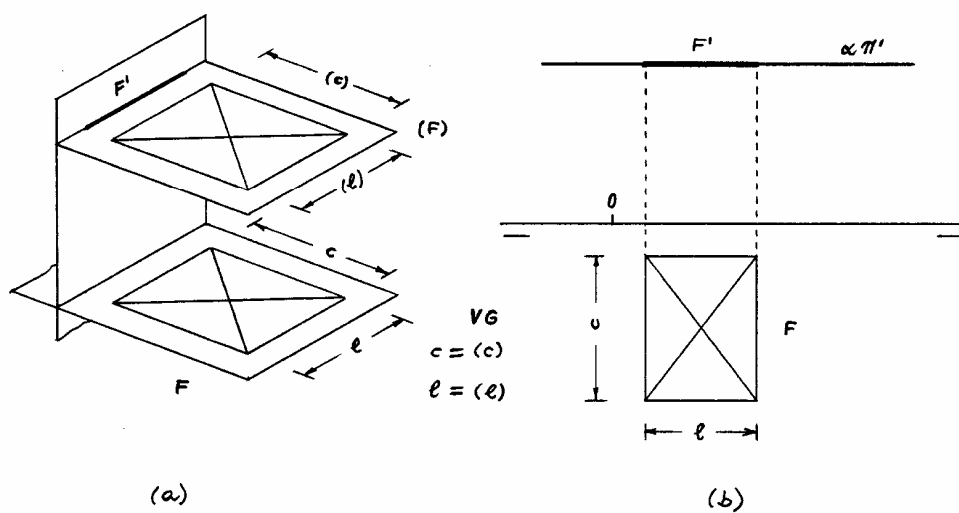


FIGURA 148. Toda figura (objeto) contida em um plano horizontal ou de nível tem projeção horizontal em verdadeira grandeza (VG).

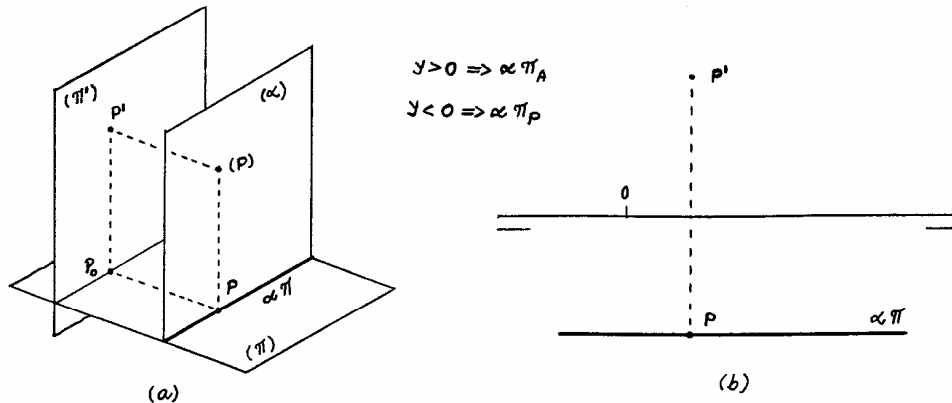


FIGURA 149. Plano frontal ou de frente.

b.2. *Atravessa os 1º e 4º diedros ($\alpha\pi_A$) ou os 2º e 3º diedros ($\alpha\pi_P$) (Figura 149).*

b.3. *Cada plano frontal ou de frente é o lugar geométrico dos pontos que têm um mesmo afastamento (Figura 149). Dar o afastamento de um ponto equivale a situá-lo num plano frontal ou de frente, e reciprocamente. O plano vertical de projeção (π') é um plano frontal de afastamento nulo.*

b.4. *Todo ponto (P) contido num plano frontal ou de frente tem sua projeção horizontal P situada no traço do plano ($\alpha\pi$), sendo este o lugar geométrico das projeções horizontais dos pontos do plano (Figura 149).*

b.5. *Qualquer ponto de um plano frontal ou de frente determina-o (Figura 149). Constrói-se o plano frontal ou de frente, determinado por um ponto (P), traçando-se pela projeção horizontal P a paralela $\alpha\pi$ à linha de terra (Figura 149-b).*

b.6. *Retas contidas em um plano frontal ou de frente (Figura 150): Frontal (f), fronto-horizontal (fh) e vertical (v). Qualquer uma destas retas **contidas** em um plano frontal determina-o.*

b.7. *Plano projetante:*

- a. De uma frontal no plano horizontal de projeção (π) (Figura 151): (p) é frontal.
- b. De uma frontal no plano vertical de projeção (π') (Figura 151): (σ) é de topo.
- c. De uma fronto-horizontal no plano horizontal de projeção (π) (Figura 152): (p) é frontal.

d. De uma fronto-horizontal no plano vertical de projeção (π') (Figura 152): (σ) é horizontal.

b.8. *TODA FIGURA CONTIDA EM UM PLANO FRONTAL OU DE FRENTE TEM PROJEÇÃO VERTICAL EM VERDADEIRA GRANDEZA (Figura 153). Uma vez que todos elementos lineares da figura são frontais e todos ângulos da*

mesma têm seus lados paralelos às respectivas projeções verticais. Isto é válido para figuras mistilíneas e curvilíneas, e, em particular, para o círculo.

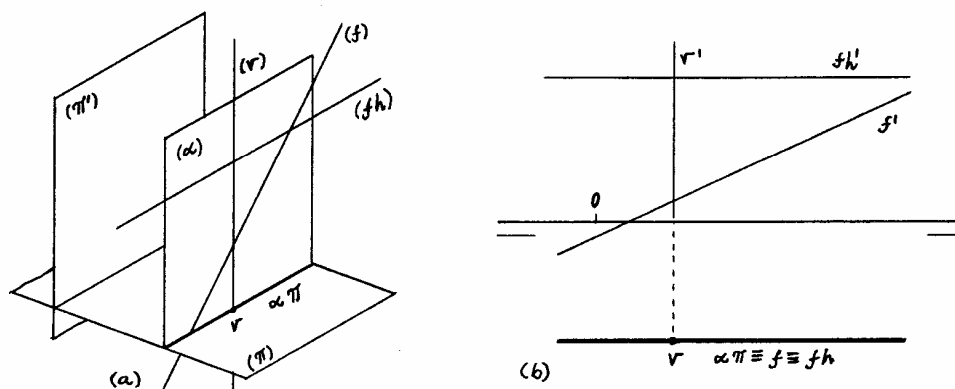


FIGURA 150. Retas contidas em um plano frontal.

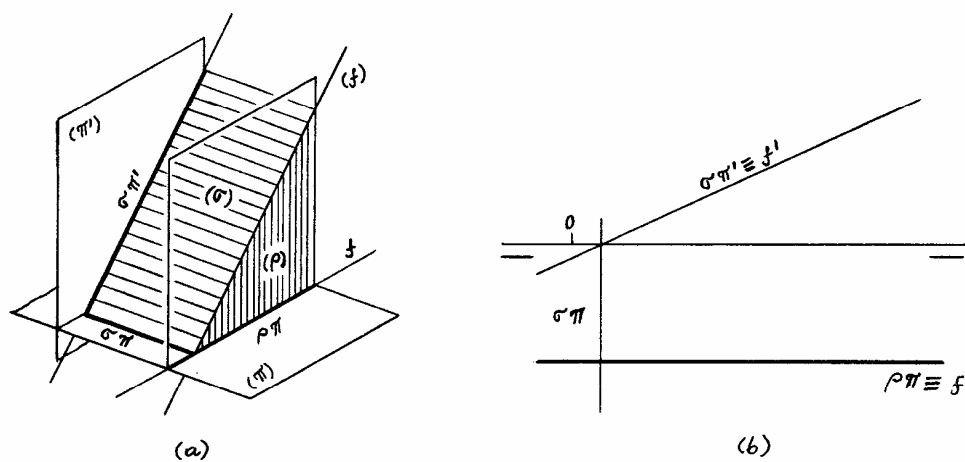


FIGURA 151. Planos projetantes de uma reta frontal; (ρ) é frontal e (σ) é de topo.

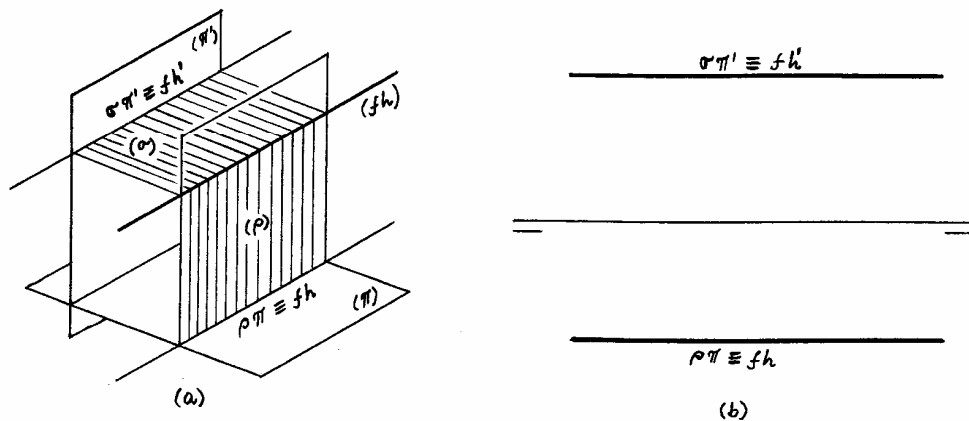


FIGURA 152. Planos projetantes de uma reta fronto-horizontal; (ρ) é frontal e (σ) é horizontal.

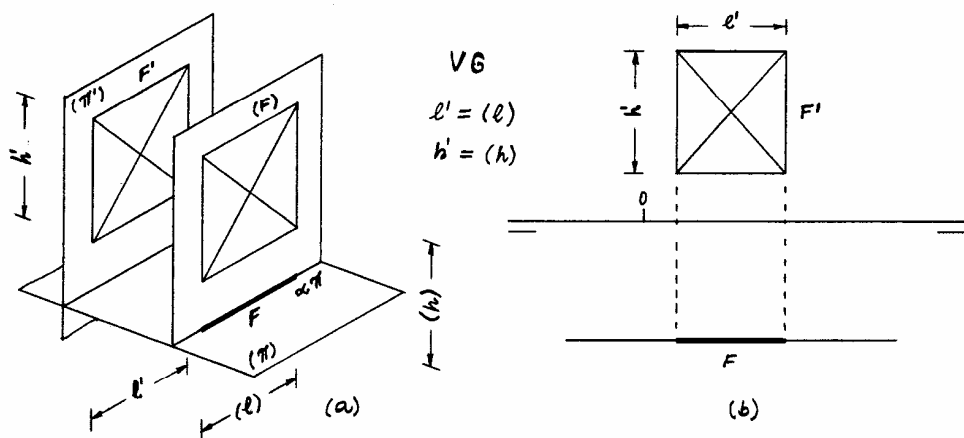


FIGURA 153. Toda figura (objeto) contida em um plano frontal ou de frente tem projeção vertical em verdadeira grandeza (VG).

8.7. Plano paralelo à linha de terra.

a. Definição: É aquele que é paralelo à linha de terra e oblíquo aos planos de projeção (Figura 154).

b. Características: Sendo o plano paralelo à linha de terra e oblíquo aos planos de projeção, todo plano paralelo à linha de terra:

b.1. Tem *traço vertical* $\gamma\pi'$ e *traço horizontal* $\gamma\pi$ paralelos à linha de terra (Figura 154).

b.2. Atravessa três diedros consecutivos (Figura 154).

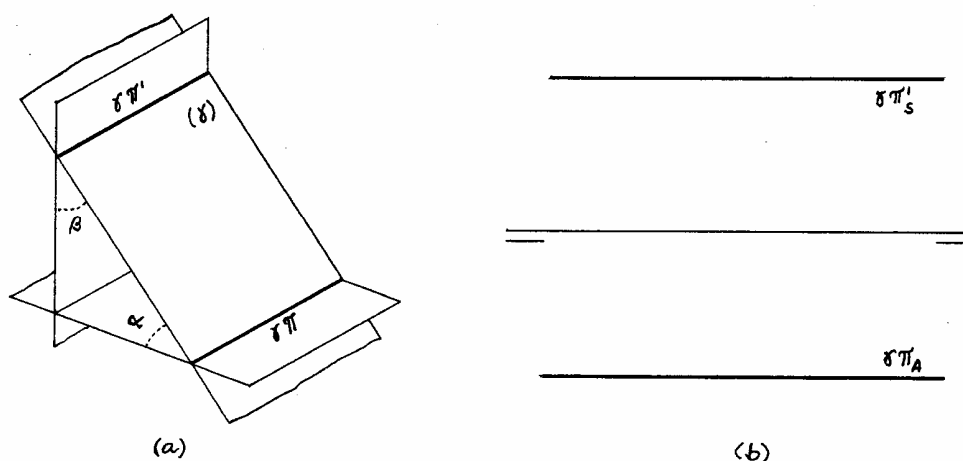


FIGURA 154. Plano paralelo à linha de terra, $\pi'\pi$.

b.3. Retas contidas em um plano paralelo à linha de terra (Figura 155): Qualquer (q), fronto-horizontal (fh) e de perfil (p). Apenas a fronto-horizontal isoladamente não determina o plano paralelo à linha de terra em que ela esteja contida.

b.4. Qualquer reta de um plano paralelo à linha de terra determina-o, excetuando-se a fronto-horizontal (Figura 155-b):

O plano paralelo à linha de terra é determinado pela reta qualquer (ou pela reta de perfil), nele contida, e a linha de terra. Para obter os traços do plano, determinam-se os traços horizontal ($(H_q) \equiv H_q$ ou $(H_p) \equiv H_p$) e vertical ($(V_q) \equiv V'_q$ ou $(V_p) \equiv V'_p$) da reta; os respectivos traços do plano serão coincidentes com os traços da reta e paralelos à linha de terra (Figura 155-b).

Se os traços da reta forem inacessíveis, constrói-se uma fronto-horizontal (s), por um ponto (O) qualquer de (r); nela apoia-se uma outra reta qualquer de traços acessíveis.

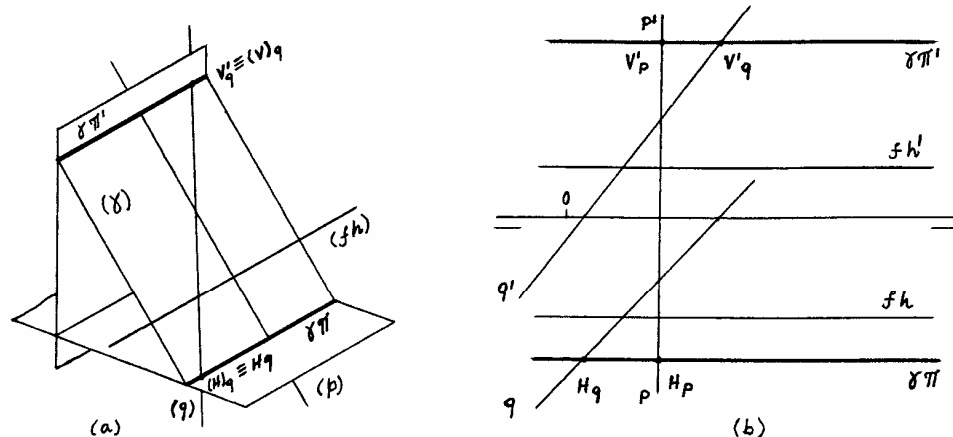


FIGURA 155. Retas contidas em um plano paralelo à linha de terra $\pi'\pi$; apenas a fronto-horizontal não determina o plano.

b.5. O traço lateral $\gamma\pi$ é uma reta de perfil, que forma ângulos complementares com $\pi'\pi$ e $\pi''\pi'$ (Figura 156).

8.8. Plano que passa pela linha de terra.

a. Definição: É aquele que passa pela linha de terra (Figura 157). Pode ser considerado como caso-limite de um plano paralelo à linha de terra.

b. Características: Todo plano que passa pela linha de terra:

b.1. Tem traço vertical $\gamma\pi'$ e traço horizontal $\gamma\pi$ coincidentes com a linha de terra ($\gamma\pi' \equiv \gamma\pi \equiv \pi'\pi$) (Figura 157).

b.2. Atravessa dois diedros opostos (Figura 157): 1° e 3° ou 2° e 4° diedros.

b.3. O plano que passa pela linha de terra *somente fica determinado* quando, além dos traços coincidentes com a linha de terra, se conhece um ponto deste plano. Na Figura 157-b, o plano passa pelos 1° e 3° diedros, uma vez que (M) é um ponto do plano que está no 1° diedro.

b.4. Retas contidas em um plano que passa pela linha de terra (Figura 158):

Qualquer (q), fronto-horizontal (fh) e de perfil (p). Nos casos da *reta qualquer e a de perfil*, elas passam pela linha de terra e suas projeções ortogonais se interceptam na linha de terra (Figura 158-b).

Apenas a reta de perfil isoladamente não determina ou caracteriza o plano que passa pela linha de terra em que ela está contida; **a não ser que a reta esteja caracterizada por dois de seus pontos** ou se conhece pelo menos um de seus pontos, que não esteja na linha de terra.

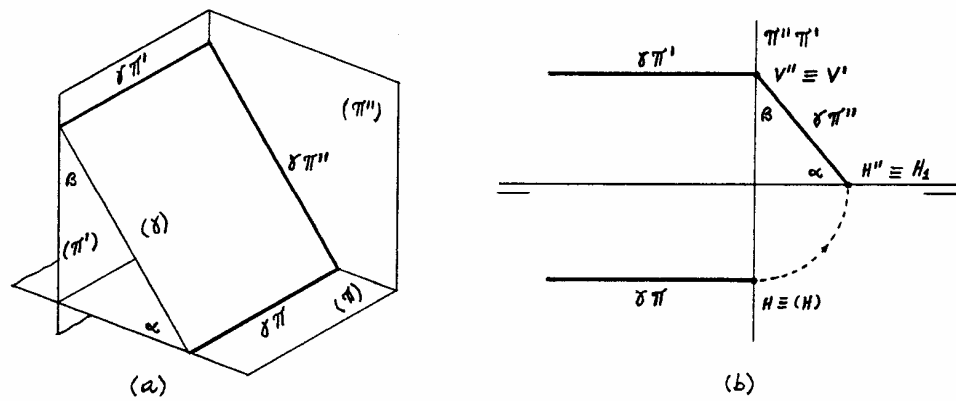


FIGURA 156. Traço lateral de um plano paralelo à linha de terra, $\pi'\pi$.

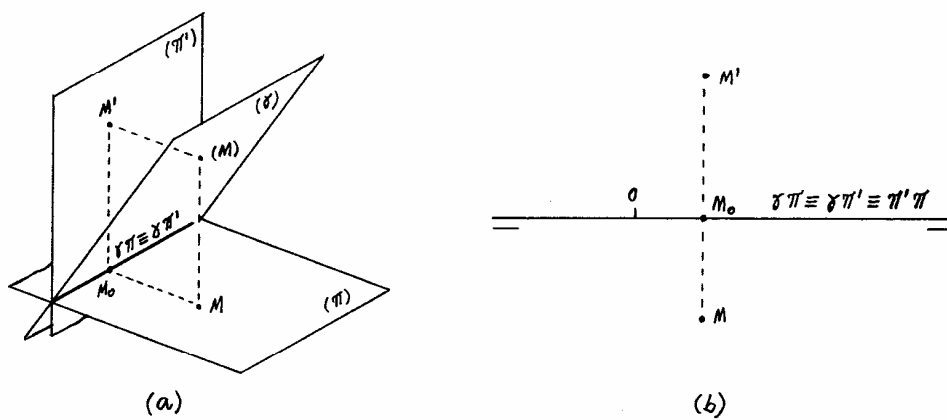


FIGURA 157. Plano que passa pela linha de terra, $\pi'\pi$.

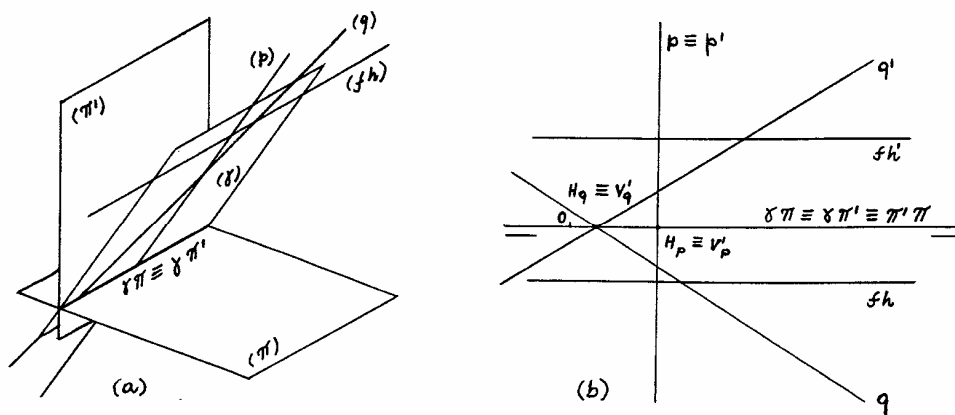
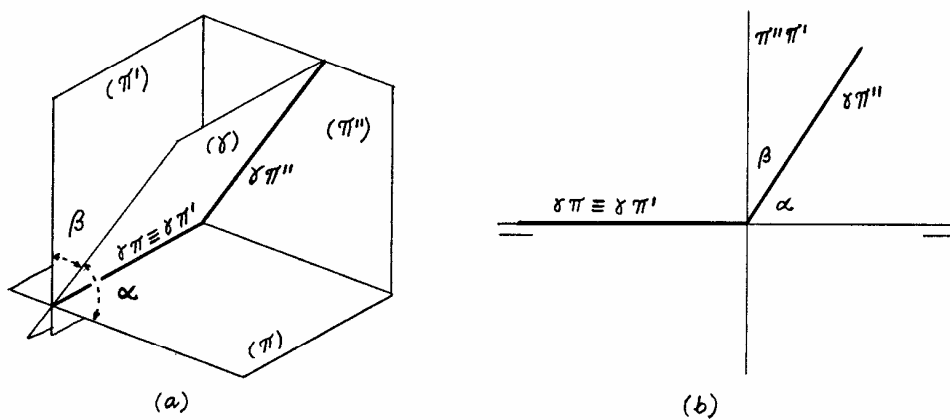


FIGURA 158. Retas contidas em um plano que passa pela linha de terra.

b.5. O *traço lateral* $\gamma\pi''$ é uma reta de perfil, que forma ângulos complementares com $\pi'\pi$ e $\pi''\pi'$ (Figura 159).



8.9. EXERCÍCIOS

Planos particulares.

Objetivos: Representar e identificar os planos particulares: Vertical, de topo, de perfil, horizontal e frontal.

Conhecimentos necessários: Representação e identificação de uma reta. Traços de um plano. Pertinência de reta e plano. Plano projetante de uma reta.

Fonte: PINHEIRO, V. A. *Noções de Geometria Descritiva*; ponto, reta e plano. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970. Vol. I. p. 138-140.

1. Construir os traços dos planos projetantes das retas (A) (B), (C) (D), (E) (F), (G) (J), (L) (M) e (N) (Q).

OBSERVAÇÕES: 1. Construir uma épura para cada item. 2. Para melhor compreensão, tentar esboçar a situação espacial ou observar as Figuras que mostram os planos projetantes de cada reta. 3. *Plano projetante* de uma reta em um plano de projeção é aquele determinado pela reta e a sua projeção no plano de projeção considerado; de maneira geral, uma reta que não seja ortogonal a um dos planos de projeção apresenta dois planos projetantes, um perpendicular ao (π) , (ρ) , e outro ao (π') , (σ) . 4. O traço de um plano projetante de uma reta coincide com a projeção desta reta no plano de projeção, apresentando o mesmo nome.

- a. (A) [2; 2; 1] e (B) [6; 0; 4].

SUGESTÃO: Representa-se (A) (B), que é uma reta qualquer. Determinam-se os traços horizontal e vertical da reta. Uma reta qualquer admite dois planos projetantes, um perpendicular ao (π) , (ρ) , e outro ao (π') , (σ) . O traço horizontal do plano projetante da reta no (π) contém a projeção horizontal da reta; assim $AB \equiv \rho\pi$ e é oblíquo à linha de terra. **Quando o traço horizontal do plano coincide com a projeção horizontal da reta que ele contém e é oblíquo a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado por este traço, sendo um PLANO VERTICAL**, apresentando, portanto, traço vertical, $\rho\pi'$, perpendicular à linha de terra. Pela interseção entre $AB \equiv \rho\pi$ e $\pi'\pi$, V, traça-se perpendicular a $\pi'\pi$, de modo a passar por V', determinando-se $\rho\pi'$. O traço vertical do plano projetante da reta no (π') contém a projeção vertical da reta; assim $A'B' \equiv \sigma\pi'$ e é oblíquo a $\pi'\pi$. **Quando o traço vertical do plano coincide com a projeção vertical da reta que ele contém e é oblíquo a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado por este traço, sendo um PLANO DE TOPO**, apresentando, portanto, traço horizontal, $\sigma\pi$, perpendicular à linha de terra. Pela interseção entre $A'B' \equiv \sigma\pi'$ e $\pi'\pi$, H', traça-se perpendicular a $\pi'\pi$, de modo a passar por H, determinando-se $\sigma\pi$.

- b. (C) [2; 4; 2] e (D) [6; 2; 2].

SUGESTÃO: Representa-se (C) (D), que é uma reta horizontal. Determina-se o traço vertical da reta. Uma reta horizontal admite dois planos projetantes, um perpendicular ao (π) , (ρ) , e outro ao (π') , (σ) . O traço horizontal do plano projetante da reta no (π) contém a projeção horizontal da reta; assim $CD \equiv \rho\pi$ e é oblíquo à linha de terra. **Quando o traço horizontal do plano coincide com a projeção horizontal da reta que ele contém e é oblíquo a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado por este traço, sendo um PLANO VERTICAL**, apresentando, portanto, traço vertical, $\rho\pi'$, perpendicular à linha de terra. Pela interseção entre $CD \equiv \rho\pi$ e $\pi'\pi$, V, traça-se perpendicular a $\pi'\pi$, de modo a passar por V', determinando-se $\rho\pi'$. O traço vertical do plano projetante da reta no (π') contém a projeção vertical da reta; assim $C'D' \equiv \sigma\pi'$ e é paralelo a $\pi'\pi$. **Quando o traço vertical do plano coincide com a projeção vertical da reta que ele contém e é paralelo a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado por este traço, sendo um PLANO HORIZONTAL OU DE NÍVEL**, apresentando, portanto, traço vertical único, $\sigma\pi' \equiv C'D'$.

c. (E) [2; -1; 4] e (F) [6; -1; -2].

SUGESTÃO: Representa-se (E) (F), que é uma reta frontal. Determina-se o traço horizontal da reta. Uma reta frontal admite dois planos projetantes, um perpendicular ao (π) , (ρ) , e outro ao (π') , (σ) . O traço horizontal do plano projetante da reta no (π) contém a projeção horizontal da reta; assim $EF \equiv \rho\pi$ e é paralelo à linha de terra. **Quando o traço horizontal do plano coincide com a projeção horizontal da reta que ele contém e é paralelo a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado por este traço, sendo um PLANO FRONTAL**, apresentando, portanto, traço horizontal único, $\rho\pi \equiv EF$. O traço vertical do plano projetante da reta no (π') contém a projeção vertical da reta; assim $E'F' \equiv \sigma\pi'$ e é oblíquo a $\pi'\pi$. **Quando o traço vertical do plano coincide com a projeção vertical da reta que ele contém e é oblíquo a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado por este traço, sendo um PLANO DE TOPO**, apresentando, portanto, traço horizontal $\sigma\pi$ perpendicular à linha de terra. Pela interseção entre $\sigma\pi' \equiv E'F'$, H', traça-se perpendicular a $\pi'\pi$, passando por H, determinando-se $\sigma\pi$.

d. (G) [2; 1; 3] e (J) [6; 1; 3].

SUGESTÃO: Representa-se (G) (J), que é uma reta fronto-horizontal. De modo geral, uma reta fronto-horizontal admite dois planos projetantes, um perpendicular ao (π) , (ρ) , e outro ao (π') , (σ) . O traço horizontal do plano projetante da reta no (π) contém a projeção horizontal da reta; assim $GJ \equiv \rho\pi$ e é paralelo à linha de terra. **Quando o traço horizontal do plano coincide com a projeção horizontal da reta que ele contém e é paralelo a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado por este traço, sendo um PLANO FRONTAL**, apresentando, portanto, traço horizontal único, $\rho\pi \equiv GJ$. O traço vertical do plano projetante da reta no (π') contém a projeção vertical da reta; assim $G'J' \equiv \sigma\pi'$ e é paralelo a $\pi'\pi$. **Quando o traço vertical do plano coincide com a projeção vertical da reta que ele contém e é paralelo a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado por este traço, sendo um PLANO HORIZONTAL OU DE NÍVEL**, apresentando, portanto, traço vertical único, $\sigma\pi' \equiv G'J'$.

e. (L) [4; 5; 1] e (M) [4; 2; 7].

SUGESTÃO: Representa-se (L) (M), que é uma reta de perfil. Uma reta de perfil admite um único plano projetante (γ) , que é, ao mesmo tempo, perpendicular ao (π) e ao (π') . O traço horizontal do plano projetante da reta no (π) contém a projeção horizontal da reta; assim $LM \equiv \gamma\pi$ e é perpendicular à linha de terra. O traço vertical do plano projetante da reta no (π') contém a

projeção vertical da reta; assim $L'M' \equiv \gamma\pi'$ e é perpendicular a $\pi'\pi$. **Quando os traços horizontal e vertical são perpendiculares a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado, sendo um PLANO DE PERFIL** (Os traços horizontal e vertical são coincidentes e perpendiculares à linha de terra).

f. (N) [2; 3; -3] e (Q) [6; 1; -1].

SUGESTÃO: Representa-se (N) (Q), que é uma reta que está no (β_P) , já que o afastamento de qualquer ponto da reta é simétrico à sua cota. Todos os traços da reta são coincidentes com $\pi'\pi$. A reta passa pelo 4º e 2º diedros. Esta reta contida no (β_P) admite dois planos projetantes, um perpendicular ao (π) , (ρ) , e outro ao (π') , (σ) . O traço horizontal do plano projetante da reta no (π) contém a projeção horizontal da reta; assim $NQ \equiv \rho\pi$ e é oblíquo à linha de terra. **Quando o traço horizontal do plano coincide com a projeção horizontal da reta que ele contém e é oblíquo a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado por este traço, sendo um PLANO VERTICAL**, apresentando, portanto, traço vertical, $\rho\pi'$, perpendicular à linha de terra. Pela interseção entre $NQ \equiv \rho\pi$ e $\pi'\pi$, baixa-se perpendicular a $\pi'\pi$, uma vez que a porção útil da reta (N) (Q) está no 4º diedro, determinando-se $\rho\pi'$ ($\rho\pi'_1$). O traço vertical do plano projetante da reta no (π') contém a projeção vertical da reta; assim $N'Q' \equiv \sigma\pi'$ e é oblíquo a $\pi'\pi$. **Quando o traço vertical do plano coincide com a projeção vertical da reta que ele contém e é oblíquo a $\pi'\pi$, este plano fica individualizado por este traço, sendo um PLANO DE TOPO**, apresentando, portanto, traço horizontal, $\sigma\pi$, perpendicular à linha de terra. Pela interseção entre $N'Q' \equiv \sigma\pi'$ e $\pi'\pi$, baixa-se perpendicular a $\pi'\pi$, uma vez que a porção útil da reta (N) (Q) está no 4º diedro, determinando-se $\sigma\pi$ ($\sigma\pi_A$). Assim, obtêm-se $\rho\pi \equiv \sigma\pi'$ e $\rho\pi' \equiv \sigma\pi$.

2. Determinar os traços dos planos definidos pelas retas (r) e (s), nos seguintes casos:

- a. (r) {(A) [2; 5; 1] e (B) [4; 3; 4]}. (s) {(B) e (C) [5; 2; 2]}.
- b. (r) {(M) [2; -1; -2] e (N) [4; 2; 0]}. (s) {(N) e (P) [4; 2; 4]}.
- c. (r) {(C) [2; -1; 4] e (D) [5; -3; -2]}. (s) {(E) [2; 0; 4] e (F) [5; -2; ?]}.
- d. (r) {(A) [2; -1; 2] e (B) [6; -1; 2]}. (s) {(C) [5; 2; 2] e (D) [5; -1; ?]}.
- e. (r) {(M) [2; 2; 0] e (N) [2; 2; 5]}. (s) {(P) [4; 1; -2] e (Q) [4; 1; 5]}.
- f. (r) {(E) [4; 2; 3] e (F) [4; 4; 0]}. (s) {(E) e (G) [4; 4; 1]}.

3. No plano de topo (γ) construir pelo ponto (A) [4; 2; 1], a reta de topo (t) e a frontal (f) do plano, sabendo-se que $\gamma\pi' = +30^\circ$.

4. Dá-se um plano vertical (α) e pede-se construir por (A) a reta vertical (v) e por (B) a horizontal (h) do plano. $\alpha\pi = -45^\circ$, (A) [4; 2; 4] e (B) [7; ?; 3].

5. Dar as projeções do triângulo (A) (B) (C) contido no plano de topo (γ), sabendo-se que (A) [3; 2; 1], (B) [7; 0; 3] e (C) [7; 6; 2].

9. ESCALAS NUMÉRICA E GRÁFICA.

9.1. Introdução:

1. Objetivos:

- Representar o desenho de um objeto em escala.
- Obter a escala adequada a um desenho.
- Fazer leitura das dimensões reais de um objeto em um desenho.
- Construir escalas gráficas simples.

2. *Localização na folha para desenho* (NBR 8196 - ABNT, 1992): Quando for necessário o uso de mais de uma escala na folha para desenho, estas devem estar indicadas junto à identificação do detalhe ou vista a que se referem, e, na legenda deve constar a palavra “indicada”. No caso de uso de apenas uma escala, esta deve estar indicada na legenda da folha para desenho, localizada no canto inferior direito da folha.

9.2. Escala numérica ou métrica.

Conceito (Figura 160): Relaciona cada medida linear do desenho (d) e a sua respectiva medida real no objeto (R). Medida linear, de modo geral, é um comprimento, podendo ser largura, altura, profundidade, espessura, diâmetro, raio, etc..

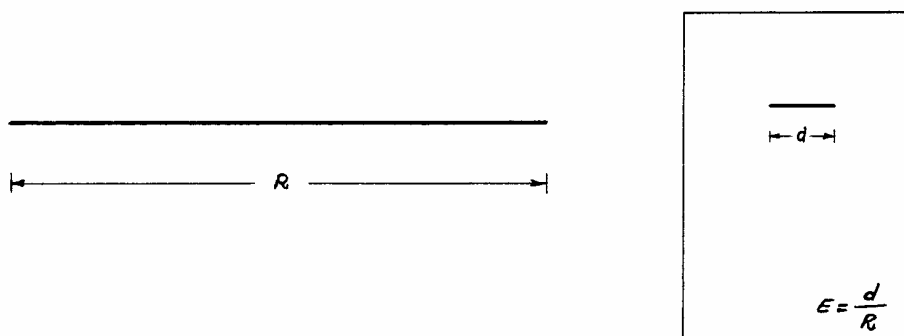


FIGURA 160. Escala numérica ou métrica.

9.3. Escalas de redução, de ampliação e natural:

As escalas numéricas aparecem sempre na forma da razão $x : y$, segundo a ordem: **dimensão linear do desenho (d) : dimensão linear respectiva do objeto (R)**. A dimensão menor é sempre reduzida à unidade (1), tomando a escala numérica sempre a forma $1:X$, sendo $X = y/x$, ou $X:1$, sendo $X = x/y$ (lê-se 1 por X ou 1 para X , e X por 1 ou X para 1).

A escala expressa na forma $1:X$ é denominada **escala de redução**, porque a dimensão linear no desenho é X vezes menor que a real do objeto ($d = R / X \Rightarrow$ o objeto ou elemento é representado menor que sua verdadeira grandeza).

A escala expressa na forma X:1 é denominada **escala de ampliação**, uma vez que a dimensão linear no desenho é X vezes maior que a real do objeto ($d = R \cdot X \Rightarrow$ o objeto ou elemento é representado maior que sua verdadeira grandeza).

OBSERVAÇÃO: *Os valores de X são determinados em função do tamanho do desenho que se quer fazer, que é função da clareza que se quer obter, e do tamanho real do objeto, sendo normalmente números inteiros e fáceis de serem trabalhados.*

A escala expressa na forma 1:1 é denominada **escala natural**, sendo a dimensão linear do desenho igual à real do objeto ($d = R \Rightarrow$ o objeto ou elemento é representado em sua verdadeira grandeza).

A designação completa de uma escala deve consistir na palavra “escala”, seguida da indicação da relação: **a.** 1:1, para escala natural; **b.** X:1, para escala de ampliação; **c.** 1:X, para escala de redução. A palavra escala pode ser abreviada na forma “esc” (NBR 8196 – ABNT, 1992).

9.4. Escalas recomendadas pela ABNT (NBR 8196 – ABNT, 1992):

a. Escalas de redução: 1:X, sendo X = 2; 5; 10 ou múltiplos de 10 (X = 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200; 500; 1000; 2000; 5000; 10000, etc.).

b. Escalas de ampliação: X:1, sendo X = 2; 5; 10 ou múltiplos de 10 (X = 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200; 500; 1000; 2000; 5000; 10000, etc.).

9.5. Escalas mais utilizadas no desenho arquitetônico (Quadro 1):

QUADRO 1. Escalas mais utilizadas no desenho arquitetônico (SOUZA).

ESCALA	EMPREGO
1:10	Desenho de detalhes
1:20	Desenho de detalhes
1:25	Desenho de detalhes
1:50	Plantas, cortes e elevações ou fachadas
1:100	Plantas, cortes, elevações ou fachadas e planta de cobertura
1:200	Planta de cobertura
1:500	Planta de situação
1:1000	Planta de situação

9.6. *Escalas mais utilizadas no desenho topográfico:* 1:1000, 1:2000, 1:3000, 1:5000 (Prof. Francisco Praxedes de Aquino).

9.7. *Definição da escala numérica de redução (Figura 160): É a razão entre a dimensão linear a ser representada no desenho (d) e a respectiva dimensão real do objeto (R), sendo:*

$$E = (d / R) = (1 / M).$$

A escala de redução é normalmente expressa na forma **1:M**, sendo **M** (= X), um **número inteiro**, denominado de **módulo da escala** e expresso na mesma unidade de medida correspondente à da unidade (1). Assim, na escala 1:50, o módulo da escala é 50, podendo ser 1 cm : 50 cm, 1 m : 50 m, 1 km : 50 km, etc..

A escala a ser escolhida para um desenho depende da complexidade do objeto ou elemento a ser representado e da finalidade da representação. Em todos os casos, a escala selecionada deve ser suficientemente grande para permitir uma interpretação fácil e clara da informação representada. A escala e o tamanho do objeto ou elemento em questão definem o formato da folha de papel para desenho (NBR 8196 – ABNT, 1992). Quando o formato ou as dimensões da folha de papel já estão definidas, a escala máxima a ser utilizada é determinada em função destas dimensões.

OBSERVAÇÕES:

1. Como a escala é uma fração, quanto maior o seu módulo menor é a escala.
2. Com escala pequena obtêm-se desenhos pequenos, com escalas grandes obtêm-se desenhos grandes.

Exemplos de obtenção da escala de um desenho:

1. O comprimento de um canal de irrigação é 100 m (R) e no desenho esta medida deverá ser representada por 40 cm (d) (Figura 161). Qual deve ser a escala do desenho?

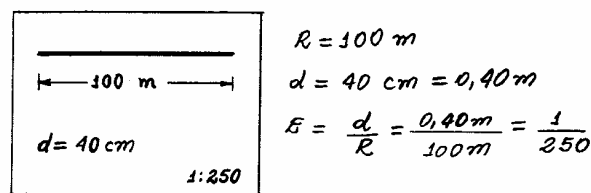


FIGURA 161. Obtenção da escala numérica - exemplo 1.

$$E = d / R, \quad E = 40 \text{ cm} / 100 \text{ m} = 0,40 \text{ m} / 100 \text{ m} = (0,40 \text{ m} / 0,40 \text{ m}) / (100 \text{ m} / 0,40 \text{ m}) = 1 / 250.$$

CONCLUSÃO: A escala é 1:250 (sendo o módulo da escala igual a 250).

2. Deseja-se desenhar um objeto de 20 m de comprimento. O desenho deve ter no mínimo 16 cm, para sua clareza, e no máximo 25 cm, limitado pelo papel (Figura 162). Qual a escala a ser utilizada?

- a. Para se ter o desenho em seu comprimento mínimo (Figura 162-a):

$$E = d / R, \quad E = 16 \text{ cm} / 20 \text{ m} = 0,16 \text{ m} / 20 \text{ m} = (0,16 \text{ m} / 0,16 \text{ m}) / (20 \text{ m} / 0,16 \text{ m}) = 1 / 125. \text{ A escala é } 1:125.$$

- b. Para se ter o desenho em seu comprimento máximo (Figura 162-b):

$$E = d / R, \quad E = 25 \text{ cm} / 20 \text{ m} = 0,25 \text{ m} / 20 \text{ m} = (0,25 \text{ m} / 0,25 \text{ m}) / (20 \text{ m} / 0,25 \text{ m}) = 1/80. \text{ A escala é } 1:80.$$

CONCLUSÃO: A escala a ser utilizada está entre 1:125 (menor escala) e 1:80 (maior escala). Por facilidade para trabalhar, deve-se utilizar a escala 1:100. Neste caso, o comprimento do desenho será 20 cm - $d = E \times R = (1/100) \times 20 \text{ m} = 0,20 \text{ m} = 20 \text{ cm}$ (Figura 162-c).

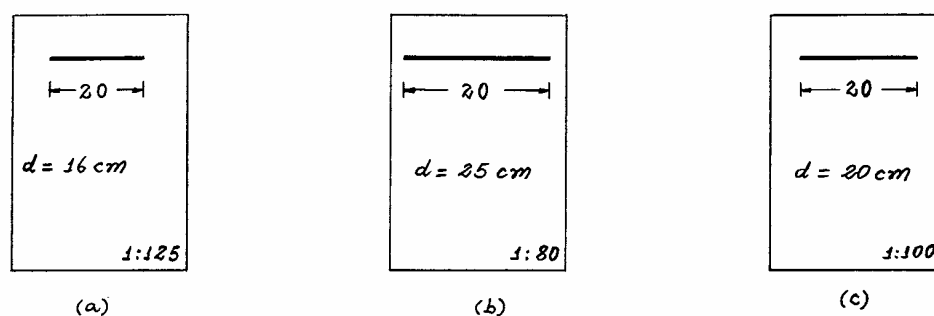


FIGURA 162. Obtenção da escala numérica - exemplo 2 ($R = 20 \text{ m}$).

3. Num lote de $15,0 \text{ m} \times 30,0 \text{ m}$ (largura x comprimento) deseja-se construir um muro. Se se dispõe de um papel cuja parte útil seja de $18,2 \text{ cm} \times 27,0 \text{ cm}$ (Figura 163-a), qual deve ser a escala utilizada para desenhar o muro?

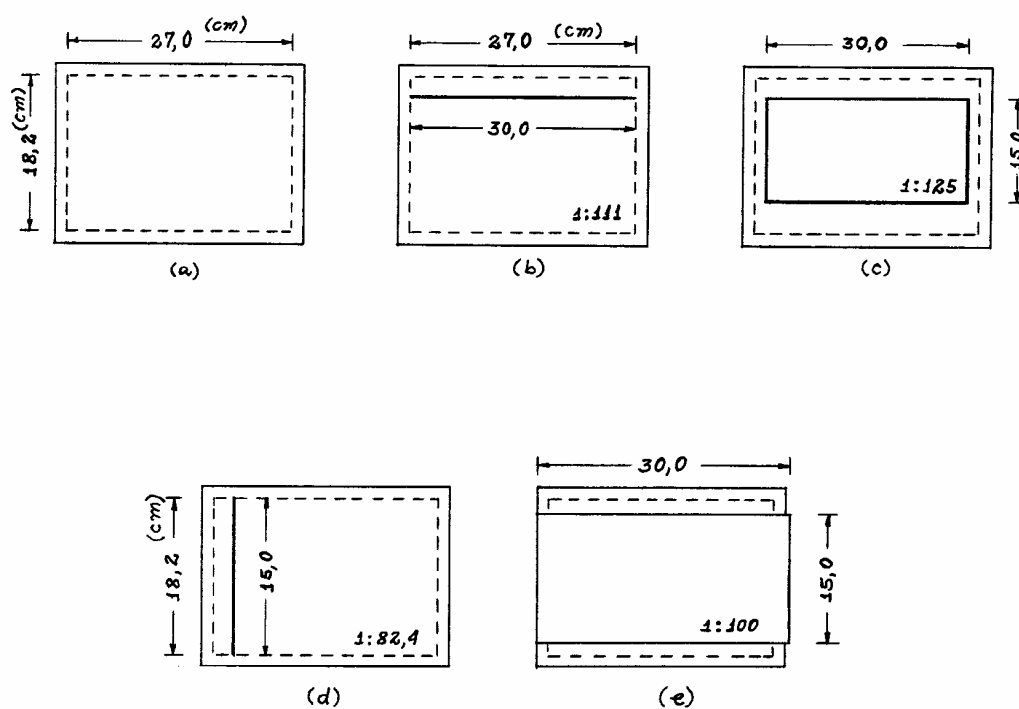


FIGURA 163. Obtenção da escala numérica - exemplo 3.

a. *Primeira possibilidade* (Figura 163-b): O comprimento máximo do desenho que representa os 30,0 m (R_1) do muro deve ser no máximo 27,0 cm (d_1), resultando numa escala:

$$E_1 = d_1 / R_1, \quad E_1 = 27,0 \text{ cm} / 30,0 \text{ m} = 0,270 \text{ m} / 30,0 \text{ m} = (0,270 \text{ m} / 0,270 \text{ m}) / (30,0 \text{ m} / 0,270 \text{ m}) = 1/111.$$

A escala a ser utilizada é a mais adequada e ligeiramente menor que a calculada, isto é: 1:125 (Figura 163-c). Se esta escala for utilizada, os 15,0 m de muro serão representados por: $d = E \times R_1$, $d = (1/125) \times 15,0 \text{ m} = 0,120 \text{ m} = 12,0 \text{ cm} < 18,2 \text{ cm}$; os 30,0 m serão representados por: $d = E \times R_1 = (1/125) \times 30,0 \text{ m} = 0,240 \text{ m} = 24,0 \text{ cm} < 27,0 \text{ cm}$, o que possibilita a utilização do papel.

b. *Segunda possibilidade* (Figura 163-d): A largura máxima do desenho que representa os 15,0 m (R_2) de muro deve ser no máximo 18,2 cm (d_2), resultando numa escala:

$$E_2 = d_2 / R_2, \quad E_2 = 18,2 \text{ cm} / 15,0 \text{ m} = 0,182 \text{ m} / 15,0 \text{ m} = (0,182 \text{ m} / 0,182 \text{ m}) / (15,0 \text{ m} / 0,182 \text{ m}) = 1/82,4.$$

A escala a ser utilizada é a mais adequada e ligeiramente menor que a calculada, isto é: 1:100. Se esta escala for utilizada os 15,0 m de muro serão representados por: $d = E \times R_2$, $d = (1/100) \times 15,0 \text{ m} = 0,150 \text{ m} = 15,0 \text{ cm} < 18,2 \text{ cm}$; os 30,0 m serão representados por: $d = E \times R_2 = (1/100) \times 30,0 \text{ m} = 0,300 \text{ m} = 30,0 \text{ cm} > 27,0 \text{ cm}$, o que impossibilita a utilização do papel (Figura 163-e). Conseqüentemente, esta escala 1:100 não pode ser utilizada.

c. **CONCLUSÃO:** A escala a ser utilizada é 1:125, já que o desenho do muro fica todo compreendido na parte útil do papel, a de um retângulo de 18,2 cm x 27,0 cm (Figura 163-c).

9.8. Escalas na forma decimal ou na de percentagem:

Em desenhos antigos pode-se encontrar a escala expressa na forma decimal. Por exemplo, a escala 0,05 (cinco centésimos), que representa em termos atuais a escala 1:20; ou seja: $E = 0,05 = 5 / 100 = 1 / 20$ (MONTENEGRO, 1995). Atualmente encontra-se a escala expressa na forma percentual ou de percentagem, principalmente na operação de máquinas fotocopadoras (“xerox”). $100\% = 100/100 = 1:1$ (escala natural); $80\% = 80/100 = 1/1,25 = 1:1,25$ (escala de redução); $120\% = 120/100 = 1,2 / 1 = 1,2:1$ (escala de ampliação).

9.9. Fator de escala (f):

a. Definição:

É a razão entre a dimensão linear a ser representada no desenho (d) e a respectiva dimensão real do objeto (R), expressas em unidades adequadas; $f = d/R$.

Usualmente d é expresso em centímetro (cm) e R em metro (m), resultando o fator de escala em cm/m, mas pode ser expresso em função de outras unidades de medida linear (cm/mm, cm/km, etc.).

Pelas definições de escala numérica e de fator de escala, tem-se:

$$f = E = (d / R) = 1 / M.$$

b. Obtenção do fator de escala:

$$f_{(\text{cm/m})} = d_{(\text{cm})} / R_{(\text{m})} \quad \text{ou} \quad f_{(\text{cm/m})} = 1 (\text{m}) / M (\text{m}) = 100 (\text{cm}) / M (\text{m}).$$

Exemplos: Obter os fatores de escala das escalas de redução 1:10, 1:20, etc..

$$1:10: (1/10) = 1/M = f, \quad f = (1 \text{ m} / 10 \text{ m}) = (100 \text{ cm} / 10 \text{ m}) = 10 \text{ cm/m}.$$

$$1:20: (1/20) = 1/M = f, \quad f = (1 \text{ m} / 20 \text{ m}) = (100 \text{ cm} / 20 \text{ m}) = 5 \text{ cm/m}.$$

$$1:50: (1/50) = 1/M = f, \quad f = (1 \text{ m} / 50 \text{ m}) = (100 \text{ cm} / 50 \text{ m}) = 2 \text{ cm/m}.$$

c. Utilização do fator de escala:

c.1. Conhece-se a medida do objeto (R) e deseja-se determinar a do desenho (d):

$$f = d / R \quad \therefore \quad d = f \times R.$$

Exemplos:

1. Obter o comprimento de um segmento de reta (d) que representará, na escala 1:100, um fio horizontal de 20 m de comprimento (R) (Figura 164-a).

$$1:100 \Rightarrow f = 1 \text{ cm/m}. \quad d = f \times R, \quad d = 1 \text{ cm/m} \times 20 \text{ m} = 20 \text{ cm}.$$

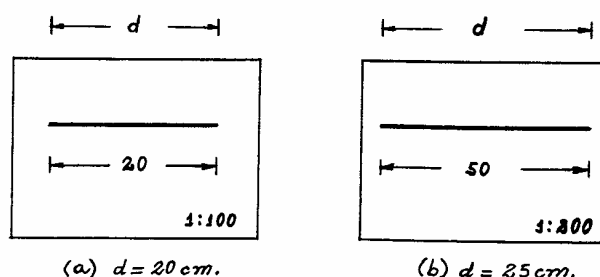


FIGURA 164. Utilização do fator de escala, $d = f \times R$ - exemplos 1 e 2.

2. O comprimento de uma linha principal de um sistema de irrigação por aspersão é 50 m (Figura 164-b); se ele deverá ser representado na escala 1:200, qual deverá ser o comprimento do desenho?

$$1:200 \Rightarrow f = 0,5 \text{ cm/m}. \quad d = f \times R, \quad d = 0,5 \text{ cm/m} \times 50 \text{ m} = 25 \text{ cm}.$$

c.2. Conhece-se a medida no desenho (d) e deseja-se determinar a do objeto (R):

$$f = d / R \quad \therefore \quad R = d / f.$$

Exemplos:

1. O comprimento do desenho de uma cerca, na escala 1:50, é 15 cm (Figura 165-a). Qual o comprimento real da cerca?

$$1:50 \Rightarrow f = 2 \text{ cm/m}. \quad R = d / f, \quad R = 15 \text{ cm} / 2 \text{ cm/m} = 7,5 \text{ m}.$$

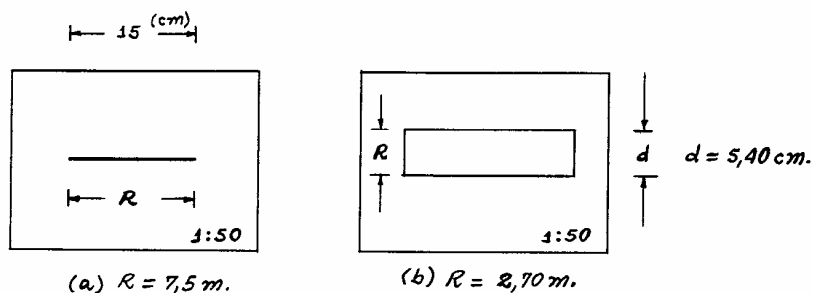


FIGURA 165. Utilização do fator de escala, $R = d / f$ - exemplos 1 e 2.

2. A altura de uma parede no desenho, na escala 1:50, é 5,40 cm (Figura 165-b). Qual é a altura que a parede deverá ter após a sua construção?

$$1:50 \Rightarrow f = 2 \text{ cm/m}. \quad R = d / f, \quad R = 5,40 \text{ cm} / 2 \text{ cm/m} = 2,70 \text{ m}.$$

9.10. *Uso do escalímetro:*

O escalímetro é um instrumento de desenho que apresenta os valores de comprimento real do objeto nas escalas mais comumente utilizadas. Encontra-se escalímetro nas escalas de 1:20, 1:25, 1:50, 1:75, 1:100 e 1:125, e nas escalas de 1:100, 1:200, 1:250, 1:300, 1:400 e 1:500.

O valor do comprimento real do objeto (R) é diretamente usado na escala do escalímetro correspondente à do desenho, resultando no comprimento que se deseja para o desenho do objeto ou vice-versa. Na Figura 166, o valor real do comprimento correspondente ao medido no desenho, feito na escala 1:100, é 5,00 m, uma vez que a escala do escalímetro utilizada é igual à do desenho (1:100).

O escalímetro representa uma grande facilidade para o desenhista ou o executor de um projeto; entretanto é contestado por muitos, tendo em vista a facilidade das

operações com escalas e o conseqüente esquecimento de seu conceito, devido à intensa utilização do escalímetro.

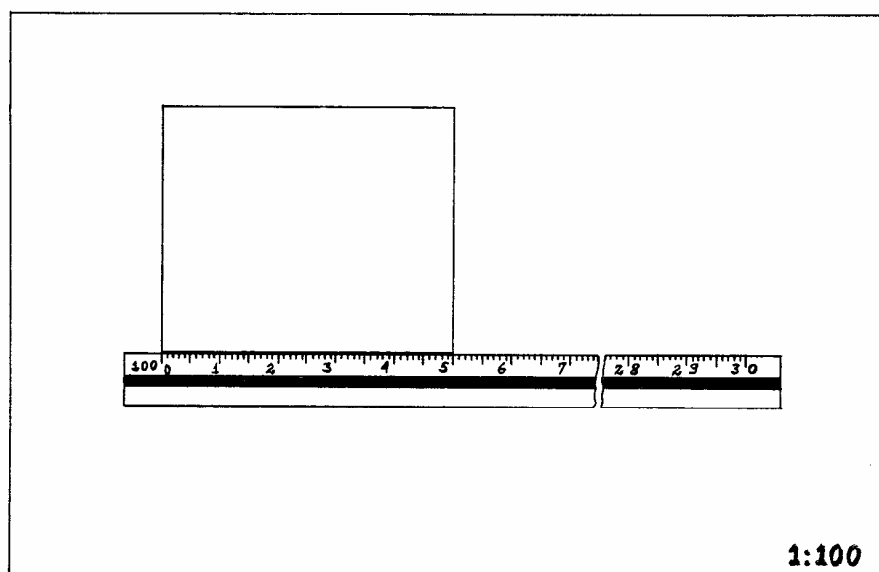


FIGURA 166. Uso do escalímetro - $R = 5,00 \text{ m}$.

9.11. A escala numérica e a área de uma superfície:

Considerando uma superfície simples, como a quadrada, pode-se obter as relações entre as áreas das superfícies desenhada (s) e a real do objeto (S) (Figura 167):

$$S = R \times R = R^2, s = d \times d = d^2. f = E = d / R. (d/R) \times (d/R) = d^2 / R^2 = (d/R)^2 = f^2 = E^2. d^2 = s \text{ e } R^2 = S, d^2 / R^2 = s / S = f^2 = E^2. \text{ Assim:} \\ s = f^2 \times S \text{ e } S = s / f^2 \text{ ou } s = E^2 \times S \text{ e } S = s / E^2.$$

Exemplos:

1. A área de uma figura desenhada na escala 1:50 é $15,0 \text{ cm}^2$ (Figura 168). Qual é a área real da superfície objeto?

$$s = 15,0 \text{ cm}^2. E = 1 / 50 \Rightarrow f = 2 \text{ cm/m}.$$

$$\text{a. } S = s / f^2 = 15,0 \text{ cm}^2 / (2 \text{ cm/m})^2 = 15,0 \text{ cm}^2 / 4 \text{ cm}^2/\text{m}^2 = 3,75 \text{ m}^2. \text{ Ou:}$$

b. $S = s / E^2 = 15,0 \text{ cm}^2 / (1/50)^2 = 15,0 \text{ cm}^2 / (1/2500) = 37500 \text{ cm}^2 = 3,75 \times 10^4 \text{ cm}^2 = 3,75 \text{ m}^2$.

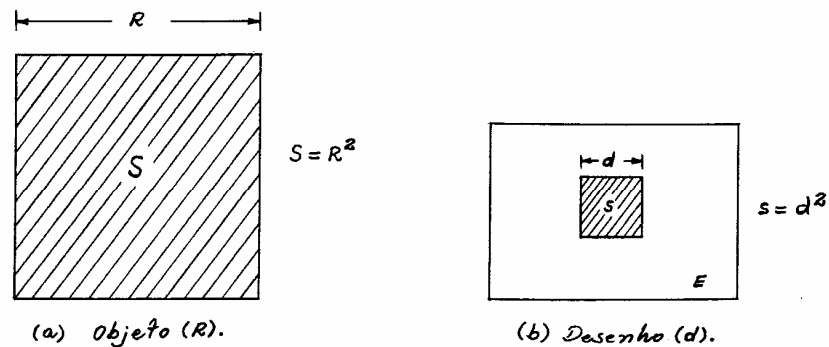


FIGURA 167. A escala numérica e a área de uma superfície - $s = E^2 \times S$ e $s = f^2 \times S$.

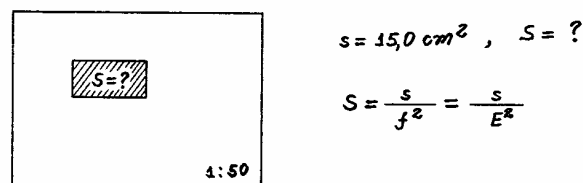


FIGURA 168. Obtenção da área real do objeto a partir da área do desenho - exemplo 1 (No desenho escreve-se o valor da real).

2. Desenhar uma propriedade em formato de um trapézio retangular, de 0,100 ha de área, na escala 1:400 (Figura 169), sabendo-se que a base menor (b) e a altura (h) no desenho são iguais a 5,00 cm.

OBSERVAÇÕES:

2.1. 1 ha = 1 hectare = 10^4 m^2 .

2.2. Área do trapézio: $S = [(B + b)/2] \times h$.

Uma vez que se dispõe de dados do desenho e de dados reais, deve-se obtê-los para a mesma situação; ou seja: todos os dados reais ou todos para o desenho.

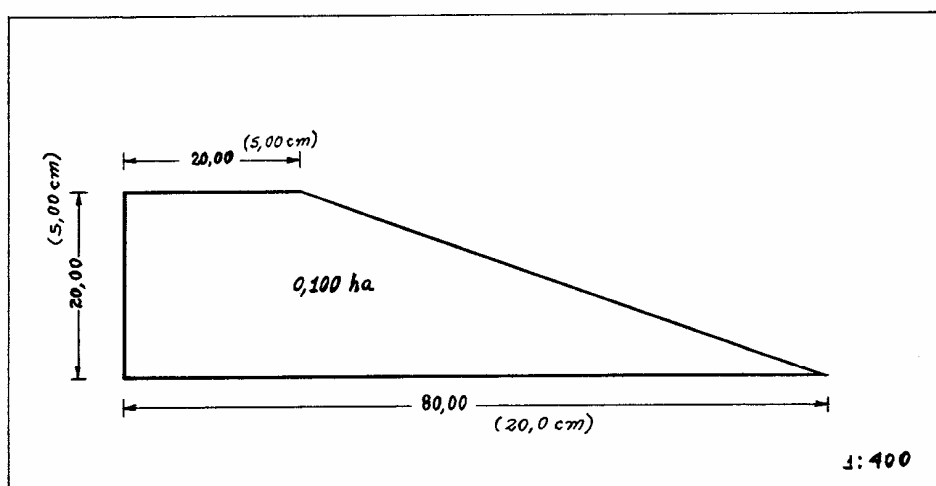


FIGURA 169. Escala numérica e a área de um superfície - exemplo 2.

a. Obtendo-se todos os dados para o desenho:

$b = h = 5,00 \text{ cm}$; $B = ?$ $S = 0,100 \text{ ha} = 0,100 \times 10^4 \text{ m}^2 = 1,00 \times 10^3 \text{ m}^2$, $s = S \times (E)^2 = 1,00 \times 10^3 \text{ m}^2 \times (1/400)^2 = 0,00625 \text{ m}^2 = 0,00625 \times 10^4 \text{ cm}^2 = 62,5 \text{ cm}^2$. $s = [(B + b)/2] \times h$, $62,5 \text{ cm}^2 = [(B + 5,00 \text{ cm})/2] \times 5,00 \text{ cm} = 2,50 \text{ cm} \times B + 12,5 \text{ cm}^2$
 $\therefore B = 20,0 \text{ cm}$. Na escala desejada, $20,0 \text{ cm}$ correspondem a $20,0 \text{ cm} / 0,25 \text{ cm/m} = 80,0 \text{ m}$. Desenha-se um trapézio retangular de base maior $20,0 \text{ cm}$, de base menor e altura iguais a $5,00 \text{ cm}$.

b. Obtendo-se todos os dados reais da propriedade:

$b = h = 5,00 \text{ cm} \Rightarrow b = h = 5,00 \text{ cm} / (0,25 \text{ cm/m}) = 20,0 \text{ m}$. $S = 0,100 \text{ ha} = 0,100 \times 10^4 \text{ m}^2 = 1,00 \times 10^3 \text{ m}^2 = [(B + 20,0 \text{ m})/2] \times 20,0 \text{ m}$ $\therefore B = 80,0 \text{ m}$. Desenha-se um trapézio retangular de base maior $20,0 \text{ cm}$, de base menor e altura iguais a $5,00 \text{ cm}$.

3. Desenhar um terreno circular de área $78,50 \text{ m}^2$, na escala 1:250 (Figura 170).

OBSERVAÇÃO: Área do círculo: $S = \pi r^2 = \pi d^2/4$, sendo r e d , respectivamente, o raio e o diâmetro da circunferência.

$s = S \times (E)^2 = 78,50 \text{ m}^2 \times (1/250)^2 = 1,256 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 12,56 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 12,56 \text{ cm}^2$. $12,56 \text{ cm}^2 = \pi r^2$ $\therefore r = 2,000 \text{ cm}$ ou $d = 4,000 \text{ cm}$.

Traça-se uma circunferência de 2,000 cm de raio (que representa o terreno circular de raio 5,000 m - no desenho é representado 5,00, tendo em vista a precisão normalmente possível para desenhos nestas dimensões).

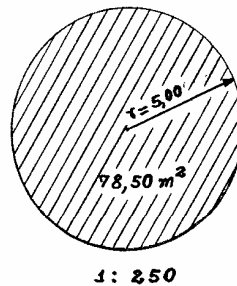


FIGURA 170. Escala numérica e a área de uma superfície - exemplo 3.

9.12. Mudança de escala - ampliação ou redução de um original (Figura 171):

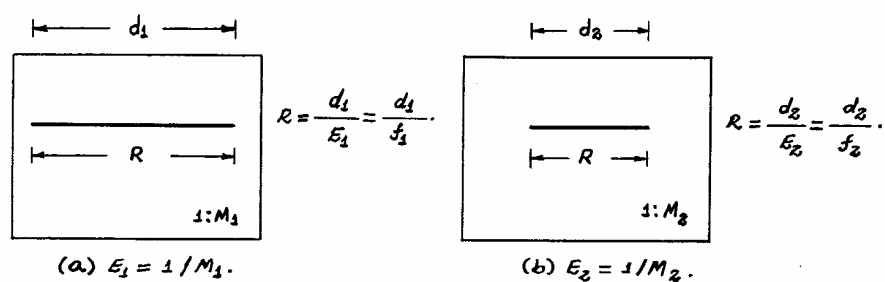


FIGURA 171. Mudança de escala - ampliação ou redução de um desenho original ($d_2 = d_1 \times (E_2 / E_1)$, $d_2 = d_1 \times (M_1 / M_2)$ e $d_2 = d_1 \times (f_2 / f_1)$).

Se um objeto de dimensão linear R foi desenhado na escala $1:M_1$ com um comprimento d_1 , na escala $1:M_2$ ele deve ser desenhado com um comprimento d_2 , obtido de:

$$d_2 = d_1 \times (E_2/E_1) \quad \text{ou} \quad d_2 = d_1 \times (M_1/M_2) \quad \text{ou} \quad d_2 = d_1 \times (f_2/f_1)$$

Já que: $d_1/f_1 = R$ e $d_2/f_2 = R \Rightarrow d_1/f_1 = d_2/f_2 \therefore d_2 = d_1 f_2/f_1$. Como $f = (E) = 1/M$, $d_1/(1/M_1) = d_2/(1/M_2)$, $d_1 M_1 = d_2 M_2 \therefore d_2 = d_1 M_1/M_2$.
 $f_1 = E_1$ e $f_2 = E_2$, $d_1/E_1 = d_2/E_2 \therefore d_2 = d_1 \times (E_2/E_1)$.

OBSERVAÇÃO: Quando um desenho é reproduzido sem haver alteração em sua escala original, diz-se que houve uma *cópia* do original.

Exemplos:

1. Qual o comprimento de um canal de irrigação a ser desenhado na escala 1:400, se na escala 1:1000 ele é desenhado com um comprimento de 15 cm (Figura 172)?

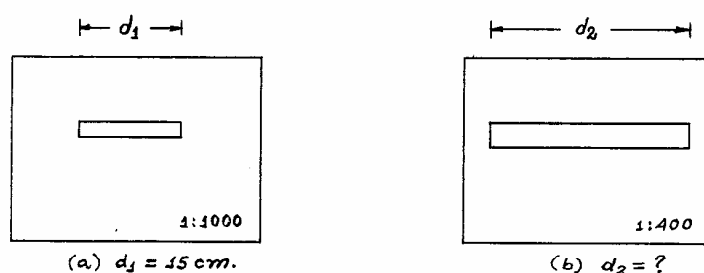


FIGURA 172. Mudança de escala - ampliação - exemplo 1.

a. $M_1 = 1000$, $M_2 = 400$, $d_1 = 15$ cm, $d_2 = ?$ $d_2 = 15$ cm $\times$ $1000/400 = 15$ cm $\times$ $2,5 = 37,5$ cm.

b. $E_1 = 1/1000$, $E_2 = 1/400$, $d_2 = 15$ cm $\times$ $[(1/400)/(1/1000)] = 37,5$ cm.

2. Um objeto foi desenhado em papel no formato A2 (420 mm de largura x 594 mm de comprimento) e na escala 1:25 (Figura 173-a). O desenho é, em seguida, reduzido fotograficamente para o formato A4 (210 mm de largura x 297 mm de comprimento) (Figura 173-b). a. Qual foi a escala de redução devida à fotografia? b. De quanto a área do papel foi reduzida? c. Qual a nova escala do desenho? d. Qual o comprimento na fotografia de um objeto cuja aresta mede 4,20 m?

a. As dimensões contidas no formato A2 são consideradas como se fossem a de um objeto e a do A4 como se fossem a de um desenho (Figura 173). $E = d/R$, sendo d qualquer comprimento no formato A4 e R o comprimento correspondente no formato

A2, $d = 210$ mm e $R = 420$ mm ou $d = 297$ mm e $R = 594$ mm, $E = d/R = 210/420 = 297/594 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Escala 1:2.

A escala de redução devida à fotografia foi 1:2, ou seja: cada medida linear contida no papel no formato A4 corresponde à metade da respectiva dimensão contida no papel no formato A2.

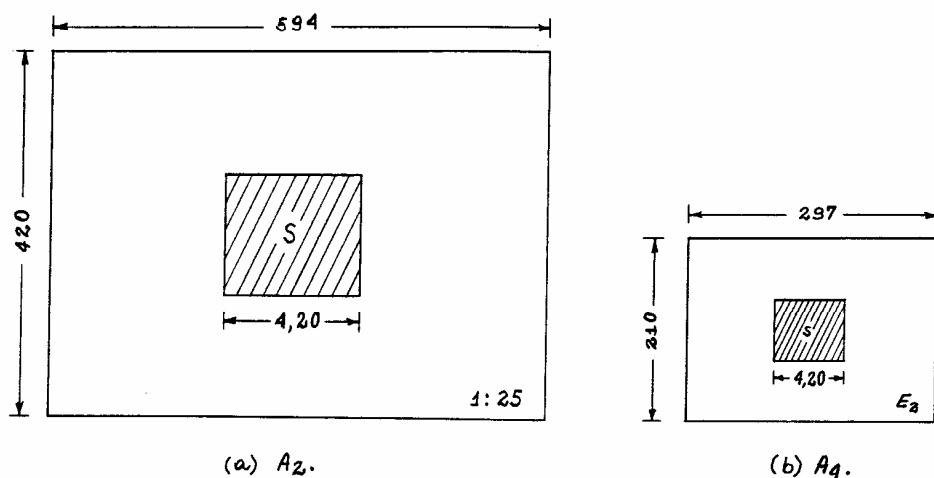


FIGURA 173. Mudança de escala - redução - exemplo 2.

b. $s/S = E^2 = (1/2)^2 = 1/4$, $s = S/4 \Rightarrow$ Qualquer área medida no desenho do formato A4 (s) é 4 vezes menor que a respectiva área no formato A2 (S).

c. $E_2 = E_1 \times (d_2/d_1)$. $E_1 = 1/25$, $d_1 = 420$ mm e $d_2 = 210$ mm, $E_2 = (1/25) \times (210/420) = (1/25) \times \frac{1}{2} = 1/50 \Rightarrow$ A nova escala do desenho na fotografia, no formato A4, é 1:50.

d. $R = 4,20$ m, $E = 1/50$, $d = ?$ $d = R \times E = 4,20 \text{ m} \times 1/50 = 0,0840 \text{ m} = 8,40 \text{ cm}$.

3. Uma fotocopiadora (“Xerox”) pode reduzir uma figura até 64% (escala de redução máxima) ou ampliá-la até 142% (escala de ampliação máxima) de seu tamanho original (atualmente a ampliação pode ser até 155%). a. Quais são as escalas de redução e de ampliação expressas na forma 1:M e M:1, respectivamente? b. Se a área da figura original é $0,250 \text{ m}^2$, quais são as áreas mínima e máxima que podem ser obtidas? c. Se na figura original um segmento mede $10,0$ cm, quais serão os comprimentos máximo e mínimo deste segmento? d. Se a escala da figura original é

1:50, quais são as escalas mínima e máxima das figuras ampliada e reduzida, respectivamente?

a. a₁. Escala de redução (Figura 174-a e b): $E_1 = 64\% = 64/100 = 0,64 = (64/64)/(100/64) = 1/1,5625 = 1 : 1,5625$.

a₂. Escala de ampliação (Figura 174-c e d): $E_2 = 142\% = 142/100 = 1,42 = (142/100)/(100/100) = 1,42/1 = 1,42 : 1$.

b. b₁. Área mínima (redução - Figura 174-a e b): $s_1 = (E_1)^2 \times S_1 = 0,64^2 \times S_1 = 0,4096 S_1 = 40,96\% S = 0,4096 \times 0,250 \text{ m}^2 = 0,102 \text{ m}^2$.

b₂. Área máxima (ampliação - Figura 174-c e d): $s_2 = (E_2)^2 \times S_2 = 1,42^2 \times S_2 = 1,0164 S_2 = 201,64\% S = 2,0164 \times 0,250 \text{ m}^2 = 0,504 \text{ m}^2$.

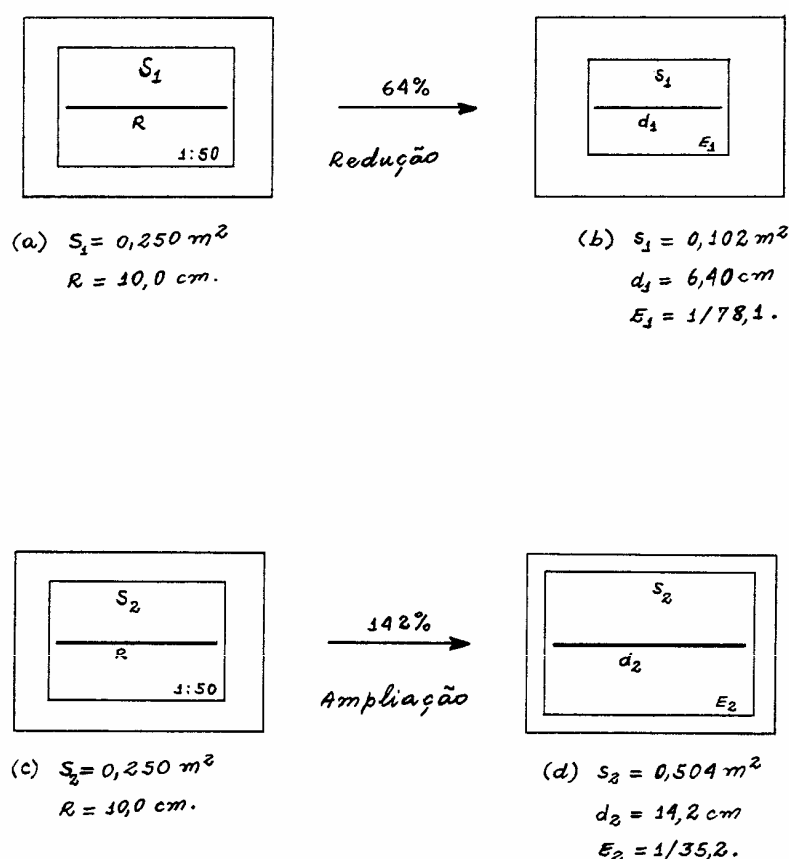


FIGURA 174. Mudança de escala - exemplo 3.

c. c₁. Comprimento mínimo (redução - Figura 174-a e b) – $E = 64\% = 0,64$: $d = E \times R$, $d_1 = E_1 \times R = 0,64 \times 10,0 \text{ cm} = 6,40 \text{ cm}$.

c₂. Comprimento máximo (ampliação - Figura 174-c e d) – $E = 142\% = 1,42$: $d = E \times R$, $d_2 = E_2 \times R = 1,42 \times 10,0 \text{ cm} = 14,2 \text{ cm}$.

d. $d_2 = d_1 \times (E_2 / E_1) \therefore E_2 = (d_2 / d_1) \times E_1$, $(d_2 / d_1) = E_r =$ escala de redução ou de ampliação, $E_2 = E_r \times E_1 = E_r \times (1/50)$:

d₁. Escala máxima (Figura 174-c e d): $E_r = 1,42$ (ampliação), $E_2 = 1,42 \times (1/50) = 1,42 / 50 = (1,42 / 1,42) / (50 / 1,42) = 1 / 35,21$ ou **1 : 35,21**.

d₂. Escala mínima (Figura 174-a e b): $E_r = 0,64$ (redução), $E_2 = 0,64 \times (1/50) = 0,64 / 50 = (0,64 / 0,64) / (50 / 0,64) = 1 / 78,125$ ou **1 : 78,125**.

9.13. Escala gráfica:

1. Conceito:

É a representação gráfica da escala numérica. Representa-se a escala numérica ao longo de uma barra graduada, marcando-se sobre ela os valores reais das medidas do objeto (Figura 175).

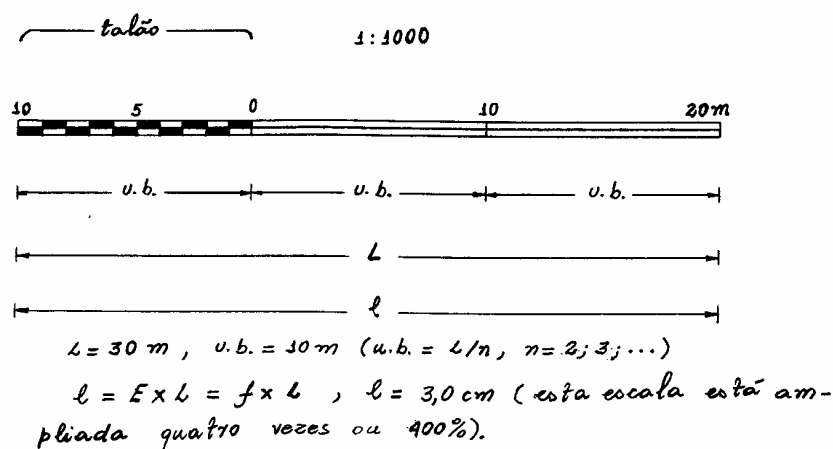


FIGURA 175. Escala gráfica linear ou simples.

2. Finalidade:

Facilitar as tomadas de medidas diretamente sobre o desenho e também permitir a redução ou ampliação do desenho, ou figura, por meios fotográficos ou similares sem alterar a escala, fato impossível com apenas a escala numérica (porque a escala gráfica sofre as mesmas alterações que o desenho copiado). A escala gráfica também sofre as mesmas alterações que os outros desenhos em um papel, devido a variações de umidade do ar ambiente.

É normalmente utilizada para escalas numéricas pequenas ou de módulo elevado, como as utilizadas em Topografia e Cartografia.

3. *Tipos*: Escala gráfica linear ou simples e escala gráfica transversal ou composta.

9.14. *Elementos de uma escala gráfica linear ou simples* (Figura 175):

a. *Comprimento da escala* (L): É o valor real do comprimento que se deseja representar em escala. Deve ser tal que permita que a maioria das medidas necessárias sejam obtidas com a utilização direta da escala. O comprimento do desenho da barra horizontal que será a escala gráfica, ℓ , é obtido de:

$$\ell = f \times L = E \times L.$$

b. *Unidade básica ou divisão principal da escala* (u. b.): É a divisão principal da escala.

Seu valor pode ser considerado como submúltiplo inteiro e de mesma ordem de grandeza do comprimento da escala; ou seja: u. b. = L / n , sendo n um número inteiro maior que 1, $n = 2; 3; 4; \dots$, o número total de unidades básicas. Como exemplos: $L = 2000 \text{ m} \Rightarrow \text{u. b.} = 1000 \text{ m}$ e $n = 2$; $L = 1000 \text{ m} \Rightarrow \text{u. b.} = 500 \text{ m}$ e $n = 2$; $L = 30 \text{ m} \Rightarrow \text{u. b.} = 10 \text{ m}$ e $n = 3$; $L = 300 \text{ m} \Rightarrow \text{u. b.} = 100 \text{ m}$ e $n = 3$; $L = 500 \text{ m} \Rightarrow \text{u. b.} = 100 \text{ m}$ e $n = 5$.

A unidade básica da escala *deve ser escolhida* em função dos comprimentos possíveis de serem medidos diretamente do desenho com a utilização da escala gráfica, devendo-se basear nas medidas efetuadas pelo desenhista para elaborar o desenho, podendo ser 100 m, 50 m, 10 m, etc.. Entretanto, *é prático tomar a unidade básica* como sendo: 0,1 m se o comprimento da escala é maior que 0 até 1 m; 1 m se o comprimento da escala é maior que 1 até 10 m; 10 m se o comprimento da escala é maior que 10 até 100 m; 100 m se o comprimento da escala é maior que 100 até 1000 m; 1000 m se o comprimento da escala é maior que 1000 até 10000 m; 10000 m se o comprimento da escala é maior que 10000 até 100000 m, etc.. **Estes valores são apenas referenciais, devendo-se sempre utilizar o bom senso.**

O comprimento que representa a unidade básica no desenho da escala gráfica é igual à razão entre o comprimento deste desenho (ℓ) e o número de unidades básicas (n).

c. *Talão da escala*: É a primeira unidade básica da escala gráfica linear. Deve ser subdividido em 10 partes iguais.

d. *Numeração da escala*:

O zero (0) da escala deve ser representado ao final da primeira unidade básica, pois é o zero comum da escala, tanto para medidas à sua esquerda, no talão, como à direita, nas demais unidades básicas.

O *talão* deve ser numerado a partir do zero para a esquerda com valores crescentes e múltiplos da décima parte (1/10) da unidade básica. Quando o espaço é insuficiente, ou mesmo por estética, pode se escrever apenas os números que representam a metade e o total do talão, ou outra maneira que cause boa apresentação.

As demais *unidades básicas à direita do zero* devem ser numeradas com valores crescentes e múltiplos da unidade básica. Ao último número à direita da escala deve-se acrescentar a unidade de medida que está sendo utilizada.

OBSERVAÇÃO: Pode-se encontrar escalas gráficas numeradas apenas da esquerda para a direita, apresentando o zero (0) na extremidade esquerda da barra horizontal. Entretanto, a numeração aqui recomendada resulta em maior facilidade nas leituras quando da utilização da escala.

e. Escala numérica: Deve-se escrever, normalmente abaixo da escala gráfica, a escala numérica que a gráfica representa (Figura 176).

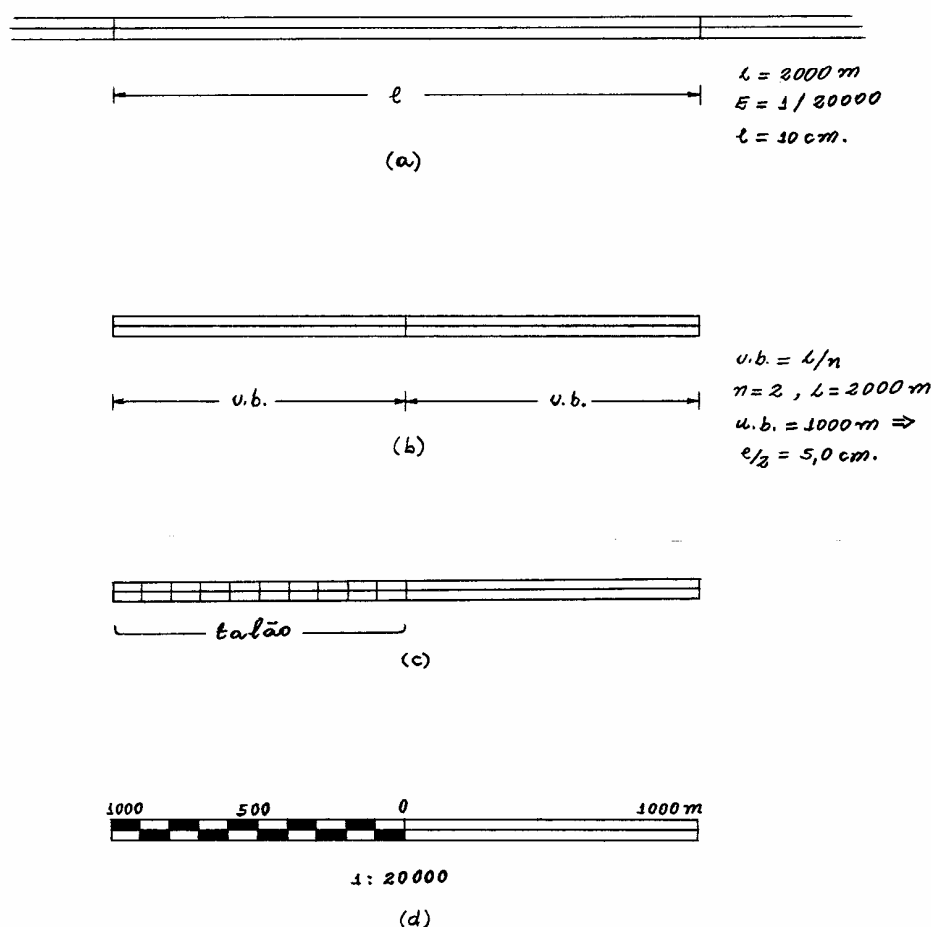


FIGURA 176. Construção de uma escala gráfica linear ou simples.

9.15. Construção de uma escala gráfica linear ou simples (Figura 176):

Construir uma escala gráfica linear com 2000 m de comprimento a ser empregada em um desenho de escala numérica 1:20000.

a. Calcula-se o comprimento que deve ter o segmento horizontal que vai constituir a escala gráfica: $l = f \times L = E \times L$. $l = (1/20000) \times 2000 \text{ m} = 0,1000 \text{ m} = 10,00 \text{ cm.}$

b. Traçam-se três segmentos de reta horizontais, paralelos e igualmente afastados de 1 mm, com comprimento $\ell = 10,00$ cm (Figura 176-a). Normalmente são encontradas escalas gráficas em que os segmentos paralelos estão mais afastados que 1 mm; o que deve realmente ser visto é a estética e que a escala gráfica só serve para obtenção de medidas lineares, não importando a sua largura.

c. Dividem-se os segmentos horizontais em n partes iguais, cada parte representando uma unidade básica, de acordo com a escala numérica utilizada. Como o comprimento da escala 2000 m está entre 1000 e 10000 m, pode-se tomar a unidade básica como sendo 1000 m; assim o número de unidades básicas n será igual a 2 ($2000 \text{ m} / 1000 \text{ m}$). Desta maneira, dividem-se os segmentos horizontais de 10,0 cm de comprimento em duas partes iguais, de 5,00 cm de comprimento cada (Figura 176-b).

d. Divide-se a primeira unidade básica da escala, o talão, em 10 partes iguais (Figura 176-c). Como o talão é representado com 5,00 cm de comprimento, cada décima parte será representada por 0,50 cm (meio centímetro). No caso, cada segmento do talão representa 100 m ($1000 \text{ m} / 10$).

e. O talão tem sua origem, o zero (0) da escala, coincidente com o final da primeira divisão principal (Figura 176-d). Numera-se o talão a partir do zero para a esquerda (0, 500 e 1000) e as demais unidades básicas, também a partir do zero, para a direita (0, 1000). Acrescenta-se a unidade de medida de comprimento ao número da extremidade direita da escala ($\text{m a } 1000 \Rightarrow 1000 \text{ m}$).

f. Para facilitar a leitura no talão, costuma-se enegrecer as suas divisões, alternando-as horizontal e verticalmente (Figura 176-d). As divisões correspondentes às unidades básicas também podem ser enegrecidas desta maneira. A escala gráfica linear simples é considerada um elemento de ornamentação do “desenho” e por isto deve ser a mais bonita possível.

OBSERVAÇÃO:

Se apenas a escala numérica (1:50) for fornecida em um problema de construção de escala gráfica, não sendo dados seu comprimento e sua unidade básica, deve-se representá-la a partir do fator de escala ($2 \text{ cm/m} \Rightarrow \text{u.b.} = 1 \text{ m}$, representada por 2 cm), construindo-se o talão e mais duas divisões principais, totalizando três unidades básicas (3 u.b.), com valores compatíveis com o da escala numérica utilizada ($\ell = 3 \text{ u.b.} \times 2 \text{ cm/u.b.} = 6,00 \text{ cm}$; $L = 3 \text{ u.b.} \times 1 \text{ m/u.b.} = 3 \text{ m}$) (Figura 177-a).

Considerando apenas a escala numérica 1:2000 (Figura 177-b), não sendo dados seu comprimento e sua unidade básica, deve-se representá-la a partir do fator de escala ($0,05 \text{ cm/m} = 5 \text{ cm}/100 \text{ m} \Rightarrow \text{u.b.} = 100 \text{ m}$, representada por 5,00 cm), construindo-se o talão e mais duas divisões principais, totalizando três unidades básicas (3 u.b.), com valores compatíveis com o da escala numérica utilizada ($\ell = 3 \text{ u.b.} \times 5,00 \text{ cm/u.b.} = 15,00 \text{ cm}$; $L = 3 \text{ u.b.} \times 100 \text{ m/u.b.} = 300 \text{ m}$).

9.16. Utilização da escala gráfica linear ou simples:

Ao se tomar uma medida diretamente do desenho com qualquer instrumento (compasso de pontas secas, régua graduada) ou com uma tira de papel, ou com um

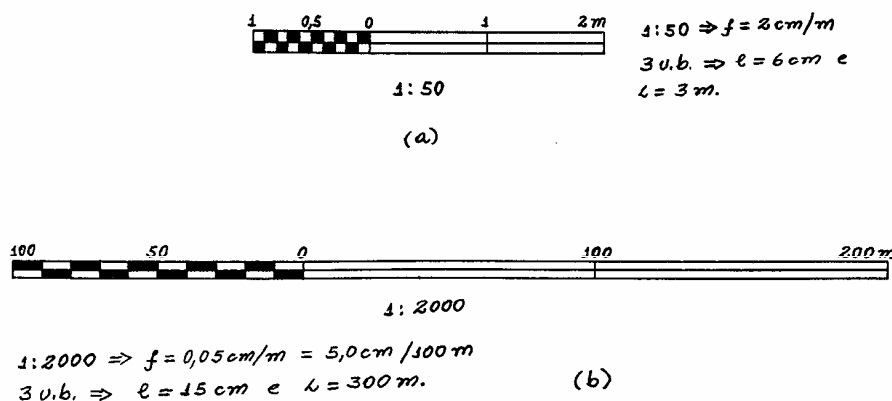


FIGURA 177. Obtenção da escala gráfica simples quando se dispõe apenas da escala numérica.

pedaço de linha ou de barbante, ou de qualquer outro material, deve-se **colocar sua extremidade direita coincidindo com o:**

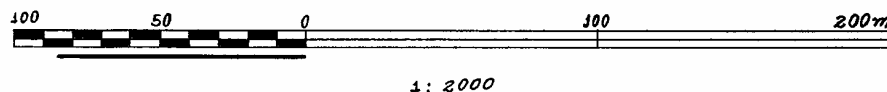
1. Zero (0) da escala quando a **leitura** a ser feita for **menor que a unidade básica** (Figura 178-a). Faz-se a leitura diretamente do talão (87 m), constituindo-se dos algarismos que se tem certeza (80 m) mais o resultante da estimativa referente à décima parte da menor divisão do talão (7 m).

2. Primeiro número da unidade básica à direita do zero (0), quando a **leitura** a ser feita for **maior que uma unidade básica e menor que duas** (Figura 178-b). Faz-se a leitura (133 m) somando-se o número referente à unidade básica (100 m) com a leitura obtida diretamente do talão (33 m - constituindo-se dos algarismos que se tem certeza (30 m) mais o resultante da estimativa referente à décima parte da menor divisão do talão (3 m)).

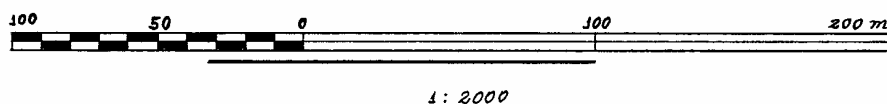
3. Segundo número da unidade básica à direita do zero (0), quando a **leitura** a ser feita for **maior que duas unidades básicas e menor que três** (Figura 178-c). Faz-se a leitura (248 m) somando-se o número referente à segunda unidade básica (200 m) com a leitura obtida diretamente do talão (48 m - constituindo-se dos algarismos que se tem certeza (40 m) mais o resultante da estimativa referente à décima parte da menor divisão do talão (8 m)).

OBSERVAÇÃO: *A extremidade esquerda do instrumento de medida sempre cairá na parte correspondente ao talão da escala, permitindo fazer a leitura dos décimos da unidade básica, bem como estimar a décima parte dos décimos da unidade básica, ficando o número que expressa o valor real da medida resultante da soma do*

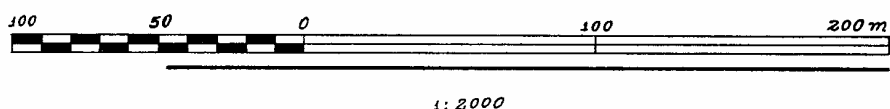
número da unidade básica ocupada, do correspondente à décima parte da unidade básica da escala e do centésimo desta unidade básica.



(a) Comprimento menor que uma unidade básica - $R = 87m$.



(b) Comprimento maior que uma unidade básica - $R = 133m$.



(c) Comprimento maior que duas unidades básicas - $R = 248m$.

9.17. EXERCÍCIOS

Escalas numérica e gráfica.

Objetivos: Desenhar um objeto em escala. A partir do desenho obter as dimensões do objeto. Construir escalas gráficas.

Conhecimentos necessários: Definições de escala e fator de escala. Método de construção da escala gráfica linear ou simples.

Bibliografia consultada:

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Emprego de escalas em desenho técnico* – NBR 8196. Rio de Janeiro, 1992. 2 p.
- COMASTRI, J. A. *Topografia; planimetria*. Viçosa: UFV - Imprensa Universitária, 1973. p. 317-327.
- MONTENEGRO, G. A. *Desenho arquitetônico*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1995. p. 29-32.
- SOUZA, E. B. de. *Desenho técnico aplicado à Agronomia*. Mossoró: ESAM. p. 14-18.
- UNTAR, J; JENTZCH, R. *Desenho arquitetônico*. Viçosa: UFV - Imprensa Universitária, 1987. 64 p.

1. O comprimento de um canal de irrigação é 100 m (R) e no desenho esta medida deverá ser representada por 20 cm (d). Qual deve ser a escala do desenho?
2. Deseja-se desenhar um objeto de 30 m de comprimento, para sua clareza o desenho deve ter no mínimo 16 cm e no máximo 25 cm. Considerando as escalas 1:125 e 1:150: (a) Qual deve ser a escala mínima? (b) Qual deve ser a escala máxima? (c) Considerando os fatores de escala, qual será a escala mais adequada?
3. Uma rua está desenhada com 12 mm de largura e mede 24 m. Qual é a escala do desenho?
4. Num projeto, desenhado na escala 1:50, a altura de um prédio mede 18 cm. Qual é o valor real dessa altura?
5. Uma sala mede 3,80 m x 6,20 m (largura x comprimento). Num desenho que será feito na escala 1:50, quais serão as medidas a serem utilizadas?
6. Num terreno de forma retangular de 30,0 m x 45,0 m (largura x comprimento) deseja-se construir um muro. Se se dispõe de um papel cuja parte útil seja de 18,2 cm x 27,0 cm, qual deve ser a escala utilizada no desenho do muro?
7. Obter o fator de escala, em cm/m, da escala: 1:10, 1:20, 1:25, 1:50, 1:100, 1:125, 1:200, 1:250, 1:300, 1:400, 1:500, 1:1000.
8. Obter o comprimento de um segmento de reta (d) que representará, em uma escala 1:100, um fio horizontal de 50 m de comprimento (R).
9. O comprimento de uma linha principal de um sistema de irrigação por aspersão é 60 m; se ele deverá ser representado na escala 1:200, qual deverá ser o comprimento do desenho?
10. O comprimento do desenho de uma cerca é 25 cm, em uma escala 1:50. Qual é o comprimento real da cerca?
11. A altura de uma parede no desenho, na escala 1:50, é 5,60 cm. Qual é a altura que parede deverá ter após sua construção?
12. a. Se em desenhos antigos foram encontradas as escalas 0,005, 0,008, 0,02, 0,01, 0,0025, quais são as notações atuais destas escalas. b. Dadas as escalas 64%, 70%, 90%, 120% e 142%, apresentá-las na forma decimal e 1:M ou M:1.
13. A área de uma figura desenhada, na escala 1:50, é de 35,0 cm². Qual é a área real da superfície objeto?
14. Desenhar uma propriedade em formato de um trapézio retangular, de 0,410 ha de área, na escala 1:500, sabendo-se que a base menor e a altura no desenho são iguais

- a 10,00 cm. OBSERVAÇÕES: 1. 1 ha = 1 hectare = 10^4 m^2 . 2. Área do trapézio: $S = [(B + b)/2] \times h$.
15. Desenhar um terreno circular de área $113,10 \text{ m}^2$, na escala 1:250. OBSERVAÇÃO: Área do círculo: $S = \pi r^2 = \pi d^2/4$, sendo r e d, respectivamente, o raio e o diâmetro da circunferência.
 16. Qual o comprimento a ser desenhado na escala 1:100 de um canal de irrigação, se na escala 1:500 ele é desenhado com um comprimento de 15 cm?
 17. Um objeto foi desenhado em papel no formato A2 (420 mm de largura x 594 mm de comprimento) e na escala 1:50. O desenho é, em seguida, reduzido fotograficamente para o formato A4 (210 mm de largura x 297 mm de comprimento). a. Qual foi a escala de redução devida à fotografia? b. De quanto a área do papel foi reduzida? c. Qual a nova escala do desenho? d. Qual o comprimento na fotografia de um objeto cuja aresta mede 5,20 m?
 18. Uma fotocopiadora (“Xerox”) pode reduzir uma figura até 64% (escala de redução máxima) ou ampliá-la até 142% (escala de ampliação máxima) de seu tamanho original. a. Quais são as escalas de redução e de ampliação expressas na forma 1:M e M:1, respectivamente? b. Se a área da figura original é $0,300 \text{ m}^2$, quais são as áreas mínima e máxima que podem ser obtidas? c. Se na figura original um segmento mede 15,0 cm, quais serão os comprimentos máximo e mínimo deste segmento? d. Se a escala da figura original é 1:100, quais são as escalas mínima e máxima das figuras ampliada e reduzida, respectivamente?
 19. Construir uma escala gráfica linear com 3000 m de comprimento a ser empregada em um desenho cuja escala numérica é 1:20000.
 20. Construir uma escala gráfica linear de 300 m na escala 1:3000.
 21. Construir uma escala gráfica linear de 300 m na escala 1:2000.
 22. Construir uma escala gráfica linear de 20 m na escala 1:500.
 23. Construir uma escala gráfica simples de 60 m na escala 1:500.
 24. Construir uma escala gráfica simples de 300 m e unidade básica 50 m, na escala 1:2500.
 25. Construir uma escala gráfica simples de 300 m e unidade básica 100 m, na escala 1:2500.
 26. Construir uma escala gráfica simples de 400 m e unidade básica 50 m, na escala 1:5000.
 27. Construir uma escala gráfica simples de 400 m e unidade básica 100 m, na escala 1:5000.
 28. Construir uma escala gráfica simples para a escala 1:25.
 29. Construir uma escala gráfica simples para a escala 1:500.
 30. Representar na escala 1:10 os formatos de folha de papel para desenho de A1 até A4, segundo a tabela:

REFERÊNCIA	DIMENSÕES (mm)	
	COMPRIMENTO	LARGURA
A1	841	594
A2	594	420
A3	420	297
A4	297	210

10. VISTAS ORTOGRÁFICAS.

10.1. Introdução:

Existem duas maneiras de se representar um objeto por meio de desenho: Através de perspectiva, onde procura-se representá-lo do modo que um observador o enxerga, e das vistas ortográficas, onde procura-se representá-lo do modo que ele realmente é.

Objetivos:

- Representar um objeto através de suas vistas ortográficas principais.
- Identificar as vistas ortográficas principais de um objeto.

10.2. Projeções de um objeto nos planos horizontal, vertical e lateral de projeção:

Além dos planos de projeção horizontal (π) e vertical (π') e do plano lateral de projeção (π''), que sempre foi considerado à direita do ponto objeto, também será considerado um segundo plano lateral de projeção, situado à esquerda do ponto objeto (π''_E). De modo que o plano lateral de projeção conhecido até então será o **plano lateral direito** (π''_D), Figura 179, e o outro será o **plano lateral esquerdo** (π''_E), na Figura 180.

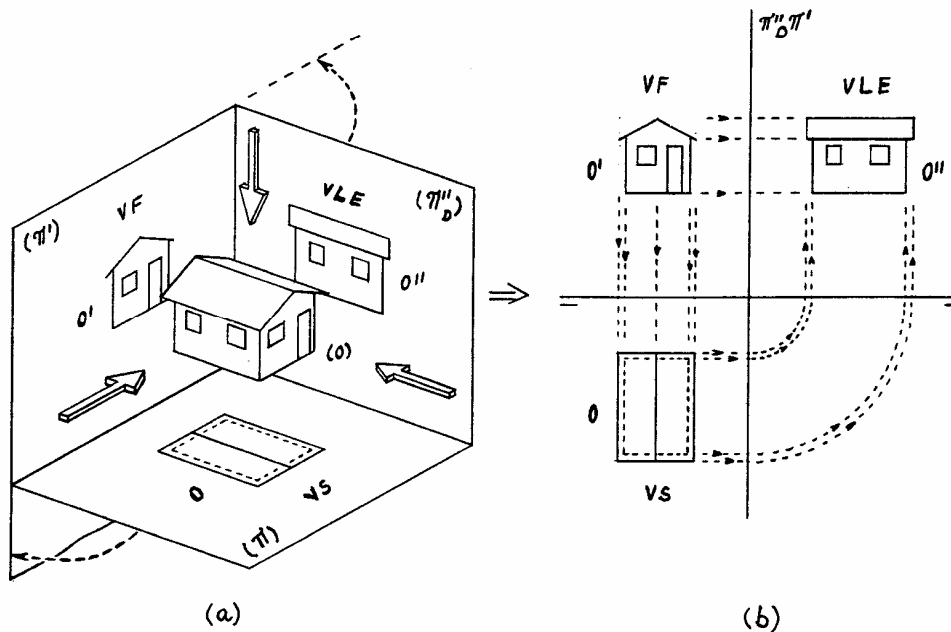


FIGURA 179. Projeções horizontal ($O \equiv VS$), vertical ($O' \equiv VF$) e lateral ($O'' \equiv VLE$) de um objeto no 1º diedro - plano lateral direito (π''_D).

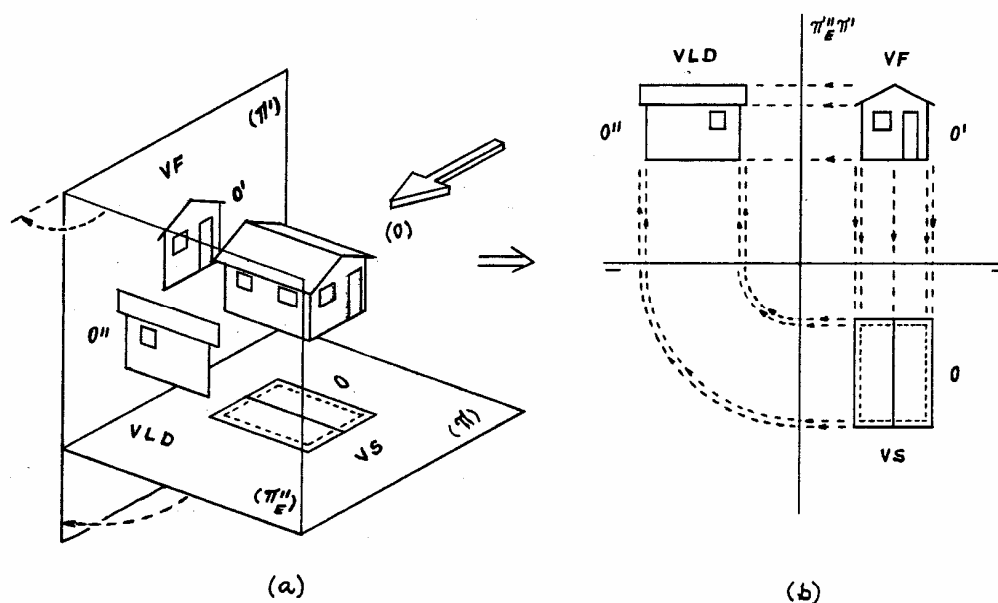


FIGURA 180. Projeções horizontal ($O \equiv VS$), vertical ($O' \equiv VF$) e lateral ($O'' \equiv VLD$) de um objeto no 1º diedro - plano lateral esquerdo (π''_E).

a. Situação espacial do objeto no 1º diedro e a sua é pura (Figuras 179 e 180):

A projeção vertical do objeto é a sua vista frontal ou de frente ($O' \equiv VF$), a projeção horizontal é a vista superior ($O \equiv VS$) e as projeções laterais são as vistas laterais esquerda ($O'' \equiv VLE$, na Figura 179) e direita ($O'' \equiv VLD$, na Figura 180). Observar que, em é pura, a VLE se encontra à direita do eixo $\pi''_D\pi'$ (Figura 179-b) e a VLD se encontra à esquerda de $\pi''_E\pi'$ (Figura 180-b).

b. Situação espacial do objeto no 3º diedro e a sua é pura (Figuras 181 e 182):

A projeção vertical do objeto é a sua vista frontal ou de frente ($O' \equiv VF$), a projeção horizontal é a vista inferior ($O \equiv VI$) e as projeções laterais são as vistas laterais esquerda ($O'' \equiv VLE$, na Figura 181) e direita ($O'' \equiv VLD$, na Figura 182). Observar que, em é pura, a VLE se encontra à esquerda do eixo $\pi''_D\pi'$ (Figura 181-b) e a VLD se encontra à direita de $\pi''_E\pi'$ (Figura 182-b).

As setas, nas Figuras 181-b e 182-b, indicam que, em é pura, as vistas estão invertidas em relação às que realmente o observador vê no espaço (Figuras 181-a e 182-a).

OBSERVAÇÃO: Os nomes das vistas ortográficas referem-se à posição do observador em relação ao objeto.

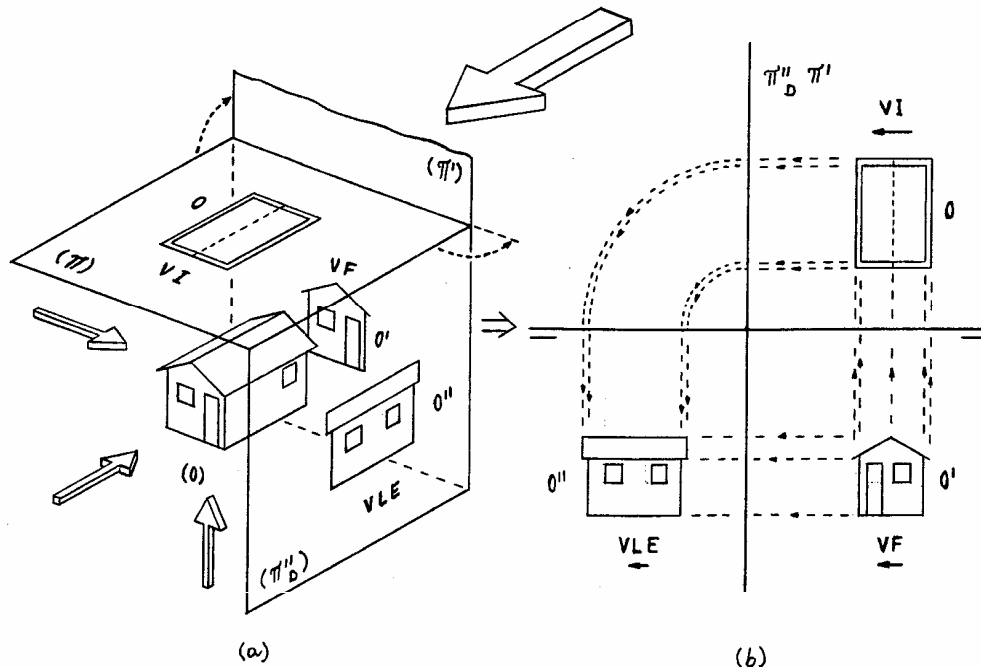


FIGURA 181. Projeções horizontal ($O \equiv VI$), vertical ($O' \equiv VF$) e lateral ($O'' \equiv VLE$) de um objeto no 3º diedro - plano lateral direito (π''_D).

10.3. Conceito:

Vistas ortográficas principais de um objeto são as suas projeções ortogonais nos planos horizontal, vertical e laterais de projeção.

Existem objetos que podem ficar claramente representados por uma só vista ou projeção (corpos esféricos ou os arredondados como uma lâmpada, por exemplo). Muitos objetos ficam bem representados por três projeções ou vistas, mas haverá casos em que os objetos somente ficam definidos com o uso de maior quantidade de vistas. Daí a definição de seis vistas ortográficas principais.

10.4. As seis vistas ortográficas principais:

Os planos de projeção são dispostos de modo a formarem um *cubo referencial de projeção* que envolve o objeto. Além dos planos de projeção horizontal (π), vertical (π') e laterais direito π''_D e esquerdo π''_E , com um plano horizontal (H) e um plano frontal (F), obtém-se o cubo referencial de projeção (Figuras 183 e 185). O objeto é projetado ortogonalmente em cada uma das seis faces do cubo.

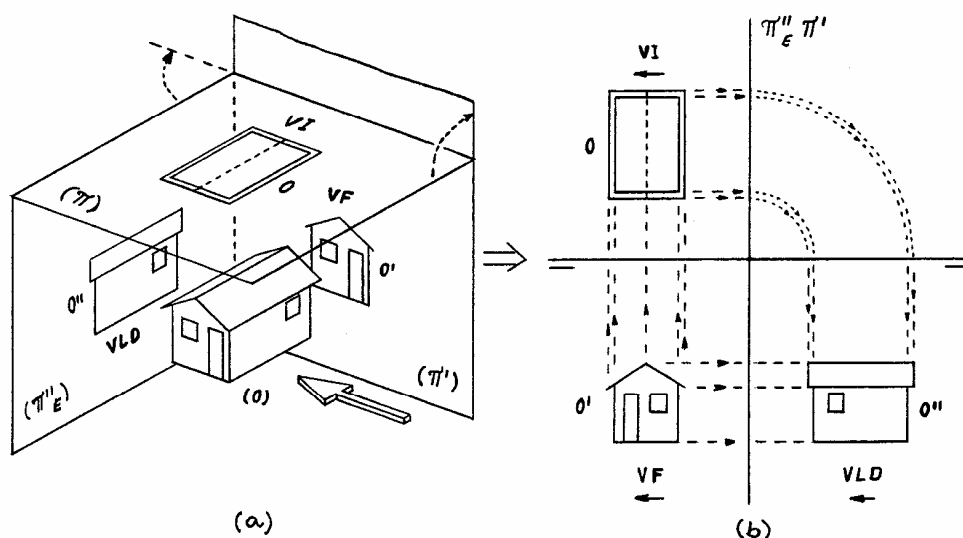


FIGURA 182. Projeções horizontal ($O \equiv VI$), vertical ($O' \equiv VF$) e lateral ($O'' \equiv VLD$) de um objeto no 3º diedro - plano lateral esquerdo (π''_E).

De acordo com a posição do observador, relativamente ao objeto, as vistas ortográficas principais são: VISTA FRONTAL OU DE FRENTE (VF), VISTA SUPERIOR (VS), VISTA LATERAL DIREITA (VLD), VISTA LATERAL ESQUERDA (VLE), VISTA INFERIOR (VI) e VISTA POSTERIOR (VP).

10.5. Definições das vistas ortográficas principais: O objeto está no 1º diedro (Figura 183) ou no 3º (Figura 185).

OBSERVAÇÕES:

1. *As vistas ortográficas podem ser obtidas considerando-se o objeto no 1º ou no 3º diedro:* Quando no 1º diedro, a vista frontal (projeção vertical) está acima da linha de terra e a vista superior (projeção horizontal) está abaixo. Quando no 3º diedro, a vista frontal (projeção vertical) está abaixo da linha de terra e a vista inferior (projeção horizontal) está acima. No Desenho Arquitetônico, o objeto é considerado no 1º diedro.

2. *As vistas ortográficas não são comumente obtidas para o objeto nos 2º e 4º diedros*, porque as vistas frontal e superior (ou inferior) podem se superpor, uma vez que, em épora, todas se encontram acima (2º diedro) ou abaixo da linha de terra (4º diedro). No Desenho Arquitetônico, apenas os cortes verticais, que podem ser vistas frontais ou laterais, têm suas partes subterrâneas desenhadas no 4º diedro; as partes aéreas são no 1º diedro.

a. *Vista frontal, de frente, ou principal (VF):* Normalmente é escolhida aquela que melhor sugere a forma do objeto, porém considerando a sua posição de equilíbrio interpretativo. O observador se coloca à frente do objeto e vê a projeção ortogonal

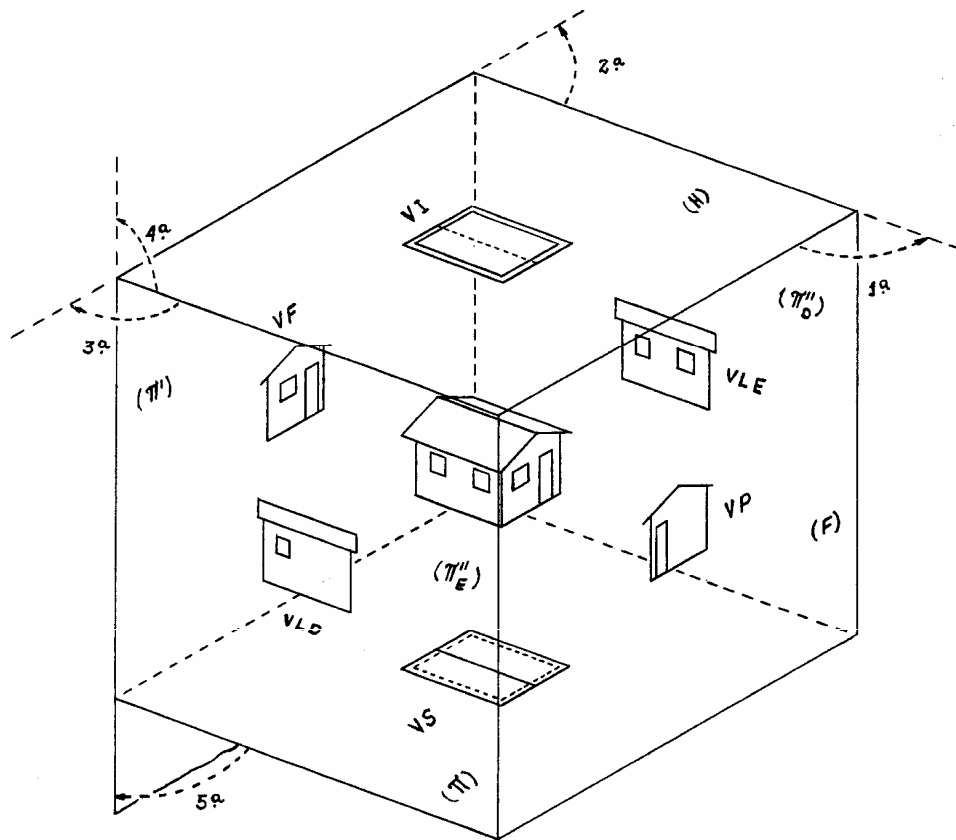


FIGURA 183. Cubo referencial de projeção para um objeto no 1º diedro.

deste (*objeto*) na face do cubo posterior a ele (*ao objeto*) (face posterior). Comumente, a fachada frontal, de frente ou principal, é aquela voltada para o logradouro público (rua, avenida, praça, etc.). É a principal vista de um desenho de um objeto.

b. Vista superior ou de cima (VS): O observador se posiciona acima do objeto e vê a projeção ortogonal deste na face do cubo posterior a ele (face inferior).

c. Vista inferior (VI): O observador se posiciona abaixo do objeto e vê a projeção ortogonal deste na face do cubo posterior a ele (face superior).

d. Vista lateral direita (VLD): O observador se posiciona à direita de sua posição considerada de frente e vê a projeção ortogonal deste na face do cubo posterior a ele (face esquerda). Comumente, a fachada lateral direita é aquela voltada para o lote ou edificação à esquerda, considerando um observador dentro de casa e voltado para a sua frente.

e. Vista lateral esquerda (VLE): O observador se posiciona à esquerda de sua posição considerada de frente e vê a projeção ortogonal deste na face do cubo posterior a ele (face direita). Comumente, a fachada lateral esquerda é aquela voltada

para o lote ou edificação à direita, considerando um observador dentro de casa e voltado para a sua frente.

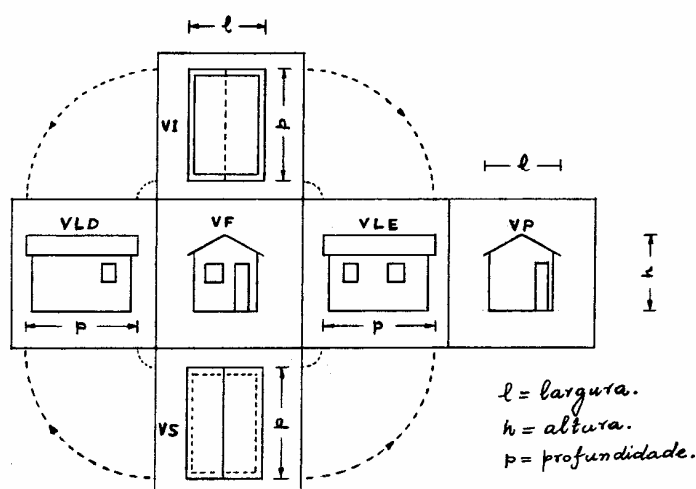


FIGURA 184. Representação das vistas ortográficas principais - planificação do cubo referencial de projeção para um objeto no 1º diedro.

f. *Vista posterior* (VP): O observador se posiciona por trás do objeto, simétrica à sua posição considerada como de frente, e vê a projeção ortogonal do objeto na face do cubo posterior a ele (face anterior). Comumente, a fachada posterior é aquela voltada para o quintal ou fundos.

OBSERVAÇÃO: As definições das vistas ortográficas são comuns para o objeto no 1º ou no 3º diedros.

10.6. Representação das vistas ortográficas principais no papel:

Após a projeção do objeto em cada uma das seis faces do cubo de projeção, considera-se que o cubo é aberto ou planificado, obtendo-se a *épura*, que resulta nas seis vistas ortográficas em um mesmo plano. Obtém-se assim a planificação do cubo referencial de projeção para um objeto no 1º diedro (Figura 184) ou no 3º diedro (Figura 186). Nas Figuras 183 e 185, são indicadas as seqüências utilizadas para a abertura dos cubos, respectivamente, para o 1º e o 3º diedros.

A planificação para o 1º diedro resulta nas seis vistas ortográficas dispostas de acordo com a recomendação da ABNT (Figura 184). *Enfatiza-se que a largura (l) da VF é a mesma nas VS e VI, que a altura (h) na VF é a mesma nas VLD, VLE e VP, e que a profundidade (p) na VS é a mesma nas VLD, VLE e VI.* Esta ordenação e colocação das vistas, embora importante como racionalização, não pode ter maior rigor no desenho arquitetônico, pois os desenhos costumam ser feitos em folhas

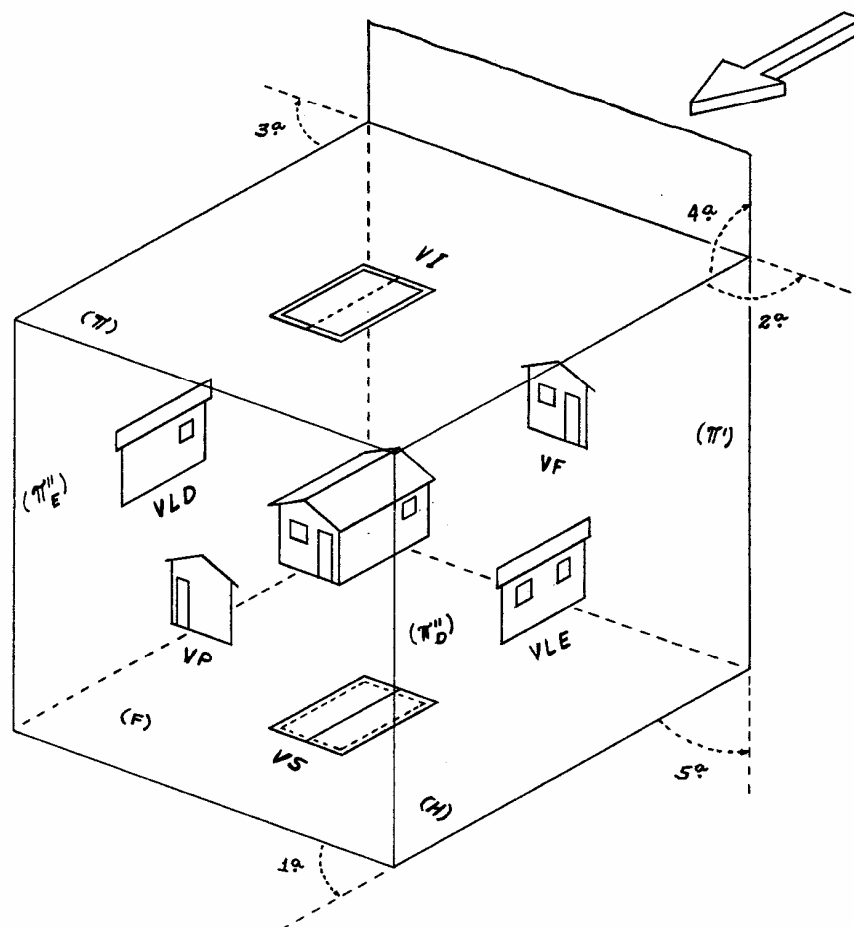


FIGURA 185. Cubo referencial de projeção para um objeto no 3º diedro.

separadas. Exatamente por essa razão, pode-se simplificar ou abreviar a convenção, apresentando apenas o número de vistas necessário à compreensão do objeto.

OBSERVAÇÕES:

a. Em Desenho Arquitetônico as vistas laterais, a vista frontal e a posterior, são denominadas fachadas (VLD = FLD, VF = FF ou fachada principal, VLE = FLE, VP = FP).

b. A vista inferior é raramente usada.

c. A vista superior, em Desenho Arquitetônico, é denominada planta de cobertura ou de coberta.

d. As vistas ou fachadas laterais esquerda e direita se referem à esquerda e direita do observador, estando ele em frente ao objeto.

e. O desenho de uma fachada ou parede de uma edificação é denominado elevação. Normalmente a palavra é utilizada para desenhos das fachadas laterais esquerda e direita, denominadas plantas de elevação: elevação esquerda e elevação direita; entretanto, poder-se-ia utilizar elevação frontal e elevação posterior.

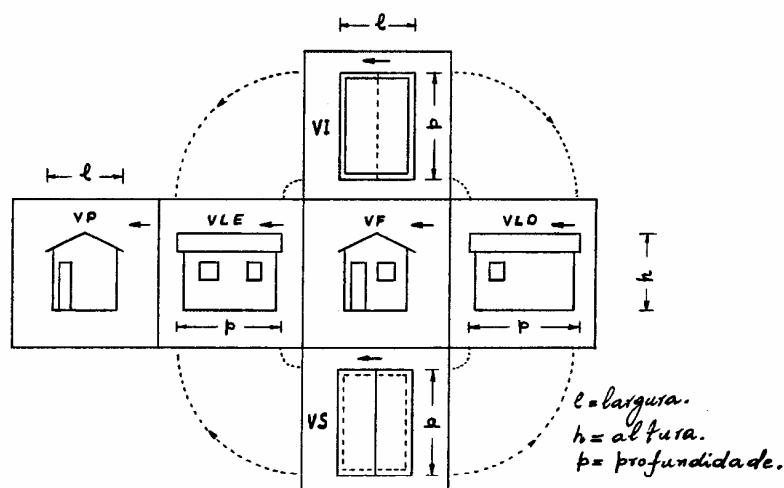


FIGURA 186. Representação das vistas ortográficas principais - planificação do cubo referencial de projeção para um objeto no 3º diedro.

f. Em Desenho Mecânico representam-se as Vistas Frontal ou Principal, Superior e Lateral Esquerda. As vistas a serem representadas são as necessárias e suficientes para a compreensão do desenho e conseqüente elaboração (construção) do objeto; existem desenhos que apresentam apenas a vista frontal (supressão de vistas).

g. Denominam-se *vistas ortográficas auxiliares* àquelas obtidas pelas projeções ortogonais em planos de projeção auxiliares paralelos às faces dos objetos desenhados. São utilizadas quando o objeto apresenta faces oblíquas aos planos principais de projeção, horizontal (π), vertical (π') e lateral (π''), de modo a se obter projeções em verdadeira grandeza, o que não aconteceria com as vistas ortográficas principais. O rebatimento é sempre obtido mantendo-se o plano de projeção vertical (π') e girando os planos de projeção auxiliares em torno dos eixos oriundos das interseções entre eles e (π'), abrindo-os, de forma a coincidi-los com o plano de projeção vertical (π').

10.7. Construção das vistas ortográficas principais para um objeto no 1º diedro:

OBSERVAÇÃO: A seqüência mostrada a seguir foi escrita para iniciantes. Espera-se que com o seu uso ela seja cada vez menos necessária.

Baseando-se na planificação do cubo referencial de projeção para um objeto no 1º diedro (Figura 184), na construção das vistas ortográficas (do objeto representado na Figura 187):

a. Traçar um sistema de eixos retangulares constituído pelo eixo x ($\equiv \pi'\pi$) e pelos eixos y_1 , y_2 e y_3 ($y_1 \equiv \pi''_E\pi'$, $y_2 \equiv \pi''_D\pi'$ e $y_3 \equiv \pi''_D\pi'$) do cubo referencial de projeção (Figura 188).

As distâncias entre os eixos verticais y_1 , y_2 e y_3 , bem como o comprimento total do eixo x , dependem das largura e profundidade máximas do objeto a ser

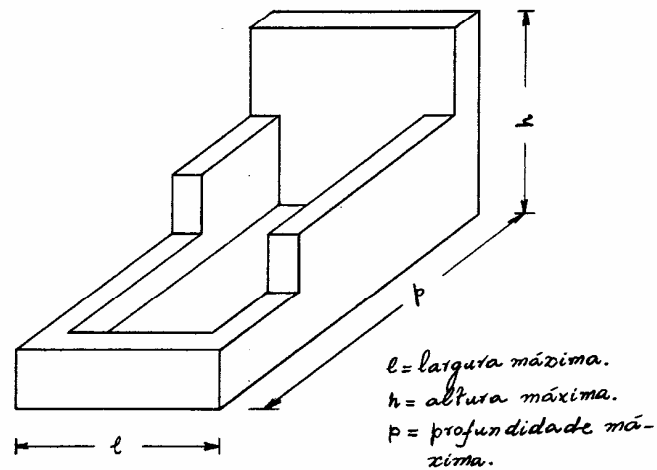


FIGURA 187. Construção das vistas ortográficas - perspectiva do objeto.

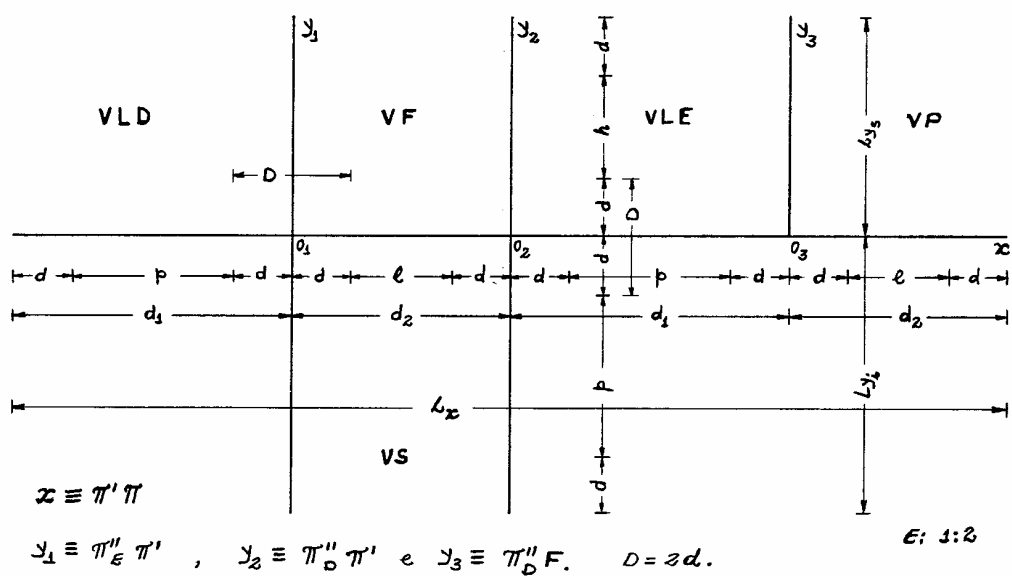


FIGURA 188. Sistema de eixos utilizado para a construção das vistas ortográficas de um objeto no 1º diedro.

representado e da distância, D , que se deseja ter entre as vistas no desenho (esta distância só depende da estética que se deseja ter no desenho. Obviamente que ela deve ser proporcional às dimensões das vistas desenhadas; quanto maiores as dimensões, maior D). Uma vez estabelecida D , obtém-se a distância de cada vista ao respectivo eixo ($d = D/2$) e calculam-se as distâncias entre os eixos:

1. d_1 = distância entre o início do eixo x e y_1 , e entre y_2 e y_3 (partes do eixo x reservadas às VLD e VLE) = $2d + p = D + p$.

2. d_2 = distância entre y_1 e y_2 , e entre y_3 e o final do eixo x (partes do eixo x reservadas às VF e VP) = $2d + \ell = D + \ell$.

3. L_x = comprimento do eixo x = $2d_1 + 2d_2 = 2(d_1 + d_2) = 8d + 2p + 2\ell = 4D + 2p + 2\ell$.

Os comprimentos dos eixos y_1 , y_2 e y_3 , podem ser assim obtidos:

1. L_{ys} = comprimento da parte superior de qualquer eixo y = $2d + h = D + h$.

2. L_{yi} = comprimento da parte inferior de qualquer eixo y = $2d + p = D + p = d_1$.

O eixo y_3 só apresenta parte superior.

Considerando-se $D = 2,0$ cm, tem-se $d = 1,0$ cm. Na escala 1:2, para o objeto do exemplo, deve-se representar no desenho das vistas: $p = 2,75$ cm, $\ell = 1,75$ cm e $h = 1,75$ cm. Assim: $d_1 = 4,75$ cm, $d_2 = 3,75$ cm, $L_{ys} = 3,75$ cm, $L_{yi} = 4,75$ cm e $L_x = 17,0$ cm.

OBSERVAÇÕES:

1. Para obter apenas a VLD trabalha-se apenas com os eixos x e y_1 , sendo $L_x = d_1 + d_2 = 2D + p + \ell$; ficando a VLD à esquerda de y_1 e VF e VS à direita.

2. Para obter apenas a VLE trabalha-se apenas com os eixos x e y_2 , sendo $L_x = d_2 + d_1 = 2D + p + \ell$; ficando a VLE à direita de y_2 e VF e VS à esquerda.

b. Nos espaços reservados para as vistas, marcar a distância d (no caso, $d = 1,0$ cm) a partir da origem de cada eixo, O_1 , O_2 e O_3 , e traçar retas auxiliares, contínuas, estreitas e bem leves, paralelas aos eixos (Figura 189).

A partir da reta auxiliar paralela e acima do eixo x , medir a altura h ($h = 1,75$ cm), que é comum às VF, VP, VLD e VLE; em seguida traçar nova reta auxiliar paralela ao eixo x .

Medir, a partir das retas auxiliares paralelas aos eixos y_1 e y_3 , respectivamente, a profundidade p , para a VLD ($p = 2,75$ cm) e a largura ℓ , para a VP ($\ell = 1,75$ cm); em seguida, traçar retas auxiliares paralelas a y_1 e y_3 (Conferir as demais medidas de ℓ e p , para VF e VLE, respectivamente).

Medir, a partir da reta auxiliar paralela e abaixo do eixo x , a profundidade p , para VS ($p = 2,75$ cm); em seguida traçar reta auxiliar paralela ao eixo x .

c. Construir primeiramente a VISTA FRONTAL (VF) (Figura 190). As arestas não visíveis devem ser representadas por linhas auxiliares tracejadas (traços estreitos, leves, de comprimentos iguais e igualmente espaçados).

Todas as alturas medidas na VF são comuns às das VP, VLE e VLD; assim, através de retas auxiliares, paralelas ao eixo x , “prolongam-se” as alturas da VF para as VP, VLE e VLD.

Também todas as larguras medidas na VF são comuns às da VS e por meio de retas auxiliares, paralelas ao eixo y , “prolongam-se” as larguras da VF para a VS.

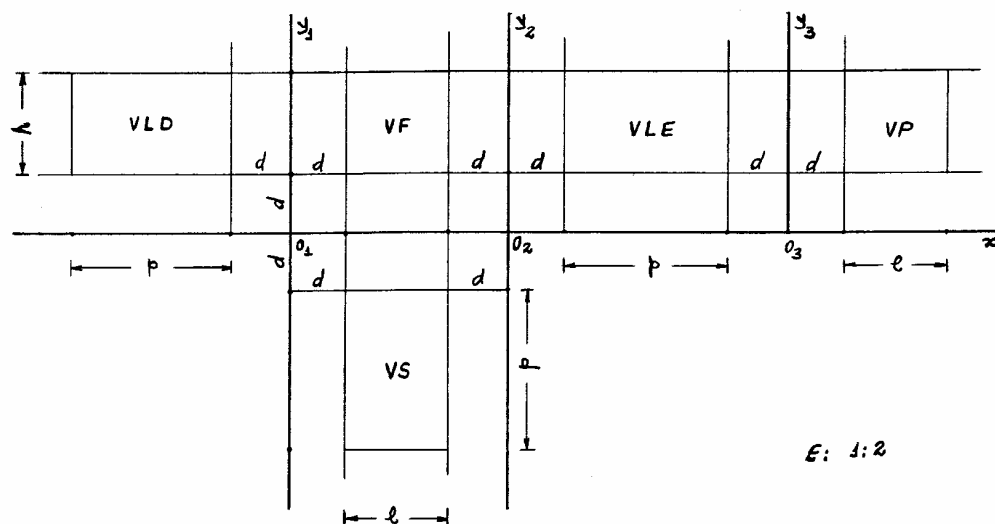


FIGURA 189. Representação das largura, profundidade e altura máximas das vistas ortográficas.

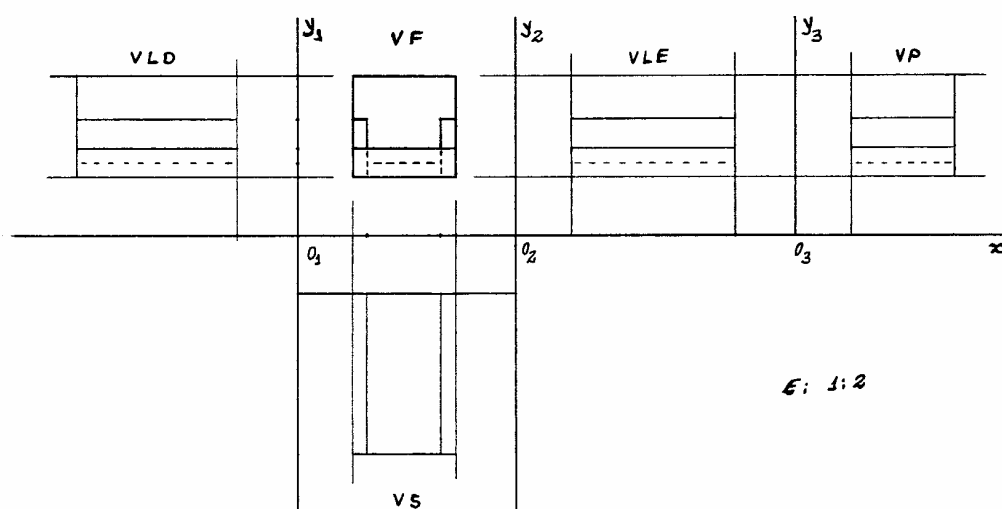


FIGURA 190. Construção da vista frontal - início de construção das demais vistas ortográficas.

d. Concluir a VISTA SUPERIOR (VS) marcando as demais profundidades necessárias e traçando retas auxiliares paralelas ao eixo x (Figura 191).

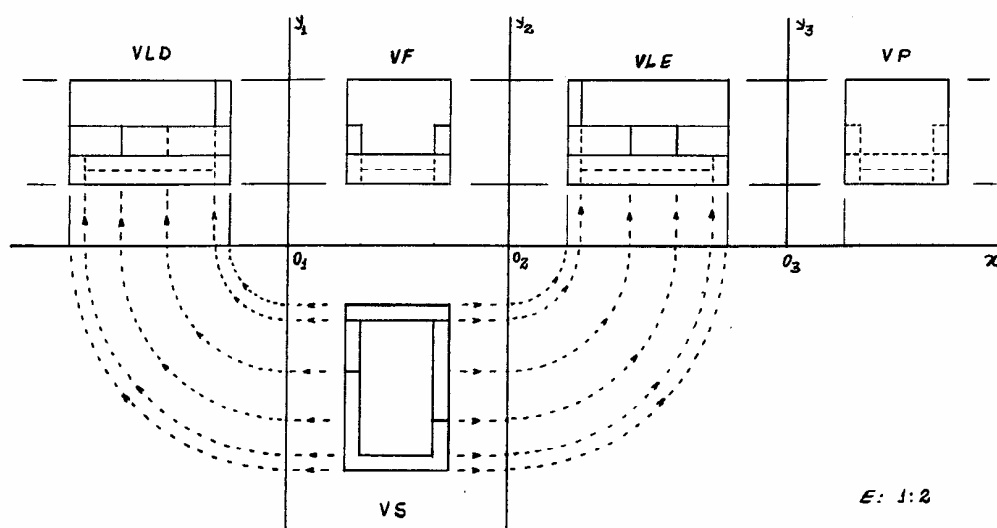


FIGURA 191. Construção da vista superior - início de construção das vistas laterais e frontal.

1. Transportar para o eixo y_1 todas as profundidades visíveis, ou mesmo as invisíveis que se quiser representar, do lado direito do objeto (ou do lado direito da VS).

2. Rebater as profundidades transportadas para y_1 no sentido horário para o eixo x, obtendo-se pontos equivalentes neste eixo. Pelos pontos obtidos, traçar retas auxiliares paralelas ao eixo y_1 até interceptarem as respectivas alturas “prolongadas” da vista frontal (VF), obtendo as particularidades do objeto que se deseja representar na VLD.

3. Transportar para o eixo y_2 todas as profundidades visíveis, ou mesmo as invisíveis que se quiser representar, do lado esquerdo do objeto (ou do lado esquerdo da VS).

4. Rebater as profundidades transportadas para y_2 no sentido anti-horário para o eixo x, obtendo-se pontos equivalentes neste eixo. Pelos pontos obtidos, traçar retas auxiliares paralelas ao eixo y_2 até interceptarem as respectivas alturas “prolongadas” da vista frontal (VF), obtendo as particularidades do objeto que se deseja representar na VLE.

OBSERVAÇÕES:

1. O rebatimento é feito com um compasso com centro na origem dos eixos ou por meio de segmentos de reta inclinados de 45° .
2. Se se deseja obter apenas a VLD, deve-se realizar apenas os itens 1 e 2; se se deseja obter apenas a VLE, deve-se realizar apenas os itens 3 e 4.
- e. Apagar o excesso de linhas auxiliares (Figura 192).

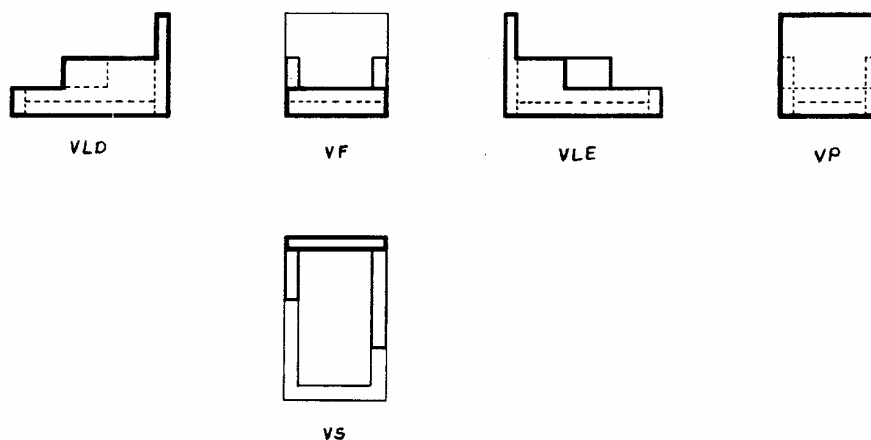


FIGURA 192. Vistas ortográficas principais de um objeto no 1º diedro.

f. Representar as *arestas visíveis* do objeto em suas vistas ortográficas por linhas *contínuas* (de mesma largura) e as *não visíveis*, e necessárias, por linhas *tracejadas* (traços de comprimentos iguais, igualmente espaçados e de mesma largura) (Figura 192). Diferenciar os planos em que se encontram as arestas do objeto representadas em cada vista ortográfica, por meio de linhas de diferentes larguras. *As arestas visíveis que estão mais próximas do observador devem ser representadas por linhas contínuas mais largas que aquelas mais distantes* (primeiramente representam-se todas as arestas da vista com linha de mesma largura (a largura mínima ou a mais estreita); posteriormente aumenta-se para dentro as larguras das linhas, traçando-se paralela à linha inicial e enchendo o espaço vazio entre elas; quanto mais próxima estiver uma aresta do observador maior deve ser a sua largura, porém compatível com a largura mínima utilizada na vista). **A largura da linha mais larga deve ser no mínimo o dobro da largura da linha mais estreita.** A largura de linhas que representam arestas em um determinado plano deve ser a mesma em qualquer uma das vistas desenhadas na mesma escala, independentemente do número de planos existentes em cada vista; ou seja: arestas em primeiro plano devem ser representadas por linhas mais largas e de mesma largura em qualquer uma das vistas, desenhadas na mesma escala, e assim sucessivamente (NBR 8403 - ABNT, 1984).

10.8. EXERCÍCIOS

Vistas ortográficas.

Objetivos: Construir as vistas frontal, superior e laterais direita e esquerda de um objeto.

Conhecimentos necessários: Escala. Método de construção das vistas ortográficas.

Bibliografia consultada:

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Aplicação de linhas em desenhos – Tipos de linhas – Larguras das linhas* – NBR 8403. Rio de Janeiro, 1984. 5 p.

MONTENEGRO, G. A. *Desenho arquitetônico*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1995. p. 40-43.

SOUZA, E. B. de. *Desenho técnico aplicado à Agronomia*. Mossoró: ESAM. (xerox de notas de aula).

UNTAR, J; JENTZCH, R. *Desenho arquitetônico*. Viçosa: UFV - Imprensa Universitária, 1987. p. 8-9.

Obter as vistas ortográficas: VF, VS, VLE, VLD e VP, a partir dos objetos representados, em perspectivas, nas Figuras 193 a 199.

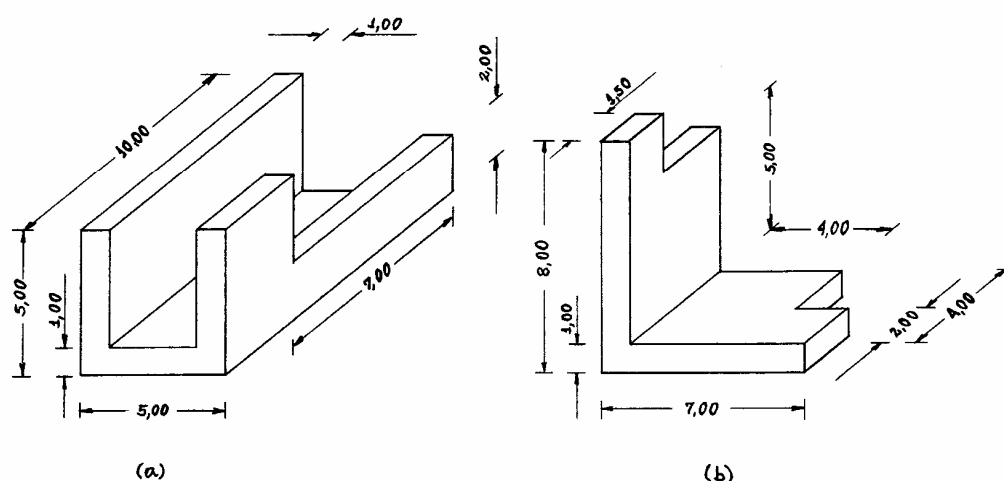


FIGURA 193. Perspectivas de objetos a serem utilizadas na obtenção das vistas ortográficas (dimensões em cm).

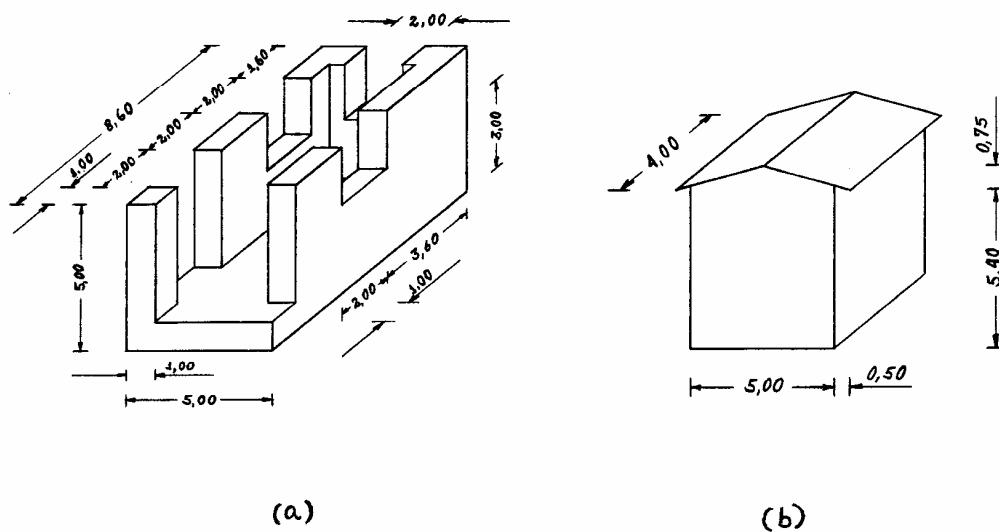


FIGURA 194. Perspectivas de objetos a serem utilizadas na obtenção das vistas ortográficas (dimensões em cm).

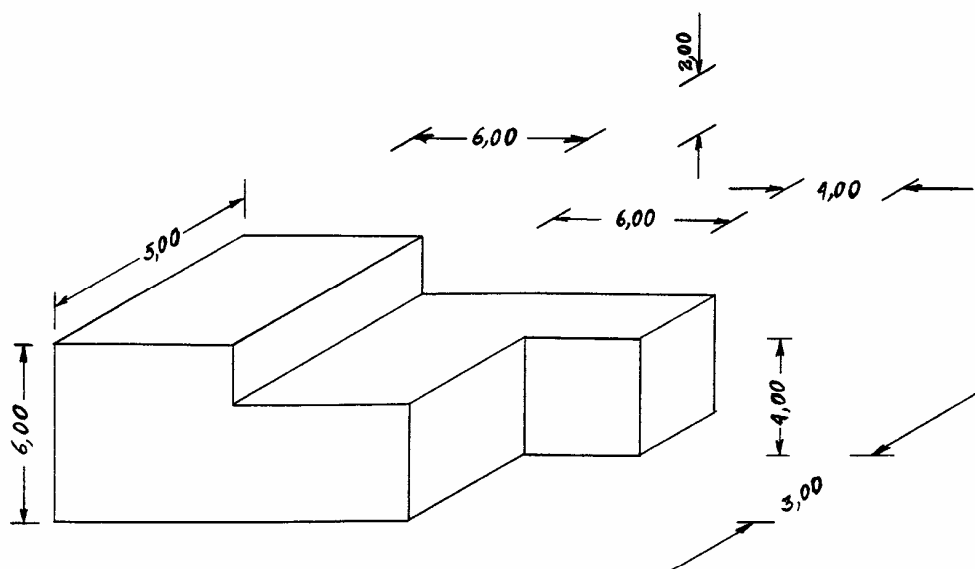


FIGURA 195. Perspectiva de um objeto a ser utilizada na obtenção das vistas ortográficas (dimensões em cm).

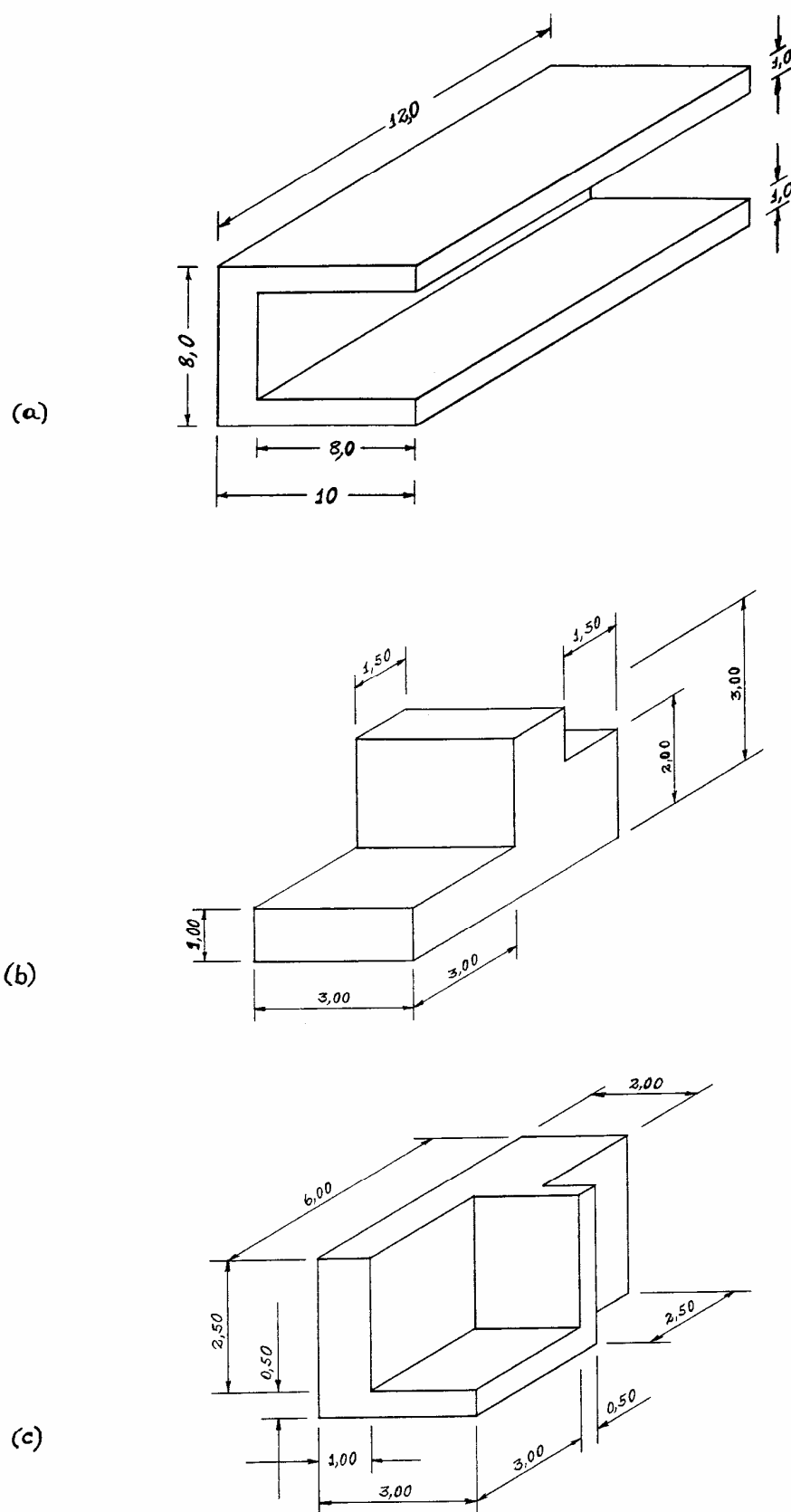


FIGURA 196. Perspectivas de objetos a serem utilizadas na obtenção das vistas ortográficas (dimensões em cm).

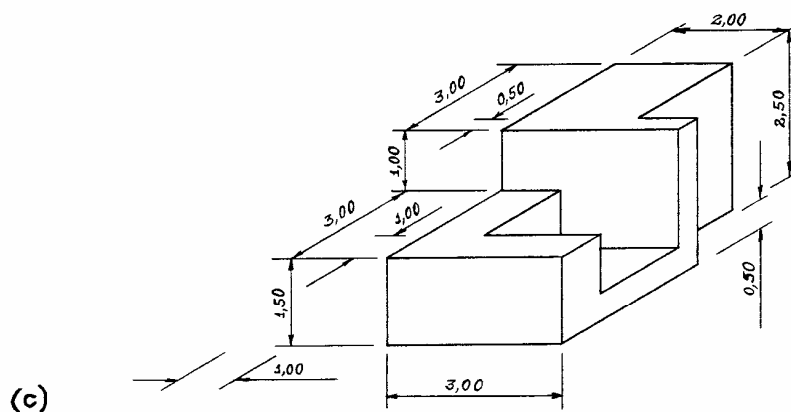
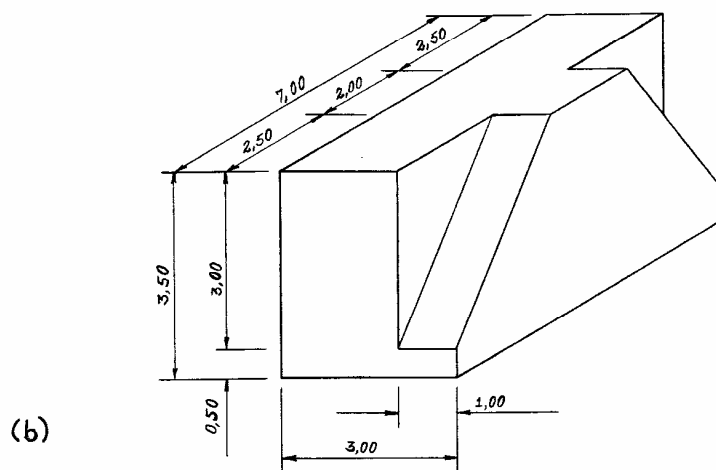
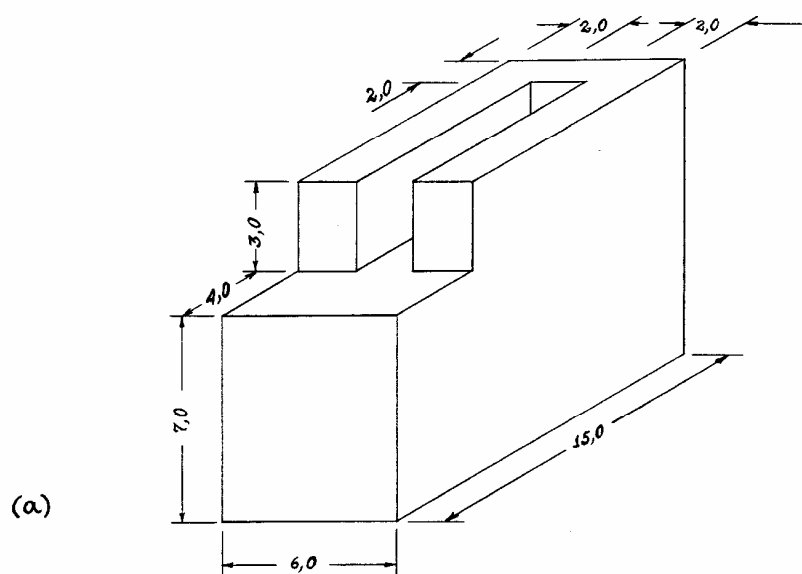
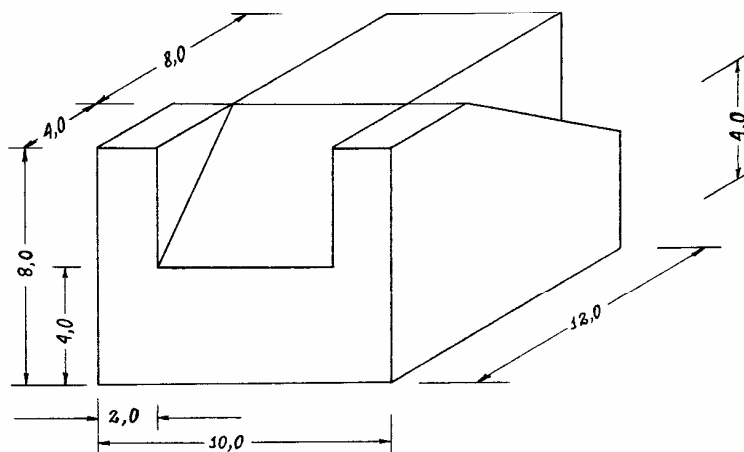
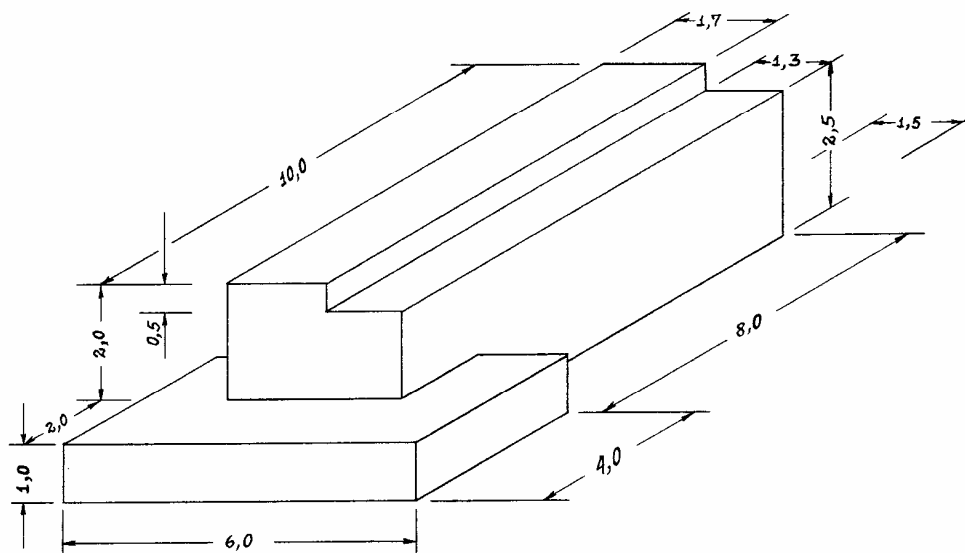


FIGURA 197. Perspectivas de objetos a serem utilizadas na obtenção das vistas ortográficas (dimensões em cm).

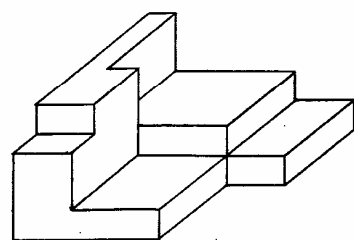


(a)

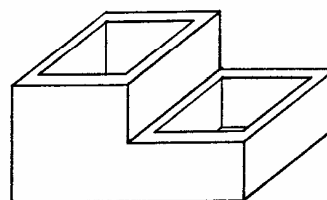


(b)

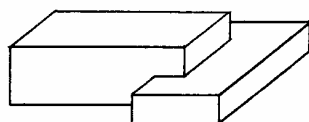
FIGURA 198. Perspectivas de objetos a serem utilizadas na obtenção das vistas ortográficas (dimensões em cm).



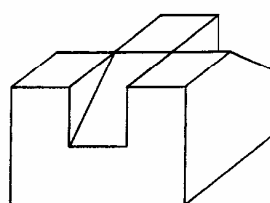
(a)



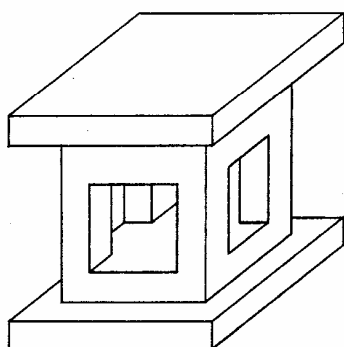
(b)



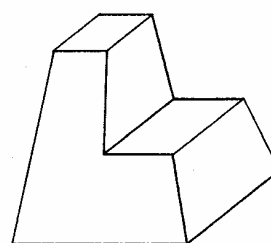
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURA 199. Perspectivas de objetos a serem utilizadas na obtenção das vistas ortográficas. Obter as medidas ou transportá-las.

11. BIBLIOGRAFIA

1. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Emprego de escalas em desenho técnico* – NBR 8196. Rio de Janeiro, 1992. 2 p.
2. _____. *Aplicação de linhas em desenhos – Tipos de linhas – Larguras das linhas* – NBR 8403. Rio de Janeiro, 1984. 5 p.
3. COMASTRI, J. A. *Topografia; planimetria*. Viçosa: UFV - Imprensa Universitária, 1973. p. 317-327.
4. MONTENEGRO, G. A. *Desenho arquitetônico*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1995. 142 p.
5. PINHEIRO, V. A. *Noções de Geometria Descritiva; ponto, reta e plano*. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970. Vol. I. 230 p.
6. PRÍNCIPE JÚNIOR, A. F. *Noções de geometria descritiva*. 37. ed. São Paulo: Nobel, 1990. Vol. I. 311 p.
7. SOUZA, E. B. de. *Desenho técnico aplicado à Agronomia*. Mossoró: ESAM. (xerox de notas de aula).
8. _____. *Noções de projeção; II unidade; lista de exercícios*. Mossoró: ESAM.
9. UNTAR, J. & JENTZCH, R. *Desenho arquitetônico*. Viçosa: UFV - Imprensa Universitária, 1987. 64 p.

BOLETINS PUBLICADOS

	TÍTULO	AUTOR(ES)
001	Evolução de saís e adequabilidade da água do açude Jatobá I, Patos - PB, em distintas épocas do ano.	CAVALCANTE, L. F. SOUSA, L. F. P. AMARO FILHO, J.
002	Avaliação da uniformidade de distribuição de água de um sistema de irrigação por aspersão, em uma área do município de Mossoró - RN.	MEDEIROS FILHO, J. C. GUERRA, H. O. C. AMARO FILHO, J. NOGUEIRA, F. C.
003	Cálculo da densidade do biogás e sua utilização na fórmula de Pole, para dimensionamento de tubulações.	SATHLER, N. S. SATHLER, M. G. B.
004	Dimensionamento de tubulações para biogás.	SATHLER, N. S. SATHLER, M. G. B.
005	Influência do estresse hídrico na produção de quatro cultivares de caupi.	FERNANDES, J. B. AMARO FILHO, J. MEDINA, B. F.
006	Calibração de um neutrômetro Troxler para um latossolo do brejo paraibano.	AMARO FILHO, J. MEDINA, B. F.
007	Resposta do feijão caupi (<i>Vigna unguiculata</i> (L.) Walp.) a diferentes níveis de irrigação.	ESPÍNOLA, F. C. MEDINA, B. F. MAIA NETO, J. M. NOGUEIRA, F. C. AMARO FILHO, J. MEDEIROS FILHO, J. C.
008	Adequação do ajuste de dados de precipitação do Estado do Rio Grande do Norte a duas funções de distribuição de probabilidades.	MEDINA, B. F.
009	Estimativa da evapotranspiração máxima e coeficientes de cultivo para feijão caupi e milho.	ESPÍNOLA SOBRINHO, J. MEDINA, B. F. MAIA NETO, J. M. AMARO FILHO, J. AQUINO, F. P.
010	Probabilidades de precipitação para a estação chuvosa do Estado do Rio Grande do Norte.	MEDINA, B. F. MAIA NETO, J. M.
011	Determinação de campo da evapotranspiração e dos coeficientes de cultivo para caupi e milho.	ESPÍNOLA SOBRINHO, J. MEDINA, B. F. MAIA NETO, J. M.
012	Propriedades físicas de grãos de quatro cultivares de sorgo (<i>Sorghum bicolor</i> (L.) Moench).	SATHLER, M. G. B. CASTRO, J. R. SATHLER, N. S. REGO, E. C. B.

013	Comparação de métodos de determinação da massa específica aparente de grãos de sorgo (<i>Sorghum bicolor</i> (L) Moench).	SATHLER, M. G. B. SATHLER, N. S. TEIXEIRA, M. M. REGO, E. C. B. SOUZA, R. P.
014	Solução dos Exercícios de Física de Sears & Zemansky, Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos, 1977. Equilíbrio.	SATHLER, N. S.
015	Desenvolvimento matemático de problemas de condução de calor.	SATHLER, M. G. B. SATHLER, N. S.
016	Solução dos Exercícios de Física de Sears & Zemansky, Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos, 1977. Movimentos retilíneo e plano.	SATHLER, N. S.
017	Procedimentos de análise de solo e água para diagnóstico de salinidade.	MEDEIROS, J. F. GHEYI, H. R. BATISTA, M. A. F.
018	Solução dos Exercícios de Física de Sears & Zemansky, Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos, 1977. Trabalho e energia.	SATHLER, N. S.
019	Solução dos Exercícios de Física de Sears & Zemansky, Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos, 1977 (1990). Impulso e momento linear.	SATHLER, N. S.
020	Comportamento da umidade de grãos de arroz (<i>Oryza sativa</i> L.) em casca submetidos a secagem natural, na localidade de Felipe Guerra - RN.	BARRA, T. S. SATHLER, M. G. B. MEDEIROS, J. F. SATHLER, N. S.
021	Solução dos Exercícios de Física de Sears & Zemansky, Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos, 1977 (1990). Rotação.	SATHLER, N. S.
022	A qualidade da água de irrigação.	MEDEIROS, J. F. GHEYI, H. R.
023	Comparação de diferentes tipos de embalagens para o armazenamento de sementes de mandacaru (<i>Cereus jamacaru</i> P. DC.).	MEDEIROS, J. F. SATHLER, M. G. B. GÓIS, F. C.
024	Perda de carga unitária em condutos forçados empregados na irrigação (equação Universal).	NOGUEIRA, F. C. ESPÍNOLA, F. C. S. OLIVEIRA FILHO, F. X.
025	Motores elétricos de indução com rotor em gaiola; características, comando e proteção.	SATHLER, N. S.

A digitalização desse trabalho foi realizada por MAYKY FRANCLEY PEREIRA DE LIMA, estudante do 2º período do curso de Agronomia, participante do Programa de Bolsa Atividade da Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, que possibilita que os estudantes menos favorecidos e com os melhores rendimentos acadêmicos possam se manter na Instituição, como parte das atividades previstas para o semestre 2008.2.

Mossoró, 21 de novembro de 2008.

Nilson de Sousa Sathler

CRÍTICAS E/OU SUGESTÕES

sathler@ufersa.edu.br

DESENHO

Impresso na Gráfica Tércio Rosado da ESAM
Capa: Doação do autor.
Criação e impressão da capa: Igramol