



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE CARAÚBAS
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

CAIO MAX FERREIRA DOS SANTOS

INTEGRAIS DUPLAS E O VOLUME DE PISCINAS

CARAÚBAS – RN

2024

CAIO MAX FERREIRA DOS SANTOS

INTEGRAIS DUPLAS E O VOLUME DE PISCINAS

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, Campus Caraúbas como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Antonival Lopes do Nascimento Filho.

CARAÚBAS - RN

2024

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S237i Santos, Caio Max Ferreira dos.
Integrais duplas e o volume de piscinas / Caio
Max Ferreira dos Santos. - 2024.
48 f. : il.

Orientador: Antonival Lopes do Nascimento
Filho.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2024.

1. integrais duplas. 2. volume. 3. piscina. 4.
matemática. I. Nascimento Filho, Antonival Lopes
do, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Caraúbas
Bibliotecária: Dalvanira Brito Rodrigues
CRB: 15/700

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

CAIO MAX FERREIRA DOS SANTOS

INTEGRAIS DUPLAS E O VOLUME DE PISCINAS

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, Campus Caraúbas como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: ____ / ____ / 2 ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonival Lopes do Nascimento Filho (UFERSA)
Presidente

Profa. Dra. Kelyane Barboza de Abreu (UFERSA)
Membro Examinador

Profa. Dra. Dayane Santos de Lira (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me conceder forças, sabedoria e discernimento para enfrentar cada desafio ao longo dessa jornada. Sem a Sua graça, nada seria possível.

Agradeço imensamente ao meu pai e à minha mãe, que sempre acreditaram em mim, me apoiaram incondicionalmente e estiveram presentes em cada momento, me motivando a seguir em frente, mesmo nas horas mais difíceis.

À minha namorada Daiane, pelo carinho, compreensão e pelo suporte emocional constante, especialmente nas fases mais tensas. Sua presença foi essencial para que eu pudesse me manter firme e motivado.

Ao meu orientador Antonival, pelo apoio, paciência e pelos ensinamentos transmitidos durante todo o processo de desenvolvimento deste trabalho. Suas orientações foram fundamentais para o crescimento do projeto e para o meu aprendizado.

Ao senhor Evandro e sua irmã por colaborar com o trabalho ao ceder o espaço da piscina para a realização de todos os estudos necessários.

Aos meus amigos, Mairo e Ronaldo que compartilharam momentos de alegria, me ajudaram nos momentos de incerteza e me proporcionaram alívio nas horas de descontração.

Por fim, agradeço à minha família em geral, por todo o apoio e amor que sempre me ofereceram. Cada palavra de incentivo e cada gesto de carinho fizeram toda a diferença para que eu chegasse até aqui.

Otimismo é a fé que leva à realização; nada
pode ser feito sem esperança.

Helen Keller

RESUMO

O presente trabalho aborda os objetivos de revisar os conceitos de integrais duplas, integrais duplas em coordenadas polares e cartesianas para aplicar os conceitos a fim de determinar os volumes de formas não triviais e demonstrar sua aplicabilidade no cálculo do volume de piscinas. Justifica-se pela necessidade de soluções para o cálculo de volume de piscinas com formatos irregulares. Metodologicamente, o estudo é feito de forma teórica e prática, com o auxílio do Software Geogebra para modelar a geometria da piscina na obtenção das funções necessárias para o cálculo. Conclui-se que o uso de integrais duplas é uma ferramenta eficiente para o cálculo de volumes de formas complexas.

Palavras-chave: integrais duplas; volume; piscinas; matemática.

ABSTRACT

The present work addresses the objectives of reviewing the concepts of double integrals, double integrals in polar and Cartesian coordinates to apply the concepts in order to determine the volumes of non-trivial shapes and demonstrate their applicability in the calculation of the volume of swimming pools. It is justified by the need for solutions for calculating the volume of irregularly shaped pools. Methodologically, the study is done in a theoretical and practical way, with the help of the Geogebra Software to model its geometry in obtaining the necessary functions for the calculation. It is concluded that the use of double integrals is an efficient tool for the calculation of volumes of complex shapes.

Keywords: double integrals; volume; swimming pools; mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Piscina forma complexa.....	11
Figura 2 - Soma de Riemann.	13
Figura 3 - Sub-Retângulos região R.	14
Figura 4 - Representação da coluna do sub-retângulo.....	14
Figura 5 - Região D contida em R.....	16
Figura 6 - Região D.	16
Figura 7 - Exemplo Integrais Tipo I.	17
Figura 8 - Exemplo Integrais Tipo II.....	18
Figura 9 - D com uma região tipo I.	18
Figura 10 - Região R.	20
Figura 11 - Divisão de R em sub-retângulos polares.	21
Figura 12 - Gráfico Relação coordenadas polares e coordenadas cartesianas.	21
Figura 13 - Gráfico Relação dA e $rdrd\theta$	22
Figura 14 - Gráfico semi-plano superior.	23
Figura 15 - Gráfico do sólido.	27
Figura 16 - Representação da piscina dividida em dois volumes.....	30
Figura 17 - Reta para cálculo da função.	30
Figura 18 - Piscina a ser estudada.	34
Figura 19 - Medição do comprimento da piscina.....	35
Figura 20 - Medição da Largura da piscina.....	35
Figura 21 - Medição da Profundidade da piscina.....	36
Figura 22 - Região D a ser calculada.....	37
Figura 23 - Região D1 a ser calculada.....	37
Figura 24 - Região D2 a ser calculada.....	38
Figura 25 - Representação do trapézio a ser calculado.	41
Figura 26 - Representação da distância "d".....	42
Figura 27 - Representação do valor de A.	43
Figura 28 - Valores do trapézio após ser modelado.	43
Figura 29 - Corte Transversal dos Degraus.....	44
Figura 30 - Representação da divisão de áreas na piscina.....	45
Figura 31 - Dados Reais aplicados para cálculo de área.	45

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 INTEGRAIS DUPLAS.....	12
2.1 REVISÃO INTEGRAL DEFINIDA	12
2.2 INTEGRAL DUPLA E VOLUME.....	13
2.3 INTEGRAL DUPLA SOBRE REGIÕES GERAIS	15
3 INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES	19
4 CÁLCULO DE VOLUME DE PISCINAS	29
5 ANÁLISE DE RESULTADOS.....	46
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49
REFERÊNCIAS	50

1 INTRODUÇÃO

O cálculo de volumes desempenha um papel crucial nas áreas de engenharia e arquitetura, especialmente na execução de projetos de piscinas. Conhecer o volume de uma piscina é essencial não apenas para garantir maior precisão e confiabilidade no projeto, mas também para calcular de forma eficiente os recursos necessários, como a quantidade de água e os produtos químicos para manutenção.

Atualmente, engenheiros civis e arquitetos enfrentam o desafio constante de inovar em seus projetos para atender às crescentes demandas dos clientes. Um exemplo disso é a adoção de formas geométricas complexas, que fogem do padrão retangular ou circular comumente utilizado em piscinas. Esses projetos mais elaborados requerem métodos avançados para o cálculo do volume, uma vez que a matemática básica não é suficiente para lidar com tais geometrias.

Figura 1 - Piscina forma complexa.



Fonte: Google Imagens.

Segundo Leithold (1994), uma das aplicações das integrais duplas é o cálculo do volume de uma região R^2 de uma figura qualquer no espaço. Nesse contexto, o uso de integrais duplas se mostra eficiente para calcular volumes de formas complexas, onde métodos tradicionais falham.

O objetivo geral deste trabalho é determinar, por meio de integrais duplas, o volume de piscinas com formatos não triviais, utilizando o software Geogebra como ferramenta de apoio. Para isso, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos: calcular volumes

via integrais duplas em coordenadas cartesianas; definir e comparar coordenadas polares com cartesianas; e aplicar coordenadas polares para o cálculo do volume de piscinas.

A metodologia empregada inclui uma revisão bibliográfica e a modelagem matemática. Inicialmente, será realizada uma revisão da literatura sobre integrais duplas e coordenadas polares, seguida de uma demonstração do conceito de volume. Em seguida, será estudado o caso de uma piscina localizada na cidade de Caraúbas-RN, cujos dados serão utilizados para a modelagem no software Geogebra, permitindo o cálculo do volume por meio de integrais duplas.

No capítulo 2, será apresentada uma revisão sobre integrais definidas, que fornecerá a base para o estudo das integrais duplas e sua aplicação no cálculo de volumes. O capítulo 3 focará na comparação entre integrais duplas em coordenadas cartesianas e polares. Já o capítulo 4 trará a aplicação prática do cálculo de volumes de piscinas, utilizando como exemplo uma piscina residencial real.

2 INTEGRAIS DUPLAS

O conceito de integrais duplas advém do conceito de integrais definidas, onde esse conceito é utilizado para o cálculo não só de volumes, mas também de massas, centroides de regiões mais gerais (STEWART, 2013).

2.1 REVISÃO INTEGRAL DEFINIDA

Segundo Craizer e Tavares (2002, p. 59) “A integral dupla é a soma de infinitésimos, cada parcela sendo a multiplicação do valor da função de um ponto da região de integração pela área de uma região infinitesimal em torno desse ponto”. Sendo assim, vamos ver como é feito esse procedimento.

Inicialmente iremos entender a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ de uma função $f \rightarrow R$ continua definida no intervalo $[a,b]$ no conjunto R dos números reais onde $f(x) > 0$ em todo $x \in R$. Dividindo o intervalo $[a,b]$ em subintervalos n adotando $n-1$ pontos, onde $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ estão entre o intervalo a e b com a condição onde $a < X_1 < X_2 < \dots < X_{n-1} < b$, considerando que $a = X_0$ e $b = X_n$ para um melhor entendimento.

O conjunto de $P = \{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n\}$ é denominado de partição do intervalo $[a,b]$. A necessidade dessa partição P é para que P divida o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, logo obtém-se $[X_1, X_2], \dots, [X_{n-1}, X_n]$.

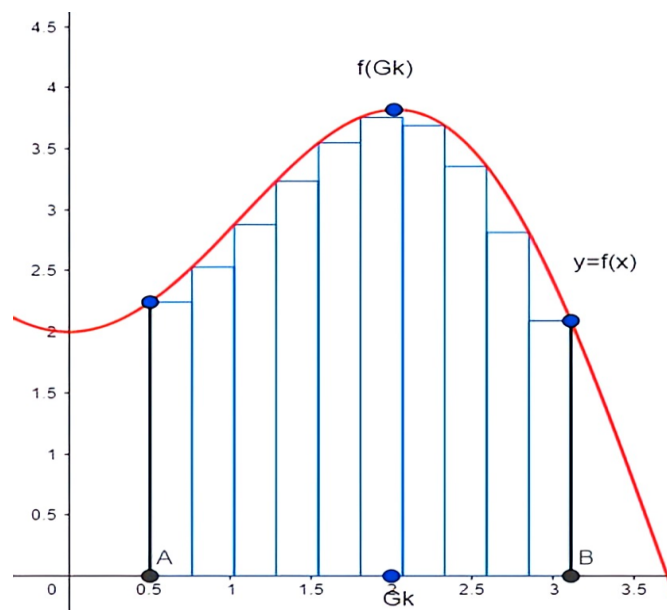
Após a divisão entre P e o intervalo $[a,b]$ e obter o primeiro subintervalo $[X_1, X_2]$ no qual será o primeiro, e o $[X_{n-1}, X_n]$ será o último que será denominado de k -ésimo de P . Onde definiremos para qualquer k entre $0 \leq k \leq n$ um G_k dentro do intervalo $[X_{k-1}, X_k]$, logo assim teremos a soma de Riemann:

$$S = \sum_{k=1}^n f(G_k) \Delta_{xk}$$

Observando que $\Delta_{xk} = X_k - X_{k-1}$ será o comprimento k -ésimo do subintervalo. Se $\|P\|$ é a norma da partição maior do Δ_{xk} , então:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{K=1}^n f(G_k) \Delta_{xk}$$

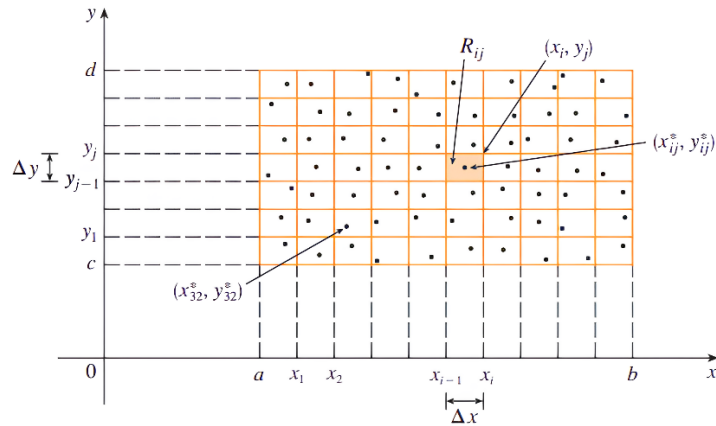
Figura 2 - Soma de Riemann.



Fonte: Autoria Própria.

2.2 INTEGRAL DUPLA E VOLUME

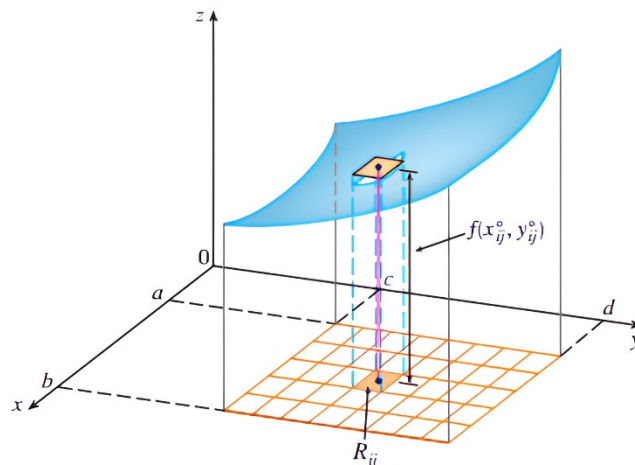
Após rever o conceito de integral definida, podemos seguir a mesma linha de raciocínio para definir as integrais duplas de forma geométrica calculando o volume de um sólido (STEWART, 2013).

Figura 3 - Sub-Retângulos região R.

Fonte: Stewart (2013).

Considerando uma função $f(x,y)$ de duas variáveis, para determinar o volume do sólido acima de um retângulo R , é necessário, inicialmente, dividir esse retângulo em vários subintervalos de mesmo comprimento. Ao traçar retas paralelas aos eixos coordenados, formam-se sub-retângulos $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$. A área de cada sub-retângulo é dada por $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

Posteriormente vamos arbitrar o que é conhecido por ponto de amostragem sendo eles x_{ij} e y_{ij} de um sub-retângulo, assim teremos algo com um formato de coluna como ilustrado abaixo:

Figura 4 - Representação da coluna do sub-retângulo.

Fonte: Stewart (2013).

Diante disso podemos calcular o volume dessa coluna através da multiplicação da sua base R_{ij} e sua altura $f(x_{ij}, y_{ij})$ logo temos:

$$f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$$

Com essas informações, para obter o volume total do sólido, podemos realizar o somatório das contribuições de todos os sub-retângulos, de forma que:

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A.$$

Logo, por definição se existir o limite, a integral dupla de f do retângulo R é:

$$\iint_R f(x, y) dA = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A.$$

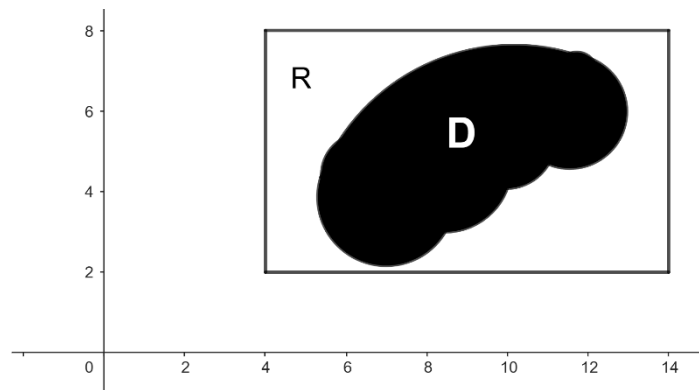
Segundo Àvila (2006), considerando que a função $f(x, y)$ seja positiva, em determinados pontos e negativos em outros, a integral será formada por duas partes, onde haverá dois volumes a serem calculados, sendo um da parte positiva e outro da parte negativa. Logo, o volume a ser calculado para $f(x) \geq 0$ será:

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

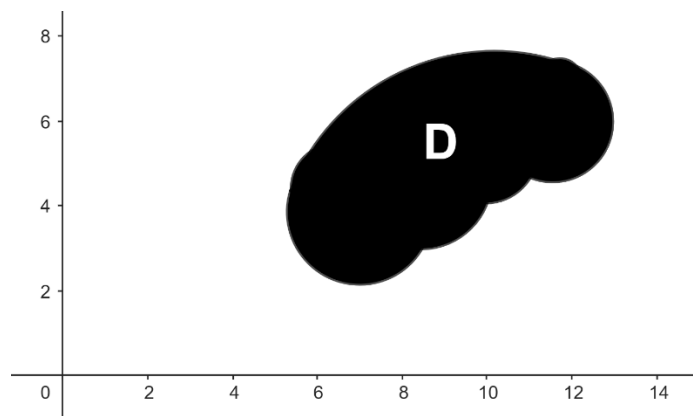
2.3 INTEGRAL DUPLA SOBRE REGIÕES GERAIS

As integrais duplas permitem não apenas integrar uma função f sobre um retângulo, mas também sobre uma região D , limitada e contida em R , o que nos possibilita definir uma função F com domínio em R (STEWART, 2013)

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0, & \text{se } f(x, y) \text{ está em } R \text{ mas em } D \end{cases}$$

Figura 5 - Região D contida em R.

Fonte: Autoria Própria.

Figura 6 - Região D.

Fonte: Autoria Própria.

Logo define-se que a integral dupla de f em D , quando F for integrável em R , por:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA$$

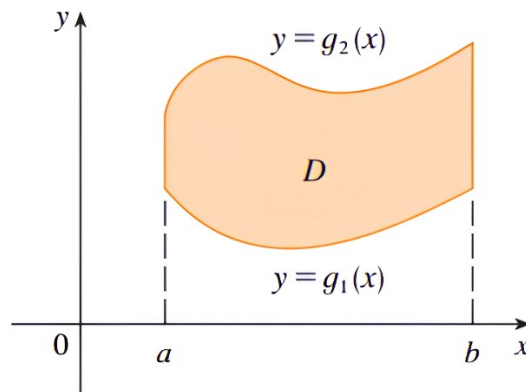
Onde F é dada de acordo com as condições mostradas acima. O volume do sólido estará abaixo da curva de f quando $f(x, y) \geq 0$, logo para que $\iint_D f(x, y) dA$ exista, a $\iint_R F(x, y) dA$ também precisa existir. Sendo assim, nas integrais duplas irão ter dois tipos, sendo eles, tipo I e o tipo II (STEWART, 2013).

Integrais do tipo I serão reconhecidas a partir da visualização do gráfico e a identificação da região formada entre duas funções contínuas, onde:

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Lembrando que g_1 e g_2 no intervalo $[a, b]$ são contínuas.

Figura 7 - Exemplo Integrais Tipo I.



Fonte: Stewart (2013).

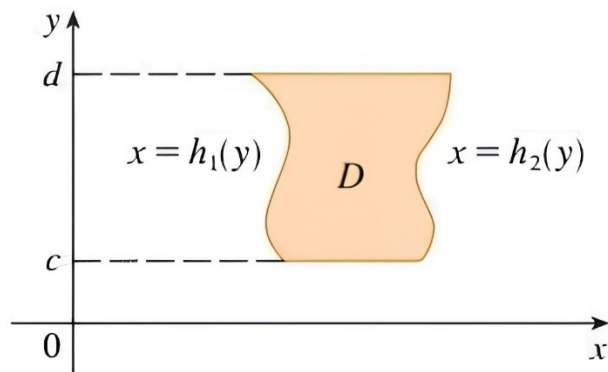
Logo para o cálculo de integrais do tipo I temos a seguinte fórmula:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Integrais do tipo II também serão reconhecidas a partir da visualização do gráfico e a identificação da região formada, onde:

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

Lembrando que h_1 e h_2 no intervalo $[c, d]$ são contínuas.

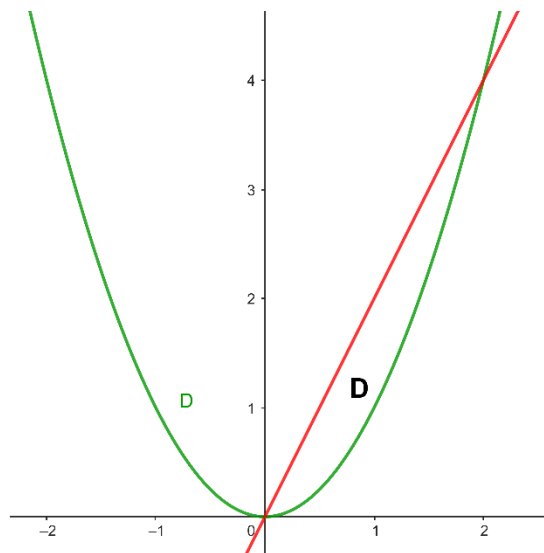
Figura 8 - Exemplo Integrais Tipo II.

Fonte: Stewart (2013).

Logo para o cálculo de integrais do tipo II temos a seguinte fórmula:

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy.$$

Exemplo 2.3.1: Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide $Z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$, (STEWART,2013, p. 889).

Figura 9 - D com uma região tipo I.

Fonte: Autoria própria.

Solução: Observando o gráfico pode se retirar a seguinte informação, que é uma integral dupla de tipo I, pois de acordo com Stewart (2013), integrais do tipo I serão reconhecidas a partir da

visualização do gráfico e a identificação da região formada entre duas funções contínuas em x , onde:

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Logo observando o gráfico da Figura 9 tem-se:

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Partindo disso para o cálculo do volume do sólido segundo Stewart (2013), integrais do tipo I tem a seguinte fórmula:

$$V = \iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Sendo assim o volume de $Z = x^2 + y^2$ acima de D será calculado da seguinte forma:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx$$

Integrando em relação a y temos:

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left[\left(x^2 \cdot 2x + \frac{(2x)^3}{3} \right) - \left(x^2 \cdot x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} \right) \right] dx$$

Integrando em relação a x e aplicando os limites de integração, temos:

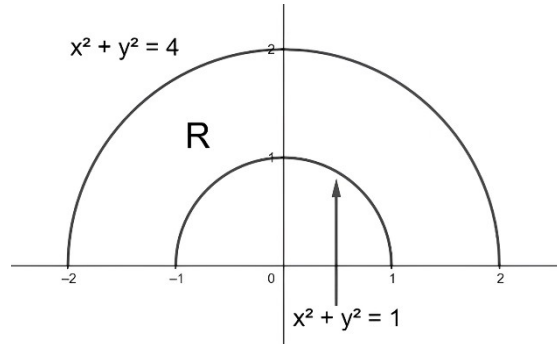
$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \right]_0^2 = \frac{216}{35} \text{ unidade de volume.}$$

3 INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES

Digamos que temos que calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y) dA$ onde a região R está demonstrada na figura abaixo, observando bem conclui-se que resolver em coordenadas

retangulares torna-se a resolução mais complexa, sendo assim, utiliza-se das coordenadas polares para concluir o que se pede.

Figura 10 - Região R.



Fonte: Autoria Própria.

A região da Figura 10 onde, $R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ é um caso especial de um retângulo polar, onde a definição para uma região de retângulo polar é dada por:

$$R = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Sendo assim, para o cálculo o intervalo $[a, b]$ é dividido em subintervalos de larguras iguais, denominado de m, logo:

$$\Delta r = \frac{(b - a)}{m}.$$

O mesmo raciocínio se aplica ao intervalo $[\alpha, \beta]$ que também será dividido em subintervalos de larguras iguais, denominados de n, sendo assim:

$$\Delta \theta = \frac{(\beta - \alpha)}{n}.$$

Dessa forma, o retângulo polar R é dividido em sub-retângulos polares R_{ij} , conforme ilustrado Figura 11. Assim, temos:

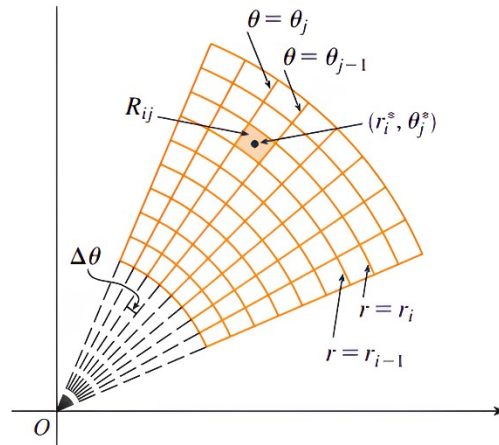
$$R_{ij} = \{(r, \theta) : r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

Para um melhor entendimento denominamos o centro do sub-retângulo:

$$r_i^* = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}$$

$$\theta_j^* = \frac{\theta_{j-1} + \theta_j}{2}$$

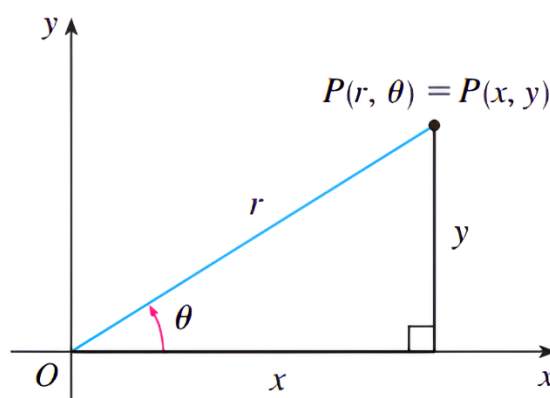
Figura 11 - Divisão de R em sub-retângulos polares.



Fonte: Stewart (2013).

Também será necessário realizar a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. Para isso, primeiro vamos relacionar coordenadas polares e coordenadas cartesianas, observe a Figura 12.

Figura 12 - Gráfico Relação coordenadas polares e coordenadas cartesianas.



Fonte: Stewart (2013).

Observando a Figura 12 pode-se observar que se tem um triângulo retângulo, logo para relacioná-los utilizamos o $\cos\theta$ e o $\sin\theta$ logo vamos ter a seguinte relação:

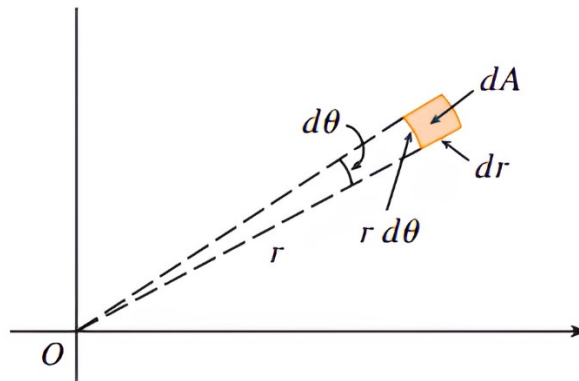
$$\cos\theta = \frac{x}{r} ; \sin\theta = \frac{y}{r}$$

Multiplicando “r” nos dois lados da igualdade tem-se:

$$x = r\cos\theta ; y = r\sin\theta$$

Por fim, é necessário transformar $dx dy$ para $r dr d\theta$, o que pode ser feito observando a área diferencial dA . Como mostrado na Figura 13, dA corresponde a $r dr d\theta$.

Figura 13 - Gráfico Relação dA e $r dr d\theta$.



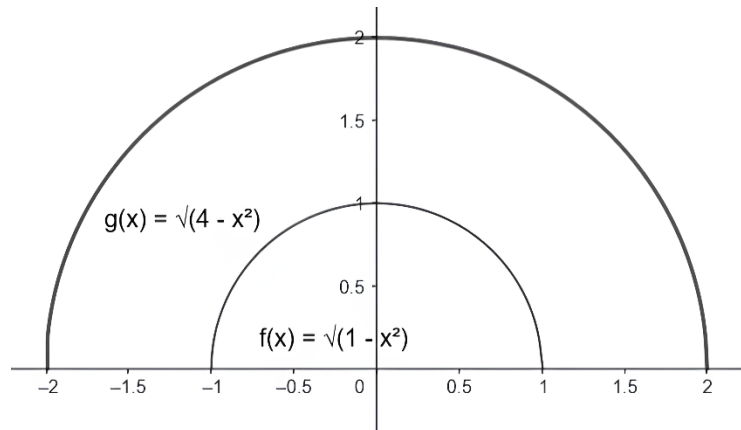
Fonte: Stewart (2013).

Para uma melhor compreensão do que foi citado acima vamos ver como é feito na prática analisando o exercício abaixo.

Exemplo 3.1: Calcule $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, onde R é a região do semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, (STEWART, 2013, p. 897).

Solução: Primeiramente tenta-se resolver por coordenadas cartesianas plotando o gráfico das funções onde teremos uma $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Figura 14 - Gráfico semi-plano superior.



Fonte: Autoria Própria.

Observa-se na Figura 14 que se tem como limites de integração $1 \leq x \leq 2$ e $\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$.

Então desta forma podemos aplicar na equação para o cálculo da área da região R, logo tem-se:

$$\int_1^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (3x + 4y^2) dy dx$$

Resolvendo em relação a y:

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (3x + 4y^2) dy &= \left[3xy + \frac{4}{3}y^3 \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \left[3x(\sqrt{4-x^2}) + \frac{4}{3}(\sqrt{4-x^2})^3 - 3x(\sqrt{1-x^2}) - \frac{4}{3}(\sqrt{1-x^2})^3 \right] \end{aligned}$$

Agora integrando em relação a x:

$$\int_1^2 \left[3x(\sqrt{4-x^2}) + \frac{4}{3}(\sqrt{4-x^2})^3 - 3x(\sqrt{1-x^2}) - \frac{4}{3}(\sqrt{1-x^2})^3 \right] dx$$

Observa-se que em coordenadas cartesianas a resolução do exercício se torna bem mais trabalhoso, nesse caso é aconselhado buscar uma solução através de coordenadas polares.

Segundo Stewart (2013), coordenadas polares de um ponto qualquer podem ser relacionadas diretamente com coordenadas retangulares através das equações $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e por fim e que $dA = r dr d\theta$, sendo assim utiliza-se a fórmula:

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

Observando a Figura 14 consegue-se extrair os seguintes dados:

$$\{(x, y) | y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

De acordo com Stewart (2013), em casos especiais de um retângulo polar onde $R = \{(r, \theta) | a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ tem-se que $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, logo:

$$\iint_R (3x + 4y^2) dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 [3r\cos\theta + 4(r\sin\theta)^2] r dr d\theta$$

Multiplicando o “r”:

$$\int_0^{\pi} \int_1^2 [3r^2\cos\theta + 4r(r\sin\theta)^2] dr d\theta$$

Resolvendo o quadrado e aplicando as multiplicações necessárias:

$$\int_0^{\pi} \int_1^2 [3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta] dr d\theta$$

Resolvendo em relação a r:

$$\begin{aligned} \int_1^2 [3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta] dr &= \left[\frac{3r^3}{3}\cos\theta + \frac{4r^4}{4}\sin^2\theta \right]_1^2 \\ \int_1^2 [3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta] dr &= [r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta]_1^2 \end{aligned}$$

Aplicando os limites de integração, temos que:

$$\int_1^2 [3r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta] dr = [2^3 \cos \theta + 2^4 \sin^2 \theta - 1^3 \cos \theta - 1^4 \sin^2 \theta]$$

$$\int_1^2 [3r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta] dr = [8 \cos \theta + 16 \sin^2 \theta - \cos \theta - \sin^2 \theta]$$

$$\int_1^2 [3r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta] dr = [7 \cos \theta + 15 \sin^2 \theta]$$

Após obter-se o resultado da integral em relação a r resolve-se a segunda integral em relação a θ :

$$\int_0^\pi [7 \cos \theta + 15 \sin^2 \theta] d\theta$$

Antes de partir para a integração de fato aplica-se uma identidade trigonométrica para facilitar o cálculo onde, $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ logo, tem se:

$$\int_0^\pi \left[7 \cos \theta + 15 \left(\frac{1}{2} \right) (1 - \cos 2\theta) \right] d\theta$$

Aplicando as multiplicações necessárias:

$$\int_0^\pi \left[7 \cos \theta + \left(\frac{15}{2} \right) - \left(\frac{15}{2} \right) \cos 2\theta \right] d\theta$$

Observa-se que se pode aplicar a propriedade de diferença das integrais, também conhecida como linearidade, afirma que a integral de uma diferença de funções é igual à diferença das integrais de cada função. Para integrais simples, essa propriedade é expressa da seguinte forma:

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Sendo assim, pode-se aplicar esse conceito no nosso exercício, logo tem-se:

$$\int_0^{\pi} \left[7\cos\theta + \left(\frac{15}{2}\right) \right] d\theta - \int_0^{\pi} \frac{15}{2} \cos 2\theta d\theta$$

Logo integrando o segundo termo da diferença das integrais:

$$\int \left(\frac{15}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

Para resolve-la utiliza uma substituição de variável onde $u = 2\theta$ e $\frac{du}{2} = d\theta$, logo:

$$\frac{15}{4} \int \cos(u) du = \frac{15}{4} \sin 2\theta \quad (1)$$

Resolvendo a outra parte da diferença da integral:

$$\int \left[7\cos\theta + \left(\frac{15}{2}\right) \right] d\theta = 7\sin\theta + \frac{15}{2} \theta \quad (2)$$

Agora (1) e (2) e aplica-se os limites de integração:

$$\left[7\sin\theta + \left(\frac{15}{2}\theta\right) - \left(\frac{15}{4}\sin 2\theta\right) \right]_0^{\pi} = \left[7\sin(\pi) + \left(\frac{15}{2}\pi\right) - \left(\frac{15}{4}\sin(2\pi)\right) \right] = \frac{15}{2}\pi$$

Observa-se que nesse caso a aplicação de integrais por coordenadas polares facilitou a resolução do exercício em questão.

Vamos aplicar o que foi demonstrado nesse tópico para o cálculo de volume de um sólido.

Exemplo 3.2: Calcule o volume do sólido acima do plano xy delimitado por $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$.

Solução: Inicialmente considera-se $z = 0$ e $y = 0$;

$$0 = 4 - 2x^2 - 2(0)^2$$

$$x = \sqrt{2}$$

Agora considerando $z = 0$ e $x = 0$;

$$0 = 4 - 2(x)^2 - 2y^2$$

$$y = \sqrt{2}$$

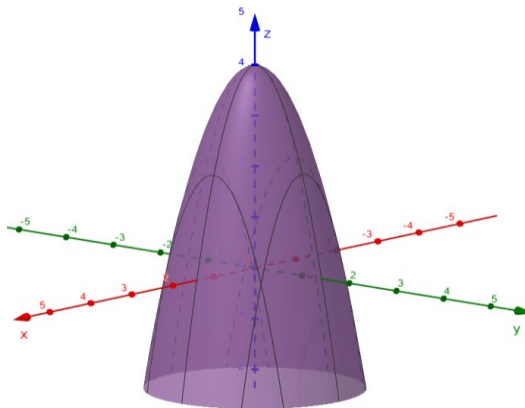
Utilizando o mesmo raciocínio para $x = 0$ e $y = 0$, temos;

$$z = 4 - 2(0)^2 - 2(0)^2$$

$$z = 4.$$

Com base nessas informações foi plotado o gráfico do sólido na Figura 15 onde $f(x, y) = 4 - 2x^2 - 2y^2$ e R é a região do plano xy delimitada por $x^2 + y^2 = 2$, logo;

Figura 15 - Gráfico do sólido.



Fonte: Autoria própria.

$$V = \iint_R (4 - 2x^2 - 2y^2) dx dy.$$

Para a solução do volume desse sólido, utiliza coordenadas polares, pois sabe-se que a região R é de forma circular, onde os limites de integração serão $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq \sqrt{2}$.

Sendo assim, aplica-se os dados obtidos através da análise do gráfico da Figura 15 na construção da equação para o cálculo do volume do sólido.

Então já aplicando as coordenadas polares onde $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $dA = r dr d\theta$ tem-se;

$$V = \iint_R (4 - 2x^2 - 2y^2) dx dy$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [4 - 2(r\cos\theta)^2 - 2(r\sin\theta)^2] r dr d\theta$$

Resolvendo os quadrados e colocando $2r^2$ em evidência:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [4 - 2r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta] r dr d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [4 - 2r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)] r dr d\theta$$

Sabe que por identidade trigonométrica que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, logo:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [4 - 2r^2] r dr d\theta$$

Multiplicando r em todos e resolvendo a integral em relação a r:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} [4r - 2r^3] dr d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{4r^2}{2} \right) - \left(\frac{2r^4}{4} \right) \right]_0^{\sqrt{2}} d\theta$$

Aplicando os limites de integração sabendo que o segundo termo irá zerar tem-se:

$$V = \int_0^{2\pi} \left[\frac{4(\sqrt{2})^2}{2} - \frac{2(\sqrt{2})^4}{4} \right] d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} 2 d\theta$$

Resolvendo a integral:

$$V = [2\theta]_0^{2\pi} = 2 \cdot 2\pi = 4\pi \text{ unidades de volume.}$$

Observa-se que, integrais duplas em coordenadas polares são bem aplicáveis para o cálculo de volumes de sólidos com características circulares.

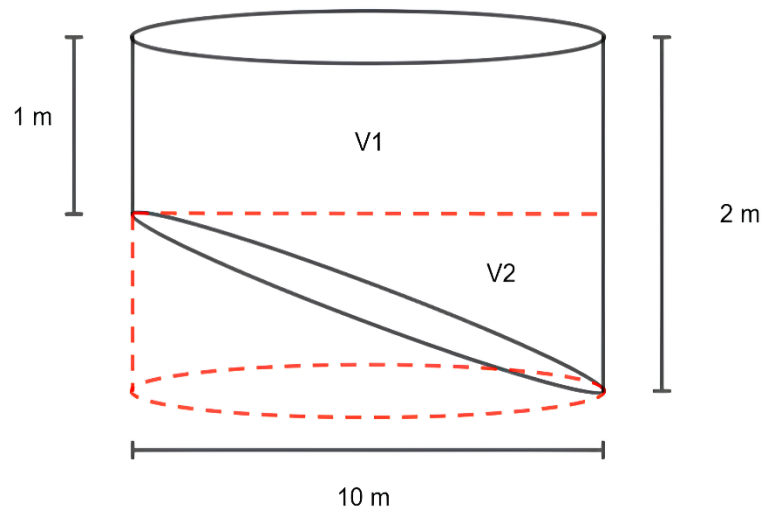
4 CÁLCULO DE VOLUME DE PISCINAS

O cálculo do volume na matemática é uma aplicação essencial, principalmente na área da engenharia e arquitetura. Quando se trata de projetar e construir piscinas, é importante que o cálculo do volume seja preciso. Não apenas para garantir que a piscina tenha a capacidade desejada, mas também para estimar a quantidade de materiais necessários, como água e produtos químicos para manutenção. Além disso, o cálculo do volume é essencial para garantir a segurança estrutural e o conforto dos usuários.

Neste contexto, as integrais duplas se apresentam como uma ferramenta de grande valia para a resolução de problemas de volume em formas complexas. Ao integrar sobre uma área definida, é possível determinar o volume total de uma piscina, independentemente de seu formato. Este método é particularmente útil para piscinas com formas irregulares, onde métodos de cálculo simples não seriam precisos ou aplicáveis. A seguir, apresentaremos um exemplo prático do cálculo do volume de uma piscina utilizando integrais duplas, demonstrando passo a passo a aplicação desta técnica matemática.

Exemplo 4.1: Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste a oeste e cresce linearmente de 1 metro na extremidade sul para 2 metros na extremidade norte. Encontre o volume de água da piscina, (STEWART, 2013, p. 900).

Figura 16 - Representação da piscina dividida em dois volumes.

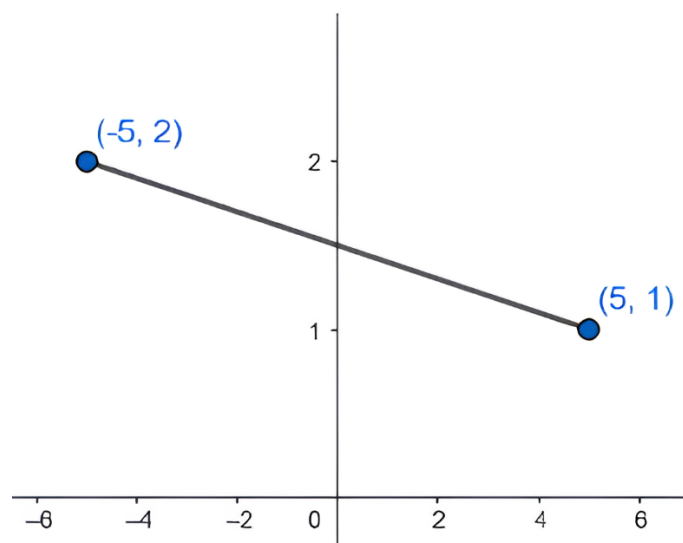


Fonte: Software GeoGebra (2024).

Solução 1: Para iniciar a resolução desse problema, é necessário determinar a função a ser integrada. O enunciado indica que a profundidade cresce linearmente, variando de 1 metro na extremidade sul para 2 metros na extremidade norte. Considerando que o diâmetro da seção é de 10 metros, adotamos o ponto $(0,0)$ como centro do gráfico, resultando em um raio de 5 metros. Assim, temos os seguintes pontos:

- Para a extremidade norte, a profundidade de 1 metro corresponde ao ponto $(5,1)$.
- Para a extremidade sul, a profundidade de 2 metros corresponde ao ponto $(-5,2)$

Figura 17 - Reta para cálculo da função.



Fonte: Autoria Própria.

A partir do gráfico podemos determinar a equação da reta onde sabe-se que tem sua formação da seguinte forma:

$$z = ax + b \quad (1)$$

Partindo desse princípio vamos substituir os pontos $(-5,2)$ e $(5,1)$ na equação 1 para encontrar a equação da reta:

$$5a + b = 1 \quad (2)$$

$$-5a + b = 2 \quad (3)$$

Somando as equações 2 e 3 para encontrar o valor de b:

$$2b = 3$$

$$b = \frac{3}{2}$$

Substituindo o valor de b na equação 2:

$$5a + \frac{3}{2} = 1 \quad (\times 2)$$

$$10a + 3 = 2$$

$$10a = 2 - 3$$

$$10a = -1$$

$$a = \frac{-1}{10}.$$

Logo com os valores de a e b substituindo na equação (1) tem-se a equação da reta que representa a profundidade da piscina:

$$z = \frac{-x}{10} + \frac{3}{2}.$$

Sabendo que a piscina tem o formato circular com diâmetro de 10 m, o raio será 5, dessa forma, os limites de integração são definidos pela equação $x^2 + y^2 = 5^2$, resultando em $0 \leq r \leq 5$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então com todos os dados obtidos já se pode calcular o volume da piscina em questão.

$$\iint_R \frac{-x}{10} + \frac{3}{2} dA$$

Onde sabe-se que $x = r\cos\theta$ e $dA = r dr d\theta$. Aplicando os limites de integração:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^5 \left(\frac{-r\cos\theta}{10} + \frac{3}{2} \right) r dr d\theta$$

Fazendo a multiplicação de r em todos os termos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^5 \left(\frac{-r^2\cos\theta}{10} + \frac{3r}{2} \right) dr d\theta$$

Integrando em relação a r:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left[\frac{-r^3\cos\theta}{30} + \frac{3r^2}{4} \right]_0^5 d\theta \\ & \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{-5^3\cos\theta}{30} + \frac{3(5)^2}{4} \right) - \left(\frac{-0^3\cos\theta}{30} + \frac{3(0^2)}{4} \right) \right] d\theta \\ & \int_0^{2\pi} \left(\frac{-125\cos\theta}{30} + \frac{75}{4} \right) d\theta \end{aligned}$$

Integrando em relação a θ e aplicando os limites de integração:

$$\begin{aligned} & = \left[\frac{-125\sin\theta}{30} + \frac{75\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \\ & = \left[\left(\frac{-125\sin 2\pi}{30} + \frac{75(2\pi)}{4} \right) - \left(\frac{-125\sin 0}{30} + \frac{75(0)}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

Observa-se que o segundo termo irá para 0 e que $\sin 2\pi = 0$, logo:

$$\begin{aligned} & = \frac{75(2\pi)}{4} \\ & = \frac{75\pi}{2} m^3. \end{aligned}$$

No entanto, ao analisar mais detalhadamente, é possível resolver essa questão de uma forma mais simples, dividindo o problema em dois volumes e, em seguida, somando-os para obter o volume total.

Solução 2: Então inicialmente pode-se calcular V_1 e V_2 como mostrado na figura 16 pela fórmula do cálculo do volume de um cilindro que é $V = \pi r^2 h$, onde $r = 5$, $h_1 = 1$ e $h_2 = 1$, onde V_2 será dividido por 2 por se tratar da metade de um cilindro.

$$\begin{aligned} V &= V_1 + \frac{V_2}{2} \\ V &= \pi 5^2 \cdot (1) + \frac{\pi 5^2 \cdot 1}{2} \\ V &= 25\pi + \frac{25\pi}{2} \\ V &= 25\pi \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ V &= 25\pi \cdot \frac{3}{2} = \frac{75\pi}{2} m^3. \end{aligned}$$

Como pode ser observado nem todo caso será vantajoso aplicar o método de integrais duplas para o cálculo do volume de piscinas, pois haverá maneiras mais práticas a depender do seu formato.

Vamos agora apresentar um outro exemplo de uma piscina real, que fica localizada na Rua Maria Nazaré de Melo, nº 225, no bairro Sebastiao Maltez, na cidade de Caraúbas-RN. A residência está localizada próximo ao Hospital Regional Doutor Aguinaldo Pereira da Silva, A piscina estudada tem um formato retangular, com as quinas arredondadas, uma profundidade constante e três degraus que acompanham esse design, o que proporciona um design moderno e favorece a circulação de água. Suas dimensões e peculiaridades geométricas serão analisadas com base na metodologia de integrais duplas para o cálculo do volume, conforme o tema central do trabalho.

Figura 18 - Piscina a ser estudada.



Fonte: Autoria Própria.

Inicialmente, foram coletadas as dimensões da piscina em estudo, visando obter dados precisos para a modelagem. Essas informações são essenciais para a criação de uma representação fiel no software Geogebra, que auxiliará tanto na análise geométrica quanto nos cálculos necessários para o desenvolvimento do projeto.

A medição do comprimento da piscina foi realizada com o auxílio de uma trena métrica. A trena foi estendida de uma extremidade a outra ao longo da borda, seguindo o contorno arredondado das quinas. Com o apoio do orientador do trabalho professor Antonival, que segurou a trena em uma das extremidades, ela foi esticada até a extremidade oposta, conforme ilustrado na Figura 19. Todo o processo foi feito com cuidado, garantindo que a trena permanecesse nivelada e esticada, a fim de evitar erros de medição. O comprimento registrado foi de 8,20 metros.

Figura 19 - Medição do comprimento da piscina.



Fonte: Autoria Própria.

Em seguida, realizou-se a medição da largura da piscina, utilizando o mesmo método empregado para o comprimento. O orientador estendeu cuidadosamente a trena de uma extremidade a outra, garantindo que ela permanecesse totalmente tensionada para evitar erros de medição. Conforme ilustrado na Figura 20, a largura registrada foi de 3,70 metros.

Figura 20 - Medição da Largura da piscina.



Fonte: Autoria Própria.

Por fim, a profundidade foi medida com o auxílio de uma vara, já que o uso exclusivo da trena métrica não garantiria precisão, devido ao fato de a piscina estar cheia no momento da medição. A vara permitiu realizar a aferição diretamente na água, evitando erros que poderiam ocorrer com o uso apenas da trena, como flutuação ou distorção visual. A vara foi inserida na lateral da piscina até tocar o fundo, conforme mostrado na Figura 21. Após a remoção da vara, a profundidade foi medida com a trena, resultando em um valor de 1,35 metros.

A piscina tem uma profundidade total de 1,35 metros. O primeiro degrau está a 1 metro de profundidade, o segundo degrau possui uma profundidade de 0,70 metros e o terceiro degrau está a 0,35 metros de profundidade. Essas medidas foram obtidas através de medições diretas no local, garantindo precisão nas alturas dos degraus em relação à profundidade total da piscina.

Figura 21 - Medição da Profundidade da piscina.

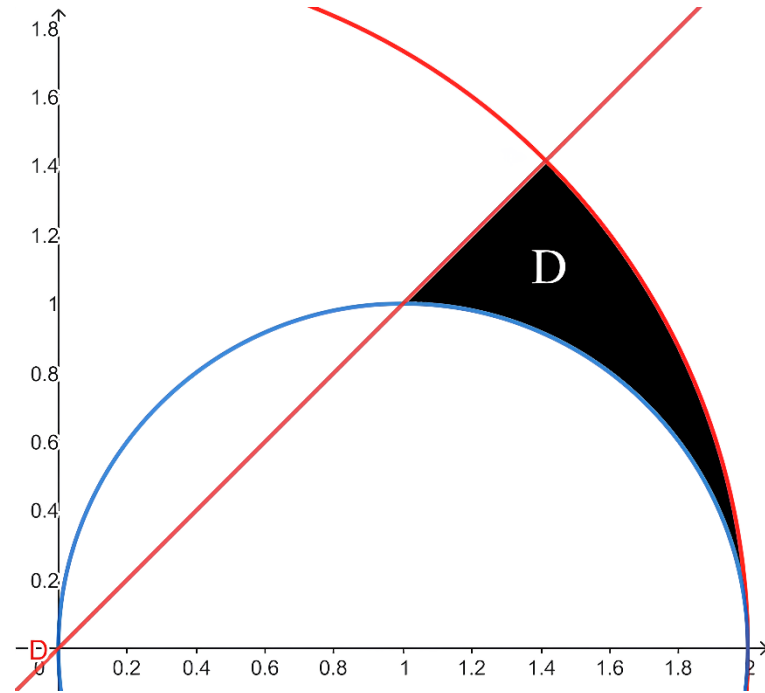


Fonte: Autoria Própria.

Se observar a Figura 18 nota-se que as quinas da piscina são arredondadas logo vamos aplicar integrais duplas para conhecer a área onde essa parte arredondada ocupa na piscina, vamos nomear essa área de $A_D = \iint_D dA$ onde:

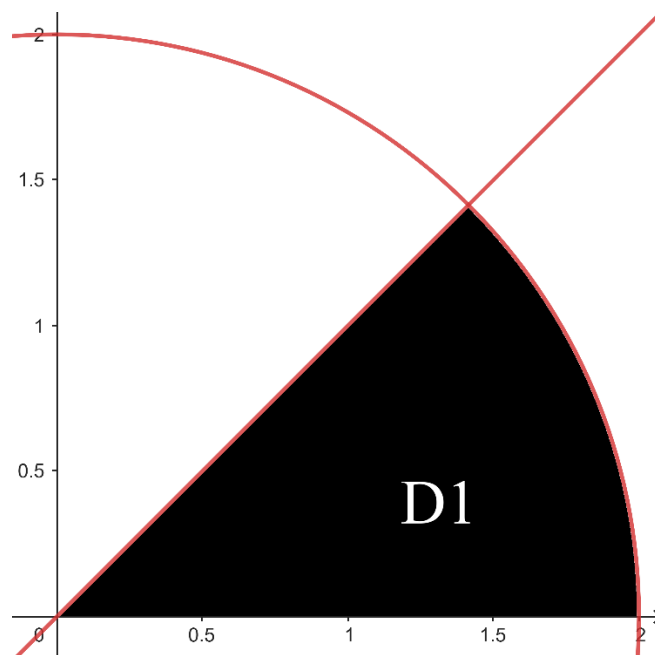
$$A_D = \iint_D dA = \iint_{D_1} dA - \iint_{D_2} dA$$

Onde D_1 está limitado em $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } x - y \geq 0\}$ e $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x - y \geq 0\}$ como mostra a figura 22 e de acordo com o Stewart (2013) em coordenadas polares $dA = r dr d\theta$.

Figura 22 - Região D a ser calculada.

Fonte: Autoria Própria.

Em seguida, é necessário definir os limites de integração para a região D_1 . A partir da análise da Figura 23.

Figura 23 - Região D1 a ser calculada.

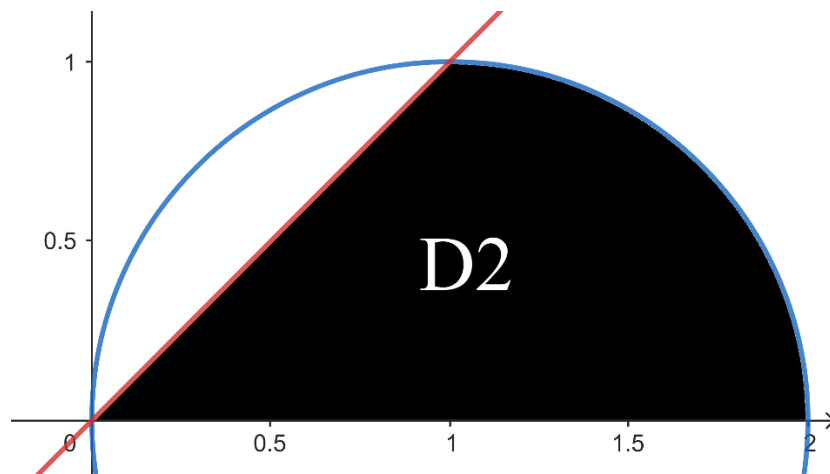
Fonte: Autoria Própria.

Podemos observar que os limites são os seguintes $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, sendo assim:

$$D_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r dr d\theta$$

Também tem que definir os limites de integração para o D_2 , a Figura 24 mostra que os limites de integração são $0 \leq r \leq k$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, onde teremos que definir o limite superior de r :

Figura 24 - Região D2 a ser calculada.



Fonte: Autoria Própria.

Então tem-se:

$$D_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^k r dr d\theta$$

Então para determinar o limite superior “k” de D_2 utiliza-se a equação da circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Vale lembrar que, para coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, logo:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

$$(r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta)^2 = 1$$

$$r^2 \cos^2 \theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$r^2 \cos^2 \theta - 2r\cos\theta + r^2 \sin^2 \theta = 1 - 1$$

$$r^2 \cos^2 \theta - 2r \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (\div r)$$

$$r \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + r \sin^2 \theta = 0$$

$$r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2 \cos \theta$$

Onde pode se observar que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, logo:

$$r \cdot (1) = 2 \cos \theta$$

$$r = 2 \cos \theta$$

Então determina-se o limite superior para D_2 onde temos que:

$$D_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2 \cos \theta} r dr d\theta$$

Logo, após determinar esse limite superior podemos calcular a área de D onde:

$$\begin{aligned} A_D &= \iint_D dA = \iint_{D_1} dA - \iint_{D_2} dA \\ A_D &= \iint_D dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r dr d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2 \cos \theta} r dr d\theta \end{aligned}$$

Resolvendo o primeiro termo da diferença:

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r dr d\theta \\ D_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 d\theta \\ D_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 d\theta = 2[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Resolvendo o segundo termo da diferença:

$$D_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos\theta} r dr d\theta$$

$$D_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 \theta d\theta$$

Utilizando substituição trigonométrica que $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$ temos:

$$D_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + \cos 2\theta d\theta = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Realizando a subtração:

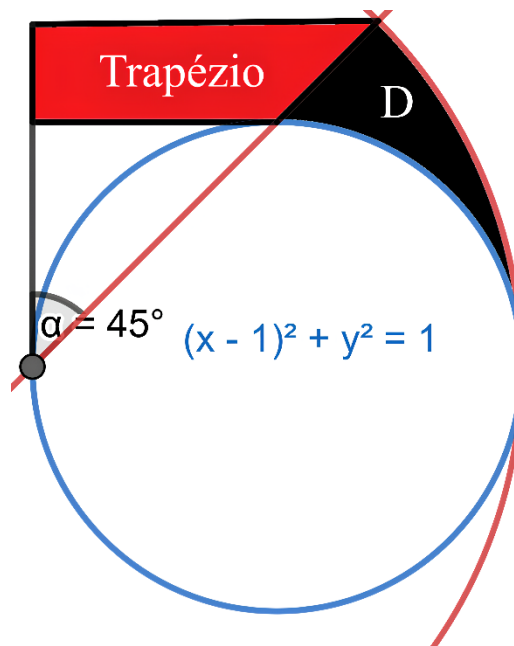
$$A_D = \iint_D dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r dr d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos\theta} r dr d\theta$$

$$A_D = \iint_D dA = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi - 2}{4} m^2$$

$$A_D \cong 0,29 m^2.$$

Após encontrar a área do setor arredondado A_D é necessário encontrar a área que compõe o restante do degrau da piscina, especificamente a seção reta. Ao examinar o degrau de forma mais detalhada, percebemos que ele é constituído por uma parte reta central, cujas extremidades são suavemente arredondadas. Essa configuração resulta em uma forma que combina a linearidade da seção reta com a suavidade das curvas nas extremidades, exigindo uma análise cuidadosa para calcular com precisão a área total. Esse arredondamento ocorre nas interseções entre a reta que define a parte reta do degrau e o arco de um círculo azul, que descreve as curvas nas extremidades. A intenção aqui é calcular a área do degrau, que pode ser modelada como um trapézio como demonstrado na Figura 25 na área vermelha, considerando o efeito das quinas arredondadas em suas bordas.

Figura 25 - Representação do trapézio a ser calculado.



Fonte: Autoria Própria.

Para determinar a área total do degrau, é necessário definir as dimensões do trapézio, incluindo suas bases e altura. Além disso, deve-se levar em conta como a curva circular afeta o formato das quinas e, conseqüentemente, a área total.

Como o degrau tem quinas arredondadas, modelamos essas quinas como parte de um círculo, cuja equação é:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

A transição entre a parte reta e a arredondada do degrau ocorre exatamente nos pontos de interseção entre essa reta e o círculo. A parte reta do degrau segue uma linha inclinada em um ângulo de 45° , ou seja, a equação dessa linha é:

$$y = x \quad (1)$$

Para calcular onde a parte reta do degrau (a reta $y = x$) encontra a parte arredondada (o círculo), substituímos (1) na equação do círculo:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + x^2 &= 1 \\ (x^2 - 2x + 1) + x^2 &= 1 \end{aligned}$$

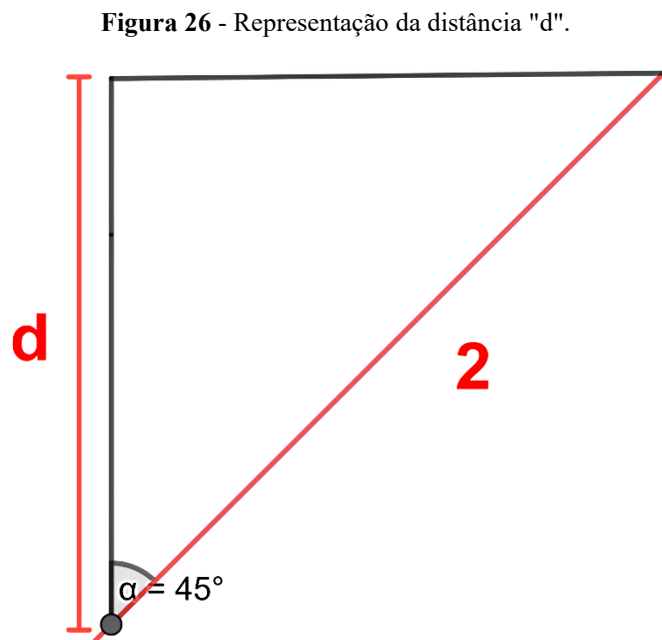
$$2x^2 - 2x + 1 = 1$$

$$2x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

Portanto, as soluções são $x = 0$ e $x = 1$, correspondendo aos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$. Esses são os pontos de interseção entre a reta e o círculo. Geometricamente, isso indica onde a parte reta do degrau termina e a parte arredondada começa.

Agora vamos calcular a distância “d”, que representa a distância do início até o fim da parte arredondada das quinas, representada na Figura 26:



Fonte: Autoria Própria.

Calcula-se da seguinte forma:

$$\cos 45^\circ = \frac{d}{2}$$

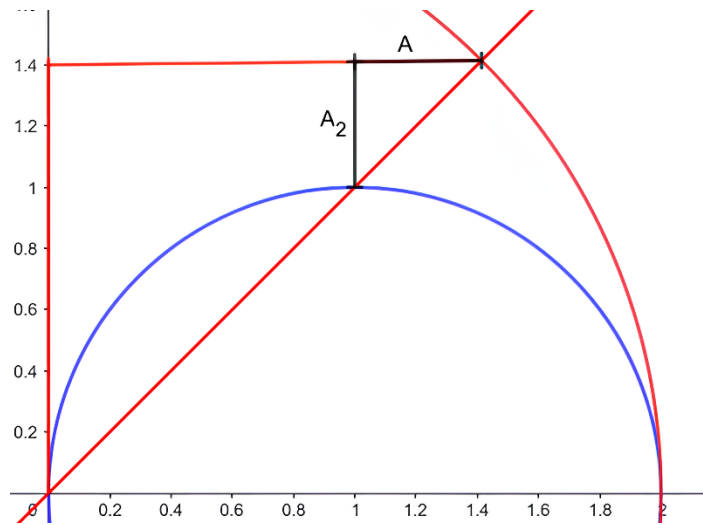
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2}$$

$$d = \sqrt{2}$$

Entretanto, a altura da parte arredondada do degrau é a diferença entre $\sqrt{2}$ e a coordenada $y = 1$, onde $A = A_2$ ou seja:

$$A = A_2 = \sqrt{2} - 1 \cong 0,41$$

Figura 27 - Representação do valor de A.



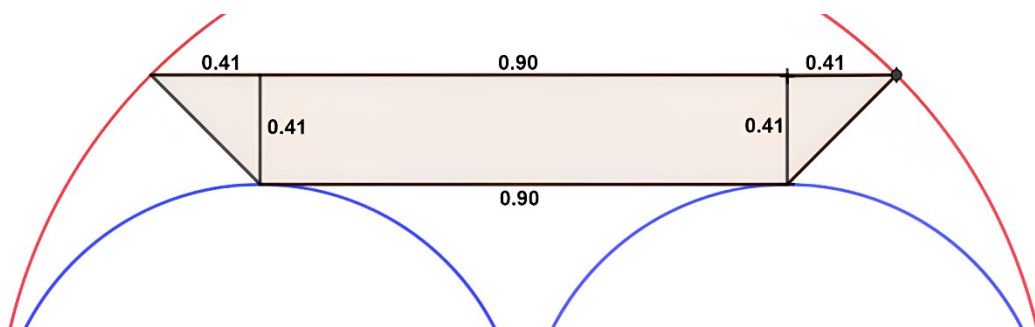
Fonte: Autoria Própria.

Após encontrar a altura podemos modelar o trapézio para encontrar a sua área “ A_t ” através da equação abaixo:

$$A_t = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Onde B é a base maior, b é a base menor e h é a altura.:

Figura 28 - Valores do trapézio após ser modelado.



Fonte: Autoria própria.

Então para a área do trapézio que representa a parte do degrau vamos ter:

$$A_t = \frac{(1,72 + 0,90) \cdot 0,41}{2}$$

$$A_t \cong 0,53 \text{ m}^2$$

Agora pode-se encontrar o valor total da área do degrau onde a área do degrau será a soma da área do trapézio com a área do setor arredondado.

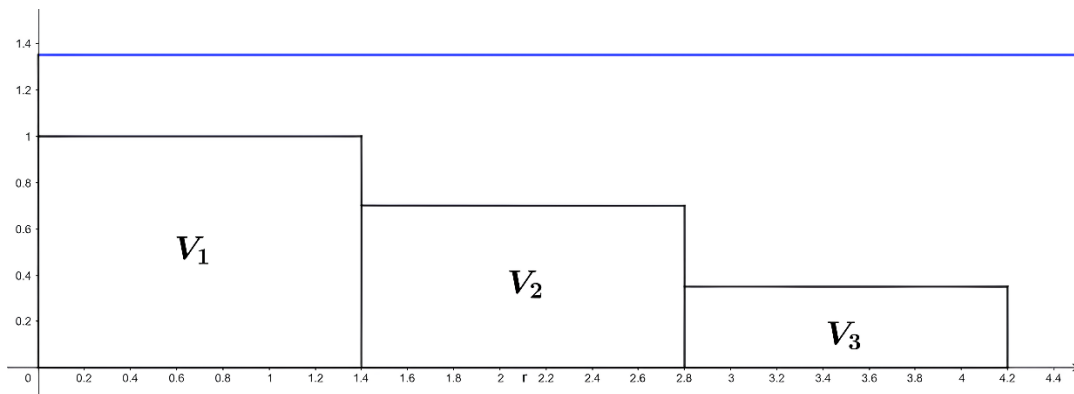
$$\text{Área do degrau} = A_t + 2 \cdot A(D)$$

$$\text{Área do degrau} = 0,53 + 2 \cdot 0,29$$

$$\text{Área do degrau} \cong 1,11 \text{ m}^2$$

Em seguida para ter o volume de cada degrau da piscina vamos multiplicar sua área por cada profundidade respectivamente, onde o degrau 1 está a 1 metro de profundidade, degrau 2 a 0,70 metros e o terceiro está a 0,35 metros de profundidade, conforme a Figura 29.

Figura 29 - Corte Transversal dos Degraus.



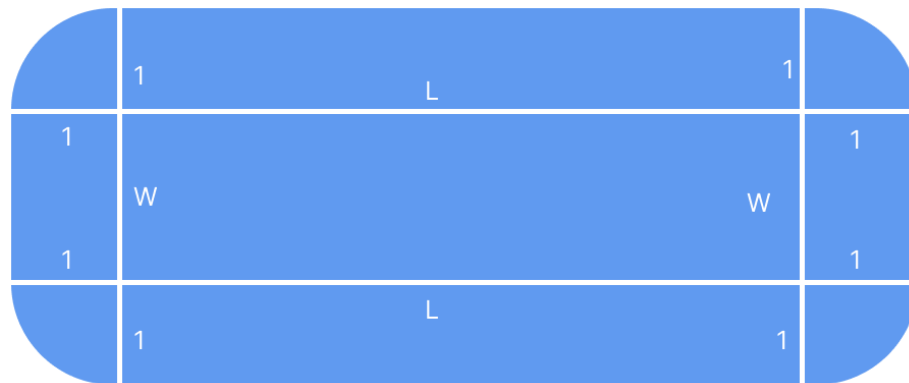
Fonte: Autoria própria.

$$V_1 = 1,11 \cdot 1 = 1,11 \text{ m}^3$$

$$V_2 = 1,11 \cdot 0,70 = 0,77 \text{ m}^3$$

$$V_3 = 1,11 \cdot 0,35 = 0,38 \text{ m}^3$$

Agora vamos fazer o volume da piscina sem levar em consideração os degraus tendo como base o exercício do Stewart (2007) onde ele demonstra como calcular a área de uma piscina deste formato, observe a Figura 30:

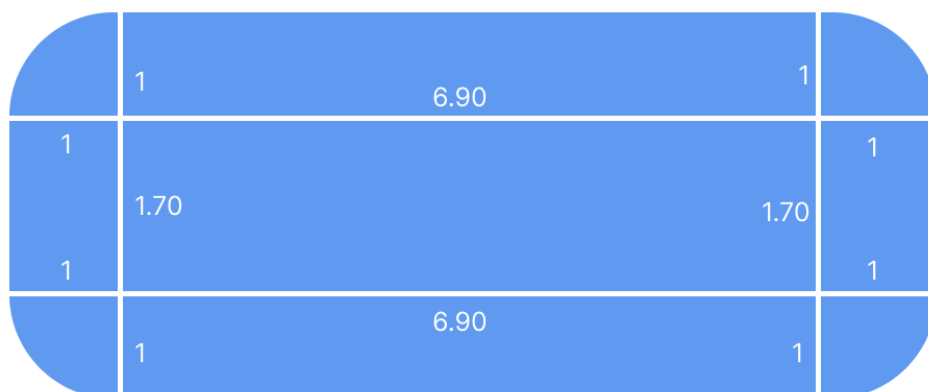
Figura 30 - Representação da divisão de áreas na piscina

Fonte: Autoria Própria.

Na Figura 30, pode-se observar que o formato é semelhante ao da piscina a ser analisada neste trabalho. Para calcular as áreas dessas seções, a abordagem consiste em dividir a piscina em formas geométricas conhecidas, facilitando a obtenção dos valores individuais de suas áreas. Em seguida, somamos essas áreas para determinar a área total da piscina. O exercício de Stewart (2007) fornece a seguinte fórmula para o cálculo da área total da piscina:

$$A_s = LW + 2L + 2W + \pi \cdot 1^2$$

Aplicando nossos dados coletados da piscina a ser estudada temos:

Figura 31 - Dados Reais aplicados para cálculo de área.

Fonte: Autoria Própria.

Então aplicando os dados que foram obtidos na equação A_s que foi apresentada, vamos obter a seguinte área total:

$$\begin{aligned}
 A_s &= LW + 2L + 2W + \pi \cdot 1^2 \\
 A_s &= (1,70 \cdot 6,90) + (2 \cdot 6,90) + (2 \cdot 1,70) + \pi \cdot 1^2 \\
 A_s &\cong 32,07 \, m^2
 \end{aligned}$$

Para obter o volume da piscina, multiplicamos a área total pela profundidade. É importante ressaltar que, para calcular o volume da piscina sem considerar os degraus, podemos utilizar a profundidade total já calculada, que é de 1,35 metros. Assim, ao multiplicar a área total da superfície da piscina pela profundidade, obtemos o volume total disponível:

$$\begin{aligned}
 V_s &= A_s \cdot 1,35 \\
 V_s &= 32,07 \cdot 1,35 \\
 V_s &\cong 43,29 \, m^3
 \end{aligned}$$

Então por fim para obter o volume real da piscina (V_p) subtrai o volume dos degraus pelo volume $V(S)$:

$$\begin{aligned}
 V_p &= V_s - (V_1 + V_2 + V_3) \\
 V_p &= 43,29 - (1,11 + 0,77 + 0,38) \\
 V_p &= 41,03 \, m^3
 \end{aligned}$$

5 ANÁLISE DE RESULTADOS

O exemplo 2.3.1 marca o ponto inicial para a compreensão da aplicação de integrais duplas no cálculo do volume de sólidos. Através da Figura 9, pode-se identificar que a região em questão é do Tipo I. Uma vez identificada a região, é possível utilizar a fórmula fornecida por (Stewart, 2013), que define o volume como:

$$V = \iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Seguindo esta fórmula e realizando os cálculos necessários, obteve-se um volume de $\frac{216}{35}$ unidades de volume. Esse resultado evidencia a eficiência das integrais duplas como uma ferramenta poderosa para o cálculo de volumes em geometrias complexas,

demonstrando sua aplicabilidade prática e precisão matemática.

No capítulo 3 deste trabalho, onde são abordadas integrais duplas em coordenadas polares, o exemplo 3.1 solicita o cálculo do volume de uma região R , limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$. Inicialmente, tenta-se resolver o problema utilizando integrais duplas em coordenadas cartesianas, mas logo percebe-se que essa abordagem seria mais trabalhosa para obter o resultado. Diante disso, opta-se por uma abordagem mais adequada, utilizando integrais duplas em coordenadas polares.

Essa escolha se justifica porque regiões com setores circulares, como no caso deste exercício, são mais facilmente resolvidas com coordenadas polares. Aplicando as técnicas estudadas na literatura, chegou-se ao resultado de $\frac{15\pi}{2}$. Conclui-se que, embora as integrais duplas sejam uma ferramenta extremamente eficaz para o cálculo de volumes, é essencial identificar corretamente as características do problema e selecionar a abordagem mais prática para alcançar o resultado desejado de maneira eficiente.

No capítulo, o que foi estudado na literatura sobre o cálculo de volumes com integrais duplas é efetivamente aplicado. No exemplo 4.1, o objetivo é calcular o volume de água necessário para encher uma piscina com formato circular e profundidade variável. Para esse tipo de formato, onde a profundidade não é constante, opta-se por utilizar integrais duplas em coordenadas polares.

A solução começa pela definição da função que modela a profundidade da piscina, a qual, pode ser observada a partir da figura 16, onde podemos expressar essa profundidade por meio da seguinte função:

$$z = \frac{-x}{10} + \frac{3}{2}$$

Sabendo que o diâmetro da piscina é de 10 metros, o raio será de 5 metros. Os limites de integração para essa configuração são $0 \leq r \leq 5$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, correspondendo à geometria circular.

Com esses dados, o cálculo da integral dupla resultou em um volume de $\frac{75\pi}{2} m^3$. No entanto, como mencionado anteriormente, é importante avaliar qual método é mais prático para o problema. Nesse caso, existe uma abordagem alternativa mais simples: dividir a piscina em dois cilindros e calcular seus volumes utilizando a fórmula básica $V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 1$, e $V_2 = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{1}{2}$, onde esse método também resulta no mesmo volume.

Portanto, conclui-se que, para formas geométricas bem definidas como a dessa piscina, o uso de fórmulas geométricas tradicionais pode ser mais eficiente. As integrais duplas são uma ferramenta poderosa, mas a escolha do método deve sempre levar em conta a praticidade e a simplicidade do problema em questão.

Ainda no capítulo 4, o método de cálculo foi aplicado a uma piscina real, conforme mostrado na figura 17. Essa piscina não segue um formato tradicional, sendo retangular, com quinas arredondadas e três degraus que acompanham esse design. Após a coleta de dados em campo, a piscina foi modelada no software GeoGebra.

A estratégia adotada foi dividir a piscina em duas partes principais. A primeira divisão envolveu separar o degrau em duas regiões: uma parte com seção circular (quinas arredondadas) e outra com formato trapezoidal. Após encontrar as áreas dessas duas regiões, elas foram somadas para obter a área total do degrau.

A parte trapezoidal foi resolvida de forma simples, utilizando matemática básica, conforme ilustrado na Figura 27. Essa figura permitiu identificar a interseção das duas funções que descrevem a transição entre o setor circular e a parte reta do degrau. A partir dessa interseção, foi possível calcular os parâmetros do trapézio e determinar sua área com precisão que foi de $0,53 \text{ m}^2$.

Posteriormente, foi calculada a área do setor circular das quinas arredondadas, representada pela região D na figura 22. Utilizando integrais duplas em coordenadas polares, foi possível definir as funções necessárias para o cálculo. Houve certa dificuldade inicial em determinar o limite superior das funções, mas, após a devida manipulação matemática, esse limite foi encontrado com sucesso.

Com os limites de integração devidamente estabelecidos e após realizar todos os cálculos, o valor da área da região D foi obtido $0,29 \text{ m}^2$, com isso a soma das duas áreas foi o resultado da área total do degrau de $1,11 \text{ m}^2$. Para calcular o volume total dos degraus, a área de cada um foi multiplicada pela sua respectiva profundidade. Dessa forma, foi possível obter o volume total dos três degraus de maneira precisa, considerando as variações de profundidade entre eles com o valor de $2,26 \text{ m}^3$.

A segunda etapa consistiu em calcular o volume total da piscina, desconsiderando os degraus. Para isso, foi realizada uma divisão da piscina em diferentes partes geométricas, conforme mostrado na figura 30. Utilizou-se uma fórmula apresentada no exercício de Stewart (2007), que, após ser devidamente aplicada, resultou no valor de volume de $43,29 \text{ m}^3$. Esse método facilitou o cálculo ao segmentar a piscina em formas mais simples, garantindo um resultado preciso.

Por fim, para calcular o volume real da piscina, foi realizada a subtração entre o volume total da piscina sem os degraus e o volume correspondente aos degraus. Dessa forma, obteve-se o volume exato da piscina estudada de $41,03 \text{ m}^3$.

Conclui-se que o valor obtido está dentro dos padrões esperados, conforme indicado por pesquisas realizadas. Foi possível verificar que o resultado atende aos parâmetros estabelecidos, e que a combinação da análise da situação aplicada com o uso de integrais duplas para o cálculo do volume, juntamente com o software GeoGebra, demonstrou ser de grande confiabilidade.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta uma contribuição relevante para o uso de integrais duplas na engenharia e arquitetura, com ênfase no cálculo de volumes de piscinas com formas não triviais. Através de uma abordagem matemática rigorosa e do uso do software GeoGebra, o autor demonstrou a aplicabilidade prática das integrais duplas para resolver problemas que, de outra maneira, seriam extremamente complexos.

Para futuros leitores, especialmente aqueles envolvidos com projetos geométricos ou que desejam aprimorar seus conhecimentos em matemática aplicada, este trabalho representa uma fonte valiosa. O trabalho ilustra de maneira clara e didática como a matemática pode ser aplicada para solucionar desafios concretos em design e engenharia, provando que as integrais duplas não são apenas ferramentas teóricas, mas poderosas ferramentas práticas.

Se você busca aprofundar seu conhecimento em cálculos geométricos complexos ou encontrar uma aplicação prática de integrais duplas, este trabalho é uma leitura indispensável. Ele não apenas oferece soluções matemáticas robustas, mas também uma abordagem prática e aplicável aos desafios cotidianos enfrentados por engenheiros e arquitetos.

REFERÊNCIAS

- ÁVILA, G. **Cálculo das Funções de Múltiplas Variáveis**. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. III, 2006.
- CRAIZER, M.; TAVARES, G. **Cálculo Integral a Várias Variáveis**. Loyola. ed. Rio de Janeiro: PUC RIO, 2002.
- FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Calculo A**. 2016.
- GEOGEBRA. GeoGebra Online: Graphing Calculator. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>.
- GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marília. **Calculo B: Funções de várias variáveis integrais duplas e triplas**. Makron Books, 1999.
- IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos de matemática elementar**. Atual, 1995.
- LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3ª. ed. São Paulo: Harbra Ltda, v. II, 1994.
- STEWART, J. **Cálculo**. 5ª. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, v. II, 2007.
- STEWART, J. **Cálculo**. 7ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. II, 2013.
- STEWART, James. **Cálculo**, vol. 1. Pioneira Thomson Learning, 2001.