



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

CENTRO DE ENGENHARIAS

CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

MURILO HUDSON DA SILVA

**ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS PLANAS PELO MÉTODO DA RIGIDEZ
DIRETA: TEORIA E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

MOSSORÓ

2025

MURILO HUDSON DA SILVA

**ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS PLANAS PELO MÉTODO DA RIGIDEZ
DIRETA: TEORIA E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Raimundo Gomes de Amorim Neto, Prof. Dr.

MOSSORÓ

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S586a Silva, Murilo Hudson da.
Análise matricial de estruturas planas pelo
método da rigidez direta: Teoria e implementação
computacional / Murilo Hudson da Silva. - 2025.
84 f. : il.

Orientador: Raimundo Gomes de Amorim Neto.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de , 2025.

1. Algoritmo. 2. Graus de Liberdade. 3.
Idealização Estrutural. 4. Matriz. 5. Octave®. I.
Neto, Raimundo Gomes de Amorim , orient. II.
Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

MURILO HUDSON DA SILVA

**ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS PLANAS PELO MÉTODO DA RIGIDEZ
DIRETA: TEORIA E IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como requisito
para obtenção do título de Bacharel em
Engenharia Civil.

Defendida em: 20/ 03/ 2025.

BANCA EXAMINADORA

Raimundo Gomes de Amorim Neto, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

Valmiro Quéfren Gameleira Nunes, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Christiane Mylena Tavares De Menezes Gameleira, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por estar ao meu lado em todos os momentos durante esta graduação.

Agradeço aos meus queridos pais por todo o apoio e por não medirem esforços para que eu pudesse me dedicar aos estudos. Sou muito grato por tudo o que fizeram e continuam fazendo por mim.

Ao professor Dr. Raimundo Amorim, por aceitar me orientar neste trabalho. Agradeço pelos ensinamentos sobre estruturas, pela didática nas aulas, pela empatia, paciência, disponibilidade nos momentos em que foi solícito e por conduzir este trabalho na área com a qual tenho afinidade. És referência como pessoa e profissional.

Agradeço ao professor Dr. Rodrigo Codes pelos ensinamentos em aula, por todo o auxílio durante minha graduação e pela forma como se importa em transmitir seu conhecimento.

À minha companheira, Rafaela Maria, por todo o apoio nos momentos difíceis e por sempre acreditar em mim. Sua ajuda tem sido fundamental.

Aos amigos criados na graduação Giselle Nunes, Ithalo Ricardo, Letícia Costa, Marcos Melo e Paulo Danton. Em especial meu amigo Mateus Soares.

Aos amigos anteriores à graduação, em especial, Michael Enéas e Thiago Victor.

Aos professores Valmiro Quéfren e Christiane Mylena pelas contribuições para melhoria deste trabalho.

A todos os professores da UFERSA, por todo o conhecimento repassado para minha formação, em especial ao professor John Eloi pelos conhecimentos em programação.

A todos vocês meus mais sinceros agradecimentos.

EPÍGRAFE

*“A mente que se abre a uma nova ideia jamais
voltará ao seu tamanho original.”*

Albert Einstein.

RESUMO

A fim de obter um maior conhecimento acerca da análise matricial de estruturas e aplicar os conhecimentos adquiridos em sala de aula, foi desenvolvido este trabalho, que tem como objetivo a implementação computacional do Método da Rigidez Direta para a resolução de vigas, treliças planas e pórticos planos para sistemas estruturais isostáticos e hiperestáticos. O algoritmo desenvolvido gera relatórios contendo os deslocamentos nodais, esforços internos dos elementos e as reações de apoio por fim, cria uma plotagem da configuração deformada da estrutura. O *software* utilizado foi o *GNU Octave*[®], de acesso livre, que possui ótimos recursos para a resolução de matrizes e sistemas lineares com alta precisão. Foram analisados cinco exemplos: uma viga hiperestática, uma treliça, um pórtico composto, um pórtico com tirante e um pórtico tri-articulado, todas retiradas de literaturas consagradas da área de engenharia estrutural. Os resultados obtidos foram promissores, uma vez que os esforços internos e as reações de apoio não apresentaram diferenças quando comparados com o *Ftool*[®], tendo apenas algumas discrepâncias em determinados deslocamentos devido a precisão do programa comparada com a do *software*, alguns deslocamentos cuja resultante numérica deveria ser zero, mas que tanto o programa quanto o software resultaram em zeros relativos, considerando uma precisão de 19 casas decimais. Dessa forma, o programa desenvolvido atendeu ao proposto, demonstrando eficácia na resolução de estruturas planas.

Palavras-chave: Algoritmo. Graus de Liberdade. Idealização Estrutural. Matriz. *Octave*[®].

ABSTRACT

To obtain a better understanding of the matrix analysis of structures and apply the knowledge acquired in class, this work was developed with the objective of implementing the Direct Stiffness Method computationally for the analysis of beams, planar trusses, and planar frames for both isostatic and hyperstatic structural systems. The developed algorithm generates reports containing nodal displacements, internal forces of the elements, and support reactions; finally, it creates a plot of the deformed configuration of the structure. The software used was GNU Octave®, which is open-source and offers excellent resources for solving matrices and linear systems with high precision. Five examples were analyzed: a hyperstatic beam, a truss, a composite frame, a frame with a tie, and a tri-articulated frame, all drawn from renowned literature in the field of structural engineering. The results obtained were promising, as the internal forces and support reactions showed no differences when compared with Ftool®, with only some discrepancies in certain displacements due to the precision of the program compared to the software—some displacements that should numerically be zero resulted in relative zeros in both cases, considering a precision of 19 decimal places. Thus, the developed program met its intended purpose, demonstrating effectiveness in the analysis of planar structures.

Keywords: Algorithm. Degrees of freedom. Structural idealization. Matrix. *Octave*®.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estruturas reticuladas típicas. (a) Pórtico plano com ligações rígidas. (b) Estruturas de múltiplos andares – com ligações rígidas e treliçadas. (c) Treliça espacial. (d) Pórtico espacial com ligações rígidas.	20
Figura 2 - Quatro níveis de abstração referentes ao processo de análise de uma estrutura.	21
Figura 3 - Sólido sobre dois apoios.	22
Figura 4 - Parâmetros nodais utilizados na discretização pelo método dos deslocamentos.	23
Figura 5 - Graus de liberdade de um elemento de pórtico.	25
Figura 6 - Superposição de configurações deformadas elementares para compor a elástica final de uma barra de pórtico plano.	25
Figura 7 - Deslocamento horizontal unitário imposto no nó i	27
Figura 8 - Barra com carga axial seccionada.	28
Figura 9 - Deslocamento vertical unitário imposto no nó i para barra sem articulação.	31
Figura 10 - Barra sem articulação com deslocamento no nó i seccionada.	31
Figura 11 - Rotação unitária imposta no nó i para barra sem articulação.	33
Figura 12 - Barra sem articulação com rotação no nó i seccionada.	34
Figura 13 - Deslocamento vertical unitário imposto no nó i para barra com rótula a direita. ...	37
Figura 14 - Barra com articulação a direita com deslocamento no nó i seccionada.	38
Figura 15 - Rotação unitária imposta no nó i para barra com rótula a direita.	40
Figura 16 - Barra com articulação a direita com rotação no nó i seccionada.	40
Figura 17 - Sistemas de coordenadas globais e locais.	44
Figura 18 - Rotação de eixos no plano.	44
Figura 19 - Forças generalizadas no sentido global e local.	46
Figura 20 - Pórtico para exemplificar o MRD.	48
Figura 21 - Pórtico da Figura discretizado.	48
Figura 22 - Representação da montagem da Matriz de Rigidez Global do Pórtico Modelo.	50
Figura 23 - Notação e sentidos positivos de reações de engastamento de barra de pórtico plano.	51
Figura 24 - Interface do <i>Octave</i> [®]	54
Figura 25 - Arquivo <i>.txt</i> padrão para entrada de dados.	56
Figura 26 - Pórtico modelo com suas coordenadas nodais.	57
Figura 27 - Elementos do pórtico modelo numerados.	58
Figura 28 - Arquivo no formato <i>.txt</i> contendo os dados de entrada ao algoritmo.	58

Figura 29 - Janela de comandos do <i>Octave</i> [®] com a análise do pórtico modelo.	59
Figura 30 - Arquivo <i>.txt</i> gerado do pórtico modelo.	60
Figura 31 - Sentidos positivos dos esforços internos.	60
Figura 32 - Pórtico modelado (a) e reações de apoio (b) no <i>Ftool</i> [®]	61
Figura 33 – DEN(a), DEC(b) e DMF(c) do pórtico modelo feito no <i>Ftool</i> [®]	61
Figura 34 – Estrutura deformada do pórtico modelo gerada pelo algoritmo.	62
Figura 35 – Estrutura deformada gerada no <i>Ftool</i> [®]	62
Figura 36 - Fluxograma do algoritmo desenvolvido.	63
Figura 37 - Viga hiperestática.	64
Figura 38 - Viga hiperestática discretizada em nós e barras.	64
Figura 39 - Estrutura deformada da viga hiperestática gerada pelo algoritmo.	67
Figura 40 - Estrutura deformada da viga hiperestática modelada no <i>Ftool</i> [®]	67
Figura 41 – Treliça plana.	68
Figura 42 - Treliça plana discretizada em nós e barras.	68
Figura 43 - Estrutura deformada da treliça plana gerada pelo algoritmo.	71
Figura 44 - Estrutura deformada da treliça plana modelada no <i>Ftool</i> [®]	71
Figura 45 - Pórtico composto.	72
Figura 46 - Pórtico composto discretizado em nós e barras.	72
Figura 47 - Estrutura deformada do pórtico composto gerada pelo algoritmo.	74
Figura 48 - Estrutura deformada do pórtico composto modelado no <i>Ftool</i> [®]	74
Figura 49 - Pórtico com Tirante.	75
Figura 50 - Pórtico com Tirante discretizado em nós e barras.	76
Figura 51 - Estrutura deformada do pórtico com Tirante gerada pelo algoritmo.	78
Figura 52 - Estrutura deformada do pórtico com Tirante modelado no <i>Ftool</i> [®]	78
Figura 53 - Pórtico Tri-articulado.	79
Figura 54 - Pórtico tri-articulado discretizado em nós e barras.	79
Figura 55 - Estrutura deformada do pórtico tri-articulado gerada pelo algoritmo.	82
Figura 56 - Estrutura deformada do pórtico tri-articulado modelado no <i>Ftool</i> [®]	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Coeficientes de rigidez das colunas 5 e 6 de uma barra sem articulação.	36
Tabela 2 - Coeficientes de rigidez das colunas 5 e 6 de uma barra com rótula a direita.	42
Tabela 3 - Reações de engastamento perfeito para barras bi-engastadas.	52
Tabela 4 - Possíveis casos de carregamento distribuídos aceitos e não pelo algoritmo.	55
Tabela 5 - Descrição das propriedades geométricas e de rigidez da viga hiperestática.	65
Tabela 6 - Deslocamentos nodais da viga hiperestática.	65
Tabela 7 - Esforços internos da viga hiperestática.	66
Tabela 8 - Reações de apoio da viga hiperestática.	66
Tabela 9 - Descrição das propriedades geométricas e de rigidez da treliça plana.	68
Tabela 10 - Deslocamentos nodais da treliça plana.	69
Tabela 11 - Esforços internos da treliça plana.	70
Tabela 12 - Reações de apoio da treliça plana.	70
Tabela 13 - Descrição das propriedades geométricas e de rigidez do pórtico composto.	72
Tabela 14 - Deslocamentos nodais do pórtico composto.	73
Tabela 15 - Esforços internos do pórtico composto.	73
Tabela 16 - Reações de apoio do pórtico composto.	74
Tabela 17 - Propriedades geométricas e de rigidez dos elementos do Pórtico com Tirante. ...	76
Tabela 18 - Deslocamentos nodais do pórtico com tirante.	76
Tabela 19 - Esforços internos do pórtico com tirante.	77
Tabela 20 - Reações de apoio do pórtico com tirante.	77
Tabela 21 - Descrição das propriedades geométricas e de rigidez do Pórtico tri-articulado.	80
Tabela 22 - Deslocamentos nodais do pórtico com tirante.	80
Tabela 23 - Esforços internos do pórtico tri-articulado.	81
Tabela 24 - Reações de apoio do pórtico com tirante.	81

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A	Área da seção transversal
E	Módulo de Elasticidade do material
DEC	Diagrama de Esforço Normal
DEN	Diagrama de Esforço Cortante
DMF	Diagrama de Momento Fletor
<i>Ftool</i> [®]	<i>Two-dimensional Frame Analysis Tool</i>
I_z	Momento de inércia em torno do eixo z
MRD	Método da Rigidez Direta
<i>txt</i>	Arquivo de texto simples

LISTA DE SÍMBOLOS

f_i, f_j	Forças generalizadas impostas nos nós i e j na direção global
f'_i, f'_j	Forças generalizadas impostas nos nós i e j na direção local
F_x	Reação de apoio horizontal
F_y	Reação de apoio vertical
M_z	Momento no apoio
δ_i	Deslocamento generalizado imposto no nó i
δ_j	Deslocamento generalizado imposto no nó j
$\delta x, \delta y$	Deflexão horizontal e vertical respectivamente
J	Momento polar de inércia
θ	Ângulo formado entre uma barra com o referencial global
θ_z	Rotação em torno do eixo z
$k_{i,j}$	Coefficiente de rigidez geral
k'_n	Matriz de rigidez da barra “n” na direção local
k_n	Matriz de rigidez da barra “n” na direção global
k_g	Matriz de rigidez global da estrutura
kN	Quilonewton
kNm	Quilonewton metro
C_i, C_j	Esforços cortantes nos nós i e j respectivamente
N_i, N_j	Esforços normais nos nós i e j respectivamente
M_i, M_j	Momentos fletores nos nós i e j respectivamente
m^2	Metros elevados à segunda potência
m^4	Metros elevados à quarta potência
MPa	Megapascal
$[R]$	Matriz de rotação de um pórtico plano
$[R]^{-1}$	Matriz de rotação inversa de um pórtico plano
$[R]^T$	Matriz de rotação transposta de um pórtico plano
%	Porcentagem

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 Objetivos Gerais	17
1.2 Objetivos Específicos.....	17
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	18
2.1 Classificação das estruturas em barras	18
2.2 Equilíbrio estático e graus de liberdade	18
2.3 Estruturas planas.....	19
2.4 Idealização estrutural.....	20
2.4.1 Estrutura Real	21
2.4.2 Modelo Estrutural	21
2.4.3 Modelo Discreto	22
2.4.4 Modelo Computacional	23
2.5 Análise Matricial de Estruturas	23
2.6 Métodos da Rigidez Direta.....	24
3 DISCRETIZAÇÃO DO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA	25
3.1 Matriz de rigidez de uma barra	25
3.2 Coeficientes de rigidez.....	27
3.2.1 Rigidez axial de uma barra prismática	27
3.2.2 Rigidez à flexão de uma barra prismática sem articulações	30
3.2.3 Rigidez à flexão de uma barra prismática com articulação a direita	37
3.2.4 Rigidez à flexão de uma barra prismática com articulação a esquerda	43
3.3 Sistema de coordenadas	43
3.4 Matriz de rotação.....	44
3.5 Formulação da matriz de rigidez global.....	46
3.6 Vetor de forças globais.....	51
4 METODOLOGIA.....	54

4.1 Implementação computacional.....	54
4.2 Abrangência do algoritmo	54
4.3 Funcionamento do algoritmo.....	55
4.4 Validação do algoritmo	56
5 APLICAÇÕES E RESULTADOS	64
5.1 Estrutura 01: Viga hiperestática	64
5.2 Estrutura 02: Treliça plana	67
5.3 Estrutura 03: Pórtico composto	71
5.4 Estrutura 04: Pórtico com tirante	75
5.5 Estrutura 05: Pórtico tri-articulado	79
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	83
6.1 Sugestões para trabalhos futuros	83
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84

1 INTRODUÇÃO

Compreender o comportamento das estruturas é uma das tarefas mais complexas do ramo da engenharia civil, cabendo ao engenheiro civil, a responsabilidade de analisar como as estruturas respondem às solicitações das mais diferentes naturezas e magnitudes. Segundo Martha (2022), o objetivo da análise estrutural compreende encontrar a solução para um conjunto de incógnitas, sendo elas, os esforços internos e externos (reações de apoio e cargas propriamente ditas), tensões, deslocamentos e deformações da estrutura.

Em estruturas simples, isto é, aquelas que não demandam cálculos complexos para sua resolução, é comum utilizar conceitos baseados no equilíbrio de forças e momentos para encontrar tais variáveis. Contudo, para estruturas com alto grau de complexidade, seja em relação a carregamentos, condições de contorno ou geometria, é conveniente utilizar ferramentas computacionais para encontrar as soluções para essas incógnitas, resolvendo-as de forma rápida e otimizando o tempo que seria gasto em cálculos manuais.

Nos dias atuais, é praticamente inconcebível realizar o cálculo de projetos estruturais de forma manual. Recorre-se sempre ao uso de *softwares* para modelagem e análise das estruturas, permitindo que o projetista não perca tempo com inúmeros cálculos matemáticos. Dessa forma, o mesmo pode utilizar esse tempo para elaborar outras concepções, alcançando um melhor equilíbrio entre segurança e economia. Devido ao avanço tecnológico dos computadores, a implementação de sistemas matriciais para a resolução de estruturas substituiu, quase por completo, o uso dos métodos clássicos nos escritórios de engenharia (McCormac, 2009).

Segundo Soriano (2005), os atuais sistemas computacionais, em sua totalidade, fazem uso do método dos deslocamentos para a análise de estruturas, incorporando também o método dos elementos finitos para a análise de meios contínuos. Dentre os métodos para a resolução de estruturas que podem ser aplicados computacionalmente, destaca-se o Método da Rigidez Direta (MRD), que corresponde à formulação matricial do método dos deslocamentos. Devido à facilidade de implementação e manipulação de matrizes em poucas linhas de código, o MRD torna-se uma abordagem atrativa para a prática da programação.

Em consonância com os pontos apresentados, o presente trabalho propõe, por meio do cálculo matricial, a implementação computacional do Método da Rigidez Direta para a resolução de estruturas planas, abrangendo vigas, treliças planas e pórticos planos em sistemas estruturais isostáticos e hiperestáticos. A implementação desse algoritmo permite que o aluno aplique os conhecimentos adquiridos durante a graduação, integrando temas de diferentes disciplinas, como Informática Básica, Álgebra Linear e Mecânica das Estruturas I e II. A

criação deste trabalho não somente proporcionará mais uma ferramenta para análise de estruturas, mas também poderá servir como base para trabalhos futuros, visando ao aperfeiçoamento do algoritmo desenvolvido.

1.1 Objetivos Gerais

O presente trabalho tem como objetivo analisar matricialmente estruturas planas do tipo vigas, treliças e pórticos. Para isso, será implementado um algoritmo com o *software GNU (General Public License) Octave*[®] que permita o cálculo de deslocamentos (rotações e translações), esforços internos e reações de apoio nodais dessas estruturas por meio do Método da Rigidez Direta.

1.2 Objetivos Específicos

- ✓ Discretizar o Método da Rigidez Direta;
- ✓ Calcular os deslocamentos generalizados (deflexões e rotações);
- ✓ Calcular os esforços internos (normal, cortante e momento fletor);
- ✓ Calcular as reações de apoio;
- ✓ Gerar um esboço da estrutura deformada;
- ✓ Validar os dados por meio do *software* de análise estrutural *Ftool*[®];
- ✓ Exportar os resultados em um arquivo *txt*.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Classificação das estruturas em barras

Segundo Martha (2022), os primeiros estudos sobre o comportamento das estruturas foram desenvolvidos com as “estruturas reticuladas”, formadas por barras, as quais se caracterizam por possuírem um eixo bem definido, sendo essas, os tipos mais comuns de sistemas estruturais. Uma das classificações empregadas as estruturas são com relação à geometria e aos esforços nas seções dos elementos, tal classificação pode ser oportuna ao estudo das estruturas em barras (Soriano, 2005).

Soriano (2005) descreveu a seguinte classificação quanto à geometria e aos esforços nas seções dos elementos:

- ✓ Viga
- ✓ Pórtico
 - Plano
 - Espacial
- ✓ Grelhas
- ✓ Treliça
 - Plana
 - Espacial
- ✓ Mista com arcos, escoras, membranas, cabos e/ou tirantes

2.2 Equilíbrio estático e graus de liberdade

Segundo Hibbeler (2010), para um corpo estar em equilíbrio, é necessário tanto que as forças atuantes estejam equilibradas, evitando, assim, que o corpo translate ou se mova com aceleração ao longo de uma trajetória e os momentos também estejam em equilíbrio, impedindo a rotação do corpo. Conforme dito por Almeida (2009) para o equilíbrio estático de forças e momentos no espaço, são necessárias seis equações ilustradas na Equação (1):

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

A quantidade de graus de liberdade de uma estrutura refere-se, a princípio, ao número de componentes de deslocamento ou coordenadas necessários para definir sua posição no espaço a qualquer momento durante o carregamento. (McGuire; Gallagher; Ziemian, 2000).

Por esse motivo, as estruturas, apresentam um número infinito de graus de liberdade, já que cada um de seus membros pode se deformar de infinitas maneiras, dependendo da forma como são solicitados (McGuire; Gallagher; Ziemian, 2000). Entretanto, pelo do Método da Rigidez Direta é possível utilizar um número finito de graus de liberdade, uma vez que este analisa o comportamento contínuo de uma estrutura, por meio dos parâmetros nodais, sem que ocorram alterações nos resultados (Martha, 2022).

Quando uma estrutura sofre a ação de forças, seus nós, sofrerão deslocamentos na forma de translações ou rotações, a depender do arranjo da estrutura (Weaver, Gere, 1990). No contexto espacial, uma translação ou uma rotação pode ser expressa por componentes referentes aos três planos ortogonais, nesse caso, o corpo possui seis graus de liberdade - três translações mais três rotações - (Sussekkind, 1981).

2.3 Estruturas planas

Uma estrutura é tida como plana, quando toda sua geometria e as forças atuantes em seus elementos estão contidas em um único plano, o que permite que a mesma seja analisada sobre o modelo plano (Almeida, 2009). Para essas estruturas, existem três graus de liberdade, duas translações e uma rotação (Sussekkind, 1981).

Para esses casos, com forças coplanares, as equações de equilíbrio estático reduzem a três (o eixo z é a perpendicular ao plano x-y), expressas na Equação (2):

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

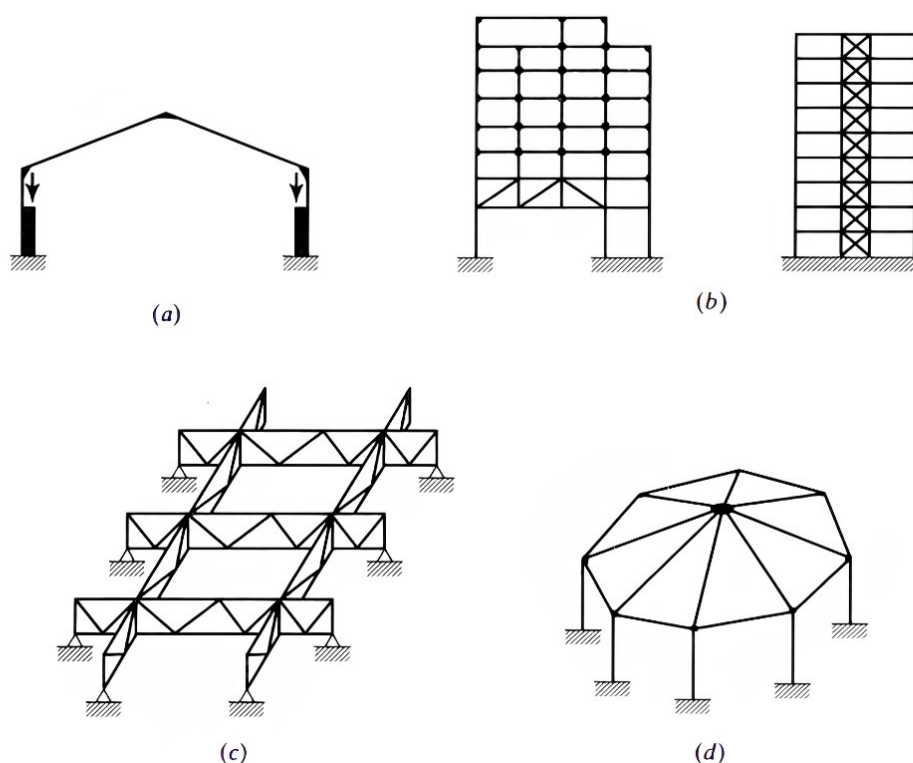
$$\Sigma M_z = 0$$

(2)

2.4 Idealização estrutural

Para realizar a análise de uma estrutura, é necessário idealizá-la, considerando que os membros, que possuem dimensões definidas (largura, altura e profundidade), são representados por linhas e que sua resistência à deformação é determinada tanto pelas características intrínsecas do material, como o módulo de Young (E) e o coeficiente de Poisson (ν), quanto por suas propriedades geométricas, como a área (A), o momento de inércia (I) e o momento polar de inércia (J) (McGuire; Gallagher; Ziemian, 2000). Logo, é necessário que o engenheiro estrutural desenvolva a habilidade de criar modelos idealizados das estruturas, a fim de viabilizar a análise das forças atuantes nos membros (Hibbeler, 2013). A Figura 1 ilustra algumas estruturas reticuladas.

Figura 1 - Estruturas reticuladas típicas. (a) Pórtico plano com ligações rígidas. (b) Estruturas de múltiplos andares – com ligações rígidas e treliçadas. (c) Treliça espacial. (d) Pórtico espacial com ligações rígidas.

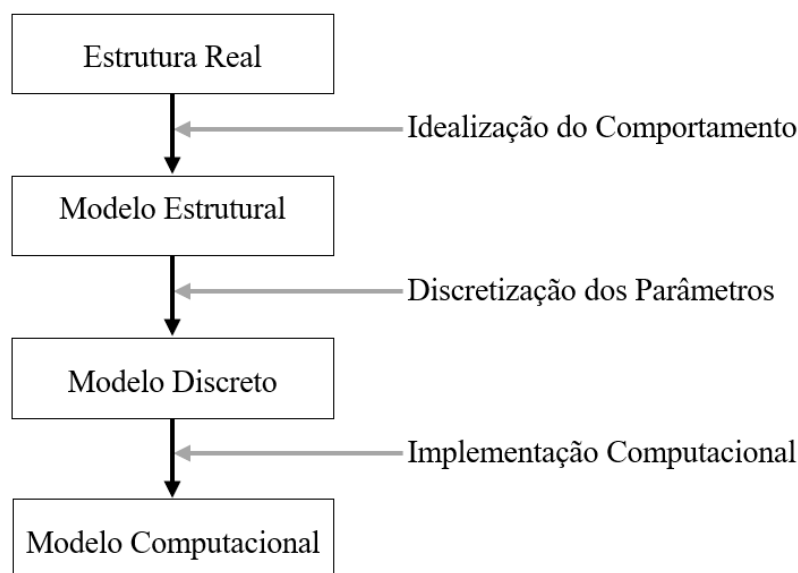


Fonte: McGuire, Gallagher, Ziemian (2000).

Conforme Martha (2018), a essência dos métodos de análise estrutural parte da premissa de transformar o meio contínuo, matemático e estrutural da estrutura em estudo em um modelo

discreto, com um número limitado de parâmetros, nesse processo, a estrutura passa por quatro níveis de abstração. A Figura 2 mostra os quatro níveis de abstração de uma estrutura.

Figura 2 - Quatro níveis de abstração referentes ao processo de análise de uma estrutura.



Fonte: Adaptado de Martha (2018).

2.4.1 Estrutura Real

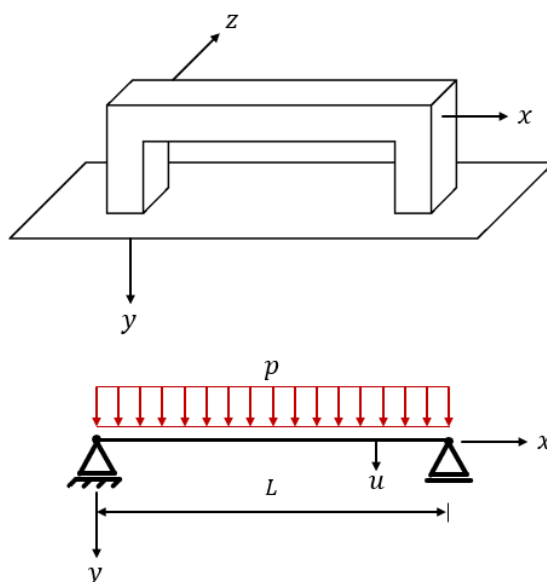
Uma estrutura pode ser entendida como um conjunto de elementos interligados entre si e com o meio exterior, formando um sistema em equilíbrio capaz de suportar ações externas, sendo essas ações, denominadas forças ativas, são absorvidas e transmitidas aos apoios, onde geram forças reativas (Almeida, 2009).

2.4.2 Modelo Estrutural

O modelo estrutural, também chamado de modelo matemático, esse nível de abstração é utilizado para representar, por meio de artifícios matemáticos, a estrutura em estudo (Martha, 2018). Segundo Soriano (2009), devido à dificuldade de compreender com precisão o comportamento real de sistemas físicos, mesmo por meio de experimentos, são desenvolvidas soluções analíticas para mitigar esse problema.

Toda e qualquer matéria possui, em sua constituição, inúmeras partículas elementares que carregam consigo características únicas, mas, na prática da engenharia não é interessante estudar o comportamento macroscópico dessas partículas individualmente, sendo mais adequado considerar a constituição da matéria como um conjunto de “pontos materiais” conectados entre si sem se afastarem a ponto de formarem vazios e sem se aproximarem a ponto de causarem sobreposição, configurando o meio contínuo (Soriano, 2009). No contexto das estruturas reticuladas no meio dos sólidos contínuos, essas são representadas por uma configuração aramada, indicada por linhas que passam pelo eixo dos elementos (Martha, 2018). A Figura 3 mostra um sólido sobre dois apoios com seu modelo estrutural abaixo.

Figura 3 - Sólido sobre dois apoios.



Fonte: Adaptado de Soriano (2009).

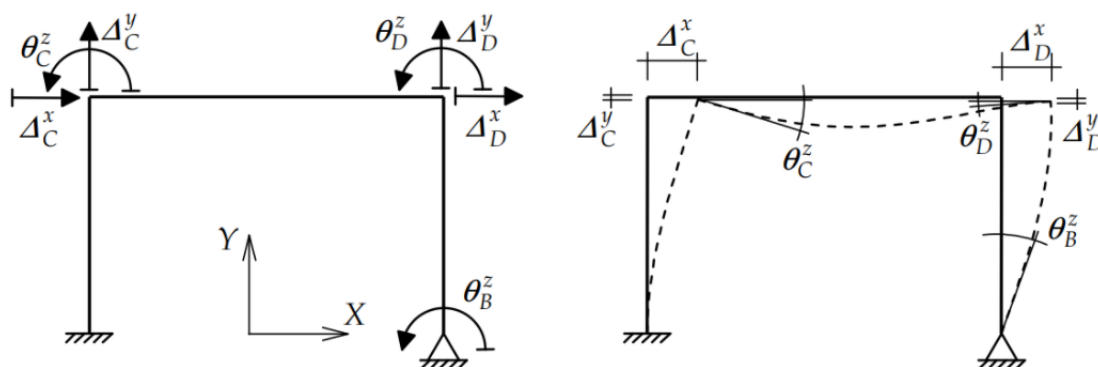
2.4.3 Modelo Discreto

O próximo nível de abstração refere-se ao Modelo Discreto, no qual, por meio de métodos de cálculo da análise estrutural, é possível transformar o modelo estrutural do meio contínuo em um meio discreto, isso é feito utilizando um conjunto de parâmetros para simular o comportamento da estrutura em cada método estudado (Martha, 2018).

No Método das Forças, os parâmetros são forças generalizadas (forças ou momentos), enquanto no Método dos Deslocamentos, utilizam-se deslocamentos generalizados (translações

ou rotações), também chamados de deslocabilidades (Martha, 2018). Por meio da Figura 4 é possível ver os parâmetros de discretização usados no Método dos Deslocamentos.

Figura 4 - Parâmetros nodais utilizados na discretização pelo método dos deslocamentos.



Fonte: Martha (2018).

2.4.4 Modelo Computacional

Por fim, tem-se o modelo computacional, tal modelo é fundamental para analisar uma estrutura, uma vez que, na prática, mesmo tendo o modelo discreto de estruturas reais, não é concebível resolvê-las manualmente, recaindo ao uso de programas computacionais (Martha, 2018).

2.5 Análise Matricial de Estruturas

A análise matricial de estruturas é uma excelente abordagem para o ramo da análise estrutural, abrangendo temas de diversas áreas, como as engenharias aeroespacial, mecânica e civil, pois o sistema matricial oferece vantagens por se de fácil implementação computacional nas mais variadas etapas de análise, diferentemente dos métodos tradicionais que variam muitas vezes conforme o tipo de estrutura (Weaver, Gere, 1990).

Segundo Vaz (2011), a análise matricial de estruturas introduziu uma série de novos conceitos para a análise estrutural, sistematizando processos matemáticos por meio da álgebra matricial, que utiliza vetores e matrizes em suas operações. A aplicação de métodos matriciais pelo engenheiro estrutural é de extrema importância, pois todas as estruturas linearmente

elásticas, isostáticas ou hiperestáticas podem ser descritas por equações lineares (McCormac, 2009).

2.6 Métodos da Rigidez Direta

Segundo Kassimali (2015), tanto o Método das Forças (Flexibilidade) quanto o Método dos Deslocamentos (Rigidez) podem ser formulados em termos matriciais, no entanto, por ser mais sistemático, o Método dos Deslocamentos apresenta vantagens na aplicação computacional, o que faz com que a maioria dos *softwares* de análise estrutural sejam baseados nesse método. O Método da Rigidez Direta, corresponde a formulação matricial do Método dos Deslocamentos (Martha, 2022).

Uma das principais características do Método dos Deslocamentos é a premissa de somar as contribuições dos coeficientes de rigidez das barras no sistema de coordenadas local para, então, obter os coeficientes de rigidez globais da estrutura, entretanto, no método da rigidez direta, essa soma é realizada diretamente, justificando o nome “direta” (Martha, 2022). Weaver e Gere (1990) afirmam que o Método da Rigidez Direta é tido como o melhor e maior método para implementação computacional na análise de estruturas.

Kassimali (2015) afirma que, no Método da Rigidez Direta, os deslocamentos nodais da estrutura são obtidos por meio da resolução de um conjunto de equações, expresso na Equação (3), sendo esta a equação base para o MRD.

$$\{f\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (3)$$

Sendo:

$\{f\}$ = vetor de forças globais;

$[k]$ = matriz de rigidez global da estrutura;

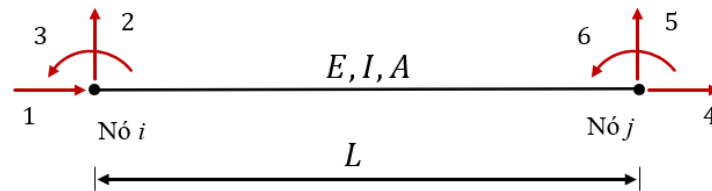
$\{\delta\}$ = vetor de deslocamentos globais.

3 DISCRETIZAÇÃO DO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA

3.1 Matriz de rigidez de uma barra

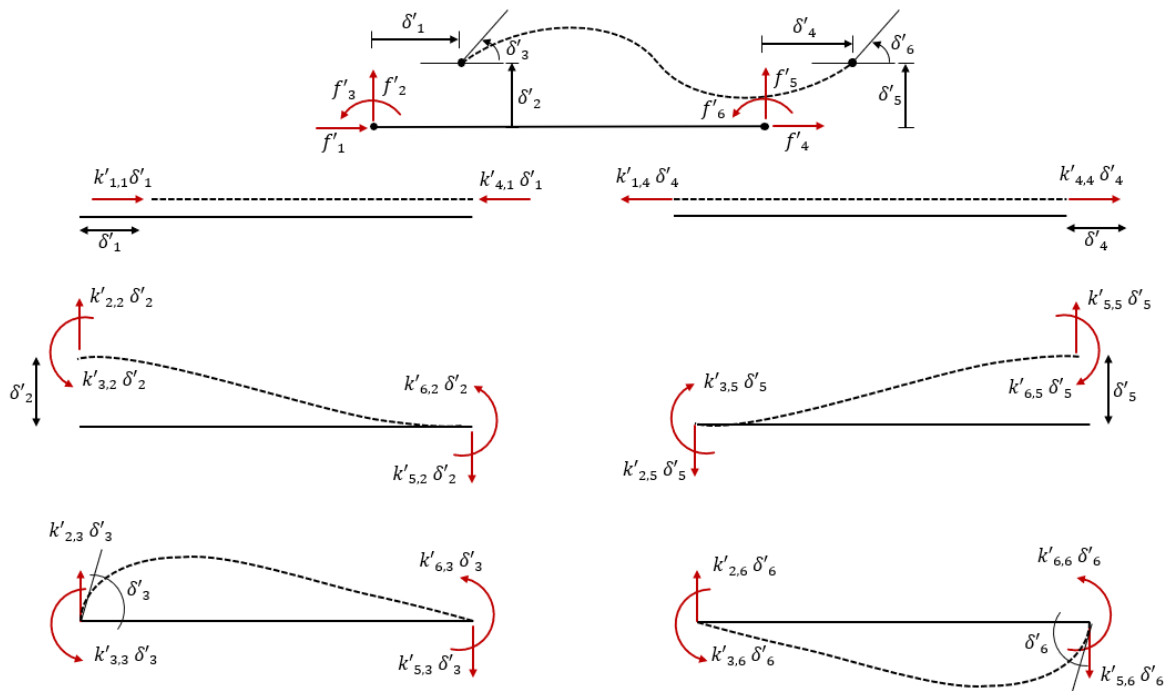
A resolução de um problema pelo Método da Rigidez Direta parte da premissa da superposição de uma solução global da estrutura pela solução de cada barra que a compõe (Martha, 2018). A Figura 5 ilustra um elemento de pórtico com três graus de liberdade por nó. A Figura 6, mostra a superposição das configurações deformadas dos graus de liberdade de uma barra de pórtico plano, decorrentes das forças nodais aplicadas.

Figura 5 - Graus de liberdade de um elemento de pórtico.



Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 6 - Superposição de configurações deformadas elementares para compor a elástica final de uma barra de pórtico plano.



Fonte: Adaptado de Martha (2018).

Sendo:

f'_i = A força generalizada da barra na direção global, podendo ser uma força ou momento que atua na direção da deslocabilidades δ'_i .

Algebricamente, os valores das forças são expressos por:

$$f'_1 = k'_{1,1}\delta'_1 + k'_{1,4}\delta'_4 \quad (4)$$

$$f'_2 = k'_{2,2}\delta'_2 + k'_{2,3}\delta'_3 + k'_{2,5}\delta'_5 + k'_{2,6}\delta'_6 \quad (5)$$

$$f'_3 = k'_{3,1}\delta'_1 + k'_{3,3}\delta'_3 + k'_{3,5}\delta'_5 + k'_{3,6}\delta'_6 \quad (6)$$

$$f'_4 = k'_{4,1}\delta'_1 + k'_{4,4}\delta'_4 \quad (7)$$

$$f'_5 = k'_{5,2}\delta'_2 + k'_{5,3}\delta'_3 + k'_{5,5}\delta'_5 + k'_{5,6}\delta'_6 \quad (8)$$

$$f'_6 = k'_{6,2}\delta'_2 + k'_{6,3}\delta'_3 + k'_{6,5}\delta'_5 + k'_{6,6}\delta'_6 \quad (9)$$

Forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{1,1} & 0 & 0 & k'_{1,4} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{2,2} & k'_{2,3} & 0 & k'_{2,5} & k'_{2,6} \\ 0 & k'_{3,2} & k'_{3,3} & 0 & k'_{3,5} & k'_{3,6} \\ k'_{4,1} & 0 & 0 & k'_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{5,2} & k'_{5,3} & 0 & k'_{5,5} & k'_{5,6} \\ 0 & k'_{6,2} & k'_{6,3} & 0 & k'_{6,5} & k'_{6,6} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \delta'_3 \\ \delta'_4 \\ \delta'_5 \\ \delta'_6 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Ou sua forma condensada:

$$\{f'\} = [k'] \cdot \{\delta'\} \quad (11)$$

Sendo:

$\{f'\}$ = vetor de forças generalizadas aplicadas à barra no sistema local;

$[k']$ = matriz de rigidez de um elemento de barra no sistema local;

$\{\delta'\}$ = vetor de deslocamentos da barra no sentido local.

Os termos $k'_{i,j}$ referem-se aos coeficientes de rigidez das barras, sendo o índice i o grau de liberdade no qual a força f_i foi aplicada e o índice j o grau de liberdade associado no qual ocorreu o deslocamento.

$$k'_{i,j} = \begin{bmatrix} k'_{1,1} & 0 & 0 & k'_{1,4} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{2,2} & k'_{2,3} & 0 & k'_{2,5} & k'_{2,6} \\ 0 & k'_{3,2} & k'_{3,3} & 0 & k'_{3,5} & k'_{3,6} \\ k'_{4,1} & 0 & 0 & k'_{4,4} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{5,2} & k'_{5,3} & 0 & k'_{5,5} & k'_{5,6} \\ 0 & k'_{6,2} & k'_{6,3} & 0 & k'_{6,5} & k'_{6,6} \end{bmatrix} \quad (12)$$

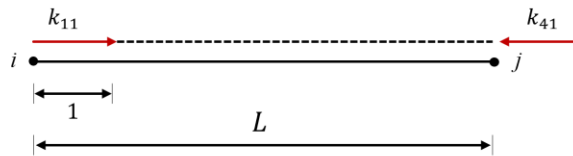
3.2 Coeficientes de rigidez

Segundo Martha (2022), os coeficientes de rigidez de uma barra são tidos como soluções fundamentais de um elemento isolado, sendo, portanto, forças ou momentos que agem em suas extremidades de maneira a equilibrá-la quando nela atuam deslocamentos ou rotações unitárias. Nos tópicos seguintes, serão deduzidos os coeficientes de rigidez para uma barra prismática, devido às ações de forças axiais e flexoras.

3.2.1 Rigidez axial de uma barra prismática

Para a dedução dos coeficientes de rigidez de uma barra sobre ação de esforços axiais considere a Figura 7 ilustra o caso de uma barra prismática sobre a ação de um deslocamento unitário perpendicular a sua seção transversal imposto no nó i .

Figura 7 - Deslocamento horizontal unitário imposto no nó i .



Fonte: Autoria própria (2025).

Pelo equilíbrio de forças horizontais, tem-se:

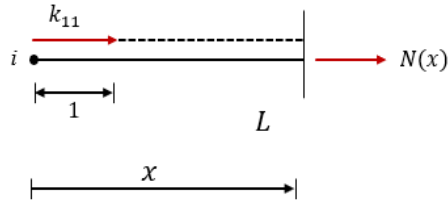
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad (13)$$

$$k_{11} - k_{41} = 0 \quad (14)$$

$$k_{11} = k_{41} \quad (15)$$

Para encontrar os valores de k_{11} e k_{41} faz-se uma seção na barra utilizada para determinar os esforços internos resultantes da ação de uma força axial, ilustrada na Figura 8.

Figura 8 - Barra com carga axial seccionada.



Fonte: Autoria própria (2025).

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad (16)$$

$$k_{11} + N(x) = 0 \quad (17)$$

$$N(x) = -k_{11} \quad (18)$$

Considerando uma seção transversal constante, material homogêneo, a carga aplicada na extremidade pode ser considerada constante em todo o comprimento da barra, logo:

$$N = -k_{11} \quad (19)$$

Ao longo do elemento, a força normal ao plano pode ser expressa pela seguinte expressão:

$$N = \sigma \cdot A \quad (20)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (21)$$

Sendo:

N = Esforço Normal;

σ = Tensão normal ao plano;

A = Área da seção transversal.

Estando o material no regime linear elástico, respeitando o limite de proporcionalidade, é aplicável a Lei de *Hooke*.

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (22)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (23)$$

Sendo:

ϵ = Deformação longitudinal;

E = Modulo de elasticidade do material.

O alongamento sofrido pela barra é obtido por:

$$\delta = \epsilon \cdot L \quad (24)$$

Sendo:

δ = Alongamento da barra;

L = Comprimento inicial da barra.

Substituindo a Equação (23) na Equação (24):

$$\delta = \frac{\sigma}{E} \cdot L \quad (25)$$

Substituindo a Equação (21) na Equação (25):

$$\delta = \frac{NL}{EA} \quad (26)$$

$$N = \frac{EA}{L} \cdot \delta \quad (27)$$

Substituindo a Equação (27) na equação (19) e δ por pelo deslocamento unitário imposto no nó i é possível determinar o coeficiente k_{11} :

$$-k_{11} = \frac{EA}{L} \cdot (-1) \quad (28)$$

$$k_{11} = \frac{EA}{L} \quad (29)$$

Substituindo a equação (29) na equação (15) é possível determinar o coeficiente k_{41} :

$$k_{41} = \frac{-EA}{L} \quad (30)$$

De maneira similar, ao inserir um deslocamento horizontal no nó j é possível encontrar os outros coeficientes de rigidez provenientes de um carregamento axial, sendo eles:

$$k_{14} = \frac{-EA}{L} \quad (31)$$

$$k_{44} = \frac{EA}{L} \quad (32)$$

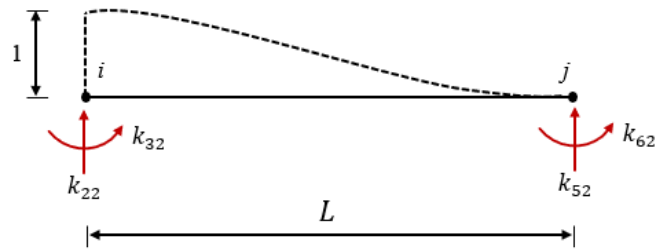
Com isso, tem-se a matriz de rigidez para pórticos planos segundo os carregamentos axiais ilustrada na Equação (33). A matriz encontrada independe se a vinculação é engastada ou rotulada, pois, a influência da flexão não é considerada. Assim, os coeficientes de rigidez dessa barra são apenas aqueles provenientes dos esforços normais à seção, sendo está a matriz utilizada para a modelagem das treliças, tirantes ou escoras.

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

3.2.2 Rigidez à flexão de uma barra prismática sem articulações

Para determinar os coeficientes de rigidez da segunda coluna da matriz ilustrada na equação (12) foi inserido um deslocamento unitário no nó i como ilustrado na Figura 9.

Figura 9 - Deslocamento vertical unitário imposto no nó i para barra sem articulação.



Fonte: Autoria própria (2025).

Pelo equilíbrio de forças verticais e momentos em torno do nó i tem-se:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad (34)$$

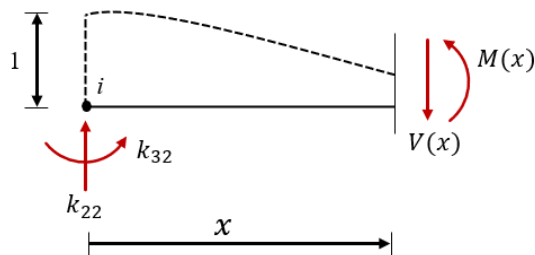
$$k_{22} + k_{52} = 0 \quad (35)$$

$$\curvearrowright \Sigma M_z^i = 0 \quad (36)$$

$$k_{52} \cdot L + k_{32} + k_{62} = 0 \quad (37)$$

Para encontrar os valores de k_{22} , k_{52} , k_{32} e k_{62} faz-se uma seção na barra, afim de se encontrar seus esforços internos da barra sem articulação ilustrada na Figura 10:

Figura 10 - Barra sem articulação com deslocamento no nó i seccionada.



Fonte: Autoria própria (2025).

Pelo equilíbrio de momentos em torno da seção feita tem-se:

$$\curvearrowright \Sigma M_z(x) = 0 \quad (38)$$

$$-k_{22} \cdot x + k_{32} + M(x) = 0 \quad (39)$$

$$M(x) = k_{22} \cdot x - k_{32} \quad (40)$$

Para prosseguir com a determinação dos coeficientes, fez-se uso da equação da linha elástica descrita a seguir:

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (41)$$

Utilizando o método da integração tem-se:

$$EI \frac{d^2\delta}{dx^2} = k_{22} \cdot x - k_{32} \quad (42)$$

$$EI \frac{d\delta}{dx} = \frac{k_{22} \cdot x^2}{2} - k_{32} \cdot x + C_1 \quad (43)$$

$$EI \cdot \delta = \frac{k_{22} \cdot x^3}{6} - \frac{k_{32} \cdot x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (44)$$

Para encontrar as constantes de integração C_1 e C_2 é necessário o uso das condições de contorno $d\delta/dx = 0$ e $\delta = l$ para $x = 0$, com isso obtém-se:

$$C_1 = 0 \quad (45)$$

$$C_2 = EI \quad (46)$$

Substituindo as equações (45) e (46) nas equações (43) e (44) tem-se:

$$EI \frac{d\delta}{dx} = \frac{k_{22} \cdot x^2}{2} - k_{32} \cdot x \quad (47)$$

$$EI \cdot \delta = \frac{k_{22} \cdot x^3}{6} - \frac{k_{32} \cdot x^2}{2} + EI \quad (48)$$

Utilizando a condição de contorno $d\delta/dx = 0$ para $x = L$ é possível escrever o coeficiente k_{32} em função de k_{22} .

$$k_{32} = \frac{k_{22} \cdot L}{2} \quad (49)$$

Utilizando a condição de contorno $\delta = 0$ para $x = L$ e substituindo a equação (49) na equação (48) determina-se k_{22} :

$$k_{22} = \frac{12EI}{L^3} \quad (50)$$

Substituindo a equação (50) na equação (49) é possível determinar o coeficiente k_{32} :

$$k_{32} = \frac{6EI}{L^2} \quad (51)$$

Substituindo a equação (51) na equação (35) é possível determinar o coeficiente k_{52} :

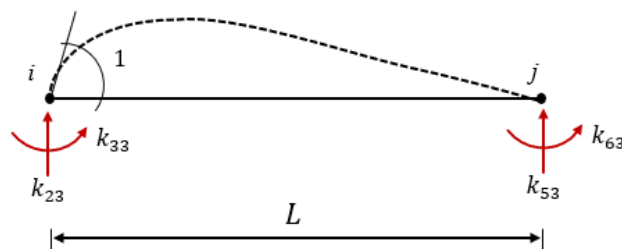
$$k_{52} = \frac{-12EI}{L^3} \quad (52)$$

Substituindo as equações (51) e (52) na equação (37) é possível determinar o coeficiente k_{62} :

$$k_{62} = \frac{6EI}{L^2} \quad (53)$$

Para determinar os coeficientes de rigidez da terceira coluna foi inserido uma rotação unitária no nó i conforme ilustrado na Figura 11:

Figura 11 - Rotação unitária imposta no nó i para barra sem articulação.



Fonte: Autoria própria (2025).

Pelo equilíbrio de forças verticais e momentos em torno do nó i tem-se:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad (54)$$

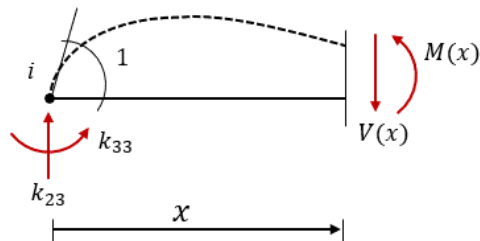
$$k_{23} + k_{53} = 0 \quad (55)$$

$$\curvearrowright \Sigma M_z^i = 0 \quad (56)$$

$$k_{53} \cdot L + k_{33} + k_{63} = 0 \quad (57)$$

Para encontrar os valores de k_{23} , k_{53} , k_{33} e k_{63} faz-se uma seção na barra, afim de se encontrar seus esforços internos da barra sem articulação ilustrada na Figura 12:

Figura 12 - Barra sem articulação com rotação no nó i seccionada.



Fonte: Autoria própria (2025).

$$\curvearrowright \Sigma M_z(x) = 0 \quad (58)$$

$$-k_{23} \cdot x + k_{33} + M(x) = 0 \quad (59)$$

$$M(x) = k_{23} \cdot x - k_{33} \quad (60)$$

Utilizando a equação da linha elástica com o método da integração tem-se:

$$EI \frac{d^2 \delta}{dx^2} = k_{23} \cdot x - k_{33} \quad (61)$$

$$EI \frac{d\delta}{dx} = \frac{k_{23} \cdot x^2}{2} - k_{33} \cdot x + C_1 \quad (62)$$

$$EI \cdot \delta = \frac{k_{23} \cdot x^3}{6} - \frac{k_{33} \cdot x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (63)$$

Para encontrar as constantes de integração C_1 e C_2 é necessário o uso das condições de contorno $d\delta/dx = 0$ e $\delta = 1$ para $x = 0$.

$$C_1 = EI \quad (64)$$

$$C_2 = 0 \quad (65)$$

Substituindo as equações (64) e (65) nas equações (62) e (63) tem-se:

$$EI \frac{d\delta}{dx} = \frac{k_{23} \cdot x^2}{2} - k_{33} \cdot x + EI \quad (66)$$

$$EI \cdot \delta = \frac{k_{23} \cdot x^3}{6} - \frac{k_{33} \cdot x^2}{2} + EI \cdot x \quad (67)$$

Utilizando a condição de contorno $d\delta/dx = 0$ para $x = L$ é possível escrever o coeficiente k_{33} em função de k_{23} .

$$k_{33} = \frac{k_{23} \cdot L}{2} + \frac{EI}{L} \quad (68)$$

Utilizando a condição de contorno $\delta = 0$ para $x = L$ e substituindo a equação (68) na equação (67) determina-se k_{23} :

$$k_{23} = \frac{6EI}{L^2} \quad (69)$$

Substituindo a equação (69) na equação (68) é possível determinar o coeficiente k_{33} :

$$k_{33} = \frac{4EI}{L} \quad (70)$$

Substituindo a equação (69) na equação (55) é possível determinar o coeficiente k_{53} :

$$k_{53} = \frac{-6EI}{L^2} \quad (71)$$

Substituindo as equações (70) e (71) na equação (57) é possível determinar o coeficiente k_{63} :

$$k_{63} = \frac{2EI}{L} \quad (72)$$

De maneira análoga, ao inserir um deslocamento vertical e uma rotação anti-horária no nó j de valor unitário, é possível encontrar os demais coeficientes de rigidez, estes, estão expressos na Tabela 1:

Tabela 1 - Coeficientes de rigidez das colunas 5 e 6 de uma barra sem articulação.

COLUNA 5	COLUNA 6
$k_{15} = 0$	$k_{16} = 0$
$k_{25} = -12EI/L^3$	$k_{26} = 6EI/L^2$
$k_{35} = -6EI/L^2$	$k_{36} = 2EI/L$
$k_{45} = 0$	$k_{46} = 0$
$k_{55} = -12EI/L^3$	$k_{56} = -6EI/L^2$
$k_{65} = -6EI/L^2$	$k_{66} = 4EI/L$

Fonte: Autoria própria (2025).

Com isso, é possível obter a matriz rigidez de uma barra de pórtico plano, ilustrada na equação (73), os coeficientes de rigidez axial são os encontrados no tópico 3.2.1.

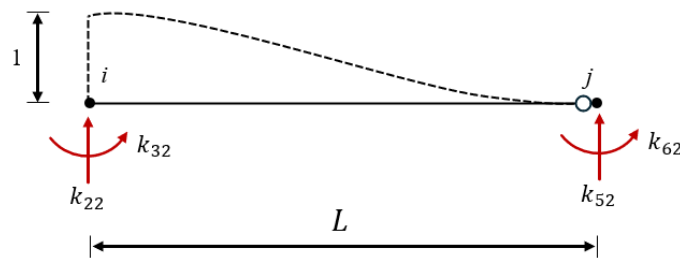
$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (73)$$

3.2.3 Rigidez à flexão de uma barra prismática com articulação a direita

Segundo Soriano (2005), uma barra pode se ligar a outra de maneira que permita deslocamentos em suas extremidades como, por exemplo, a rótula que permite a rotação anulando o momento fletor, sendo essas ligações chamadas de articulações. Com isso, foi deduzida a matriz de rigidez para uma barra com articulação à direita, conforme mostrado adiante.

Para determinar os coeficientes de rigidez da segunda coluna para uma barra de pórtico com uma rótula na extremidade direita foi inserido um deslocamento vertical no nó i conforme ilustrado na Figura 13:

Figura 13 - Deslocamento vertical unitário imposto no nó i para barra com rótula a direita.



Fonte: Autoria própria (2025).

Pelo equilíbrio de forças verticais e momentos em torno do nó i tem-se:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad (74)$$

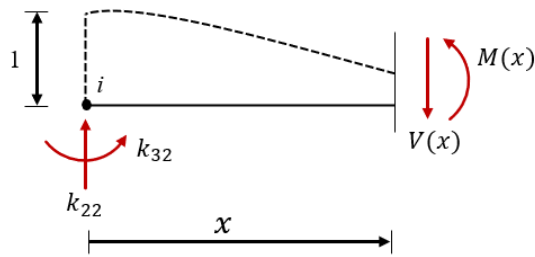
$$k_{22} + k_{52} = 0 \quad (75)$$

$$\curvearrowright \Sigma M_z^i = 0 \quad (76)$$

$$k_{52} \cdot L + k_{32} + k_{62} = 0 \quad (77)$$

Para encontrar os valores de k_{22} , k_{52} , k_{32} e k_{62} faz-se uma seção na barra, afim de se encontrar seus esforços internos da barra com articulação a direita ilustrada na Figura 14.

Figura 14 - Barra com articulação a direita com deslocamento no nó i seccionada.



Fonte: Autoria própria (2025).

Pelo equilíbrio de forças verticais e momentos em torno do nó i tem-se:

$$\sum M_z(x) = 0 \quad (78)$$

$$-k_{22} \cdot x + k_{32} + M(x) = 0 \quad (79)$$

$$M(x) = k_{22} \cdot x - k_{32} \quad (80)$$

Utilizando a equação da linha elástica:

$$EI \frac{d^2 \delta}{dx^2} = k_{22} \cdot x - k_{32} \quad (81)$$

$$EI \frac{d\delta}{dx} = \frac{k_{22} \cdot x^2}{2} - k_{32} \cdot x + C_1 \quad (82)$$

$$EI \cdot \delta = \frac{k_{22} \cdot x^3}{6} - \frac{k_{32} \cdot x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (83)$$

Para encontrar as constantes de integração C_1 e C_2 é necessário o uso das condições de contorno $d\delta/dx = 0$ e $\delta = 1$ para $x = 0$.

$$C_1 = 0 \quad (84)$$

$$C_2 = EI \quad (85)$$

Substituindo as equações (84) e (85) nas equações (82) e (83) tem-se:

$$EI \frac{d\delta}{dx} = \frac{k_{22} \cdot x^2}{2} - k_{32} \cdot x \quad (86)$$

$$EI \cdot \delta = \frac{k_{22} \cdot x^3}{6} - \frac{k_{32} \cdot x^2}{2} + EI \quad (87)$$

Utilizando a condição de contorno $d\delta^2/dx^2 = 0$ para $x = L$ é possível escrever o coeficiente k_{32} em função de k_{22} .

$$k_{32} = k_{22} \cdot L \quad (88)$$

Utilizando a condição de contorno $\delta = 0$ para $x = L$ e substituindo a equação (88) na equação (87) determina-se k_{22} :

$$k_{22} = \frac{3EI}{L^3} \quad (89)$$

Substituindo a equação (89) na equação (88) é possível determinar o coeficiente k_{32} :

$$k_{32} = \frac{3EI}{L^2} \quad (90)$$

Substituindo a equação (89) na equação (75) é possível determinar o coeficiente k_{52} :

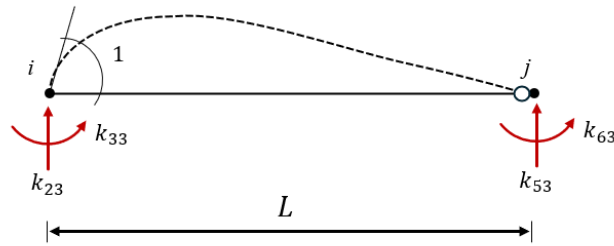
$$k_{52} = \frac{-3EI}{L^3} \quad (91)$$

Substituindo as equações (90) na equação (91) é possível determinar o coeficiente k_{62} :

$$k_{62} = 0 \quad (92)$$

Para determinar os coeficientes de rigidez da terceira coluna para uma barra com articulação a direita foi inserido uma rotação unitária no nó i conforme ilustrado na Figura 15 a seguir:

Figura 15 - Rotação unitária imposta no nó i para barra com rótula a direita.



Fonte: Autoria própria (2025).

Pelo equilíbrio de forças verticais e momentos em torno do nó i tem-se:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad (93)$$

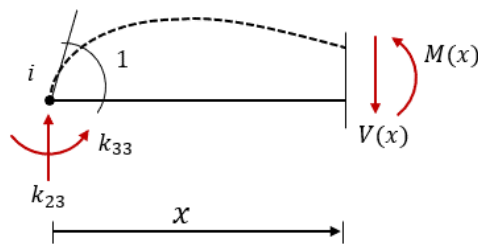
$$k_{23} + k_{53} = 0 \quad (94)$$

$$\curvearrowright \Sigma M_z^i = 0 \quad (95)$$

$$k_{53} \cdot L + k_{33} + k_{63} = 0 \quad (96)$$

Para encontrar os valores de k_{23} , k_{53} , k_{33} e k_{63} faz-se uma seção na barra, afim de se encontrar seus esforços internos da barra com articulação a direita ilustrada na Figura 16.

Figura 16 - Barra com articulação a direita com rotação no nó i seccionada.



Fonte: Autoria própria (2025).

$$\curvearrowright \Sigma M_z(x) = 0 \quad (97)$$

$$-k_{23} \cdot x + k_{33} + M(x) = 0 \quad (98)$$

$$M(x) = k_{23} \cdot x - k_{33} \quad (99)$$

Pela equação da linha elástica:

$$EI \frac{d^2 \delta}{dx^2} = k_{23} \cdot x - k_{33} \quad (100)$$

$$EI \frac{d\delta}{dx} = \frac{k_{23} \cdot x^2}{2} - k_{33} \cdot x + C_1 \quad (101)$$

$$EI \cdot \delta = \frac{k_{23} \cdot x^3}{6} - \frac{k_{33} \cdot x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (102)$$

Para encontrar as constantes de integração C_1 e C_2 é necessário o uso das condições de contorno $d\delta/dx = 0$ e $\delta = l$ para $x = 0$.

$$C_1 = EI \quad (103)$$

$$C_2 = 0 \quad (104)$$

Substituindo as equações (103) e (104) nas equações (101) e (102) tem-se:

$$EI \frac{d\delta}{dx} = \frac{k_{23} \cdot x^2}{2} - k_{33} \cdot x + EI \quad (105)$$

$$EI \cdot \delta(x) = \frac{k_{23} \cdot x^3}{6} - \frac{k_{33} \cdot x^2}{2} + EI \cdot x \quad (106)$$

Utilizando a condição de contorno $d\delta/dx = 0$ para $x = L$ é possível escrever o coeficiente k_{33} em função de k_{23} .

$$k_{33} = k_{23} \cdot L \quad (107)$$

Utilizando a condição de contorno $d\delta/dx = 0$ para $x = L$ e substituindo a equação k_{33} pela equação (107) determina-se k_{23} :

$$k_{23} = \frac{3EI}{L^2} \quad (108)$$

Substituindo a equação (108) na equação (107) é possível determinar o coeficiente k_{33} :

$$k_{33} = \frac{3EI}{L} \quad (109)$$

Substituindo a equação (108) na equação (94) é possível determinar o coeficiente k_{53} :

$$k_{53} = \frac{-3EI}{L} \quad (110)$$

Substituindo as equações (109) e (110) na equação (96) é possível determinar o coeficiente k_{63} :

$$k_{63} = 0 \quad (111)$$

De maneira análoga, ao inserir um deslocamento vertical e uma rotação anti-horária no nó j de valor unitário, é possível encontrar os demais coeficientes de rigidez, estes, estão expressos na Tabela 2:

Tabela 2 - Coeficientes de rigidez das colunas 5 e 6 de uma barra com rótula a direita.

COLUNA 5	COLUNA 6
$k_{15} = 0$	$k_{16} = 0$
$k_{25} = -3EI/L^3$	$k_{26} = 0$
$k_{35} = -3EI/L^2$	$k_{36} = 0$
$k_{45} = 0$	$k_{46} = 0$
$k_{55} = 3EI/L^3$	$k_{56} = 0$
$k_{65} = 0$	$k_{66} = 0$

Fonte: Autoria própria (2025).

Com isso, obtém-se a matriz de rigidez de uma barra com a extremidade rotulada à direita:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (112)$$

3.2.4 Rigidez à flexão de uma barra prismática com articulação a esquerda

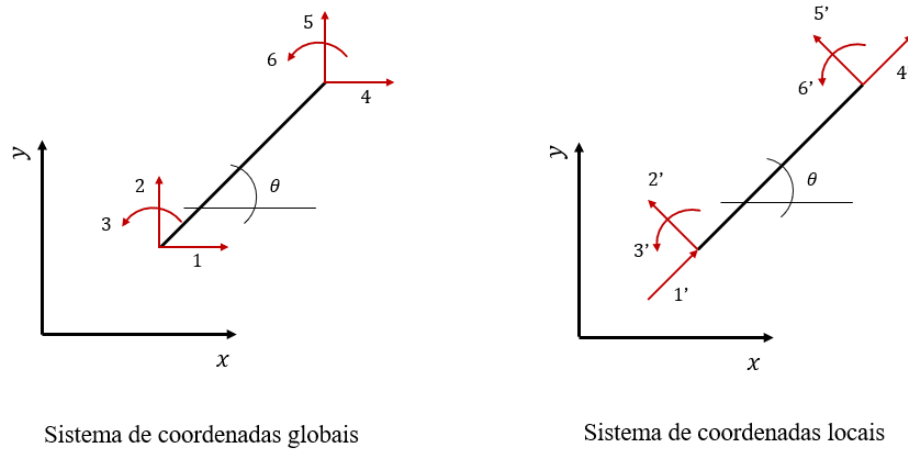
De maneira semelhante ao item 3.5.3, foi deduzida a matriz de rigidez de uma barra de pórtico plano com articulação à esquerda, conforme descrito a seguir:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \quad (113)$$

3.3 Sistema de coordenadas

Conforme Vaz (2011), a análise matricial baseia-se no uso de um sistema de coordenadas locais e globais. Para que a soma das contribuições dos coeficientes de rigidez seja adequada, é necessário que todos estejam em um mesmo sistema de eixos. Inicialmente, esses coeficientes são definidos nos eixos locais das barras, sendo necessária sua projeção para o sistema global (Martha, 2018). Os eixos locais e globais dos coeficientes de uma barra podem ser vistos na Figura 17.

Figura 17 - Sistemas de coordenadas globais e locais.

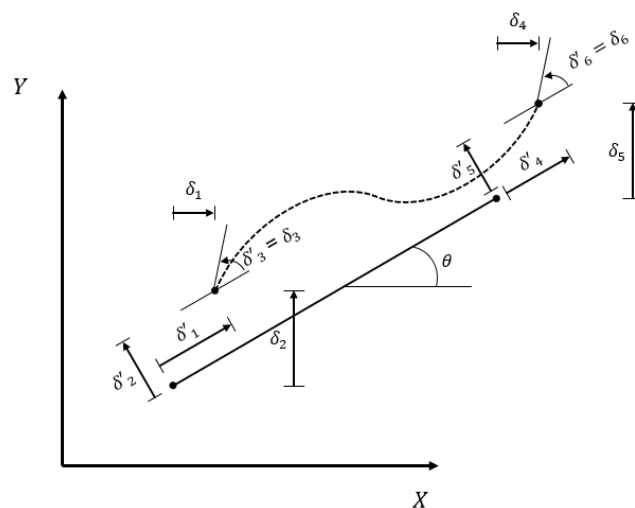


Fonte: Autoria própria (2025).

3.4 Matriz de rotação

Como já mencionado, para a aplicação do Método da Rigidez Direta, é necessário que todas as barras estejam orientadas em um sistema global de referência, para isso, é utilizada a matriz de rotação. A Figura 18 mostra rotação dos eixos de uma barra no plano.

Figura 18 - Rotação de eixos no plano.



Fonte: Adaptado de Martha (2018).

Com as devidas manipulações algébricas, chega-se:

$$\delta'_1 = \delta_1 \cdot \cos(\theta) + \delta_2 \cdot \sin(\theta) \quad (114)$$

$$\delta'_2 = -\delta_1 \cdot \sin(\theta) + \delta_2 \cdot \cos(\theta) \quad (115)$$

$$\delta'_3 = \delta_3 \quad (116)$$

$$\delta'_4 = \delta_4 \cdot \cos(\theta) + \delta_5 \cdot \sin(\theta) \quad (117)$$

$$\delta'_5 = -\delta_4 \cdot \sin(\theta) + \delta_5 \cdot \cos(\theta) \quad (118)$$

$$\delta'_6 = \delta_6 \quad (119)$$

Forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \delta'_3 \\ \delta'_4 \\ \delta'_5 \\ \delta'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (120)$$

Ou sua forma condensada:

$$\{\delta'\} = [R] \times \{\delta\} \quad (121)$$

Sendo:

R = Matriz de rotação para pórticos planos.

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (122)$$

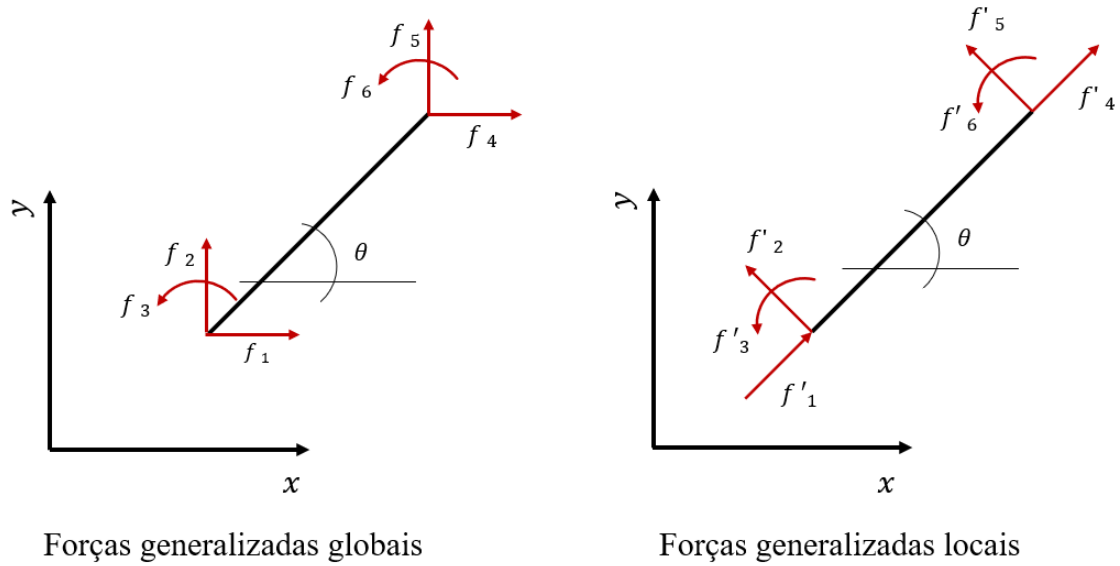
$$\cos(\theta) = \frac{x_j - x_i}{l} \quad (123)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_j - y_i}{l} \quad (124)$$

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (125)$$

De maneira similar, como pode ser visto na Figura 19, para as forças nodais:

Figura 19 - Forças generalizadas no sentido global e local.



Fonte: Autoria própria (2025).

$$f'_1 = f_1 \cdot \cos(\theta) + f_2 \cdot \sin(\theta) \quad (126)$$

$$f'_2 = -f_1 \cdot \sin(\theta) + f_2 \cdot \cos(\theta) \quad (127)$$

$$f'_3 = f_3 \quad (128)$$

$$f'_4 = f_4 \cdot \cos(\theta) + f_5 \cdot \sin(\theta) \quad (129)$$

$$f'_5 = -f_4 \cdot \sin(\theta) + f_5 \cdot \cos(\theta) \quad (130)$$

$$f'_6 = f_6 \quad (131)$$

Na forma condensada:

$$\{f'\} = [R] \times \{f\} \quad (132)$$

3.5 Formulação da matriz de rigidez global

A Matriz de Rigidez Global de uma estrutura é obtida somando a contribuição das matrizes de todos os elementos que a compõe, desde que estas estejam representadas no sistema de coordenadas global, cujo tamanho é igual a três vezes o número de nós. Para isso, é necessário efetuar a rotação dessas matrizes utilizando a Matriz de Rotação.

Multiplicando ambos os lados da equação (121) pela inversa de $[R]$, tem-se:

$$[R]^{-1}\{\delta'\} = [R]^{-1}[R]\{\delta\} \quad (133)$$

O produto de uma matriz por sua inversa resulta na matriz identidade, logo:

$$[R]^{-1}\{\delta'\} = [I]\{\delta\} \quad (134)$$

$$[R]^{-1}\{\delta'\} = \{\delta\} \quad (135)$$

Por ser ortogonal, a inversa da matriz de rotação é igual sua transposta:

$$\{\delta\} = [R]^T\{\delta'\} \quad (136)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (11) pela transposta de $[R]$:

$$[R]^T\{f'\} = [R]^T[k']\{\delta'\} \quad (137)$$

Substituindo o vetor de deslocamentos local da equação (121) na equação (137):

$$[R]^T\{f'\} = [R]^T[k'] [R]\{\delta\} \quad (138)$$

$$\{f\} = [R]^T[k'] [R]\{\delta\} \quad (139)$$

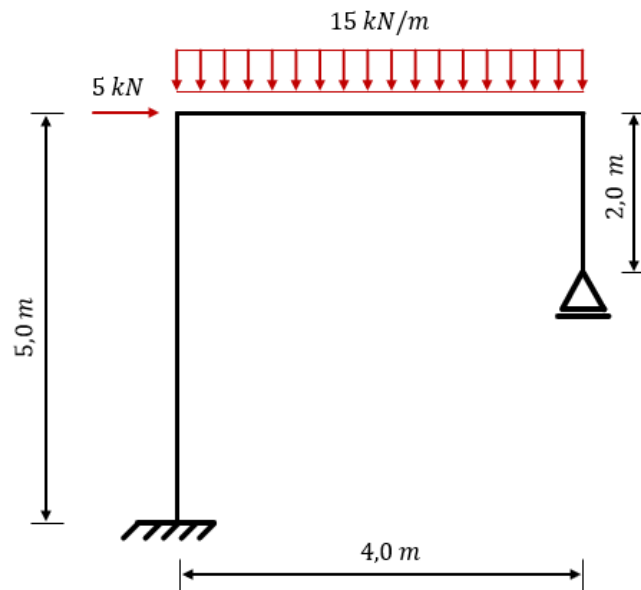
$$\{f\}\{\delta\}^{-1} = [R]^T[k'] [R] \quad (140)$$

Como ilustrado no início, pela Equação (3), a equação base do método da rigidez fundamenta-se no produto da matriz de rigidez K pelo vetor de deslocamentos δ , obtendo-se o vetor global de cargas. Logo, para determinar a matriz K , basta multiplicar o vetor de forças f pelo inverso do vetor de deslocamentos δ . Tal multiplicação pode ser vista na Equação (141). Portanto, para encontrar a matriz K rotacionada, basta:

$$k = [R]^T[k'] [R] \quad (141)$$

No pórtico modelo da Figura 20, a fim de encontrar as matrizes de rigidez das suas barras, é necessário, primeiro, discretizá-lo em nós e barras. As barras são numeradas, identificando seus nós inicial e final, sendo necessário numerá-los na seguinte ordem: primeiro o deslocamento horizontal, seguido pelo deslocamento vertical e, por fim, a rotação.

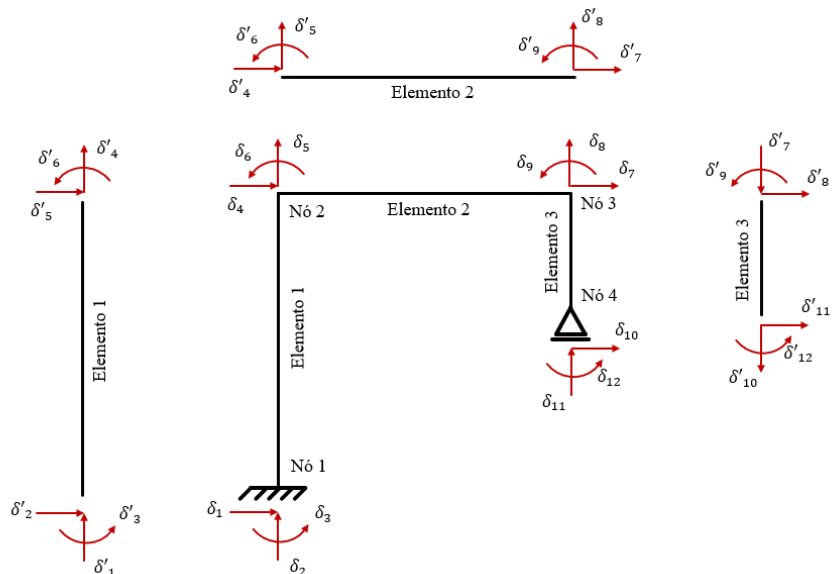
Figura 20 - Pórtico para exemplificar o MRD.



Fonte: Autoria própria (2025).

A numeração dos graus de liberdade é definida após a numeração dos nós da estrutura, iniciando a contagem em 1 e seguindo até o último grau de liberdade. A Figura 21 mostra a discretização adotada, os graus de liberdade da estrutura nas direções locais e globais de cada uma das barras.

Figura 21 - Pórtico da Figura discretizado.



Fonte: Autoria própria (2025).

As equações (142), (143) e (144) a seguir ilustram as matrizes de rigidez dos elementos um, dois e três do pórtico modelo em estudo, no sistema local.

$$k'_1 = \begin{bmatrix} k^1_{1,1} & k^1_{1,2} & k^1_{1,3} & k^1_{1,4} & k^1_{1,5} & k^1_{1,6} \\ k^1_{2,1} & k^1_{2,2} & k^1_{2,3} & k^1_{2,4} & k^1_{2,5} & k^1_{2,6} \\ k^1_{3,1} & k^1_{3,2} & k^1_{3,3} & k^1_{3,4} & k^1_{3,5} & k^1_{3,6} \\ k^1_{4,1} & k^1_{4,2} & k^1_{4,3} & k^1_{4,4} & k^1_{4,5} & k^1_{4,6} \\ k^1_{5,1} & k^1_{5,2} & k^1_{5,3} & k^1_{5,4} & k^1_{5,5} & k^1_{5,6} \\ k^1_{6,1} & k^1_{6,2} & k^1_{6,3} & k^1_{6,4} & k^1_{6,5} & k^1_{6,6} \end{bmatrix} \quad (142)$$

$$k'_2 = \begin{bmatrix} k^2_{4,4} & k^2_{4,5} & k^2_{4,6} & k^2_{4,7} & k^2_{4,8} & k^2_{4,9} \\ k^2_{5,4} & k^2_{5,5} & k^2_{5,6} & k^2_{5,7} & k^2_{5,8} & k^2_{5,9} \\ k^2_{6,4} & k^2_{6,5} & k^2_{6,6} & k^2_{6,7} & k^2_{6,8} & k^2_{6,9} \\ k^2_{7,4} & k^2_{7,5} & k^2_{7,6} & k^2_{7,7} & k^2_{7,8} & k^2_{7,9} \\ k^2_{8,4} & k^2_{8,5} & k^2_{8,6} & k^2_{8,7} & k^2_{8,8} & k^2_{8,9} \\ k^2_{9,4} & k^2_{9,5} & k^2_{9,6} & k^2_{9,7} & k^2_{9,8} & k^2_{9,9} \end{bmatrix} \quad (143)$$

$$k'_3 = \begin{bmatrix} k^3_{7,7} & k^3_{7,8} & k^3_{7,9} & k^3_{7,10} & k^3_{7,11} & k^3_{7,12} \\ k^3_{8,7} & k^3_{8,8} & k^3_{8,9} & k^3_{8,10} & k^3_{8,11} & k^3_{8,12} \\ k^3_{9,7} & k^3_{9,8} & k^3_{9,9} & k^3_{9,10} & k^3_{9,11} & k^3_{9,12} \\ k^3_{10,7} & k^3_{10,8} & k^3_{10,9} & k^3_{10,10} & k^3_{10,11} & k^3_{10,12} \\ k^3_{11,7} & k^3_{11,8} & k^3_{11,9} & k^3_{11,10} & k^3_{11,11} & k^3_{11,12} \\ k^3_{12,7} & k^3_{12,8} & k^3_{12,9} & k^3_{12,10} & k^3_{12,11} & k^3_{12,12} \end{bmatrix} \quad (144)$$

O coeficiente $k^n_{i,j}$ representa o termo da matriz de rigidez associado à barra n e o i indica o grau de liberdade no qual surge uma força restritiva provocada por um deslocamento unitário no grau de liberdade j . Por exemplo, o $k^3_{7,10}$ indica que, na barra 3, uma força no grau de liberdade 7 causada por um deslocamento unitário no grau de liberdade 10.

A matriz de rigidez global será uma matriz quadrada, com o número de linhas e colunas igual a três vezes o número de nós. Com as matrizes de cada uma das barras no sistema de coordenadas globais, rotacionadas seguindo a equação (141), faz-se a soma dos coeficientes comuns de cada uma das matrizes elementares. A soma das contribuições de cada matriz para formar a matriz de rigidez global pode ser melhor entendida na Figura 22:

Figura 22 - Representação da montagem da Matriz de Rigidez Global do Pórtico Modelo.



Fonte: Autoria própria (2025).

3.6 Vetor de forças globais

As ações atuantes em uma estrutura precisam ser transformadas em ações nodais, aplicadas nas extremidades das barras (Soriano, 2005). Essa equivalência em cargas nodais corresponde às reações de engastamento perfeito, porém com sentidos invertidos (Martha, 2018). O vetor de forças da estrutura é obtido pela Equação (145):

$$\{f\} = \{f_n\} - \{f_{ep}\} \quad (145)$$

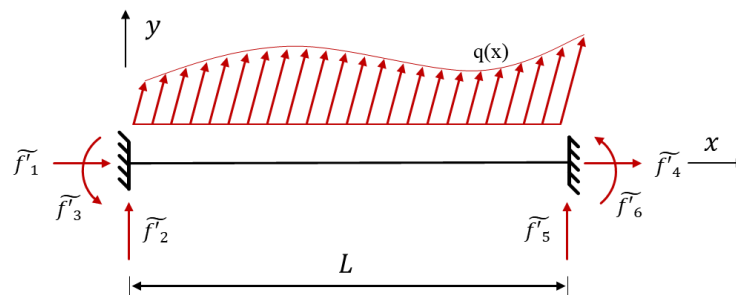
Sendo:

$\{f_n\}$ = vetor de forças aplicadas diretamente nos nós da estrutura no sistema global;

$\{f_{ep}\}$ = vetor de forças de engastamento perfeito no sistema global.

Tanto o f_n quanto o f_{ep} devem estar no sistema de coordenadas globais, logo faz-se uso novamente da matriz de rotação deduzida anteriormente. Para a determinação das reações de engastamento, considera-se a viga bi-engastada, ilustrada na Figura 23:

Figura 23 - Notação e sentidos positivos de reações de engastamento de barra de pórtico plano.



Fonte: Adaptado de Martha (2018).

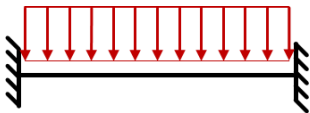
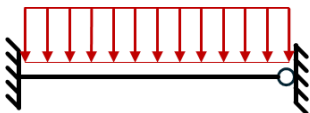
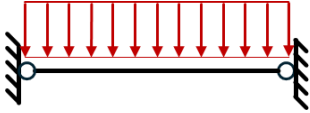
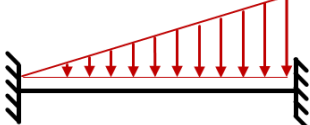
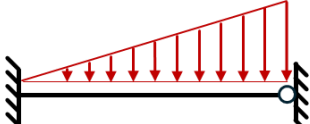
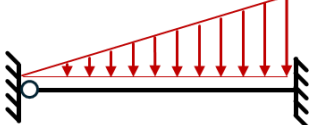
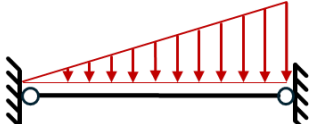
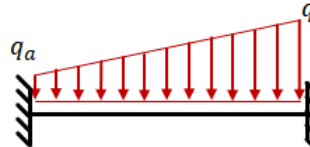
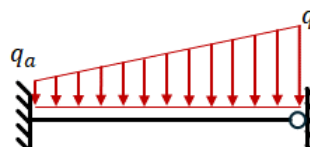
Sendo:

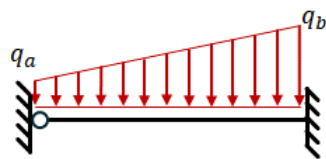
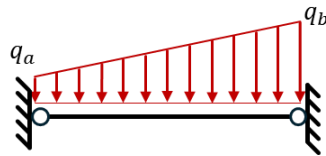
$\{f'_n\}$ = reação de engastamento no grau de liberdade n .

Para viga ilustrada, o carregamento atuante é transversal a seção, logo, ocorre flexão no elemento. Para vigas em flexão, considerou-se a teoria de vigas de Navier, adotando a hipótese de Euler-Bernoulli (Martha, 2018). Como isso as reações f'_1 e f'_4 referentes a reações axiais foram nulas. Para as demais reações f'_2, f'_3, f'_5 e f'_6 , a dedução das reações de engastamento

perfeito em barras prismáticas, foi realizada com o auxílio da equação da linha elástica, conforme ilustrado na Tabela 3 para a diferentes tipos de carregamentos distribuídos.

Tabela 3 - Reações de engastamento perfeito para barras bi-engastadas.

Carregamentos	Reações de engastamento perfeito			
	$\widetilde{f'_2}$	$\widetilde{f'_3}$	$\widetilde{f'_5}$	$\widetilde{f'_6}$
	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{12}$
	$\frac{5ql}{8}$	$\frac{ql^2}{8}$	$\frac{3ql}{8}$	0
	$\frac{ql}{2}$	0	$\frac{ql}{2}$	0
	$\frac{3ql}{20}$	$\frac{ql^2}{30}$	$\frac{7ql}{20}$	$-\frac{ql^2}{20}$
	$\frac{9ql}{40}$	$\frac{7ql^2}{120}$	$\frac{11ql}{40}$	0
	$\frac{ql}{10}$	0	$\frac{2ql}{5}$	$-\frac{ql^2}{15}$
	$\frac{ql}{6}$	0	$\frac{ql}{3}$	0
	$\frac{(7q_a + 3q_b)l}{20}$	$\frac{(3q_a + 2q_b)l^2}{60}$	$\frac{(3q_a + 7q_b)l}{20}$	$-\frac{(2q_a + 3q_b)l^2}{60}$
	$\frac{(16q_a + 9q_b)l}{40}$	$\frac{(8q_a + 7q_b)l^2}{120}$	$\frac{(4q_a + 11q_b)l}{40}$	0

	$\frac{(11q_a + 4q_b)l}{40}$	0	$\frac{(9q_a + 16q_b)l}{40}$	$\frac{-(7q_a + 8q_b)l^2}{120}$
	$\frac{(2q_a + q_b)l}{6}$	0	$\frac{(2q_a + 2q_b)l}{6}$	0

Fonte: Autoria própria (2025).

00

A partir da Equação (3), que é a base para o MRD, os termos que a compõem, como a matriz de rigidez, são obtidos a partir das características geométricas e dos materiais, enquanto o vetor de forças é calculado a partir dos carregamentos externos. Resta apenas o vetor de deslocamentos global da estrutura, que deve ser calculado. Conhecendo os dois primeiros, o vetor de deslocamentos é dado por:

$$\{\delta\} = [k]^{-1} \cdot \{f\} \quad (146)$$

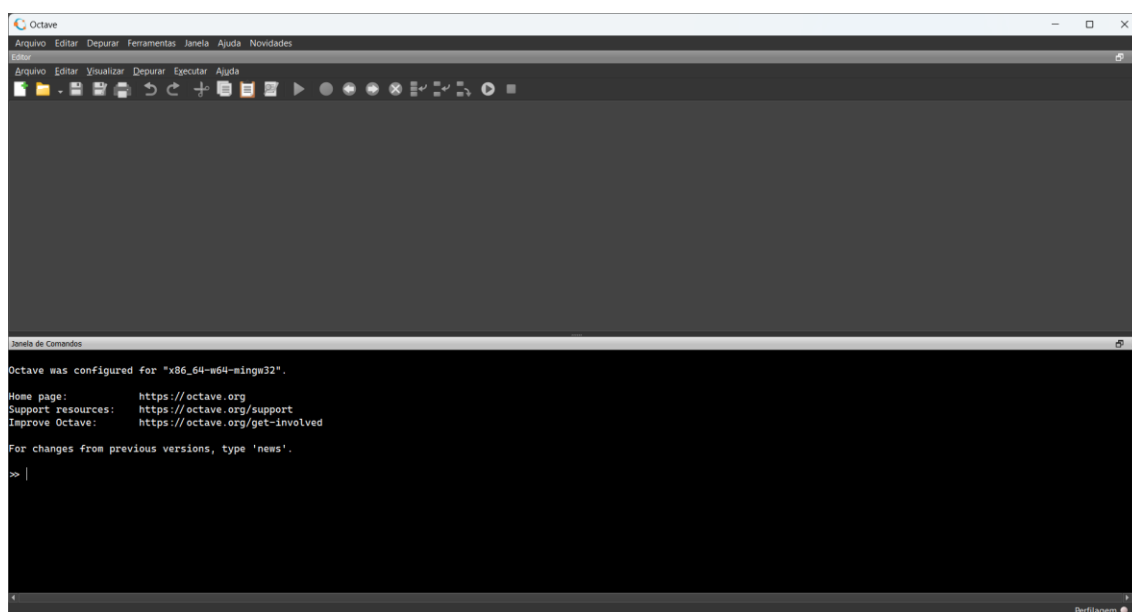
Por meio do vetor de esforços nodais, são encontrados os esforços internos nas extremidades de cada uma das barras que compõem a estrutura, juntamente com as reações de apoio (Soriano, 2005).

4 METODOLOGIA

4.1 Implementação computacional

O algoritmo foi escrito no ambiente computacional *Octave*[®], escolhido por ser de acesso livre e uma ferramenta eficaz para o cálculo e a manipulação de matrizes. A linguagem *Octave*[®] destina-se essencialmente a cálculos, destacando-se na resolução de problemas envolvendo álgebra linear, equações lineares e não lineares, manipulação de polinômios, entre outras aplicações matemáticas (*Octave*, 2025). A Figura 24 ilustra a interface gráfica do *Octave*[®].

Figura 24 - Interface do *Octave*[®].

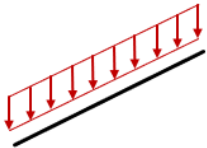
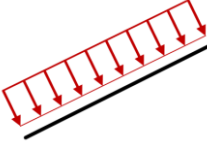
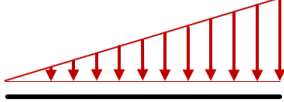
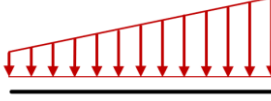


Fonte: Autoria própria (2025).

4.2 Abrangência do algoritmo

O algoritmo desenvolvido faz a análise de estruturas planas, sejam elas isostáticas ou hiperestáticas, abrangendo vigas, treliças e pórticos considerando forças e momentos concentrados, carregamentos distribuídos retangulares, triangulares, trapezoidais (crescentes ou decrescentes) e também é possível inserção de rótulas. Contudo, há uma restrição na aplicação de carregamentos distribuídos, sendo possível apenas carregamentos perpendiculares a barra, a Tabela 4 ilustra os casos possíveis:

Tabela 4 - Possíveis casos de carregamento distribuídos aceitos e não pelo algoritmo.

Caso	Permitido	Não permitido
		X
		X
	X	
	X	
	X	
	X	

Fonte: Autoria própria (2025).

4.3 Funcionamento do algoritmo

O algoritmo foi implementado tendo como entrada de dados um arquivo padronizado na extensão *.txt*. No arquivo deve conter as informações relacionadas ao problema em estudo, sendo elas:

- ✓ Número de nós;
- ✓ Número de elementos (barras);
- ✓ Coordenadas (x, y) em m;
- ✓ Condições de contorno (restrições);
- ✓ Conectividade dos elementos (nó inicial e nó final);
- ✓ Módulo de elasticidade (E) em MPa;
- ✓ Momento de inercia em torno do eixo z (I_z) em m^4 ;

- ✓ Área da seção transversal (A) em m²;
- ✓ Rótula no início ou no fim do elemento;
- ✓ Forças pontuais ou momentos aplicados no nós (kN) e (kNm) respectivamente;
- ✓ Carregamentos distribuídos (kN/m).

Com relação aos vínculos restritos, estes devem ser informados adicionando o número 1 no respectivo deslocamento (translacional ou rotacional) restrito e 0 para livres. No caso das rótulas, deve-se adicionar 1 para indicar sua presença no nó inicial ou final e 0 para sua ausência. A Figura 25 mostra o arquivo de entrada de dados padronizado:

Figura 25 - Arquivo .txt padrão para entrada de dados.

```

NÚMERO DE NÓS DA ESTRUTURA =
NÚMERO DE BARRAS DA ESTRUTURA =
=====
COORDENADAS NODAIS (m)          RESTRIÇÕES
NÓ      CORD_X  CORD_Y          U_X    U_Y    U_Z
=====
BARRA   NÓ INICIAL  NÓ FINAL      E (MPa)      Iz (m4)      A (m2)      RÓTULA INICIAL  RÓTULA FINAL
=====
CARGAS CONCENTRADAS APLICADAS NOS NÓS (kN) E (kNm)
NÓ      FX      FY      MZ
=====
CARGAS DISTRIBUÍDAS NAS BARRAS (kN/m)
BARRA   CARREGAMENTO - Y
        NÓ INICIAL  NÓ FINAL
=====

```

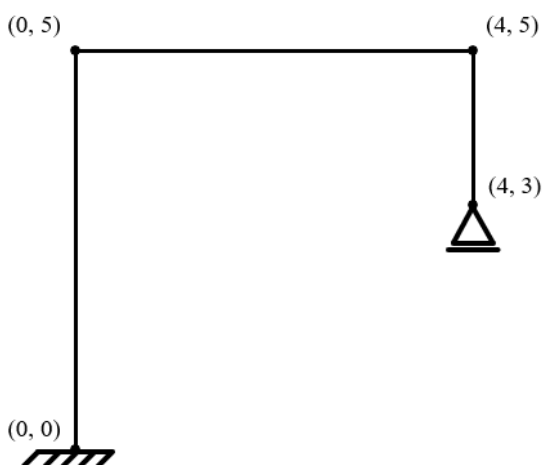
Fonte: Autoria própria (2025).

4.4 Validação do algoritmo

O pórtico modelo da Figura 20 será utilizado para validar o algoritmo desenvolvido, os elementos do exemplo terão com seus módulos de elasticidade, momentos de inercia e áreas iguais a 1, as etapas para solucionar o problema estão descritas a seguir:

- Etapa 1: Discretizar a estrutura em nós com suas respectivas coordenadas (x e y), conforme a Figura 26.

Figura 26 - Pórtico modelo com suas coordenadas nodais.



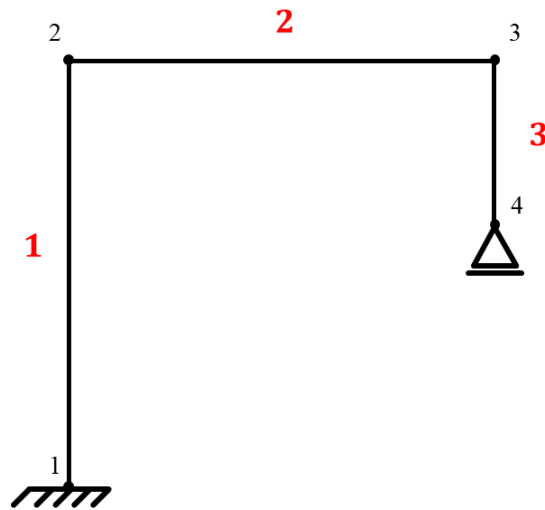
Fonte: Autoria própria (2025).

Os nós são divididos em:

- Nós obrigatórios: Onde houver mudanças na direção dos elementos, reações de apoio, início e fim de carregamentos distribuídos, cargas pontuais (forças ou momentos), mudanças na geometria da estrutura, que implicam nas propriedades de rigidez (E) e geometria (I_z e A).
- Nós fictícios: Pontos nos quais não existe mudanças físicas ou geométricas, como direções de elementos ou carregamentos. Esses nós são utilizados para calcular a deflexão, a inclinação ou os esforços internos em locais específicos da estrutura, desde que sejam atribuídas as devidas condições de vinculação nos mesmos.

➤ Etapa 2: Numerar os elementos formados, visto na Figura 27.

Figura 27 - Elementos do pórtico modelo numerados.



Fonte: Autoria própria (2025).

A escolha da numeração dos elementos fica a critério do usuário, entretanto, é indicado que se tenha uma coerência na numeração, para facilitar a visualização e interpretação dos resultados gerados pelo algoritmo.

- Etapa 3: Montar o arquivo *.txt* informando os dados necessários referentes à posição dos nós, conectividade das barras, rigidez, restrições e carregamentos, conforme a Figura 28.

Figura 28 - Arquivo no formato *.txt* contendo os dados de entrada ao algoritmo.

```

NÚMERO DE NÓS DA ESTRUTURA = 4
NÚMERO DE BARRAS DA ESTRUTURA = 3
=====
COORDENADAS NODAIS (m)      RESTRIÇÕES
NÓ   CORD_X  CORD_Y      U_X  U_Y  U_Z
1     0      0          1    1    1
2     0      5          0    0    0
3     4      5          0    0    0
4     4      3          0    1    0
=====
BARRA  NÓ INICIAL  NÓ FINAL  E (MPa)  Iz (m4)  A (m2)  RÓTULA INICIAL  RÓTULA FINAL
1         1         2         1         1         1         0         0
2         2         3         1         1         1         0         0
3         3         4         1         1         1         0         0
=====
CARGAS CONCENTRADAS APLICADAS NOS NÓS (kN) E (kNm)
NÓ   FX   FY   MZ
1     0    0    0
2     5    0    0
3     0    0    0
4     0    0    0
=====
CARGAS DISTRIBUÍDAS NAS BARRAS (kN/m)
BARRA  CARREGAMENTO
        NÓ INICIAL  NÓ FINAL
1         0         0
2        -15        -15
3         0         0

```

Fonte: Autoria própria (2025).

Para o exemplo em questão, foram adotados valores unitários para o módulo de elasticidade, momento de inércia e área da seção transversal, para fins de validação do algoritmo. O *Octave*® fornece uma janela de comandos onde é possível visualizar os resultados obtidos após o processamento dos dados, como pode ser visto na Figura 29.

Figura 29 - Janela de comandos do *Octave*® com a análise do pórtico modelo.

ANÁLISE REALIZADA COM SUCESSO \o/

DESLOCAMENTOS NODAIS:

Nó	$\Delta x(m)$	$\Delta y(m)$	$\theta z(rad)$
1	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
2	1.2526e-01	-1.4169e-01	-2.9269e-02
3	1.2526e-01	-6.3323e-02	6.4023e-02
4	2.5330e-01	0.0000e+00	6.4023e-02

ESFORÇOS INTERNOS:

	NORMAL (kN)	CORTANTE (kN)	MOMENTO(kNm)
BARRA 1			
Nó Ini:	-28.338	5.000	-18.354
Nó Fin:	-28.338	5.000	6.646
BARRA 2			
Nó Ini:	0.000	28.338	6.646
Nó Fin:	0.000	-31.662	-0.000
BARRA 3			
Nó Ini:	-31.662	0.000	-0.000
Nó Fin:	-31.662	0.000	0.000

REAÇÕES DE APOIO:

	Fx (kN)	Fy (kN)	Mz(kNm)
Nó 1:	-5.000	28.338	18.354
Nó 4:	0.000	31.662	0.000

GERAR RELATÓRIO .txt:

(1) SIM

(2) NÃO

RESPOSTA (1-2): |

Fonte: Autoria própria (2025).

- Etapa 4: Após o processamento é possível exportar os resultados obtidos no formato *.txt* ilustrado na Figura 30 Os sentidos positivos estão descritos na Figura 31.

Figura 30 - Arquivo .txt gerado do pórtico modelo.

=====			
ANÁLISE REALIZADA COM SUCESSO \o/			
=====			
DESLOCAMENTOS NODAIS:			
=====			
Nó	$\Delta x(m)$	$\Delta y(m)$	$\theta z(rad)$
1	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
2	1.2526e-01	-1.4169e-01	-2.9269e-02
3	1.2526e-01	-6.3323e-02	6.4023e-02
4	2.5330e-01	0.0000e+00	6.4023e-02
=====			
ESFORÇOS INTERNOS:			
=====			
	NORMAL (kN)	CORTANTE (kN)	MOMENTO(kNm)
BARRA 1			
Nó Ini:	-28.338	5.000	-18.354
Nó Fin:	-28.338	5.000	6.646
BARRA 2			
Nó Ini:	0.000	28.338	6.646
Nó Fin:	0.000	-31.662	-0.000
BARRA 3			
Nó Ini:	-31.662	0.000	-0.000
Nó Fin:	-31.662	0.000	0.000
=====			
REAÇÕES DE APOIO:			
=====			
	Fx (kN)	Fy (kN)	Mz (kNm)
Nó 1:	-5.000	28.338	18.354
Nó 4:	0.000	31.662	0.000
=====			

Fonte: Autoria própria (2025).

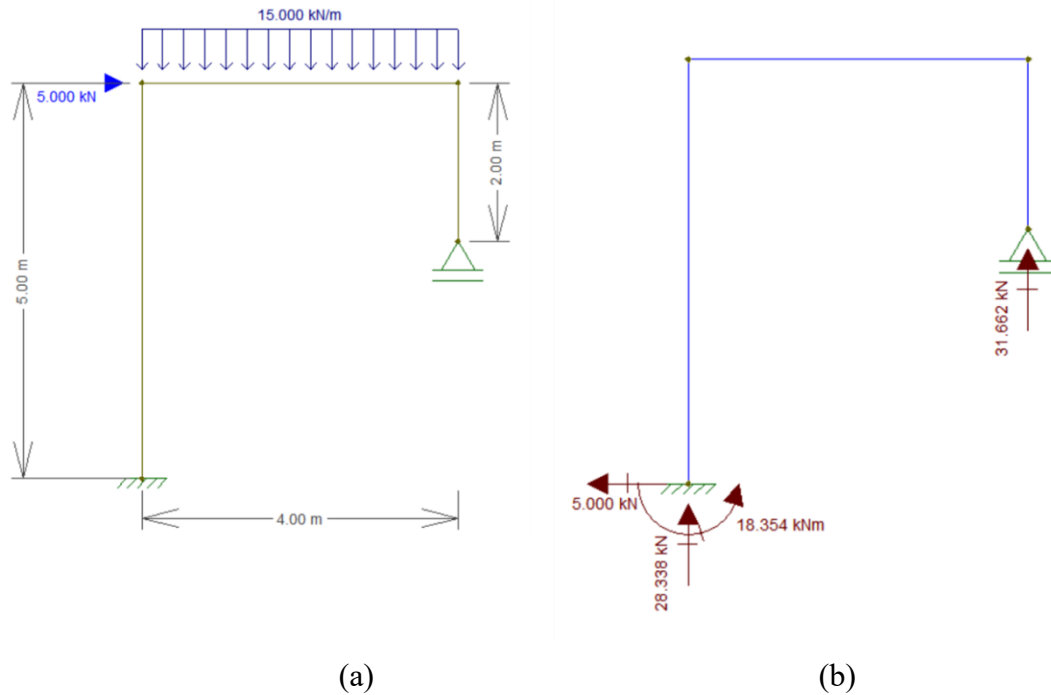
Figura 31 - Sentidos positivos dos esforços internos.



Fonte: Autoria própria (2025).

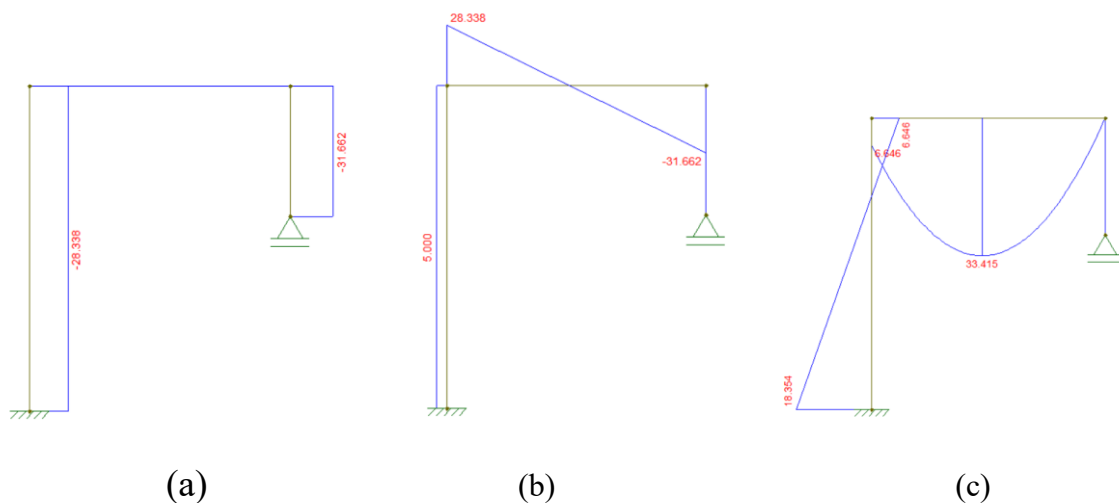
A validação dos dados é feita comparando os resultados obtidos com o *software Ftool*[®]. Na Figura 32 é possível ver o pórtico modelo e suas reações de apoio, na Figura 33 os diagramas de esforço normal, cortante e momento fletor, respectivamente.

Figura 32 - Pórtico modelado (a) e reações de apoio (b) no *Ftool*[®].



Fonte: *Ftool*[®] (2025).

Figura 33 – DEN(a), DEC(b) e DMF(c) do pórtico modelo feito no *Ftool*[®].

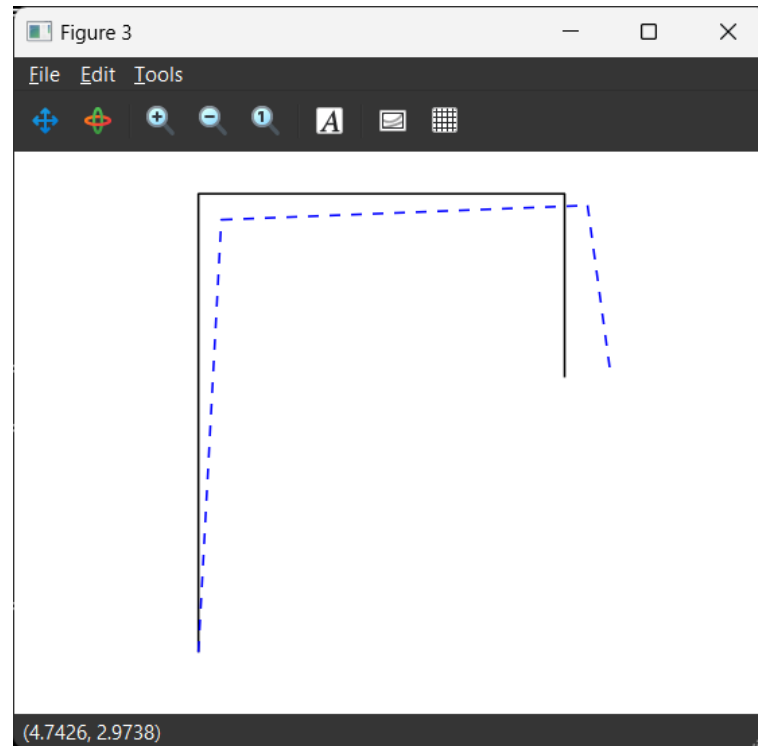


Fonte: *Ftool*[®] (2025).

- Etapa 5: O algoritmo gera um esboço da estrutura deformada, tendo o usuário a opção de ajustar o fator de escala imposto aos deslocamentos, afim de se ter uma melhor

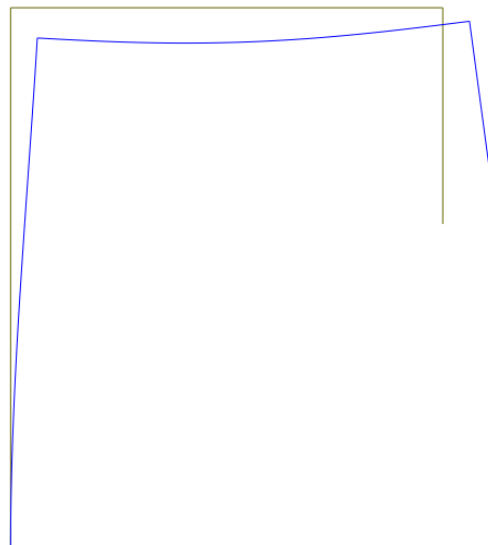
visualização de sua configuração deformada. Para o pórtico modelo, foi usado um fator de 2 tanto no algoritmo quanto no *Ftool*[®]. A configuração do pórtico modelo deformado pode ser vista na Figura 34 e a Figura 35 mostra a estrutura deformada obtida no *Ftool*[®].

Figura 34 – Estrutura deformada do pórtico modelo gerada pelo algoritmo.



Fonte: Autoria própria (2025).

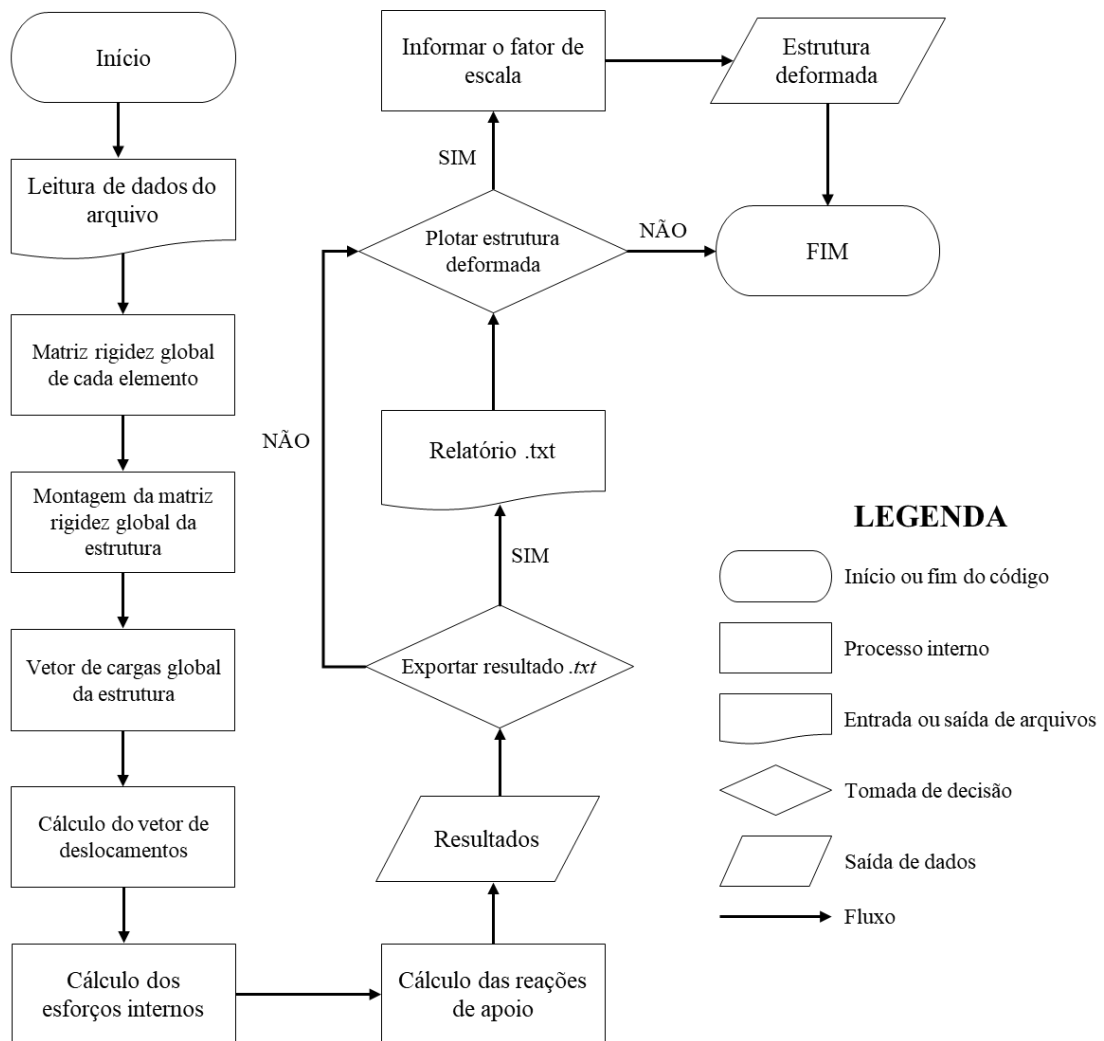
Figura 35 – Estrutura deformada gerada no *Ftool*[®].



Fonte: *Ftool*[®] (2025).

Para representar melhor o funcionamento do algoritmo criado, foi elaborado um fluxograma que descreve as etapas de resolução de estruturas do tipo vigas, pórticos planos e treliças planas ilustrado na Figura 36.

Figura 36 - Fluxograma do algoritmo desenvolvido.



Fonte: Autoria própria (2025).

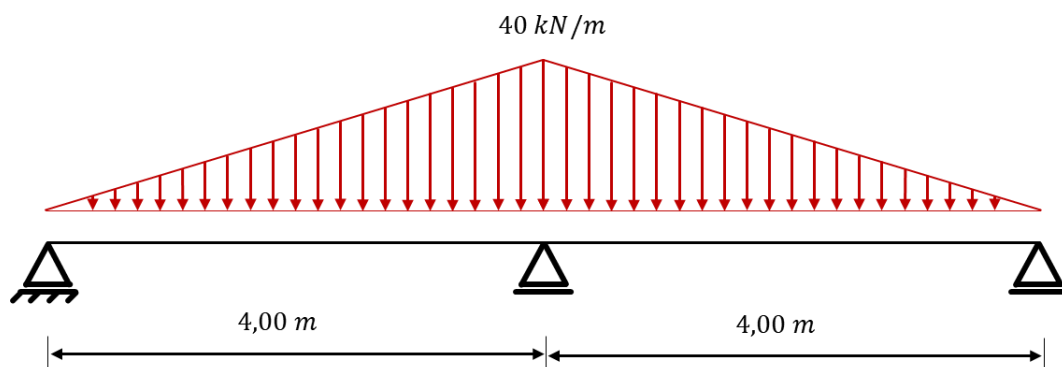
5 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Nesse tópico, são apresentados exemplos de estruturas planas analisadas pelo algoritmo, selecionados a partir de livros conceituados sobre análise estrutural e resistência dos materiais e de alguns trabalhos voltados a análise matricial de estruturas. Entre eles estão uma viga hiperestática, uma treliça, um pórtico composto, um pórtico com tirante e outro tri-articulado. Essas estruturas são submetidas a diversos tipos de carregamentos, com variações na seção transversal, material e condições de contorno. As propriedades geométricas (A e I_z) e mecânicas (E) foram definidas pelo autor.

5.1 Estrutura 01: Viga hiperestática

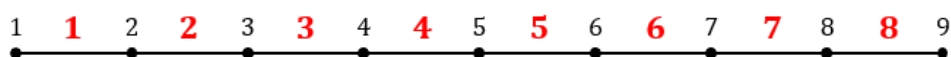
A viga hiperestática a seguir foi retirada do livro *Resistência dos Materiais* (Hibbeler, 2010, p. 460). Nesse exemplo, além dos nós obrigatórios, foram inseridos nós fictícios na estrutura. Os vãos de 4 m foram divididos em quatro barras de 1 m. Ao final, a estrutura foi discretizada com nove nós e oito barras, submetida a dois carregamentos distribuídos triangulares. O material constituinte possui um módulo de elasticidade de 100 GPa e seção transversal de $15 \times 30 \text{ cm}^2$. A Figura 37 mostra a viga hiperestática e a Figura 38 a discretização adotada.

Figura 37 - Viga hiperestática.



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2010).

Figura 38 - Viga hiperestática discretizada em nós e barras.



Fonte: Autoria própria (2025).

A Tabela 5 mostra as propriedades geométricas, a Tabela 6 os deslocamentos nodais, a Tabela 7 os esforços internos e a Tabela 8 as reações de apoio da viga hiperestática.

Tabela 5 - Descrição das propriedades geométricas e de rigidez da viga hiperestática.

Elementos	$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	$A \text{ (m}^2\text{)}$	$E \text{ (MPa)}$
Todos	3,3750e-04	4,5000e-02	100000

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 6 - Deslocamentos nodais da viga hiperestática.

DESLOCAMENTOS NODAIS							
Nó	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool</i> [®]	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool</i> [®]	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool</i> [®]	<i>Erro</i>
	$\delta x(m)$	$\delta x(m)$	$\delta y(m)$	$\delta y(m)$	$\theta z(rad)$	$\theta z(rad)$	(%)
1	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	-6,3210e-04	-6,3210e-04	0,00
2	0,0000e+00	0,0000e+00	-5,5556e-04	-5,5556e-04	-4,0741e-04	-4,0741e-04	0,00
3	0,0000e+00	0,0000e+00	-7,1111e-04	-7,1111e-04	1,1852e-04	1,1852e-04	0,00
4	0,0000e+00	0,0000e+00	-3,6296e-04	-3,6296e-04	5,0123e-04	5,0123e-04	0,00
5	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	1,8575e-18	7,5894e-19	59,00
6	0,0000e+00	0,0000e+00	-3,6296e-04	-3,6296e-04	-5,0123e-04	-5,0123e-04	0,00
7	0,0000e+00	0,0000e+00	-7,1111e-04	-7,1111e-04	-1,1852e-04	-1,1852e-04	0,00
8	0,0000e+00	0,0000e+00	-5,5556e-04	-5,5556e-04	4,0741e-04	4,0741e-04	0,00
9	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	6,3210e-04	6,3210e-04	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 7 - Esforços internos da viga hiperestática.

ESFORÇOS INTERNOS						
BARRAS	<i>Algoritmo</i>		<i>Algoritmo</i>		<i>Algoritmo</i>	
	<i>Ni (kN)</i>	<i>Nj (kN)</i>	<i>Ci (kN)</i>	<i>Cj (kN)</i>	<i>Mi (kNm)</i>	<i>Mj (kNm)</i>
1	0,000	0,000	16,000	11,000	0,000	14,333
2	0,000	0,000	11,000	-4,000	14,333	18,667
3	0,000	0,000	-4,000	-29,000	18,667	3,000
4	0,000	0,000	-29,000	-64,000	3,000	-42,667
5	0,000	0,000	64,000	29,000	-42,667	3,000
6	0,000	0,000	29,000	4,000	3,000	18,667
7	0,000	0,000	4,000	-11,000	18,667	14,333
8	0,000	0,000	-11,000	-16,000	14,333	0,000
-	<i>Ftool[®]</i>		<i>Ftool[®]</i>		<i>Ftool[®]</i>	
-	<i>Ni (kN)</i>	<i>Nj (kN)</i>	<i>Ci (kN)</i>	<i>Cj (kN)</i>	<i>Mi (kNm)</i>	<i>Mj (kNm)</i>
1	0,000	0,000	16,000	11,000	0,000	14,333
2	0,000	0,000	11,000	-4,000	14,333	18,667
3	0,000	0,000	-4,000	-29,000	18,667	3,000
4	0,000	0,000	-29,000	-64,000	3,000	-42,667
5	0,000	0,000	64,000	29,000	-42,667	3,000
6	0,000	0,000	29,000	4,000	3,000	18,667
7	0,000	0,000	4,000	-11,000	18,667	14,333
8	0,000	0,000	-11,000	-16,000	14,333	0,000
<i>Erro (%)</i>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

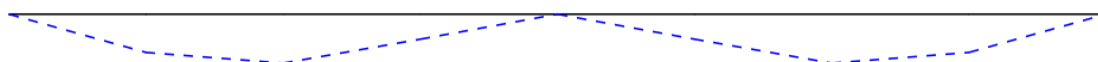
Tabela 8 - Reações de apoio da viga hiperestática.

REAÇÕES DE APOIO							
Nó	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Erro (%)</i>
	<i>Fx(kN)</i>	<i>Fx(kN)</i>	<i>Fy(kN)</i>	<i>Fy(kN)</i>	<i>Mz(kNm)</i>	<i>Mz(kNm)</i>	
1	0,000	0,000	16,000	16,000	0,000	0,000	0,00
2	0,000	0,000	128,000	128,000	0,000	0,000	0,00
4	0,000	0,000	16,000	16,000	0,000	0,000	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

A estrutura deformada foi feita usando uma ampliação dos deslocamentos em 500 vezes, tanto no algoritmo quanto no *Ftool*[®]. A Figura 39 mostra a configuração deformada da viga hiperestática e a Figura 40 ilustrando a estrutura deformada do *Ftool*[®].

Figura 39 - Estrutura deformada da viga hiperestática gerada pelo algoritmo.



Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 40 - Estrutura deformada da viga hiperestática modelada no *Ftool*[®].

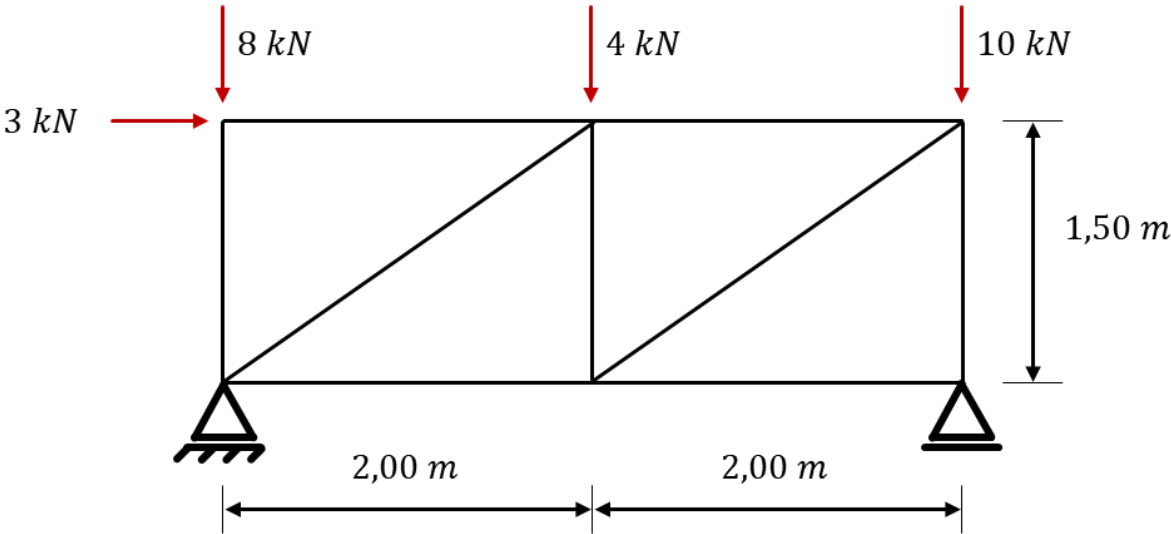


Fonte: *Ftool*[®] (2025).

5.2 Estrutura 02: Treliça plana

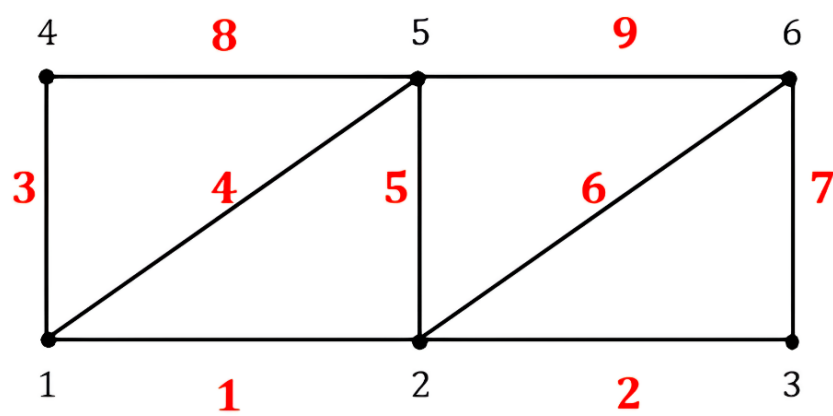
A treliça plana apresentada a seguir foi retirada do livro *Estática: Mecânica para Engenharia* (Hibbeler, 2005, p. 231). Para a implementação no algoritmo, ela foi discretizada em 6 nós e 9 elementos. A estrutura está sujeita a cargas pontuais nas direções horizontal e vertical. Construída em aço, possui um módulo de elasticidade de 210 GPa, com barras de seção circular maciça e diâmetro de 25 mm. A Figura 41 mostra a treliça plana e a Figura 42 a discretização adotada.

Figura 41 – Treliça plana.



Fonte: Adaptada de Hibbeler (2005).

Figura 42 - Treliça plana discretizada em nós e barras.



Fonte: Autoria própria (2025).

A Tabela 9 mostra as propriedades geométricas, a Tabela 10 os deslocamentos nodais, a Tabela 11 os esforços internos e a Tabela 12 as reações de apoio da treliça plana.

Tabela 9 - Descrição das propriedades geométricas e de rigidez da treliça plana.

Elementos	Iz (m ⁴)	A (m ²)	E (MPa)
Todos	1,9175e-08	4,9087e-04	210000

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 10 - Deslocamentos nodais da treliça plana.

DESLOCAMENTOS NODAIS							
Nó	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool</i> [®]	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool</i> [®]	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool</i> [®]	<i>Erro</i>
	$\delta x(m)$	$\delta x(m)$	$\delta y(m)$	$\delta y(m)$	$\theta z(rad)$	$\theta z(rad)$	(%)
1	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00
2	8,0841e-05	8,0841e-05	-3,1528e-04	-3,1528e-04	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00
3	8,0841e-05	8,0841e-05	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00
4	2,8456e-04	2,8456e-04	-1,1641e-04	-1,1641e-04	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00
5	2,2636e-04	2,2636e-04	-3,6075e-04	-3,6075e-04	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00
6	1,4551e-04	1,4551e-04	-1,9099e-04	-1,9099e-04	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 11 - Esforços internos da treliça plana.

ESFORÇOS INTERNOS						
BARRAS	<i>Algoritmo</i>		<i>Algoritmo</i>		<i>Algoritmo</i>	
	<i>Ni (kN)</i>	<i>Nj (kN)</i>	<i>Ci (kN)</i>	<i>Cj (kN)</i>	<i>Mi (kNm)</i>	<i>Mj (kNm)</i>
1	4,167	4,167	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	-8,000	-8,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	-1,458	-1,458	0,000	0,000	0,000	0,000
5	-3,000	-3,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	-3,125	-3,125	0,000	0,000	0,000	0,000
7	5,208	5,208	0,000	0,000	0,000	0,000
8	-4,167	-4,167	0,000	0,000	0,000	0,000
9	-13,125	-13,125	0,000	0,000	0,000	0,000
-	<i>Ftool[®]</i>		<i>Ftool[®]</i>		<i>Ftool[®]</i>	
-	<i>Ni (kN)</i>	<i>Nj (kN)</i>	<i>Ci (kN)</i>	<i>Cj (kN)</i>	<i>Mi (kNm)</i>	<i>Mj (kNm)</i>
1	4,167	4,167	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	-8,000	-8,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	-1,458	-1,458	0,000	0,000	0,000	0,000
5	-3,000	-3,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	-3,125	-3,125	0,000	0,000	0,000	0,000
7	5,208	5,208	0,000	0,000	0,000	0,000
8	-4,167	-4,167	0,000	0,000	0,000	0,000
9	-13,125	-13,125	0,000	0,000	0,000	0,000
<i>Erro (%)</i>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

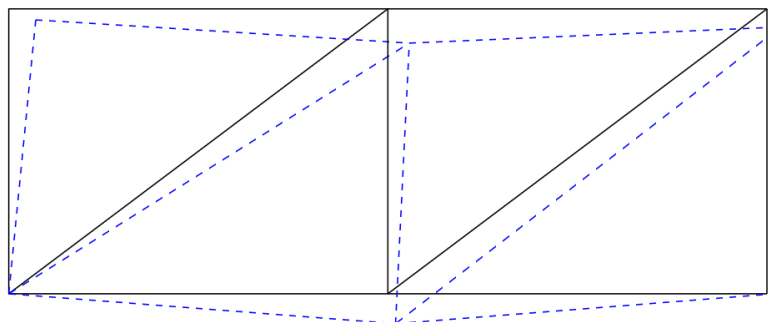
Tabela 12 - Reações de apoio da treliça plana.

REAÇÕES DE APOIO						
Nó	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>
	<i>Fx(kN)</i>	<i>Fx(kN)</i>	<i>Fy(kN)</i>	<i>Fy(kN)</i>	<i>Mz(kNm)</i>	<i>Mz(kNm)</i>
1	-3,000	-3,000	8,875	8,875	0,000	0,000
3	0,000	0,000	13,125	13,125	0,000	0,000

Fonte: Autoria própria (2025).

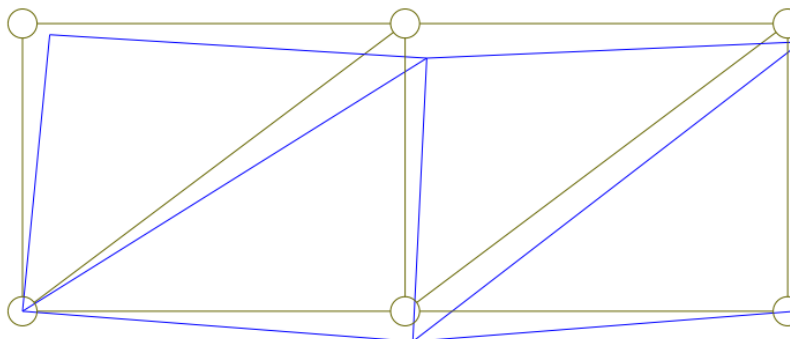
A estrutura deformada foi feita usando uma ampliação dos deslocamentos em 500 vezes, tanto no algoritmo quanto no *Ftool*[®]. A Figura 43 mostra a configuração deformada da treliça plana e a Figura 44 ilustrando a estrutura deformada do *Ftool*[®].

Figura 43 - Estrutura deformada da treliça plana gerada pelo algoritmo.



Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 44 - Estrutura deformada da treliça plana modelada no *Ftool*[®].



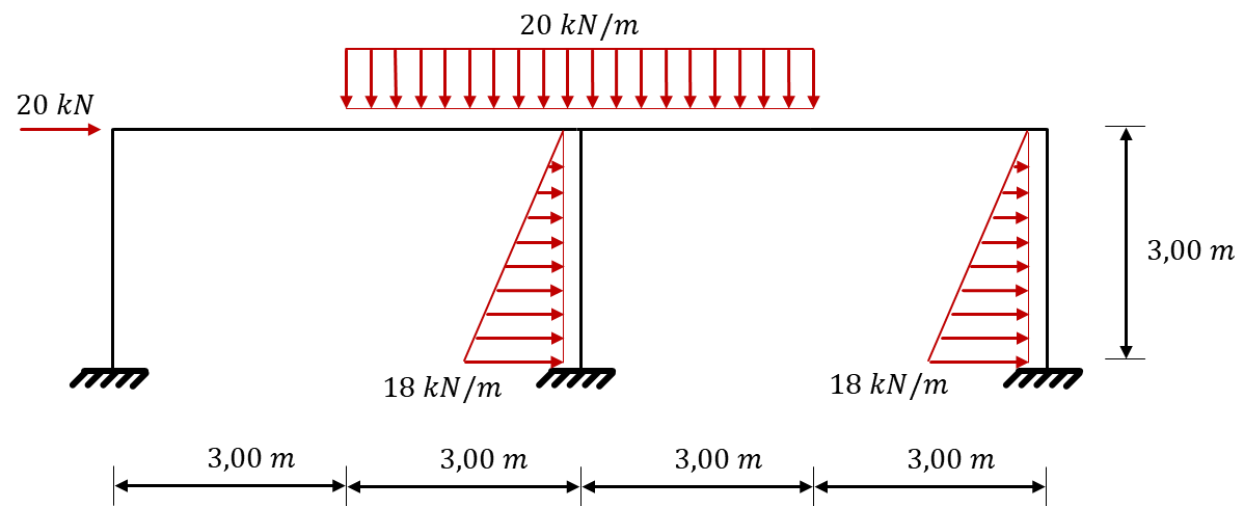
Fonte: *Ftool*[®] (2025).

5.3 Estrutura 03: Pórtico composto

O pórtico ilustrado a seguir é proveniente do livro *Análise de Estruturas - Método das Forças e Método dos Deslocamentos* (Soriano, 2006, p. 44). Para a implementação no algoritmo, o pórtico foi discretizado em 8 nós e 7 elementos. Sofre a ação de forças pontuais, carregamentos distribuídos retangulares e triangulares. Para os pilares, foi usada uma seção retangular de 25x60 cm e, para as vigas, 30x50 cm, ambos os elementos com um módulo de

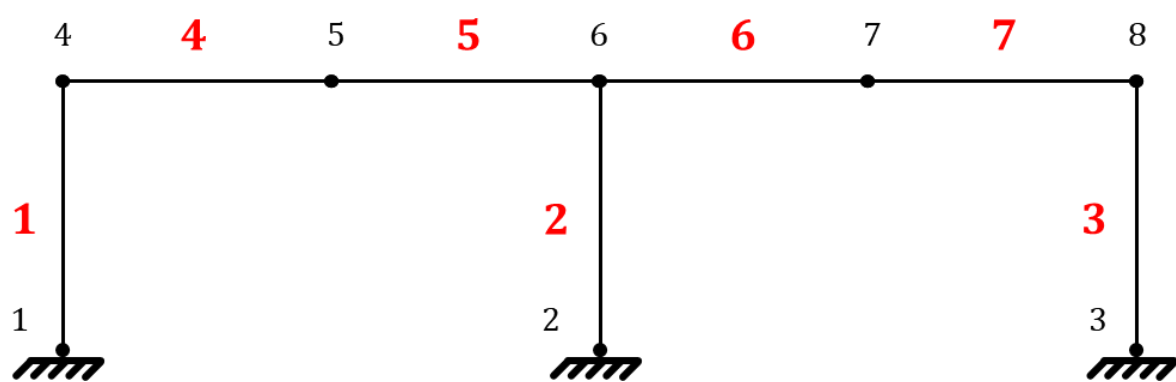
elasticidade de 25 GPa. A Figura 45 mostra o pórtico composto e a Figura 46 a discretização adotada.

Figura 45 - Pórtico composto.



Fonte: Adaptado de Soriano (2006).

Figura 46 - Pórtico composto discretizado em nós e barras.



Fonte: Autoria própria (2025).

A Tabela 13 mostra as propriedades geométricas, a Tabela 14 os deslocamentos nodais, a Tabela 15 os esforços internos e a Tabela 16 as reações de apoio do pórtico composto.

Tabela 13 - Descrição das propriedades geométricas e de rigidez do pórtico composto.

Elementos	Iz (m ⁴)	A (m ²)	E (MPa)
1, 2, 3	4,5000e-03	1,5000e-01	25000
4, 5, 6, 7	3,1250e-03	1,5000e-01	25000

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 14 - Deslocamentos nodais do pórtico composto.

DESLOCAMENTOS NODAIS							
Nó	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool</i> [®]	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool</i> [®]	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool</i> [®]	<i>Erro</i> (%)
	$\delta x(m)$	$\delta x(m)$	$\delta y(m)$	$\delta y(m)$	$\theta z(rad)$	$\theta z(rad)$	
1	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00
2	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00
3	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00
4	4,2964e-04	4,2964e-04	-5,9332e-06	-5,9332e-06	-2,4783e-04	-2,4783e-04	0,00
5	4,1596e-04	4,1596e-04	-6,0738e-04	-6,0738e-04	-1,0739e-05	-1,0739e-05	0,00
6	4,0228e-04	4,0228e-04	-7,9979e-05	-7,9979e-05	-7,1264e-05	-7,1264e-05	0,00
7	3,9393e-04	3,9393e-04	-5,2305e-04	-5,2305e-04	1,0977e-04	1,0977e-04	0,00
8	3,8558e-04	3,8558e-04	-1,0088e-05	-1,0088e-05	-9,9098e-06	-9,9098e-06	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 15 - Esforços internos do pórtico composto.

ESFORÇOS INTERNOS						
BARRAS	<i>Algoritmo</i>		<i>Algoritmo</i>		<i>Algoritmo</i>	
	<i>Ni (kN)</i>	<i>Nj (kN)</i>	<i>Ci (kN)</i>	<i>Cj (kN)</i>	<i>Mi (kNm)</i>	<i>Mj (kNm)</i>
1	-7,417	-7,417	2,895	2,895	-13,636	-4,951
2	-99,973	-99,973	33,669	6,669	-32,926	14,081
3	-12,610	-12,610	37,436	10,436	-36,275	22,032
4	-17,105	-17,105	7,417	7,417	-4,951	17,299
5	-17,105	-17,105	7,417	-52,583	17,299	-50,451
6	-10,436	-10,436	47,390	-12,610	-36,370	15,799
7	-10,436	-10,436	-12,610	-12,610	15,799	-22,032
-	<i>Ftool</i> [®]		<i>Ftool</i> [®]		<i>Ftool</i> [®]	
-	<i>Ni (kN)</i>	<i>Nj (kN)</i>	<i>Ci (kN)</i>	<i>Cj (kN)</i>	<i>Mi (kNm)</i>	<i>Mj (kNm)</i>
1	-7,417	-7,417	2,895	2,895	-13,636	-4,951
2	-99,973	-99,973	33,669	6,669	-32,926	14,081
3	-12,610	-12,610	37,436	10,436	-36,275	22,032
4	-17,105	-17,105	7,417	7,417	-4,951	17,299
5	-17,105	-17,105	7,417	-52,583	17,299	-50,451
6	-10,436	-10,436	47,390	-12,610	-36,370	15,799
7	-10,436	-10,436	-12,610	-12,610	15,799	-22,032
<i>Erro (%)</i>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

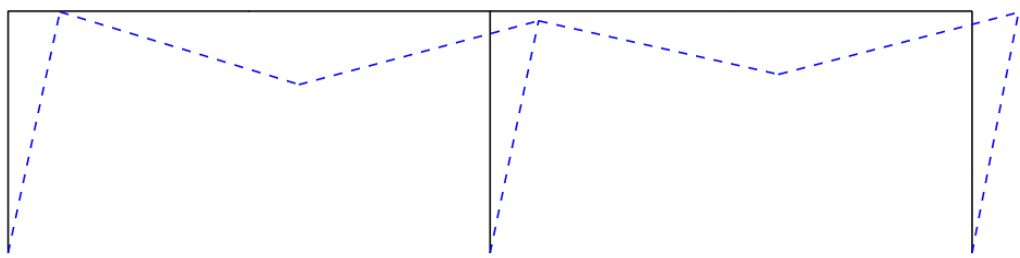
Tabela 16 - Reações de apoio do pórtico composto.

REAÇÕES DE APOIO							
Nó	Algoritmo	Ftool®	Algoritmo	Ftool®	Algoritmo	Ftool®	Erro
	Fx(kN)	Fx(kN)	Fy(kN)	Fy(kN)	Mz(kNm)	Mz(kNm)	
1	-2,895	-2,895	7,417	7,417	13,636	13,636	0,00
2	-33,669	-33,669	99,973	99,973	32,926	32,926	0,00
3	-37,436	-37,436	12,610	12,610	36,275	36,275	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

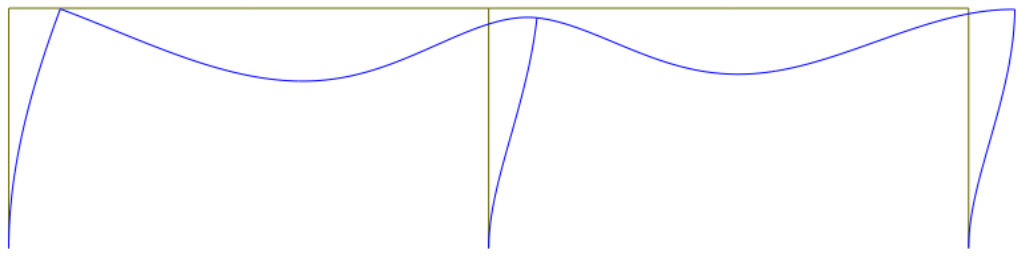
A estrutura deformada foi feita usando uma ampliação dos deslocamentos em 1500 vezes, tanto no algoritmo quanto no Ftool®. A Figura 47 mostra a configuração deformada do pórtico composto e a Figura 48 ilustrando a estrutura deformada do Ftool®.

Figura 47 - Estrutura deformada do pórtico composto gerada pelo algoritmo.



Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 48 - Estrutura deformada do pórtico composto modelado no Ftool®.

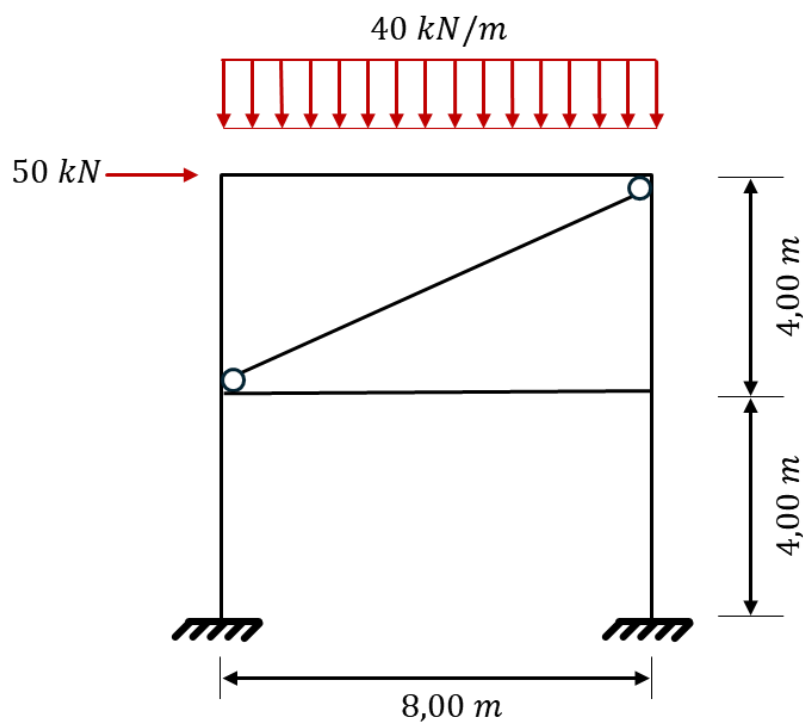


Fonte: Ftool® (2025).

5.4 Estrutura 04: Pórtico com tirante

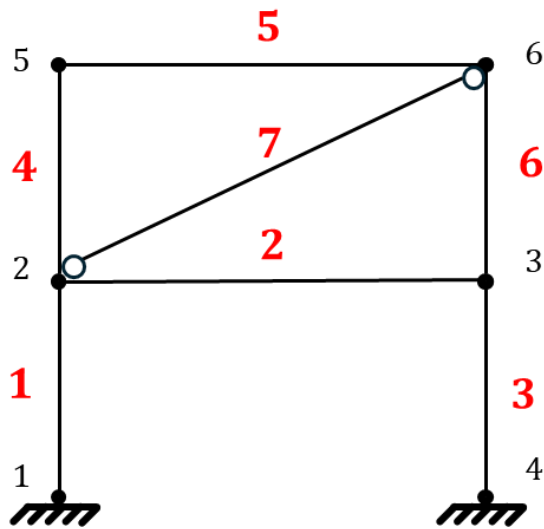
Similar ao exemplo anterior o pórtico ilustrado a seguir também foi do livro *Análise de Estruturas - Método das Forças e Método dos Deslocamentos* (Soriano, 2006, p. 218). Pórtico constituído de 6 nós e 5 barras, contendo um tirante, rotulado em ambas as extremidades. A estrutura está sujeita a cargas pontuais nas direções horizontal e distribuído. Os pilares com seção de $30 \times 60 \text{ cm}^2$ e a viga inclinada com $30 \times 50 \text{ cm}^2$ ambos com módulo de elasticidade de 20,5 GPa. O tirante é feito de aço, com módulo de elasticidade de 210 GPa com diâmetro de 20 cm. A Figura 49 mostra o pórtico com tirante e a Figura 50 a discretização adotada.

Figura 49 - Pórtico com Tirante.



Fonte: Adaptado de Soriano (2006).

Figura 50 - Pórtico com Tirante discretizado em nós e barras.



Fonte: Autoria própria (2025).

A Tabela 17 mostra as propriedades geométricas, a Tabela 18 os deslocamentos nodais, a Tabela 19 os esforços internos e a Tabela 20 as reações de apoio do pórtico com tirante.

Tabela 17 - Propriedades geométricas e de rigidez dos elementos do Pórtico com Tirante.

Elementos	Iz (m ⁴)	A (m ²)	E (MPa)
1, 3, 4 e 6	5,4000e-03	1,8000e-01	20500
2 e 5	3,1250e-03	1,5000e-01	20500
7	1,3371e-06	7,6200e-04	210000

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 18 - Deslocamentos nodais do pórtico com tirante.

DESLOCAMENTOS NODAIS							
Nó	Algoritmo	Ftool [®]	Algoritmo	Ftool [®]	Algoritmo	Ftool [®]	Erro
	$\delta x(m)$	$\delta x(m)$	$\delta y(m)$	$\delta y(m)$	$\theta z(rad)$	$\theta z(rad)$	
1	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00
2	2,6163e-03	2,6163e-03	-1,3836e-04	-1,3836e-04	-3,1388e-04	-3,1388e-04	0,00
3	2,7632e-03	2,7632e-03	-2,0852e-04	-2,0852e-04	-1,1714e-03	-1,1714e-03	0,00
4	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,00
5	5,5552e-03	5,5552e-03	-3,0598e-04	-3,0598e-04	-2,3979e-03	-2,3979e-03	0,00
6	5,2909e-03	5,2909e-03	-4,0749e-04	-4,0749e-04	1,4785e-03	1,4785e-03	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 19 - Esforços internos do pórtico com tirante.

ESFORÇOS INTERNOS						
BARRAS	<i>Algoritmo</i>		<i>Algoritmo</i>		<i>Algoritmo</i>	
	<i>Ni (kN)</i>	<i>Nj (kN)</i>	<i>Ci (kN)</i>	<i>Cj (kN)</i>	<i>Mi (kNm)</i>	<i>Mj (kNm)</i>
1	-130,563	-130,563	41,043	41,043	-102,369	61,802
2	70,634	70,634	-13,902	-13,902	48,681	-62,532
3	-189,437	-189,437	8,957	8,957	26,303	62,131
4	-148,184	-148,184	-37,032	-37,032	13,121	-135,006
5	-87,032	-87,032	148,184	-171,816	-135,006	-229,532
6	-175,536	-175,536	79,592	79,592	-229,532	88,834
7	8,318	8,318	0,000	0,000	0,000	0,000
-	<i>Ftool[®]</i>		<i>Ftool[®]</i>		<i>Ftool[®]</i>	
-	<i>Ni (kN)</i>	<i>Nj (kN)</i>	<i>Ci (kN)</i>	<i>Cj (kN)</i>	<i>Mi (kNm)</i>	<i>Mj (kNm)</i>
1	-130,563	-130,563	41,043	41,043	-102,369	61,802
2	70,634	70,634	-13,902	-13,902	48,681	-62,532
3	-189,437	-189,437	8,957	8,957	26,303	62,131
4	-148,184	-148,184	-37,032	-37,032	13,121	-135,006
5	-87,032	-87,032	148,184	-171,816	-135,006	-229,532
6	-175,536	-175,536	79,592	79,592	-229,532	88,834
7	8,318	8,318	0,000	0,000	0,000	0,000
<i>Erro (%)</i>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

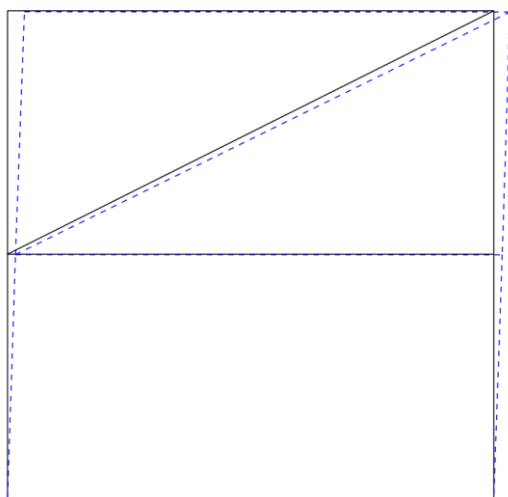
Tabela 20 - Reações de apoio do pórtico com tirante.

REAÇÕES DE APOIO							
Nó	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Erro (%)</i>
	<i>Fx(kN)</i>	<i>Fx(kN)</i>	<i>Fy(kN)</i>	<i>Fy(kN)</i>	<i>Mz(kNm)</i>	<i>Mz(kNm)</i>	
1	-41,043	-41,043	130,563	130,563	102,369	102,369	0,00
4	-8,957	-8,957	189,437	189,437	62,131	62,131	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

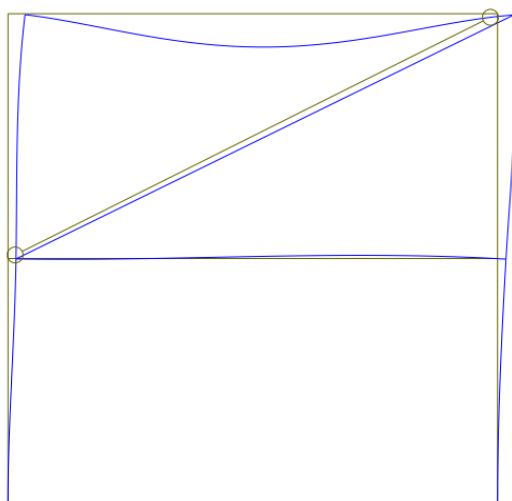
A estrutura deformada foi feita usando uma ampliação dos deslocamentos em 50 vezes, tanto no algoritmo quanto no *Ftool*[®]. A Figura 51 mostra a configuração deformada do pórtico com tirante e a Figura 52 ilustrando a estrutura deformada do *Ftool*[®].

Figura 51 - Estrutura deformada do pórtico com Tirante gerada pelo algoritmo.



Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 52 - Estrutura deformada do pórtico com Tirante modelado no *Ftool*[®].

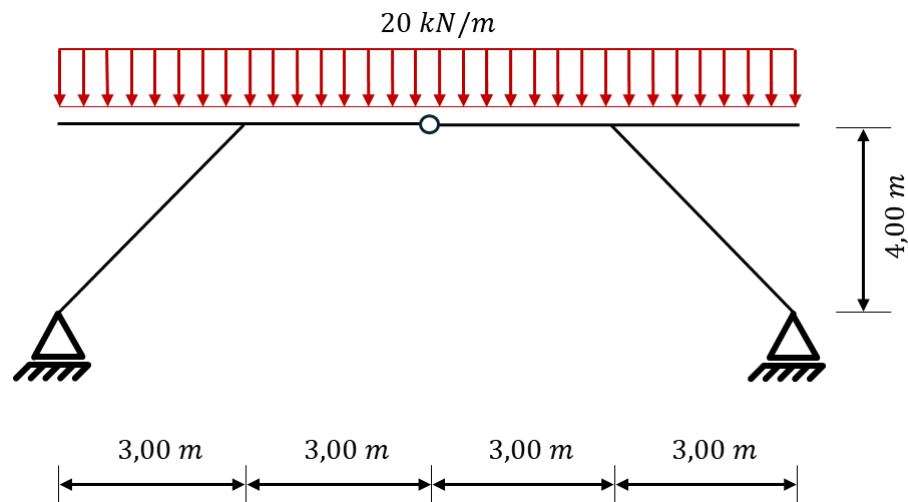


Fonte: *Ftool*[®] (2025).

5.5 Estrutura 05: Pórtico tri-articulado

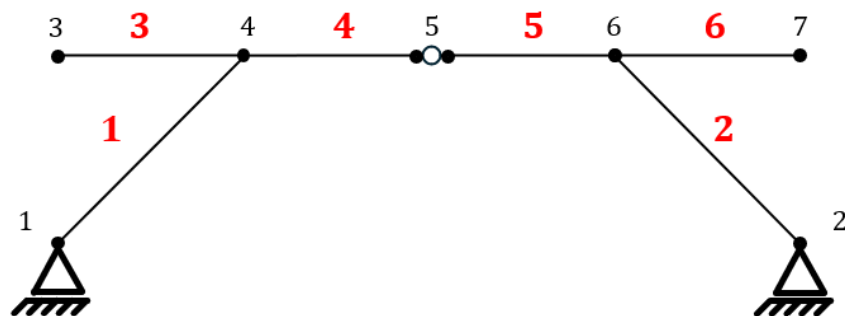
O Pórtico Tri-articulado ilustrado a seguir foi retirado do livro *Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos* (Martha, 2022, p. 74). Foi discretizado em 7 nós e 6 barras, possui elementos inclinados e está sujeito a um carregamento distribuído. Todos os elementos possuem a mesma seção, 25x60 cm² e são feitos com um material com módulo de elasticidade igual a 210 GPa. A Figura 53 mostra o pórtico tri-articulado com tirante e a Figura 54 a discretização adotada.

Figura 53 - Pórtico Tri-articulado.



Fonte: Adaptado de Martha (2022).

Figura 54 - Pórtico tri-articulado discretizado em nós e barras.



Fonte: Autoria própria (2025).

A Tabela 21 mostra as propriedades geométricas, a Tabela 22 os deslocamentos nodais, a Tabela 23 os esforços internos e a Tabela 24 as reações de apoio do pórtico tri-articulado.

Tabela 21 - Descrição das propriedades geométricas e de rigidez do Pórtico tri-articulado.

Elementos	$I_z \text{ (m}^4\text{)}$	$A \text{ (m}^2\text{)}$	$E \text{ (MPa)}$
Todos	4,5000e-03	1,5000e-01	210000

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 22 - Deslocamentos nodais do pórtico com tirante.

DESLOCAMENTOS NODAIS							
Nó	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Erro</i>
	$\delta x(m)$	$\delta x(m)$	$\delta y(m)$	$\delta y(m)$	$\theta z(rad)$	$\theta z(rad)$	(%)
1	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	-5,7143e-06	-5,7143e-06	0,00
2	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	0,0000e+00	5,7143e-06	5,7143e-06	0,00
3	8,5714e-06	8,5714e-06	-2,3333e-04	-2,3333e-04	8,9524e-05	8,9524e-05	0,00
4	8,5714e-06	8,5714e-06	-3,6190e-05	-3,6190e-05	-5,7143e-06	-5,7143e-06	0,00
5	1,3976e-19	2,8397e-19	-2,6762e-04	-2,6762e-04	0,0000e+00	0,0000e+00	50,78
6	-8,5714e-06	-8,5714e-06	-3,6190e-05	-3,6190e-05	5,7143e-06	5,7143e-06	0,00
7	-8,5714e-06	-8,5714e-06	-2,3333e-04	-2,3333e-04	-8,9524e-05	-8,9524e-05	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 23 - Esforços internos do pórtico tri-articulado.

ESFORÇOS INTERNOS						
BARRAS	<i>Algoritmo</i>		<i>Algoritmo</i>		<i>Algoritmo</i>	
	<i>Ni (kN)</i>	<i>Nj (kN)</i>	<i>Ci (kN)</i>	<i>Cj (kN)</i>	<i>Mi (kNm)</i>	<i>Mj (kNm)</i>
1	-150,000	-150,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	-150,000	-150,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	-60,000	0,000	-90,000
4	-90,000	-90,000	60,000	0,000	-90,000	0,000
5	-90,000	-90,000	0,000	-60,000	0,000	-90,000
6	0,000	0,000	60,000	0,000	-90,000	0,000
-	<i>Ftool[®]</i>		<i>Ftool[®]</i>		<i>Ftool[®]</i>	
-	<i>Ni (kN)</i>	<i>Nj (kN)</i>	<i>Ci (kN)</i>	<i>Cj (kN)</i>	<i>Mi (kNm)</i>	<i>Mj (kNm)</i>
1	-150,000	-150,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	-150,000	-150,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000	-60,000	0,000	-90,000
4	-90,000	-90,000	60,000	0,000	-90,000	0,000
5	-90,000	-90,000	0,000	-60,000	0,000	-90,000
6	0,000	0,000	60,000	0,000	-90,000	0,000
<i>Erro (%)</i>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

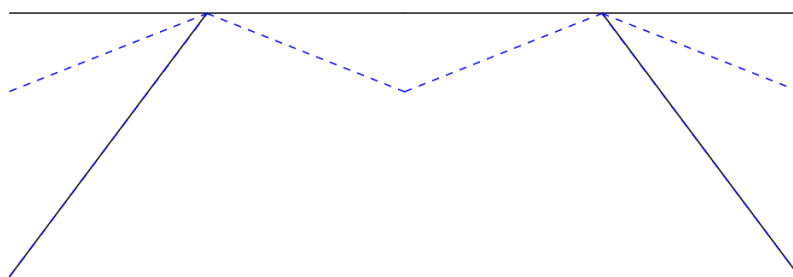
Tabela 24 - Reações de apoio do pórtico com tirante.

REAÇÕES DE APOIO							
Nó	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Algoritmo</i>	<i>Ftool[®]</i>	<i>Erro (%)</i>
	<i>Fx(kN)</i>	<i>Fx(kN)</i>	<i>Fy(kN)</i>	<i>Fy(kN)</i>	<i>Mz(kNm)</i>	<i>Mz(kNm)</i>	
1	90,000	90,000	120,000	120,000	0,000	0,000	0,00
4	-90,000	-90,000	120,000	120,000	0,000	0,000	0,00

Fonte: Autoria própria (2025).

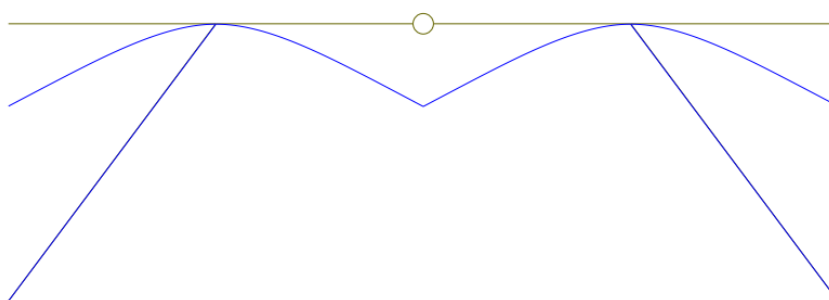
A estrutura deformada foi feita usando uma ampliação dos deslocamentos em 10 vezes, tanto no algoritmo quanto no *Ftool[®]*. A Figura 55 mostra a configuração deformada do pórtico tri-articulado e a Figura 56 ilustrando a estrutura deformada do *Ftool[®]*.

Figura 55 - Estrutura deformada do pórtico tri-articulado gerada pelo algoritmo.



Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 56 - Estrutura deformada do pórtico tri-articulado modelado no *Ftool*[®].



Fonte: *Ftool*[®] (2025).

Nos problemas resolvidos pelo algoritmo, as únicas diferenças observadas em comparação com o *Ftool*[®] foram a rotação do nó 5 da estrutura 1 e o deslocamento horizontal do nó 5 do problema 5. Como o deslocamento teórico nesses dois pontos deveria ser zero, os valores obtidos pelo algoritmo são praticamente nulos uma vez que tanto o programa quanto o software apresentaram valores extremamente pequenos, próximos de zero, devido à precisão de 19 casas decimais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O programa desenvolvido demonstrou eficácia na resolução de estruturas como vigas, treliças planas e pórticos planos. Nele foi possível resolver estruturas planas, submetidas a carregamentos concentrados (forças e momentos) e distribuídos (retangulares, triangulares, trapezoidais), com extremidades engastadas ou rotuladas e diferentes condições de contorno. Ao comparar os resultados com o *Ftool*[®], as divergências observadas decorrem da precisão de cada ferramenta, bem como dos métodos empregados por cada uma para a resolução das estruturas.

Quanto à ilustração da estrutura deformada, para se obter uma figura que mais se assemelhe ao comportamento real, seria interessante que o usuário utilizasse a inserção dos “nós fictícios” como os feitos no exemplo da viga hiperestática. Assim, pode-se adicionar um nó fictício nesse local para determinar seu valor. Dessa forma, a visualização das deflexões ao longo da estrutura analisada se tornaria mais precisa, o que é essencial para uma análise estrutural detalhada.

A elaboração deste trabalho proporcionou uma compreensão aprofundada dos conceitos relacionados à implementação computacional de estruturas, além de possibilitar a análise do comportamento dessas sobre carregamentos variados em tipos e magnitudes, conceitos assimilados ao longo da graduação.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Para fins de melhoria do algoritmo, seguem algumas sugestões para futuros trabalhos no âmbito acadêmico:

- ✓ Implementar apoios elásticos;
- ✓ Incorporar deslocamentos prescritos e recalques;
- ✓ Considerar efeitos térmicos nos elementos;
- ✓ Desenvolver interfaces gráficas para a visualização dos diagramas de esforços internos;
- ✓ Incorporar ligações semirrígidas entre os elementos;
- ✓ Estender o algoritmo ao método dos elementos finitos.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M. C. F. de. **Estruturas isostáticas**. Rio de Janeiro: Oficina de Textos, 2009. 168 p.

VAZ, L. E. **Métodos dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2011. 273 p.

OCTAVE. **About**. [S.l.]: [s.n.], [s/d]. Disponível em: <<https://octave.org/about>>. Acesso em: 4 fev. 2025.

HIBBELER, R. C. **Análise das Estruturas**. 8 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013. 544 p.

HIBBELER, R. C. **Estática: Mecânica para Engenharia**. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2005. 560 p.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**. 7 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. 640 p.

KASSIMALI, A. **Structural Analysis**. 5 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. 835 p.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. 3 ed. Rio de Janeiro: GEN LTC, 2022. 424 p.

MARTHA, L. F. **Análise Matricial de Estruturas com Orientação a Objetos**. 1. ed. Rio de Janeiro: GEN LTC, 2018. 395 p.

MCCORMAC, J. C. **Análise estrutural: Usando Métodos Clássicos e Métodos Matriciais**. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 504 p.

MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. **Matrix Structural Analysis**. 2 ed. New York: [s.n.], 2000. 482 p.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. S. **Análise de estruturas: Método das Forças e Método dos Deslocamentos**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2006. 324 p.

SORIANO, H. L. **Análise de Estruturas - Formulação Matricial e Implementação Computacional**. 1 ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2005. 346 p.

SORIANO, H. L. **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. 1 ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009. 432 p.

SUSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural 1: Estruturas Isostáticas**. Rio de Janeiro: Globo, 1981. 368 p.

WEAVER, W. J.; GERE, J. M. **Matrix Analysis of Framed Structures**. 3 ed. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc, 1990. 549 p.