



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SISTEMAS DE
COMUNICAÇÃO E AUTOMAÇÃO**

TAYARA CRYSTINA PEREIRA BENIGNO

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DE ATITUDE E
POSIÇÃO DO QUADROTOR.**

MOSSORÓ – RN

2015

TAYARA CRYSTINA PEREIRA BENIGNO

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DE ATITUDE E
POSIÇÃO DO QUADROTOR.**

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Comunicação e Automação, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Sistemas de Comunicação e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes
Garcia – UFRSA

MOSSORÓ – RN

2015

Catálogo na Fonte

Catálogo de Publicação na Fonte. UFRSA - BIBLIOTECA CENTRAL ORLANDO TEIXEIRA - CAMPUS MOSSORÓ

Benigno, Tayara Crystina Pereira.

Modelagem matemática e controle de atitude e posição do quadrotor /
Tayara Crystina Pereira Benigno. - Mossoró, 2015.

72f. il.

1. Modelagem matemática. 2. Quadrotor. 3. Veículo aéreo não tripulado. 4. Equação de Euler-Lagrange. 5. Controlador Integral Proporcional Derivado - PID. I. Título

RN/UFRSA/BOT/467

CDD 511.8 B467M

TAYARA CRYSTINA PEREIRA BENIGNO

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONTROLE DE ALTITUDE E
POSIÇÃO DO QUADROTOR: UM ENFOQUE NO CONTROLE PID.**

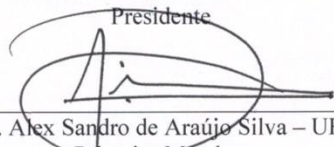
Dissertação de mestrado acadêmico
apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Sistemas de Comunicação e Automação, como
requisito para a obtenção do título de Mestre em
Sistemas de Comunicação e Automação.

APROVADA EM: 28 /08 / 2015.

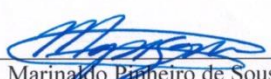
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia – UFERSA
Presidente



Prof. Dr. Alex Sandro de Araújo Silva – UFERSA
Primeiro Membro



Prof. Dr. Marinaldo Pinheiro de Sousa Neto – IFRN
Segundo Membro

Mossoró, 28 de Agosto de 2015.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe, Sebastiana Pereira, a minha querida avó, Francisca Maria da Conceição, ao meu companheiro, Allan Kardek e a todos os amigos pelo apoio e compreensão.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado força, saúde, garra e perseverança para conquistar mais essa vitória. Ele é o maior responsável por eu ter chegado até aqui.

A minha mãe por, desde sempre, incentivar os meus estudos e me apoiar durante todo a minha jornada de estudos, sendo a segunda maior responsável por essa nova conquista.

A Allan Kardek por ter estado ao meu lado sempre ajudando nos momentos difíceis, de angústias e por estar dividindo comigo este momento de alegria.

Agradeço por ter encontrado amigos no PPGSCA, Sameque, Sâmya, Adelson, Livia, Monique e Romênia. Destaco minha gratidão, ao meu amigo Jerdison pelo incentivo e por me ajudar nas fases em que mais precisei meu muito obrigado.

Agradeço pela paciência e exigência do meu Orientador Professor Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia e por ter acreditado e confiado em mim.

A todos os mestres, professores, amigos, colegas de trabalho, que contribuíram para que fosse possível a conclusão deste trabalho.

EPÍGRAFE

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes”.

(Marthin Luther King)

RESUMO

Com o avanço tecnológico e a popularização do uso dos Veículos Aéreos Não Tripulados (VANT's) cresce também a necessidade do uso de técnicas de controle mais robustas e mais eficazes. Dentre os mais diversos tipos de veículos aéreos não tripulados, este trabalho irá focar no modelo do *quadrotor*, que possui uma estrutura mecânica em forma de cruz, cujas extremidades têm um conjunto de motor e hélice, onde a rotação desse conjunto é responsável pela força de sustentação e pelos movimentos desenvolvidos pelo mesmo. Objetivando aplicar controladores que proporcione estabilidade ao sistema dinâmico deste veículo aéreo. O presente trabalho tem como objetivo realizar a modelagem matemática deste sistema usando as equações de Euler-Lagrange. Tendo isso, é proposto um controlador PID (Proporcional Integral Derivativo) para manter os três ângulos de orientação estáveis e a altura em um valor desejado. O desenvolvimento do controlador proposto será validado via simulação confirmando a viabilidade da aplicação da técnica de estabilidade apresentada.

Palavras-Chave: Quadrorotor. Euler-Lagrange. PID.

ABSTRACT

With advances in technology and the popularization of the use of Unmanned Aerial Vehicles (UAV's) so does the need to use more robust and more effective control techniques. Among the various types of unmanned aerial vehicles, this paper will focus on quadrotor model, which has a mechanical structure in the form of x, whose ends have an engine and propeller assembly, where the rotation of this group is responsible for the lift and the movements developed by quadrotor. This feeling, aiming to apply drivers that provide stability to the dynamic system. This study aims to conduct mathematical modeling using the Euler-Lagrange. With this, it is proposed a PID controller (Proportional Integral Derivative) to maintain stable the three orientation angles and height to a desired value. The development of the proposed controller will be validated via simulation confirming the application feasibility of the technique presented stability..

Keywords: Quadrotor. Euler-Lagrange. PID.

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1_	Parâmetros do quadrotor.....	46
Tabela 4.2_	Resumo das ações do PID.....	51
Tabela 4.3_	Parâmetros de ajuste.....	53
Tabela 4.4_	Legenda da figura 4.7.....	54
Tabela 5.1_	Parâmetros de ganhos.....	59
Tabela 6.1_	Resultados de estabilização.....	62

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1_	Gyroplane 1907.....	20
Figura 2.2_	Quadrotor 1922.....	21
Figura 2.3_	Convertawings Model A 1956.....	21
Figura 2.4 _	Bell x-22 1966.....	22
Figura 2.5_	Ar Drone Parrot.....	23
Figura 3.1_	Modelo do quadrotor.....	27
Figura 3.2_	Movimentos do quadrotor.....	28
Figura 3.3_	Sistema de referência.....	30
Figura 3.4_	Ângulos de Euler.....	30
Figura 3.5_	Rotação de ϕ com respeito à x.....	31
Figura 3.6_	Rotação de θ com respeito à y.....	32
Figura 3.7_	Rotação de ψ com respeito à z.....	32
Figura 4.1_	Diagrama de blocos do PID.....	49
Figura 4.2_	Diagrama de blocos do ganho proporcional.....	50
Figura 4.3_	Diagrama de blocos do ganho integral.....	50
Figura 4.4_	Diagrama de blocos do ganho derivativo.....	51
Figura 4.5_	Diagrama de blocos do controle proporcional.....	52
Figura 4.6_	Oscilações em um período P_c	53
Figura 4.7_	Sinal do controle PID em malha fechada.....	54
Figura 4.8_	Resposta de z.....	55
Figura 4.9_	Resposta de ϕ e θ	56
Figura 4.10_	Resposta de ψ	56
Figura 5.1_	Diagrama de blocos do controle PID da altitude. (Malha fechada).....	57
Figura 5.2_	Diagrama de blocos do controle PID dos ângulos de ϕ e θ . (Malha fechada).....	58
Figura 5.3_	Diagrama de blocos do controle PID do ângulo de ψ . (Malha fechada).....	58
Figura 5.4_	Estabilização da altura.....	59
Figura 5.5_	Estabilização da roll e pitch.....	60

Figura 5.6_	Estabilização da yaw.....	60
-------------	---------------------------	----

NOMENCLATURA

Siglas

VANT-Veículo Aéreo Não Tripulado

PID- Proporcional Integral Derivativo

PD -Proporcional Derivativo

LQR- Regular Linear Quadrático

SISO- (*Single-Input. Single-Output*) Uma entrada e uma saída.

MATLAB- (*Matrix Laboratory*)

SIMULINK- Simulações do sistema

LQG -*Linear Quadrático Gaussiano*

MQR -Mínimos Quadrados Recursivo

UFERSA – Universidade Federal Rural do Semiárido

PPGSCA – Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Comunicação e Automação

Letras Latinas

T Energia cinética total.

V Energia Potencial do total.

L Função lagrangeana

T_{trans} Energia cinética translacional

T_{rot} Energia cinética rotacional.

t Tempo.

x Posição com relação ao eixo X.

y Posição com relação ao eixo Y.

z Posição com relação ao eixo Z.

K_p ganho proporcional

K_d ganho derivativo

K_i ganho integral

T_i tempo integral

T_d tempo derivativo

l distância entre os motores ao centro do quadrotor

m massa total do quadrotor

Letras Gregas

ψ Ângulo guinada.

θ Ângulo rolagem.

ϕ Ângulo arfagem.

g Gravidade

η Coordenada generalizada para a rotação.

ξ Coordenada generalizada para a posição.

τ_i Torque em torno do i-ésimo eixo.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

NOMECLATURA

1	INTRODUÇÃO.....	16
1.1	JUSTIFICATIVA.....	18
1.2	OBJETIVOS.....	19
1.2.1	Objetivo Geral.....	19
1.2.2	Objetivos Específicos.....	19
1.3	HISTÓRIA DOS QUADROTORES.....	20
2	ESTADO DA ARTE.....	24
2.1	ESTRATÉCIAS DE CONTROLE.....	24
3	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	27
3.1	PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO.....	27
3.2	CINEMÁTICA DO QUADROTOR.....	29
3.2.1	Posição e orientação.....	29
3.2.2	Matrizes de rotação.....	31
3.3	DINÂMICA DO QUADROTOR.....	33
3.3.1	Equações de Euler-Lagrange.....	33
3.3.2	Dinâmica translacional.....	34
3.3.3	Dinâmica rotacional.....	36
4	MODELO LINEAR E CONTROLADOR PID.....	39
4.1	LINEARIZAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS.....	39
4.1.2	Estabilidade.....	47
4.1.3	Controlabilidade.....	48
4.2	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA.....	48
4.3	PID (PROPORCIONAL INTEGRAL DERIVATIVO).....	49
4.3.1	Sintonia do PID.....	52
4.3.1.1	Método de Ziegler e Nichols.....	52
4.3.1.2	Critérios de desempenho.....	53
4.3.1.3	Controladores PID de orientação e altitude.....	55
5	SIMULAÇÕES E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS.....	57

5.1	SIMULAÇÕES.....	57
5.2	RESULTADOS.....	59
6	CONCLUSÕES.....	62
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	62
	REFERÊNCIAS.....	64
	ÂPENDICE I.....	69
	ÂPENDICE II.....	70
	ÂPENDICE III.....	71

1 INTRODUÇÃO

Um VANT (Veículo Aéreo Não tripulado) constitui-se em uma aeronave que não necessita de um piloto embarcado para pilotá-la (Paula, 2012). Os VANT's têm o seu surgimento na Primeira Guerra Mundial (1917), e devido às dificuldades técnicas da época, eram pouco confiáveis e imprecisos. Nas últimas décadas, as pesquisas científicas envolvendo veículos aéreos não tripulados (VANT's) têm crescido significativamente ao redor do mundo, visando diversas aplicações como, busca de informação (imagens, busca, pesquisa e reconhecimento), de segurança, vigilância, aplicações agrícolas, gestão de tráfego (como exemplo ilustrado na figura 1.1). Dentre esses veículos, o quadrotor é um tipo de VANT que se tornou padrão na pesquisa de robôs aéreo (Dião et. al. 2011). Isso ocorre em virtude da sua estrutura simples e sua capacidade de fazer voos pairados, desviando-se de possíveis obstáculos enquanto realiza determinada tarefa.

A menor complexidade mecânica destas aeronaves em relação a outros modelos resulta em facilidades de construção e manutenção. Por outro lado, o acoplamento dinâmico e o comportamento altamente não-linear, impõem um caráter desafiador ao controle dos quadrotores. Na verdade, tal característica pode ser usada como um ingrediente motivacional e, conseqüentemente, atrair a atenção dos pesquisadores na área de Engenharia de Controle.

Inúmeros trabalhos já foram publicados sobre seu controle, podemos citar como exemplo, os de modelagem dinâmica baseada em leis físicas (Amir & Abbass, 2008), linearização do modelo físico e aplicação de técnicas de controle clássicas (Lee et al. 2011), controle por backstepping (Ahmed et al. 2010), entre outros. Boa parte desses trabalhos são dedicados ao sistema de controle da aeronave, não dando ênfase a modelagem matemática da sua estrutura.

A modelagem de tal sistema pode ser realizada, por exemplo, pelo formalismo das equações de Euler-Lagrange (Kim and Tilbury, 1998; Castillo et al., 2005; Raffo et al., 2010). Esse formalismo é uma forma de obtenção das equações do movimento e com isso possibilita a análise dinâmica do movimento. Alguns autores preferem usar o formalismo de Newton-Euler para modelar o sistema, chegando às equações dinâmicas equivalentes do sistema. O formalismo de Newton requer um conhecimento mais aprofundado nas leis da física e o de Lagrange requer um melhor conhecimento matemático, assim optou-se pelo formalismo de Euler-Lagrange.

O presente estudo objetiva obter uma modelagem matemática precisa e detalhada, para serem usadas na construção de um, simulador, utilizando o Matlab/Simulink. . A modelagem

matemática visa melhores resultados em relação à dinâmica da aeronave. Posteriormente o simulador construído foi testado com técnica de controle PID.

1.1 JUSTIFICATIVA

O quadrotor é um veículo aéreo não tripulado que possui grandes vantagens na sua construção e manutenção, o qual faz que o quadrotor seja viável para desenvolvimento de pesquisas. As aplicações na sua engenharia e controlabilidade e o uso de outros pesquisadores auxiliando nas suas tomadas de decisões, por exemplo, em terremotos, vulcões, linhas de transmissão, até na biologia identificando, por exemplo, a presença de focos do *Aedes aegypti*. Um dos problemas na manipulação destes veículos é a projeção de uma técnica de controle ótimo e confiável e que permita ser capaz de seguir uma trajetória preestabelecida para realizar alguma tarefa específica (Muñoz, 2012).

Os problemas de modelagem e controle de quadrotores vêm sendo amplamente investigado na literatura, havendo extensa lista de publicações. Trabalhos como (Ritz, 2011) que apresenta um método numérico para o cálculo de manobras. Em (Hehn, 2011) um controle de pêndulo invertido montado no quadrotor.

É observando o conjunto de características, como sistema altamente não-linear, que o estudo do quadrotor possui que este trabalho propõe a modelagem dinâmica pelo método Euler-Lagrange e a aplicação da técnica de controle PID, visando uma forma de melhor controlar o quadrotor remotamente.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Obter um modelo matemático através do formalismo de Euler-Lagrange do quadrotor e realizar o controle da sua atitude e posição por meio da técnica de controle PID.

1.2.2 Objetivos Específicos

A fim de atingir o objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Obter um modelo matemático que represente a dinâmica do sistema do quadrotor.
- Estudar uma técnica de controle que estabilize, no menor espaço de tempo possível, a posição e atitude do quadrotor.
- Simular o sistema de controle no ambiente Matlab/Simulink.
- Realizar uma análise do método de controle através das simulações realizadas.

1.3 HISTÓRIA DOS QUADROTORES

O quadrorotor surgiu há mais de uma centena de anos. O primeiro teve sua origem no ano de 1907, criado por Charles Richet e os irmãos Breguet (Figura 2.1). Em virtude do seu tamanho e da sua grande massa (578 kg), a aeronave não teve força suficiente para atingir uma elevada altitude, chegando a apenas 1,5 m de altura (Leishman, 2002). Mesmo diante do insucesso revelado por esta aeronave, os irmãos Breguet não desistiram e continuaram a investigar e construir máquinas, eles contribuíram para o desenvolvimento do helicóptero convencional em 1932.

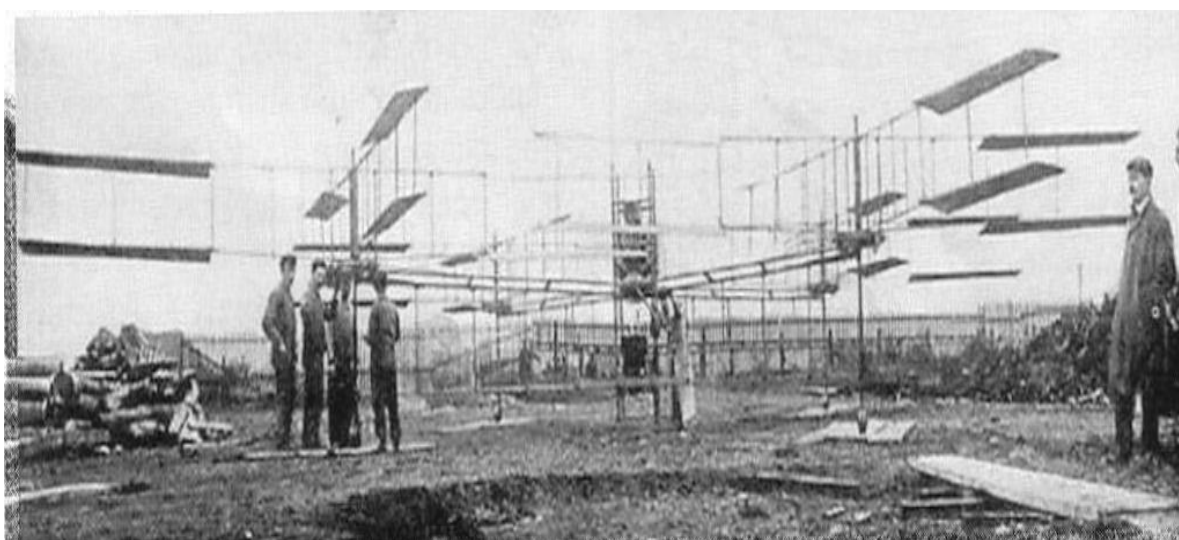


Figura 2.1- Gyroplane 1907.

Fonte: <http://flyingmachines.ru/Site2/Crafts/Craft28966.htm>

Em 1920, outro engenheiro, Etienne Oemichen desenvolveu uma aeronave com quatro motores e oito propulsores (Figura 2.2). Mesmo com alguns insucessos no início, Oemichen obteve estabilidade e controlabilidade que possibilitaram autonomia de voo cerca de um quilometro.

Em 1921, Bothezat, com apoio do exército americano construiu o primeiro quadrorotor a transportar um passageiro. A máquina tinha um rotor situado em cada extremidade da sua estrutura em forma de uma cruz. Segundo (Wierema, 2008), devido às dificuldades de controle apresentados, os pesquisadores focaram no helicóptero de uma hélice, buscando maiores conhecimentos na área de controle.

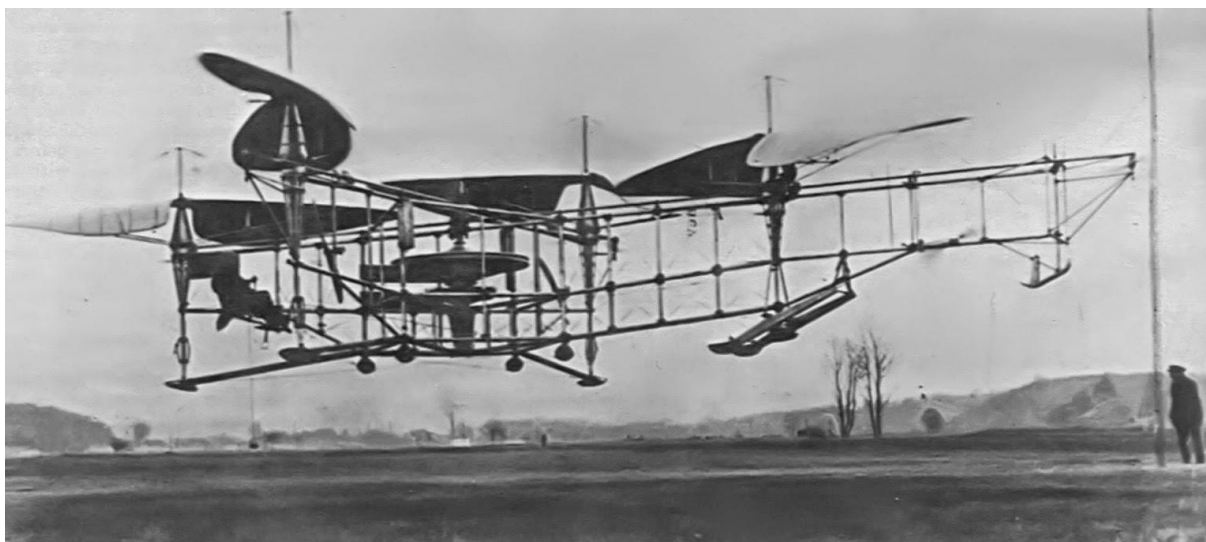


Figura 2.2 - Quadroptor, 1922.

Fonte: <http://maquettes-missiles.blogspot.com.br/2014/08/le-convertawings-quadroptor.html>

A partir do conceito da aeronave de Oemichen e Bothezat, um novo projeto surgiu no ano de 1956, com a construção do “Convertawings Model A” (Figura 2.3) que executou vários voos com sucesso. No ano de 1963 foi construído o “Curtis X-19” com o objetivo de ser uma aeronave para transporte de passageiros. No entanto a transição entre o voo vertical e o voo horizontal revelou não ser funcional devido à transição lenta dos sistemas mecânicos (Wierema, 2008).



Figura 2.3- Convertawings Model A, 1956.

Fonte: http://www.aviastar.org/helicopters_eng/convertawings.php

Mais tarde, em março de 1966, surgiu o primeiro voo da aeronave “Bell X-22” (Figura 2.4) e a transição entre a decolagem e voo foi um sucesso, porém não atingiu a velocidade máxima solicitada de 525 km/h, sendo o projeto cancelado.

Em setembro de 2005, a “Bell Helicopter”, em parceria com “Boeing”, assinou um contrato com a marinha americana tendo como objetivo a construção do “Quad Tilt Rotor”, que deveria ter grande capacidade de carga e elevada velocidade de voo e alcance (Sousa, 2011). O primeiro protótipo da aeronave e respectivo voo estavam previstos para 2012, no entanto ainda não aconteceu.



Figura 2.4: Bell X-22, 1966.

Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Bell_X-22#mediaviewer/File:X-22a_onground_bw.jpg

Atualmente, com o avanço da tecnologia e a capacidade de fazer cada vez menor, ou seja, miniaturização (Exemplo ilustrado na figura 2.5), dos dispositivos o que tem gerado uma maior mobilidade e uma diminuição nos custos para sua comercialização (Pounds et. al, 2002). A demanda para estudar o quadrotor e usá-lo seja na pesquisa ou até mesmo como diversão tem sido notória, por esta e outras razões as pesquisas com quadrotor vêm crescendo e ganhando destaque no meio acadêmico científico.



Figura 2.5: Ar Drone Parrot

Fonte: Brandão (2013).

2 ESTADO DA ARTE

O presente Capítulo apresenta e analisa trabalhos semelhantes já desenvolvidos, em busca de contextualizar a pesquisa proposta.

2.1 ESTRATÉGIAS DE CONTROLE

Os problemas de modelagem e controle de quadrotores vêm sendo amplamente investigados na literatura, havendo inúmeras publicações. Apesar de já existir extensa literatura avançada sobre quadrotores, estudos de estabilização e rastreamento de posição de quadrotores ainda vêm sendo realizados, é um desafio devido às altas não linearidades do veículo e ao fato de ser um sistema subatuado, quando o número de atuadores é menor que o número de graus de liberdade. Nesta seção serão descritos trabalhos efetuados nesta área nos últimos anos.

Um dos primeiros trabalhos, Mistler (2001), usa o método de linearização da realimentação para rastrear a posição e atitude do quadrotor, onde o método obtém um sistema linear controlável representado por um conjunto de sistemas SISO (*Single-Input, Single-Output*) independentes.

Em Bouabdallah *et al.* (2004), é mostrada uma classificação de veículos aéreos de acordo com o princípio de voo e sua propulsão. É também apresentada uma comparação de custo-benefício entre cinco tipos de veículos aéreos e são mostradas as principais vantagens e desvantagens dos helicópteros do tipo quadrotor. No âmbito de controle, os autores propõem um controlador PID (Proporcional, Integral e Derivativo) para estabilizar a atitude do quadrotor. Em Bouabdallah e Siegwart (2005), foram aplicadas duas técnicas de controle não linear “*backstepping* e *sliding-mode*” visando controlar os ângulos de orientação. A avaliação do desempenho de ambas as técnicas, foi realizada por simulações computacionais e testes práticos. Na comparação entre as técnicas de controle, a técnica por *backstepping* obteve melhores resultados na capacidade de controlar a atitude.

Em Xu (2006) é utilizado “*sliding-mode Control*”, essa técnica considera em sua estrutura incertezas do modelo e a lei de controle é determinada de forma que as trajetórias do sistema “deslizem” sobre uma região desejada no espaço de estados (Agostinho, 2009), para rastreamento de posição e estabilização e Madane (2006) é proposto um método bastante comum e bem sucedido o “*Backstepping Control*”, é uma técnica de controle não linear e a construção da lei de controle é desenvolvida a partir de uma função de controle Lyapunov. .

Os métodos de controle PID, linearização do modelo e “*Backstepping Control*” foram comparados através de simulações de atitude e altura no trabalho de Henrique e Santana (2009).

Ly e Cheolkeun (2010) apresentaram um controlador LQR “*Linear Quadratic Regulator*”, que pode proporcionar ganhos de controle desde que seja feita uma escolha adequada das matrizes Q e R da função de energia para minimização de custos, é um considerado um método de realimentação linear ótima de estados (Silva,2012), com ação integral para o controle da trajetória, e um controlador linear LQG (*Linear Quadratic Gaussian*),é uma combinação do controlador LQR e um observador chamado filtro de Kalman projetado para minimizar a variância do erro de estimação, também com ação integral para estabilizar a atitude.

Em Santos *et al.* (2010), é projetado um controlador *fuzzy* para atitude e posição de um quadrotor. Em particular, esta técnica pode ser realizada sem um modelo matemático da dinâmica do sistema. Porém é preciso ter um conhecimento empírico do funcionamento do sistema para elaborar bem as regras de controle, chamadas regras de controle fuzzy.

Em Lopes (2011) foi feito o método “*Model Predictive Control*” para estabilização do quadrotor, comparando o desempenho entre o controlador PID e “*Backstepping Control*”, via simulações. Outros trabalhos merecem destaque pela inovação, com controladores baseados em redes neurais, as redes neurais artificiais (RNA) foram desenvolvidas tomando-se como base o cérebro humano, ou seja, são técnicas computacionais que apresentam um modelo matemático inspirado na estrutura neural de organismos inteligentes e que adquirem conhecimento através da experiência (ROCHA, 2006), apresentados por Dunfied et al. (2004), Zairi & Hazry (2011) e Bouhali & Boudjedir (2011).

Em Raffo *et al.* (2011), é apresentada uma estratégia de controle para solucionar o problema de rastreamento de trajetórias que possa garantir alguma robustez ao sistema, utilizando um controlador não linear H_∞ em conjunto com um controlador MPC (*Model-Based Predictive Controller*), esses controladores caracterizam-se por utilizar previsões do comportamento futuro do sistema controlado para realizar o cálculo da lei ótima de controle com base em um determinado critério de desempenho determinístico ou estocástico. As previsões são obtidas através de um modelo do sistema. O controlador H_∞ foi projetado para controlar a altitude e a atitude do quadrotor, enquanto que o MPC foi utilizado para rastrear uma referência de trajetória.

Schreier (2012) mostra duas técnicas de controle adaptativas para estabilização da atitude de um quadrotor. A MIAC (*Model Identification Adaptive Controller*) é uma

combinação de um estimador MQR (Mínimos Quadrados Recursivo) com um controlador integral discreto. Já a MRAC (*Model Reference Adaptive Control*) utiliza uma lei de controle adaptativa contínua baseada na teoria de Lyapunov. As duas foram utilizadas para estabilizar a atitude na presença de variações na inércia do sistema.

Romero *et al.* (2014) utilizaram um controlador LQR discreto na estabilidade da atitude e de posição do quadrotor. Para realização, foi utilizado um modelo linearizado da dinâmica do veículo e simulações e testes experimentais foram realizados para avaliar a resposta do controlador.

Jasim e Gu (2014) apresentaram um controlador por realimentação de estados H_∞ para estabilidade angular do quadrotor, e realizaram simulações para verificar o desempenho do controlador frente a perturbações externas. Petrushevski e Rakic (2014) usaram controle *fuzzy* com PD (Proporcional Derivativo) para estabilizar os ângulos *roll*, *pitch* e *yaw*, e compararam os resultados obtidos com a técnica *backstepping* para verificar o desempenho do controlador proposto em ambiente de simulação.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, a modelagem do sistema é detalhada, mostra-se a descrição do sistema de referências do quadrotor. As equações da dinâmica e cinemática são obtidas a partir do formalismo de Euler-Lagrange, dividindo-se em dois subsistemas: translação e rotação, sendo (x, y, z) os três movimentos translacionais e $(\text{roll}, \text{pitch}, \text{yaw})$ os três movimentos rotacionais.

3.1 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO

Antes do desenvolvimento do modelo dinâmico do quadrotor, é necessário entender seu funcionamento. O quadrotor move-se devido ao trabalho realizado pelo conjunto dos quatro motores com seus respectivos propulsores, dispostos horizontalmente em uma formação em cruz (ilustrada na Figura 3.1). Os propulsores, devido ao seu formato e à rotação dos motores aos quais estão acoplados, criam um fluxo de ar no sentido contrário ao do movimento desejado, causando — devido à terceira lei de Newton (que postula que, para toda ação, há uma reação de igual intensidade em sentido oposto) — a tração necessária ao voo (Campera et. al. 2013). A variação coletiva das forças de propulsão, resultante da velocidade angular dos motores, governa a navegação tridimensional da aeronave. Os movimentos associados a um quadrotor estão associados à variação de rotação de cada um dos motores, os quatros rotores que giram em sentidos opostos em pares para anular o torque (Figura 3.1).

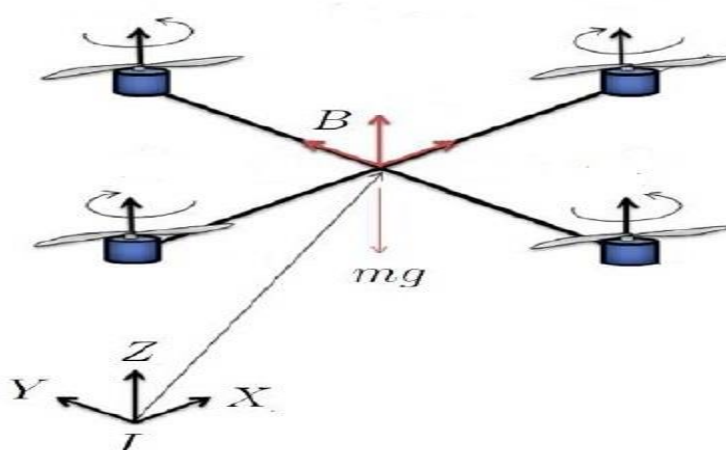


Figura 3.1: Modelo do quadrotor

Fonte: Adaptado de Madani and Benallegue (2006).

A ilustração do movimento obtido pelas variações de velocidade angular dos motores é mostrada na figura (3.2). Como podemos ver, dois motores giram em sentido horário, enquanto os outros dois giram em sentido anti-horário.

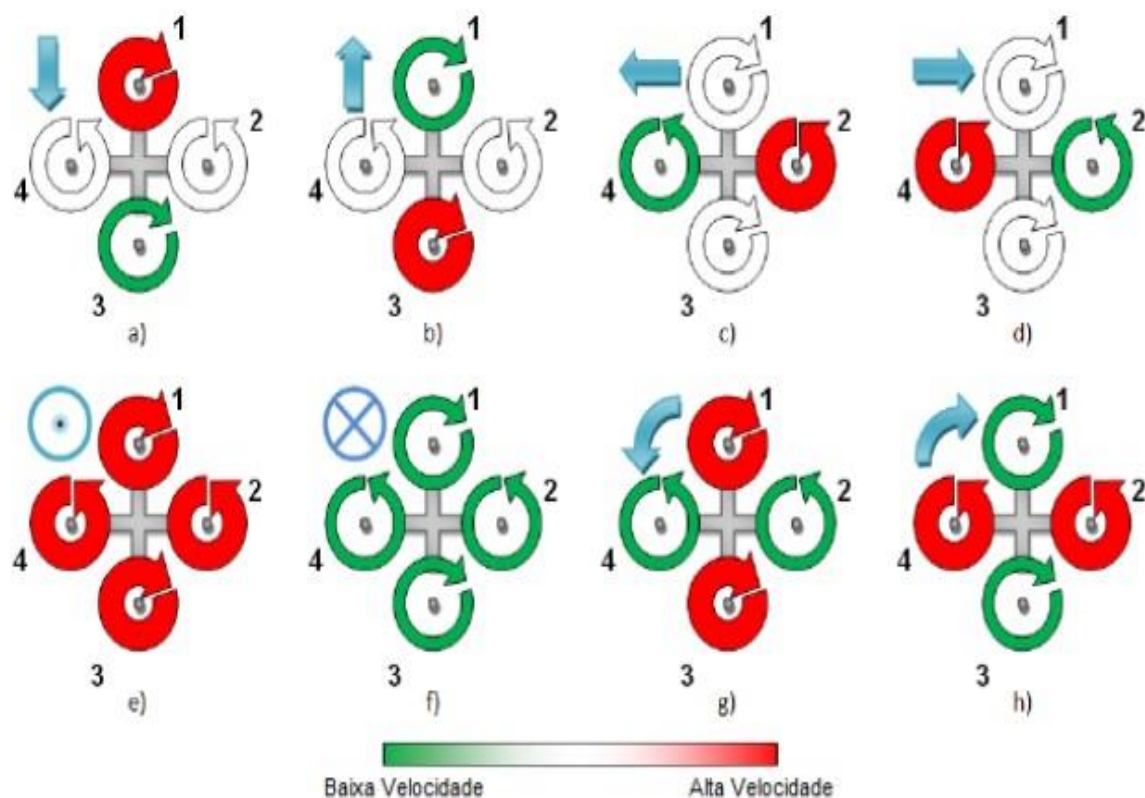


Figura 3.2: Movimentos do quadrotor

Fonte: Pfeifer (2013)

Item “a”: ao se elevar a velocidade angular no motor 1 e na mesma proporção reduzir a velocidade no motor 3, seria gerada uma variação negativa na atitude pitch e consequentemente um deslocamento negativo no eixo X seria produzido.

Item “b”: ao se reduzir a velocidade no motor 1 e aumentar na mesma proporção a velocidade no motor 3, seria gerada uma variação positiva na atitude pitch, o que resultaria em um deslocamento positivo no eixo X.

Item “c”: ao se elevar a velocidade angular no motor 2 e na mesma proporção reduzir a velocidade no motor 4, seria gerada uma variação negativa na atitude roll e consequentemente um deslocamento negativo no eixo Y seria produzido.

Item “d”: ao reduzir a velocidade no motor 2 e aumentar na mesma proporção a velocidade no motor 4, seria gerada uma variação positiva na atitude roll, o que resultaria em um deslocamento positivo no eixo Y.

Itens “e” e “f”: para elevação da altitude do quadrotor, aumentar-se igualmente a velocidade de todos os motores. Para redução da altitude, a redução equilibrada das velocidades dos motores é necessária.

Itens “g” e “h”: para alterar a orientação do quadrotor, um desequilíbrio na somatória dos momentos deve ocorrer.

3.2 CINEMÁTICA DO QUADROTOR

Cinemática é a área da física que se ocupa com a descrição dos movimentos dos corpos, sem se preocupar com a análise de suas causas, ou seja, dinâmica. Geralmente trabalha-se aqui com partículas ou pontos materiais, corpos em que todos os seus pontos se movem de maneira igual e em que são desprezadas suas dimensões em relação ao problema.

3.2.1 Posição e orientação

Para modelar e encontrar as equações dinâmicas do quadrotor é definido o sistema de referência do mesmo. Considera-se I ponto fixo referente a terra e B uma faixa inercial com sua origem no centro de massa do quadrotor. Para conhecer a localização do quadrotor no espaço, é necessário conhecer sua posição com respeito ao sistema de referência fixo I e sua orientação com respeito ao referencial inercial B.

A posição do quadrotor, com coordenadas translacionais, com respeito ao sistema de referencial fixo I para o centro de massa do quadrotor é definido pelo vetor ξ , onde

$$\xi = [x \quad y \quad z]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

A orientação do quadrotor, obtém-se ao conhecer os ângulos de Euler sobre B, que indica a rotação do quadrotor no espaço tridimensional (Barrientos et. al. 1997). Os ângulos são definidos pelo vetor η , onde

$$\eta = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

Na figura 3.3 mostra-se o sistema de referências fixo a terra I, o sistema móvel B, o vetor ξ de translação, os ângulos de Euler η , as forças Ω_i ($i = 1, 2, 3, 4$) que cada hélice

produz e o peso do quadrotor mg . Eixos do sistema I são X, Y, Z e do sistema local B são x', y', z' .

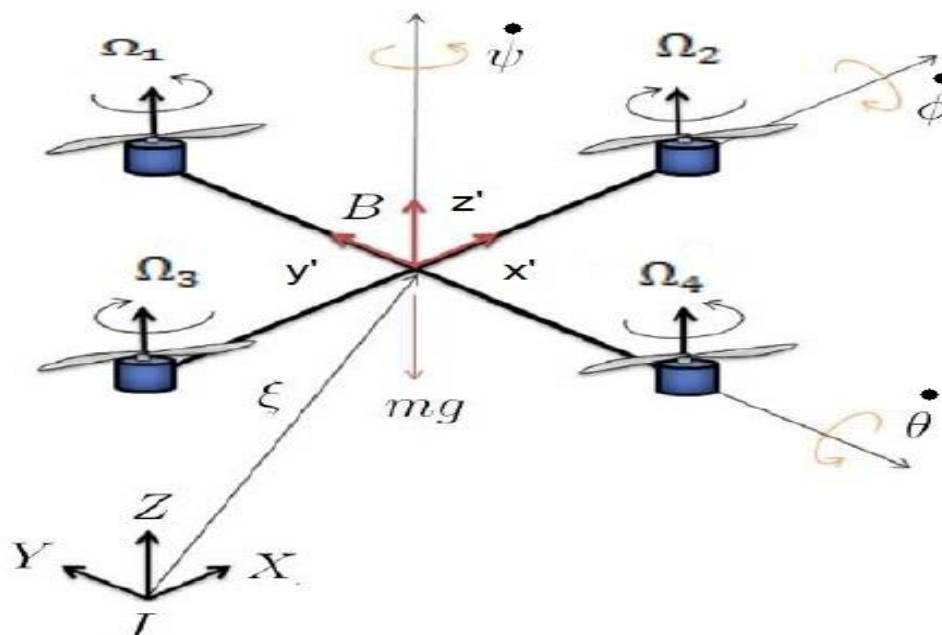


Figura 3.3 Sistema de referência.

Fonte: Adaptado de Madani and Benallegue (2006).

Na figura 3.4 mostram-se os ângulos de rotação em respeito ao sistema referencial B. Em seguida suas denominações.

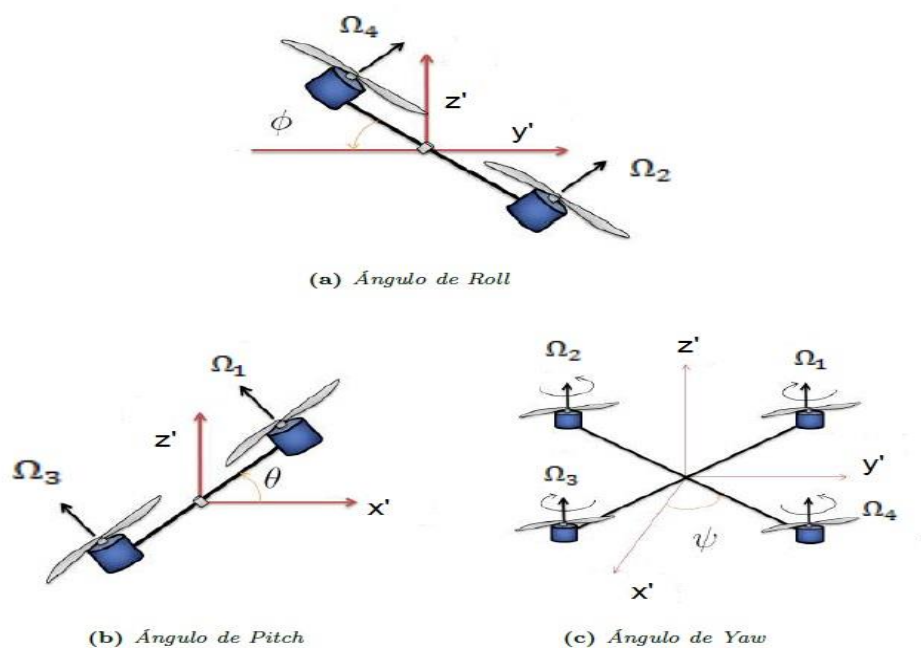


Figura 3.4: Ângulos de Euler

Fonte: Adaptado de Madani and Benallegue (2006).

- ϕ é a rotação com respeito a x' e denomina-se ângulo de Roll (rolagem).
- θ é a rotação com respeito a y' e denomina-se ângulo de Pitch (arfagem).
- ψ é a rotação com respeito a z' e denomina-se ângulo de Yaw (guinada).

3.2.2 Matrizes de rotação

As matrizes de rotação são amplamente utilizadas para descrever a orientação de qualquer corpo móvel, devido a facilidade da utilização da álgebra matricial. Na aeronáutica é amplamente utilizada a matriz de rotação, caracterizada pelas seguintes rotações:

- Girar o sistema $x'y'z'$ um ângulo de roll com respeito a X do sistema I.
- Girar o sistema $x'y'z'$ um ângulo de pitch com respeito a Y do sistema I.
- Girar o sistema $x'y'z'$ um ângulo de yaw com respeito a Z do sistema I.

Em seguida é feita cada uma das rotações considerando que os sistemas B e I coincidem na origem de seus eixos. Por meio da geometria analítica ou álgebra linear pode-se deduzir $R(x, \phi)$ rotação de um ângulo ϕ em torno do eixo X no sentido anti-horário. Conforme a figura 3.5 a matriz é:

$$R(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

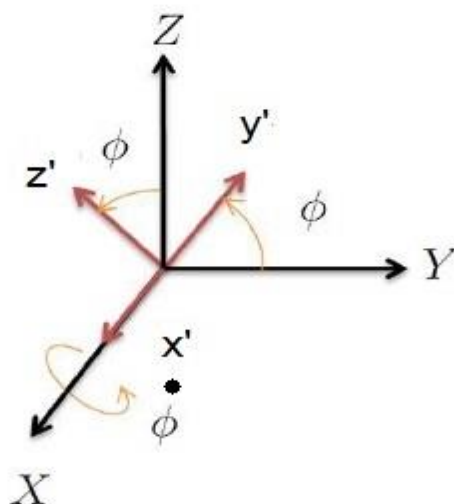


Figura 3.5: Rotação de roll com respeito a X.

Fonte: Elaboração própria.

$R(y, \theta)$ Rotação de um ângulo θ em torno do eixo Y no sentido anti-horário. Conforme a figura 3.6 a matriz é:

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

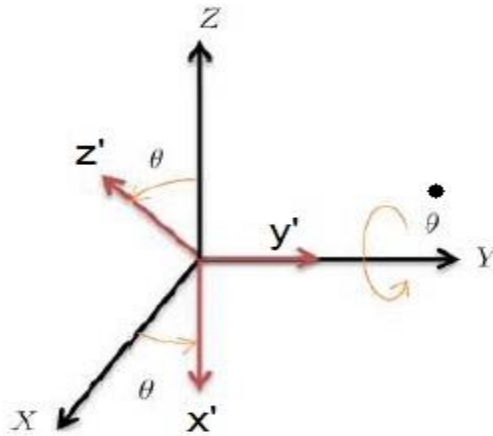


Figura 3.6: Rotação de pitch com respeito a Y.

Fonte: Elaboração própria.

$R(z, \psi)$ Rotação de um ângulo ψ em torno do eixo Z no sentido anti-horário. Conforme a figura 3.7 a matriz de rotação é:

$$R(z, \psi) = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

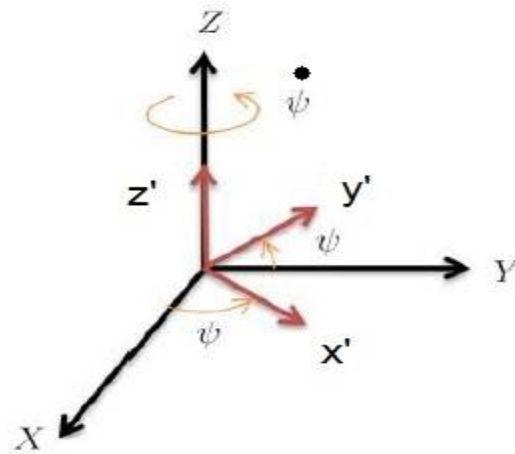


Figura 3.7: Rotação de Yaw com respeito a Z.

Fonte: Elaboração própria.

Assim, a matriz de mudança de base B para base I é a matriz de rotação completa R, obtém-se mediante o produto das três matrizes de rotação (Raffo, 2007).

$$R = R(x, \phi). R(y, \theta). R(z, \psi) \quad (3.6)$$

Ou seja,

$$R = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi + s\psi c\phi & c\psi s\theta c\phi - s\psi s\phi \\ -s\psi c\theta & -s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & -s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Sendo $c\phi = \cos\phi$, $s\phi = \sin\phi$, assim por diante.

3.3 DINÂMICA DO QUADROTOR

A dinâmica de um sistema define-se pela relação entre as forças que atuam sobre o sistema e o movimento que estas causam. A dinâmica de um corpo relaciona: forças, velocidades, aceleração, dimensões, massas, etc. O formalismo de Euler-Lagrange é encontrado nos trabalhos de Castillo et. al. (2006), Bouabdallah (2007), Raffo et. al. (2010), Mohamed et. al. (2009).

Tomando considerações sobre a modelagem do sistema de acordo com Bouabdallah (2007):

- A estrutura é de um corpo rígido.
- O centro da gravidade coincide com o centro do referencial inercial.
- As hélices são rígidas.
- Sem perturbações externas.

3.3.1 Equações de Euler-Lagrange

De maneira breve define-se o processo para obtenção do sistema dinâmico, as coordenadas generalizadas. A definição completa da posição com n graus de liberdade seriam necessárias n variáveis independentes, essas são determinadas, coordenadas generalizadas. Essas coordenadas podem ser escolhidas de diversas formas, garantindo a simplificação do tratamento matemático de um determinado problema (Moura, 2014).

Para o quadrotor mostra-se em q as coordenadas generalizadas formado pela posição $\xi = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ e orientação $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$. Então $q = [\xi \ \eta]^T \in \mathbb{R}^6$, isto é,

$$q = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^6 \quad (3.8)$$

A equação de Euler-Lagrange é baseada na energia cinética e na energia potencial segundo Bouabdallah (2007), temos

$$T_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3.9)$$

Bouabdallah (2007) define os termos da equação de Euler-Lagrange:

L: função lagrangeana e define-se como $L=T-V$.

T: energia cinética total.

V: energia potencial total.

q_i : coordenada generalizada.

$\dot{q}_i$: primeira derivada da coordenada generalizada com respeito ao tempo.

T_i : conjunto de forças generalizadas que regem o sistema.

Uma vez que a translação ξ é independente da rotação η , segundo Castillo et. al. (2006) pode-se dividir a dinâmica na parte translacional e rotacional. Estuda-se, então cada um separado.

3.3.2 Dinâmica translacional

Define-se dinâmica translacional devido aos movimentos que ξ . Energia cinética de translação onde m é a massa do quadrotor é dada por

$$(T_{trans})_{e_z} = \left(\frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} \right)_{e_z} = \left[\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right]_{e_z} \quad (3.10)$$

A energia potencial é dada pela equação

$$(V)_{e_z} = (mgz)_{e_z} \quad (3.11)$$

O lagrangeano translacional é

$$L_{trans} = (T_{trans} - V)_{e_z} \quad (3.12)$$

$$L_{trans} = \left[\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \right]_{e_z} \quad (3.13)$$

Tomando as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{trans}}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L_{trans}}{\partial \xi} = F_{\xi} \quad (3.14)$$

Resolvendo as derivadas parciais de cada termo da equação anterior (3.14), onde e_z representa o vetor $[0 \ 0 \ 1]^T$ em direção a z.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{trans}}{\partial \xi} &= -mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial L_{trans}}{\partial \dot{\xi}} &= m\dot{\xi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{trans}}{\partial \dot{\xi}} \right) &= m\ddot{\xi}\end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados, o conjunto de equações dinâmicas que define o movimento de translação é dado por.

$$m\ddot{\xi} + mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = F_\xi \quad (3.15)$$

F_ξ são as forças generalizadas aplicadas no quadrotor e obtida pela matriz de rotação

$$F_\xi = R\hat{F} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.16)$$

Onde $\hat{F}$ é a força linear aplicada a cada hélice

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Onde $U_1 = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$

A força produzida em cada motor depende de uma constante $k_i > 0$, uma velocidade angular w_i de cada motor i (i=1, 2,3, 4).

$$\Omega_i = k_i w_i^2 \quad (3.18)$$

Substituindo os valores têm-se equações do movimento translacional

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R\hat{F} \quad (3.19)$$

Logo

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} + mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi + s\psi c\phi & c\psi s\theta c\phi - s\psi s\phi \\ -s\psi c\theta & -s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & -s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Finalmente a dinâmica translacional

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} &= (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi) \frac{U_1}{m}\end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\ddot{z} = -g + (c\theta c\phi) \frac{U_1}{m}$$

$$U_1 = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$$

3.3.3 Dinâmica rotacional

A energia rotacional total do sistema é

$$L_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J(\eta) \dot{\eta} \quad (3.22)$$

Onde $J(\eta)$ é a jacobiana das coordenadas gerais de I, isto é,

$$J(\eta) = w_\eta^T I w_\eta \quad (3.23)$$

w_η é a jacobiana com respeito ao sistema local B, que relaciona a velocidade angular w com $\dot{\eta}$ (Raffo, 2007).

$$w_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Considerando que a estrutura do quadrotor é simétrica, possui a seguinte matriz inercial

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Substituindo

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Segue

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xx}s\theta \\ 0 & I_{yy}c^2\phi + I_{zz}s^2\phi & (I_{yy} - I_{zz})c\phi s\phi c\theta \\ -I_{xx}s\theta & (I_{yy} - I_{zz})c\phi s\phi c\theta & I_{xx}s^2\theta + I_{yy}s^2\phi c^2\theta + I_{zz}c^2\phi c^2\theta \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

A equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{rot}}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L_{rot}}{\partial \eta} = \tau_\eta$$

$$\frac{\partial L_{rot}}{\partial \eta} = - \left(J(\dot{\eta}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J(\eta)) \right) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial L_{rot}}{\partial \dot{\eta}} = \frac{1}{2} (J(\eta) + J(\eta)^T) \dot{\eta} = J(\eta) \dot{\eta} \quad (3.29)$$

$$J(\eta)\ddot{\eta} + \left(J(\dot{\eta}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J(\eta)) \right) = \tau_\eta \quad (3.30)$$

Os torques de rolagem, arfagem e guinada define-se a seguir, onde a distância do centro a cada hélice é l e u_η é o torque produzido por cada motor. Os torques u_ϕ e u_θ dependem das forças lineares de empuxo ou propulsão, enquanto o torque u_ψ depende do movimento produzido por cada um dos motores.

$$\tau_\eta = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\Omega_3 - \Omega_1) \\ l(\Omega_2 - \Omega_4) \\ (\tau_{m1} - \tau_{m2} + \tau_{m3} - \tau_{m4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\Omega_3 - \Omega_1) \\ l(\Omega_2 - \Omega_4) \\ l(\Omega_x + \Omega_z - \Omega_w - \Omega_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lU_2 \\ lU_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Sendo τ_{mi} , onde $i = (1, 2, 3, 4)$ aparecem quando a hélice girar produz uma força Ω_e , onde $e = (x, z, w, y)$, que é ortogonal a força Ω_i , onde $i = (1, 2, 3, 4)$. Assim os torques são determinados pelas novas forças geradas pela distância l e o centro da gravidade.

As equações dinâmicas de rotação define-se

$$M(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \tau_\eta \quad (3.32)$$

Onde $M(\eta) = J(\eta)$ e $C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}$ é a matriz de coriolis, que define os efeitos giroscópios e o sistema centrífugo (Castillo et. al. 2006).

$$C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = J(\dot{\eta}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J(\eta)) \quad (3.33)$$

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Depois de várias operações resolvendo a expressão (3.33), chega-se aos termos da matriz não linear $C(\eta, \dot{\eta})$:

$$\begin{aligned} C_{11} &= I_{xx} \\ C_{12} &= \frac{1}{2} \psi c \theta I_{xx} \\ C_{13} &= -s \theta I_{xx} \\ C_{21} &= -\frac{1}{2} (-\dot{\theta} s(s\phi) + \dot{\psi} c \theta c(2\phi))(I_{yy} - I_{zz}) \\ C_{22} &= c^2 \phi I_{yy} + s^2 \phi I_{zz} - \frac{1}{2} \dot{\psi} c \phi s \phi s \theta (I_{zz} - I_{yy}) \\ C_{23} &= c \phi s \phi c \theta (I_{yy} - I_{zz}) \\ C_{31} &= -s \theta I_{xx} - \frac{1}{2} (\dot{\theta} c \theta c(2\phi) + \dot{\psi} c^2 \theta s(2\phi))(I_{yy} - I_{zz}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{32} &= c\phi s\phi c\theta(I_{yy} - I_{zz}) - \frac{1}{2}(-\dot{\phi}c\theta I_{xx} - \dot{\theta}c\phi s\phi s\theta(I_{yy} - I_{zz}) \\
&\quad + \psi s(2\theta)(I_{xx} - s^2\phi I_{yy} - c^2\phi I_{zz})) \\
C_{33} &= s^2\theta I_{xx} + c^2\theta(s^2\phi I_{yy} + c^2\phi I_{zz})
\end{aligned}$$

Conhecida a matriz $C(\eta, \dot{\eta})$ voltamos à equação 3.32, depois de efetuar todos os cálculos teremos finalmente a dinâmica rotacional dada pela equação:

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= -\dot{\psi}\dot{\theta}c\phi + \frac{lc\psi}{I_{yy}}U_2 - \frac{ls\psi}{I_{yy}}U_3 + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\dot{\theta}c\phi \\
\ddot{\theta} &= \frac{\dot{\psi}\dot{\phi}}{c\phi} + \dot{\phi}\dot{\theta}t\phi + \frac{ls\psi}{I_{yy}c\phi}U_2 + \frac{lc\psi}{I_{yy}c\phi}U_3 - \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\frac{\dot{\phi}}{c\phi} \\
\ddot{\psi} &= \dot{\psi}\dot{\phi}t\phi + \frac{\dot{\phi}\dot{\theta}}{c\phi} + \frac{ls\dot{\psi}t\phi}{I_{yy}}U_2 + \frac{lc\psi t\phi}{I_{yy}}U_3 + \frac{1}{I_{zz}}U_4 - \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\dot{\phi}t\phi
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Acoplando as equações 3.21 e 3.35 o modelo dinâmico do quadrotor é dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi)\frac{U_1}{m} \\
\ddot{y} &= (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi)\frac{U_1}{m} \\
\ddot{z} &= -g + (c\theta c\phi)\frac{U_1}{m} \\
\ddot{\phi} &= -\dot{\psi}\dot{\theta}c\phi + \frac{lc\psi}{I_{yy}}U_2 - \frac{ls\psi}{I_{yy}}U_3 + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\dot{\theta}c\phi \\
\ddot{\theta} &= \frac{\dot{\psi}\dot{\phi}}{c\phi} + \dot{\phi}\dot{\theta}t\phi + \frac{ls\psi}{I_{yy}c\phi}U_2 + \frac{lc\psi}{I_{yy}c\phi}U_3 - \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\frac{\dot{\phi}}{c\phi} \\
\ddot{\psi} &= \dot{\psi}\dot{\phi}t\phi + \frac{\dot{\phi}\dot{\theta}}{c\phi} + \frac{ls\dot{\psi}t\phi}{I_{yy}}U_2 + \frac{lc\psi t\phi}{I_{yy}}U_3 + \frac{1}{I_{zz}}U_4 - \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\dot{\phi}t\phi
\end{aligned} \tag{3.36}$$

4. MODELO LINEAR E CONTROLADOR PID

Neste capítulo é feito o processo de linearização do modelo obtido anteriormente. Este processo é feito com o objetivo de aplicar técnicas de controle clássico, nos quais o sistema é linear e invariante no tempo. Também será proposto o controlador PID que é um dos mais usados graças a sua versatilidade e simplicidade.

4.1 LINEARIZAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

O sistema de equações mostrado em 3.36 fornece as variáveis de estado $[x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^6$. Podemos rescrever o modelo na forma de estados $\dot{x} = f(x, u)$, pela introdução de $x = [x_1, x_2, \dots, x_{12}]^T \in \mathbb{R}^{12}$ como vetor de estado do sistema.

Fazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x} \\ x_3 = y \\ x_4 = \dot{x}_3 = \dot{y} \\ x_5 = z \\ x_6 = \dot{x}_5 = \dot{z} \\ x_7 = \phi \\ x_8 = \dot{x}_7 = \dot{\phi} \\ x_9 = \theta \\ x_{10} = \dot{x}_9 = \dot{\theta} \\ x_{11} = \psi \\ x_{12} = \dot{x}_{11} = \dot{\psi} \end{array} \right.$$

Temos:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Logo,

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{y} \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = \ddot{z} \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = \ddot{\phi} \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = \ddot{\theta} \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \ddot{\psi} \end{cases}$$

Onde por (3.36), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{X} = 0 \Rightarrow f(x, u) = 0 \\ = \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ -sx_9cx_7 \frac{U_1}{m} = 0 \\ x_4 = 0 \\ sx_7 \frac{U_1}{m} = 0 \\ x_6 = 0 \\ -cx_7cx_9 \frac{U_1}{m} + g = 0 \\ x_8 = 0 \\ -x_{12}x_{10}cx_7 + \frac{lsx_{11}}{I_{yy}}U_2 - \frac{lsx_{11}}{I_{yy}}U_3 + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}} \\ (x_{12}x_{10}cx_7 - x_{10}^2sx_7cx_7) = 0 \\ x_{10} = 0 \\ \frac{1}{cx_7} [x_{12}x_8 + x_8x_{10}tx_7 + \frac{lsx_{11}}{I_{yy}}U_2 + \frac{lsx_{11}}{I_{yy}}U_3 - \\ \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}}(x_{12}x_8sx_7 - x_{10}s^2x_7x_8)] = 0 \\ x_{12} = 0 \\ \frac{1}{cx_7} [x_{12}x_8sx_7 + x_8x_{10} + \frac{lsx_{11}sx_7}{I_{yy}}U_2 + \frac{lsx_{11}sx_7}{I_{yy}}U_3 + \frac{cx_7}{I_{zz}}U_4 - \\ \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}}(x_{12}x_8sx_7 - x_{10}s^2x_7x_8)] = 0 \end{array} \right. \quad (4.2) \end{aligned}$$

Buscando linearizar a equação 4.2, através da jacobiana das funções em relação às variáveis de estado e em relação às variáveis de controle em torno de um ponto de equilíbrio.

Temos: $X_e = (x_{1e}, x_{2e}, x_{3e}, \dots, x_{12e})$ que é o ponto de equilíbrio onde $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dots = \dot{x}_{12} = 0$. A partir daí calcular X_e usando a equação (4.2), igualando todos os termos a zero temos,

$$\dot{X} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ -sx_9cx_7 \frac{U_1}{m} = 0 \\ x_4 = 0 \\ sx_7 \frac{U_1}{m} = 0 \\ x_6 = 0 \\ -cx_7cx_9 \frac{U_1}{m} + g = 0 \\ x_8 = 0 \\ -x_{12}x_{10}cx_7 + \frac{lsx_{11}}{l_{yy}}U_2 - \frac{lsx_{11}}{l_{yy}}U_3 + \\ \frac{l_{yy}-l_{zz}}{l_{yy}}(x_{12}x_{10}cx_7 - x_{10}^2sx_7cx_7) = 0 \\ x_{10} = 0 \\ \frac{1}{cx_7} \left[x_{12}x_8 + x_8x_{10}tx_7 + \frac{lsx_{11}}{l_{yy}}U_2 + \frac{lsx_{11}}{l_{yy}}U_3 - \right. \\ \left. \frac{l_{yy}-l_{zz}}{l_{yy}}(x_{12}x_8sx_7 - x_{10}^2x_7x_8) \right] = 0 \\ x_{12} = 0 \\ \frac{1}{cx_7} \left[x_{12}x_8sx_7 + x_8x_{10} + \frac{lsx_{11}sx_7}{l_{yy}}U_2 + \frac{lsx_{11}sx_7}{l_{yy}}U_3 + \frac{cx_7}{l_{zz}}U_4 - \right. \\ \left. \frac{l_{yy}-l_{zz}}{l_{yy}}(x_{12}x_8sx_7 - x_{10}^2x_7x_8) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Efetuada as operações em cada termo da equação 4.3 teremos

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ sx_9 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ \frac{U_1}{m} &\neq 0 \\ x_6 &= 0 \\ U_1 &= \frac{mg}{cx_7cx_9} \\ x_8 &= 0 \\ (cx_{11}U_2 - sx_{11}U_3 = 0)^*; \frac{l}{l_{yy}} &\neq 0 \\ x_{10} &= 0 \\ (sx_{11}U_2 + cx_{11}U_3 = 0)^{**}; cx_7 &\neq 0 \\ x_{12} &= 0 \\ sx_7 &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

De * e **, temos

$$\begin{cases} cx_{11}U_2 - sx_{11}U_3 = 0 \\ sx_{11}U_2 + cx_{11}U_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} cx_{11} & -sx_{11} \\ sx_{11} & cx_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim

$$U_2 = U_3 = 0$$

Substituindo os valores de U_2 e U_3 na equação $\ddot{\psi} = 0$ vem

$$\frac{1}{cx_7} \cdot \frac{lcx_7}{l_{zz}} U_4 = 0 \Rightarrow U_4 = 0, \text{ uma vez que } cx_7 \neq 0 \text{ e } l \neq 0.$$

Temos

$(x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ou $(x, 0, y, 0, z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ o ponto de equilíbrio.

Com $U_1 = mg, U_2 = U_3 = U_4 = 0$ são as entradas. Logo o vetor entrada é

$$u = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^T \quad (4.5)$$

O vetor de saída é

$$y = g(x, u) = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T \quad (4.6)$$

A representação do modelo linearizado em espaço de estado é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde

$$A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \quad (4.8)$$

$$B = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \quad (4.9)$$

$$C = \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \quad (4.10)$$

$$D = \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \quad (4.11)$$

Calculando a matriz jacobiana de 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11 obtêm-se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{2,7} & 0 & A_{2,9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{4,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{6,7} & 0 & A_{6,9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{8,7} & 0 & 0 & A_{8,10} & A_{8,11} & A_{8,12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10,7} & A_{10,8} & 0 & A_{10,10} & A_{10,11} & A_{10,12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12,7} & A_{12,8} & 0 & A_{12,10} & A_{12,11} & A_{12,12} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Onde

$$A_{2,7} = s x_9 s x_7 \frac{U_1}{m}$$

$$A_{2,9} = -c x_9 c x_7 \frac{U_1}{m}$$

$$A_{4,7} = c x_7 \frac{U_1}{m}$$

$$A_{6,7} = s x_7 c x_9 \frac{U_1}{m}$$

$$A_{6,9} = c x_7 s x_9 \frac{U_1}{m}$$

$$A_{8,7} = x_{12} x_{10} s x_7 + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}} (-c^2 x_7 x_{10}^2 - x_{12} x_{10} s x_7 + x_{10}^2 s^2 x_7)$$

$$A_{8,10} = -x_{12} c x_7 + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}} (x_{12} c x_7 - 2 x_{10} s x_7 c x_7)$$

$$A_{8,11} = -\frac{l s x_{11}}{I_{yy}} U_2 - \frac{l c x_{11}}{I_{yy}} U_3$$

$$A_{8,12} = -x_{10} c x_7 + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{zz}} (x_{10} c x_7)$$

$$A_{10,7} = \frac{1}{c^2 x_7} \left[(x_8 x_{10} \sec^2 x_7 c x_7) - \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}} (x_{10} x_8 c^2 x_7) \right] - [(x_{12} x_8 +$$

$$x_8 x_{10} t g x_7) + \frac{l s x_{11}}{I_{yy}} U_3 - \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}} (x_{12} x_8 - x_{10} x_8 s x_7)] s x_7$$

$$A_{10,8} = \frac{1}{c^2 x_7} \left[(x_{12} + x_{10} t g x_7) - \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}} (x_{12} - x_{10} s x_7) \right] c x_7$$

$$A_{10,10} = \frac{1}{c^2 x_7} \left[(x_8 t g x_7) - \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{yy}} (-x_8 s x_7) \right] c x_7$$

$$A_{10,11} = \frac{1}{c^2 x_7} \left(\frac{lcx_7}{I_{yy}} U_2 - \frac{lsx_{11}}{I_{yy}} U_3 \right) cx_7$$

$$A_{10,12} = \frac{1}{c^2 x_7} \left(x_8 - \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} \right) cx_7$$

$$A_{12,7} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2 x_7} \left[(x_{12}x_8cx_7) + \frac{lsx_{11}cx_7}{I_{yy}} U_2 - \frac{lcx_{11}cx_7}{I_{yy}} U_3 - \frac{lsx_7}{I_{zz}} U_4 - \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} (x_{12}x_8cx_7 - \right. \\ & \left. x_{10}x_82cx_7sx_7) \right] cx_7 - [(x_{12}x_8sx_7 + x_8x_{10}) + \frac{lsx_{11}sx_7}{I_{yy}} U_2 - \frac{lcx_{11}sx_7}{I_{yy}} U_3 + \\ & \left. \frac{cx_7}{I_{zz}} U_4 - \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} (x_{12}x_8sx_7 - x_{10}s^2x_7x_8)](-sx_7) \end{aligned}$$

$$A_{12,8} = \frac{1}{c^2 x_7} \left[(x_{12}sx_7 + x_{10}) - \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} (x_{12}sx_7 - x_{10}s^2x_7) \right] cx_7$$

$$A_{12,10} = \frac{1}{c^2 x_7} \left[x_8 - \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} (-s^2x_7x_8) \right] cx_7$$

$$A_{12,11} = \frac{1}{c^2 x_7} \left(\frac{lcx_{11}sx_7}{I_{yy}} U_2 + \frac{lsx_{11}sx_7}{I_{yy}} U_3 \right) cx_7$$

$$A_{12,12} = \frac{1}{c^2 x_7} \left[(x_8sx_7) - \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} (x_8sx_7) \right] cx_7$$

A matriz B é

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{4,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{6,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{8,2} & B_{8,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{10,2} & B_{10,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{12,2} & B_{12,3} & B_{12,4} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Onde

$$B_{2,1} = \frac{-sx_9cx_7}{m}$$

$$B_{4,1} = \frac{sx_7}{m}$$

$$B_{6,1} = \frac{-cx_7cx_9}{m}$$

$$B_{8,2} = \frac{lcx_{11}}{I_{yy}}$$

$$B_{8,3} = \frac{lsx_{11}}{I_{yy}}$$

$$B_{10,2} = \frac{1}{c^2x_7} \left(\frac{lsx_{11}}{I_{yy}} cx_7 \right)$$

$$B_{10,3} = \frac{1}{c^2x_7} \left(\frac{lcx_{11}}{I_{yy}} cx_7 \right)$$

$$B_{12,2} = \frac{1}{c^2x_7} \left(\frac{lsx_{11}sx_7}{I_{yy}} cx_7 \right)$$

$$B_{12,3} = \frac{1}{c^2x_7} \left(-\frac{lcx_{11}sx_7}{I_{yy}} cx_7 \right)$$

$$B_{12,4} = \frac{1}{c^2x_7} \left(\frac{cx_7}{I_{zz}} cx_7 \right)$$

E as matrizes C e D

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$D = 0 \text{ (matriz nula)} \quad (4.15)$$

Usando os parâmetros da tabela (4.1) e as relações encontradas no ponto de equilíbrio e substituindo em 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15. As matrizes A, B e C tornam-se,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,31}{9,8 \times 10^{-3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0,31}{9,8 \times 10^{-3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16,3 \times 10^{-3}} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

4.1.2 Estabilidade

Um sistema linear autônomo é estável se todos os autovalores da matriz A estão dentro de um círculo unitário.

Corolário (Ogata, 2007): Um sistema é estável se todos os autovalores da matriz A apresentam parte real negativa.

Obs.: Os autovalores de uma matriz A são as raízes do polinômio característico associado a matriz A, isto é, o polinômio característico da matriz A.

$$\det(SI - A) = 0 \quad (4.16)$$

Assim como

$$S^{12} = 0 \quad (4.17)$$

Logo o sistema é instável.

4.1.3 Controlabilidade

Um sistema é controlável se no instante t_0 for possível levar o sistema de um estado $x(t_0)$ para qualquer outro estado em um intervalo de tempo finito.

Define-se matriz de controlabilidade

$$\tilde{C} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (4.18)$$

Um sistema é controlável caso o posto da matriz de controlabilidade seja igual a dimensão da matriz $A_{n \times n}$. Isto é

$$\text{pos}(\tilde{C}) = n \quad (4.19)$$

Assim, como $\text{pos}(\tilde{C}) = 12$ o nosso sistema é controlável.

4.2 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

De maneira compacta, a matriz da função de transferência de um sistema em espaço de estados é dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.20)$$

Assim, temos que a função de transferência é:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{309,97}{s^4} & 0 \\ 0 & \frac{309,97}{s^4} & 0 & 0 \\ -\frac{0,83}{s^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{31,63}{s^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31,63}{s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{61,35}{s^2} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Para cada saída, teremos quatro funções de transferências cada qual relaciona a uma entrada.

Observa-se:

- Uma entrada em τ_ϕ gera movimentos tanto de rotação em ϕ quanto de translação na direção y . Os outros valores são iguais à zero, porque a entrada τ_ϕ não interfere nestas saídas.

- Uma entrada em τ_θ gera movimentos tanto de rotação em θ quanto de translação em x. Os outros valores são iguais à zero, pois a entrada τ_θ não interfere nas demais saídas.
- Uma entrada em τ_ψ gera movimentos apenas de rotação em ψ .
- Uma entrada U_1 gera movimentos apenas de translação em z.

4.3 PID (PROPORCIONAL INTEGRAL DERIVATIVO)

Segundo Campestrini (2006) o controlador PID é uma técnica muito utilizada em sistemas de controle realimentados. Isto se justifica pela sua estrutura simples, bom desempenho para a maioria dos sistemas e a possibilidade de implementação sem modelo específico do sistema de controle (Ogata, 2007).

Apresenta três ações de controle (Proporcional, Integral e derivativa), ilustradas na figura 4.1.

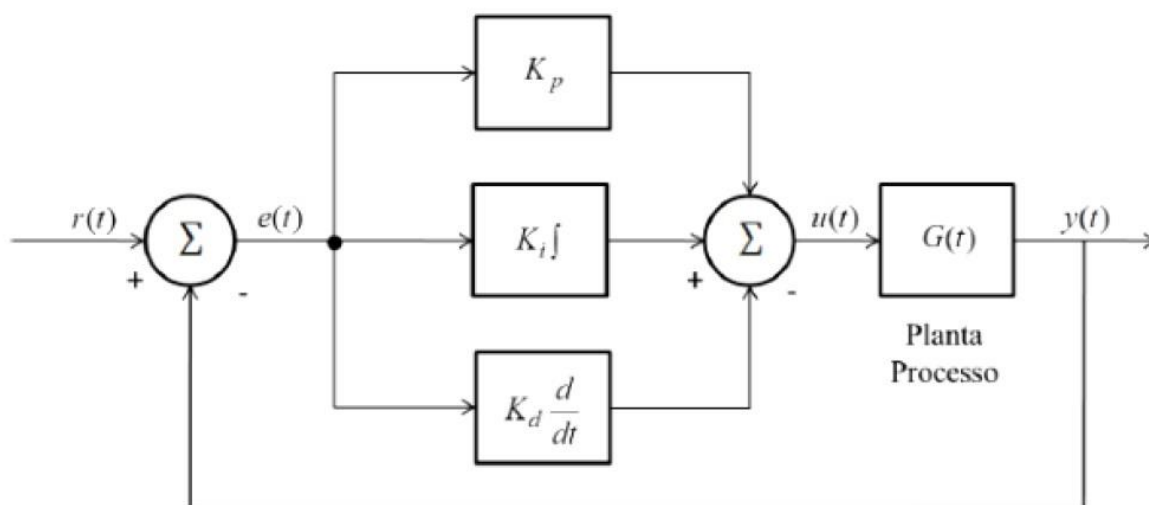


Figura 4.1: Diagrama de blocos do PID

Fonte: Adaptado de (Ogata, 2011).

“O controlador proporcional (p) gera sua saída proporcionalmente ao erro ($e(t)$). O fator multiplicativo (K_p) é conhecido como ganho do controlador”, segundo Campos e Teixeira (2006).

$$u_p(t) = k_p \cdot e(t) \quad (4.22)$$

O comportamento da resposta do sistema controlado pela ação proporcional apresenta diminuição do tempo de subida; diminuição do erro; aumento do sobressinal; variação de tempo de acomodação. Podemos observar seu diagrama de blocos na figura 4.2.

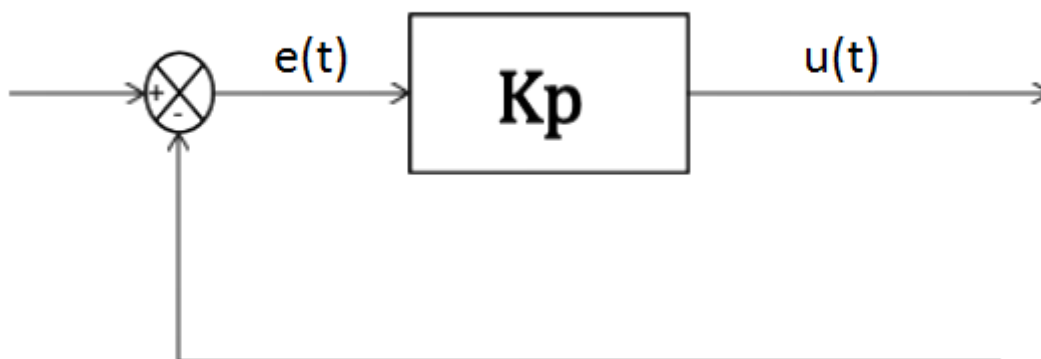


Figura 4.2: Diagrama de blocos do ganho proporcional.

Fonte: Elaboração própria.

O controlador integral não pode ser empregado separado de um proporcional, uma vez que o mesmo não é uma ação de controle quando isolada. A ação integral elimina o desvio característico de um controlador proporcional.

$$u_i(t) = k_i \cdot \int_0^t e(t) dt \quad (4.23)$$

A ação do controlador integral é: diminuição do tempo de subida; aumenta o tempo de acomodação; elimina o erro de regime permanente e aumenta o sobressinal.

Podemos observar a ação do controle integral na figura 4.3.

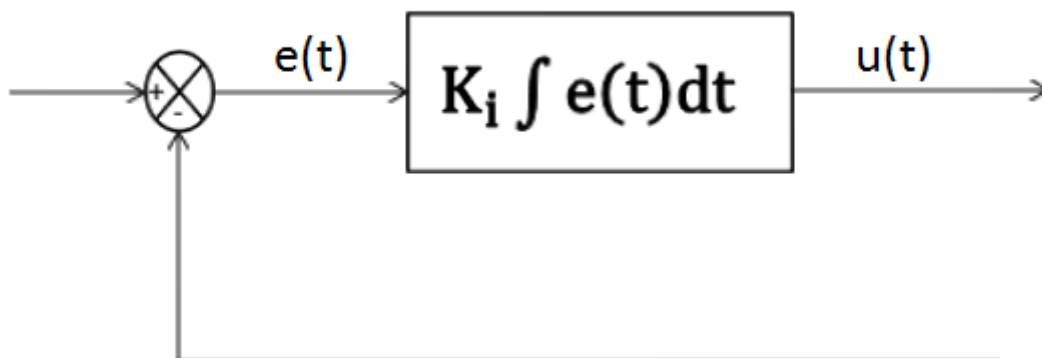


Figura 4.3: Diagrama de blocos do ganho integral.

Fonte: Elaboração própria.

A ação de controle derivativa não pode ser empregada sem a ação proporcional. A saída do controlador é proporcional à taxa de variação do erro.

$$u_d(t) = kd \frac{de(t)}{dt} \quad (4.24)$$

Os efeitos da ação derivativa são: pequena variação no tempo de subida; diminuir o tempo de estabilização; pequena variação do erro de regime estacionário e diminuição do Sobressinal. Podemos observar a ação do controle derivativo na figura 4.4.

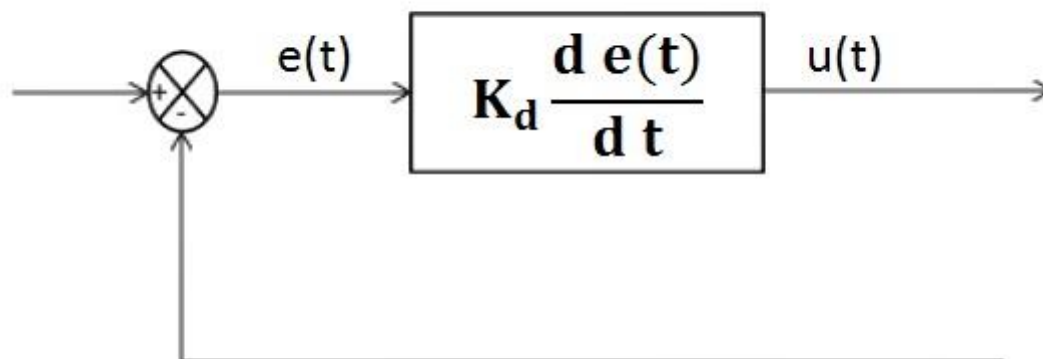


Figura 4.4: Diagrama de blocos do ganho derivativo.

Fonte: Elaboração própria.

A união das três ações de controle básica forma um dos controladores mais utilizados na indústria. Sua equação matemática pode ser expressa por

$$u_k(t) = kpe_k(t) + ki \int_0^t e_k(t)dt + kd \frac{de_k(t)}{dt} \quad (4.25)$$

Na tabela 4.2 mostram-se os efeitos de cada elemento do controlador PID

Tabela 4.2: Resumo das ações do PID

	Tempo de subida	Sobressinal	Tempo de acomodação	Erro em regime permanente
Proporcional	Diminui	Aumenta	Pequenas mudanças	Diminui
Integral	Diminui	Aumenta	Aumenta	Elimina
Derivativo	Pequenas mudanças	Diminui	Diminui	Pequenas mudanças

Fonte: Adaptado do (Ogata, 2007).

4.3.1 Sintonia do PID

Sintonia do controlador PID consiste no ajuste dos ganhos (K_p , K_i , K_d) de maneira que atenda um conjunto de especificações exigidas pelo problema. Daí surge a necessidade de buscar técnicas de sintonia.

Há inúmeros métodos para sintonizar os parâmetros de controladores PID's. A seguir, será detalhado o método de sintonia aplicado para encontrar K_p , K_i e K_d .

4.3.1.1 Método de Ziegler e Nichols

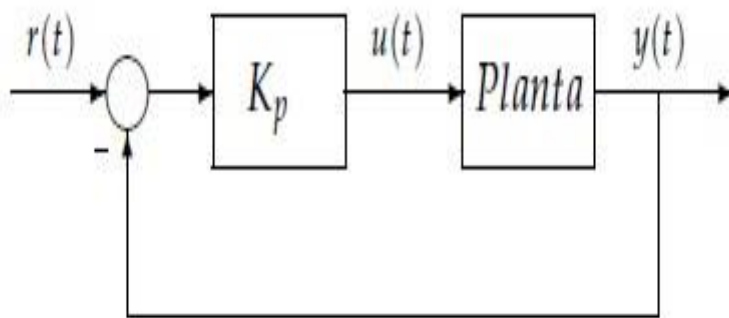


Figura 4.5: Diagrama de bloco do controle proporcional

Fonte: Adaptado do (Ogata, 2011).

Este procedimento segue os seguintes passos:

- Utilizando somente o controlador proporcional, começando com um valor de ganho pequeno, aumentar o ganho até o circuito começar a oscilar. Estas oscilações lineares devem ser vistas na saída do controlador.
- Registrar o ganho crítico do controlador $K_p=K_c$ e o período de oscilação da saída do controlador, P_c .

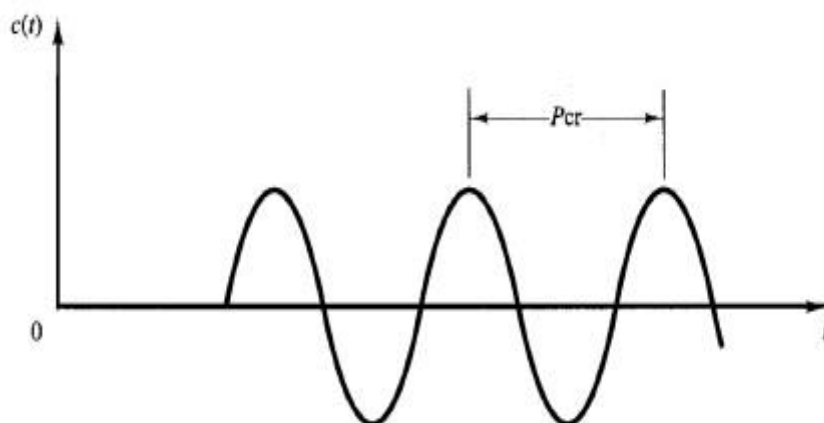


Figura 4.6: Oscilações em um período P_c

Fonte: Ogata (2011).

- Ajustar os parâmetros do controlador segundo a tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros de ajuste.

	K_p	T_i	T_d
P	$0,50K_c$	-	-
PI	$0,45K_c$	$P_c/1,2$	-
PID	$0,60K_c$	$0,5p_c$	$0,12P_c$

Fonte: Adaptada do (Ogata, 2011).

- Encontrar os valores de K_i e K_d pelas relações: $K_i = K_p/T_i$ e $K_d = K_p.T_d$.

4.3.1.2 Critérios de desempenho

O critério de desempenho mais relevante para o ajuste do controle de um processo é a estabilidade do mesmo. Segundo Ogata (2007); Guimarães (2013) e Prado (2009), alguns critérios mais utilizados são:

- Tempo morto: é o tempo suficiente para a resposta alcançar pela primeira vez a metade do valor final.
- Tempo de subida: é o tempo que o sistema leva para ir de 10% a 90% do valor final (ou set-point).
- Percentual ou Sobressinal: é o valor que a variável de processo ultrapassa o valor final e chega ao seu maior valor, é expresso como uma porcentagem. Ele é considerado bom ou satisfatório quando os sinais são menores ou iguais a 20%, segundo Thomasson e Eriksson (2009).

- Tempo de estabilização: tempo necessário para a variável do processo chegue dentro de um patamar de percentagem (normalmente 5%) do valor final.
- Erro de regime permanente: diferença final entre as variáveis de processo e o set point em regime permanente.

Outros critérios com os quais é preciso ter atenção são o regime transitório e o erro regime permanente. Estes critérios podem ser calculados através do acompanhamento da trajetória da variável controlada em relação ao valor de referência.

Podemos visualizar na figura 4.7 e sua tabela 4.4.

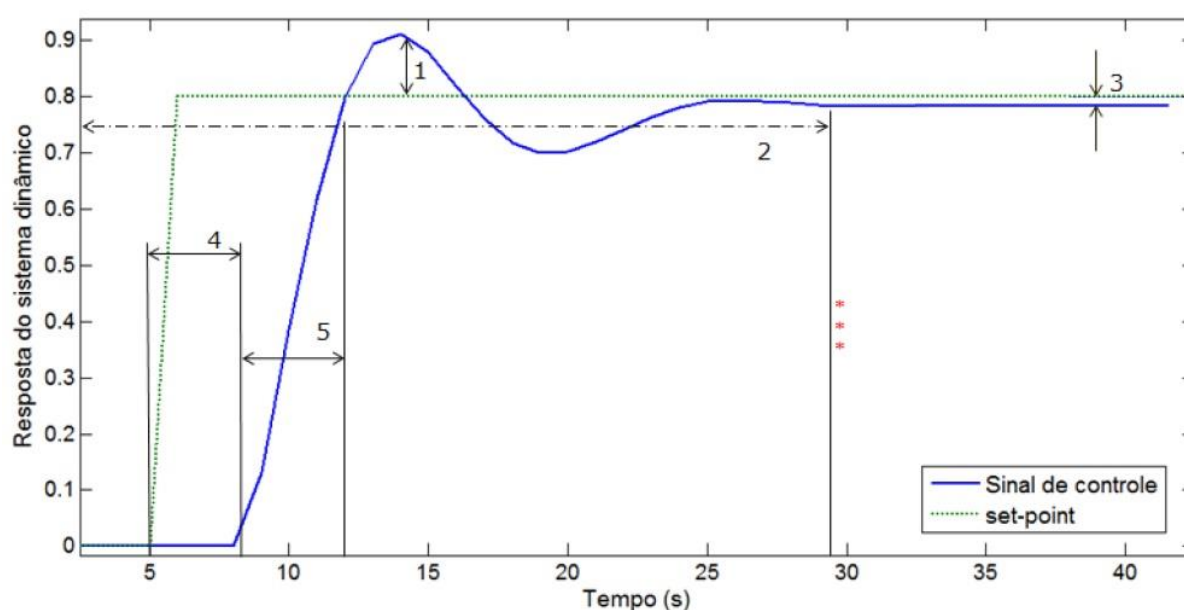


Figura 4.7: Sinal de controle PID em malha fechada

Fonte: Campos e Teixeira (2006)

Tabela 4.4: Legenda da figura 4.7.

Número	Significado
1	Máximo Sobressinal
2	Tempo de estabilização
3	Erro de regime permanente
4	Tempo morto
5	Tempo de subida
<***	Resposta transitória
>***	Regime permanente

Fonte: Campos e Teixeira (2006)

Nem todos os critérios de desempenho listados na tabela 4.4 podem ser contemplados ao mesmo tempo.

4.3.1.3 Controladores PID de orientação

Utilizando o método de Ziegler e Nichols foi possível encontrar os valores de k_p , k_i e k_d para os ângulos de ϕ , θ , ψ e a altitude z . As figuras 4.8, 4.9 e 4.10 apresentam os sistemas desenhados no Simulink para sintonização do PID, onde o gráfico mostra o valor do ganho crítico e o período crítico, os quais foram fundamentais para obter os parâmetros do controlador PID.

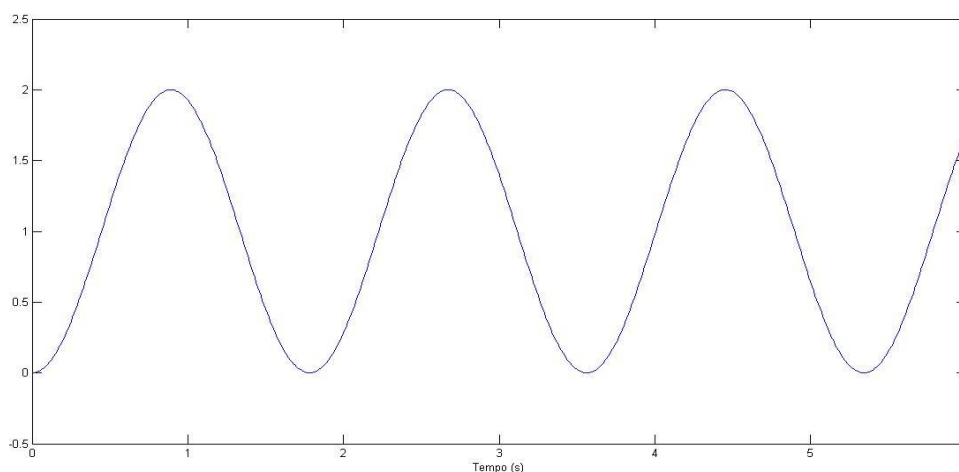


Figura 4.8: Resposta de z .

Fonte: Elaboração própria.

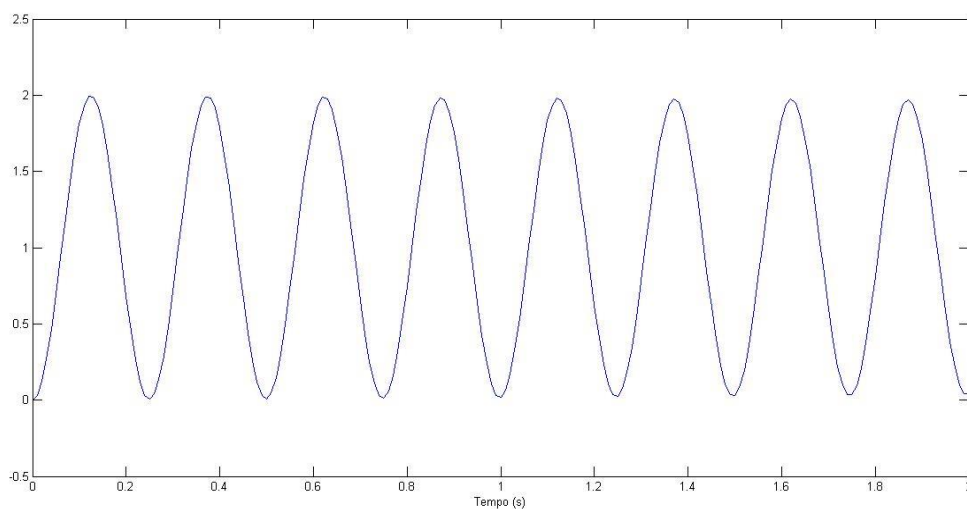


Figura 4.9: Resposta de ϕ e θ .

Fonte: Elaboração própria.

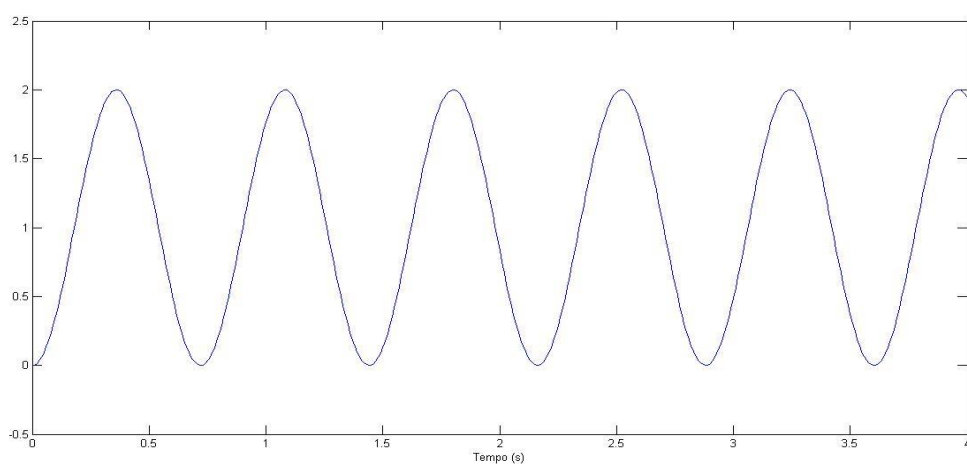


Figura 4.10: Resposta de ψ .

Fonte: Elaboração própria.

Vale ressaltar que eventualmente são realizados ajustes nos ganhos do controlador de modo a obter uma resposta satisfatória do controle do sistema.

5. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Este capítulo descreve os blocos constituintes do controlador PID proposto. Descreve e apresenta os resultados da simulação do modelo em condições ideais. A simulação foi um dos passos mais importantes, pois permitiu validar o modelo obtido.

Para realizar as simulações escolheu-se o software *Matlab*, uma ferramenta computacional de alto nível para o desenvolvimento de algoritmos, análise de dados e inúmeros outros recursos. Utilizou-se também uma ferramenta gráfica do *Matlab* denominada *Simulink*.

5.1 SIMULAÇÕES

A simulação do controle do quadrotor foi implementado no Matlab/Simulink, conforme ilustrado nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3.

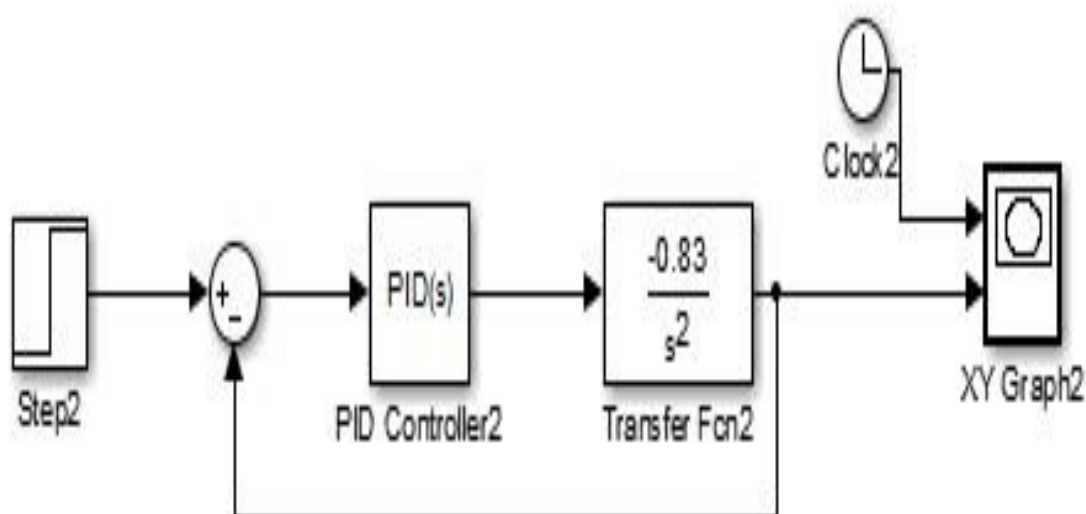


Figura 5.1: Diagrama de blocos do controle PID da altitude (Malha fechada).

Fonte: Elaboração própria.

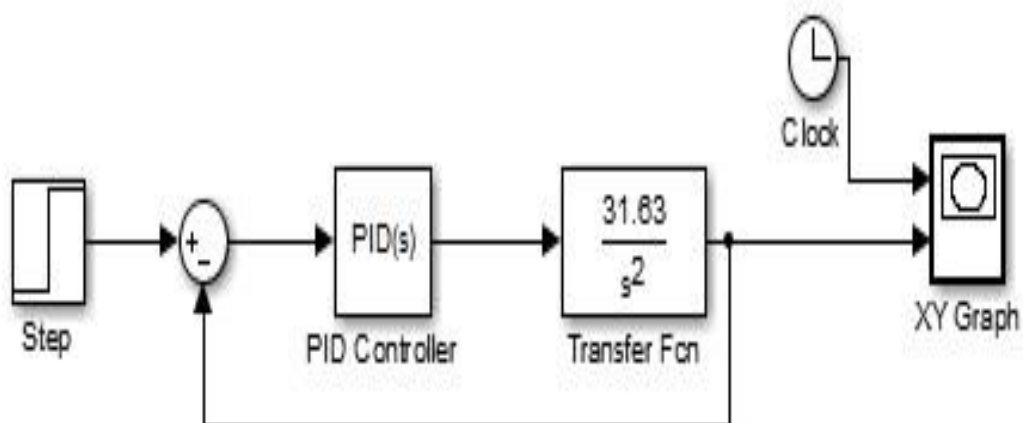


Figura 5.2: Diagrama de blocos do controle PID dos ângulos de ϕ e θ . (Malha fechada).

Fonte: Elaboração própria.

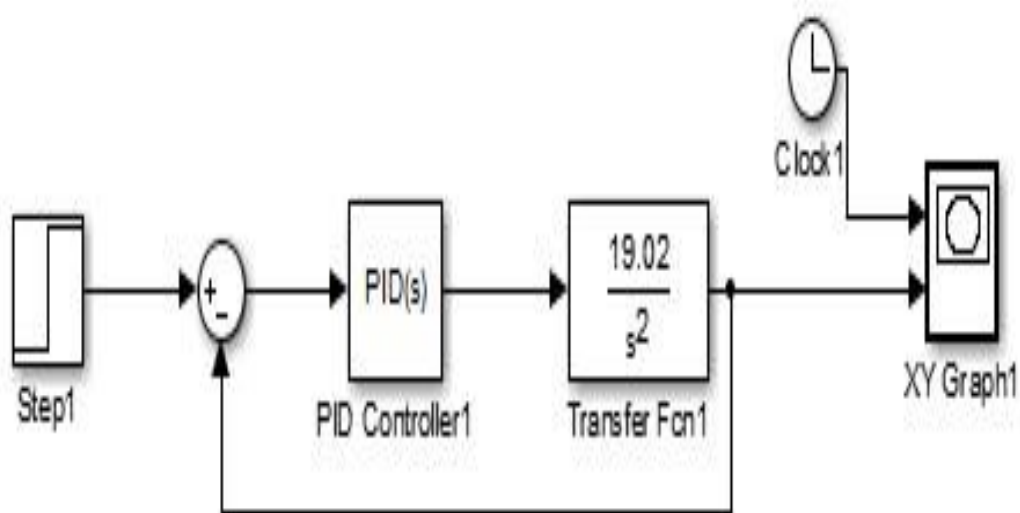


Figura 5.3: Diagrama de blocos do controle PID do ângulo de ψ . (Malha fechada)

Fonte: Elaboração própria.

Os valores dos ganhos utilizados são mostrados na tabela 5.1

Tabela 5.1: Parâmetros de ganho.

Parâmetros	Valores
k_{zp}	-20
k_{zi}	0,75
k_{zd}	-8
$k_{\phi\theta p}$	8
$k_{\phi\theta i}$	0,75
$k_{\phi\theta d}$	0,6
$k_{\psi p}$	6
$k_{\psi i}$	0,75
$k_{\psi d}$	1

Fonte: Elaboração própria.

5.2 RESULTADOS

As simulações para o controlador PID foram realizadas apenas as dinâmicas de atitude e dos ângulos de orientação da aeronave. Os ganhos obtidos para os controladores foram encontrados através de análises da literatura (Regra de Ziegler-Nichols) citados na tabela 5.1.

Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam os resultados obtidos na simulações para os ganhos encontrados.

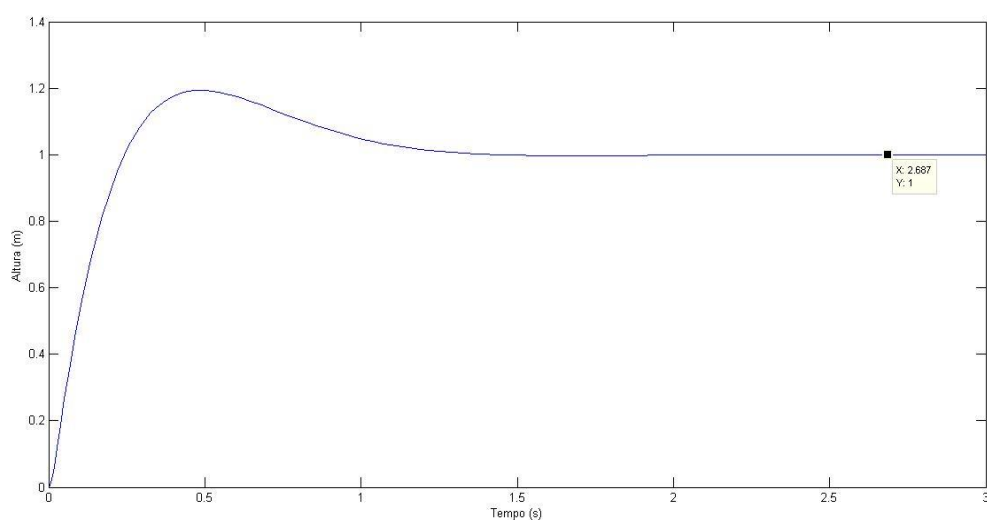


Figura 5.4: Estabilização da altura.

Fonte: Elaboração própria.

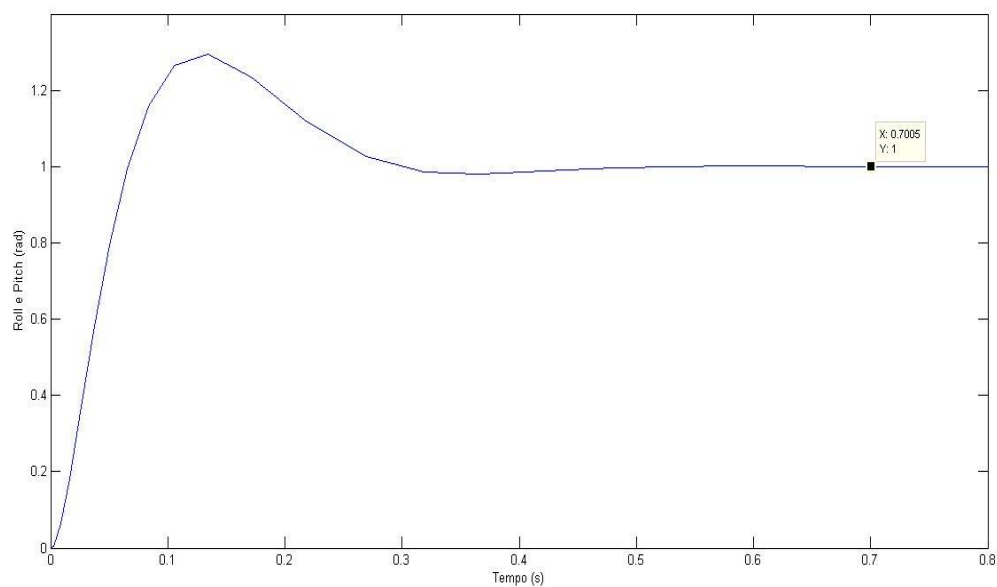


Figura 5.5: Estabilização da rolagem e arfagem.

Fonte: Elaboração própria.

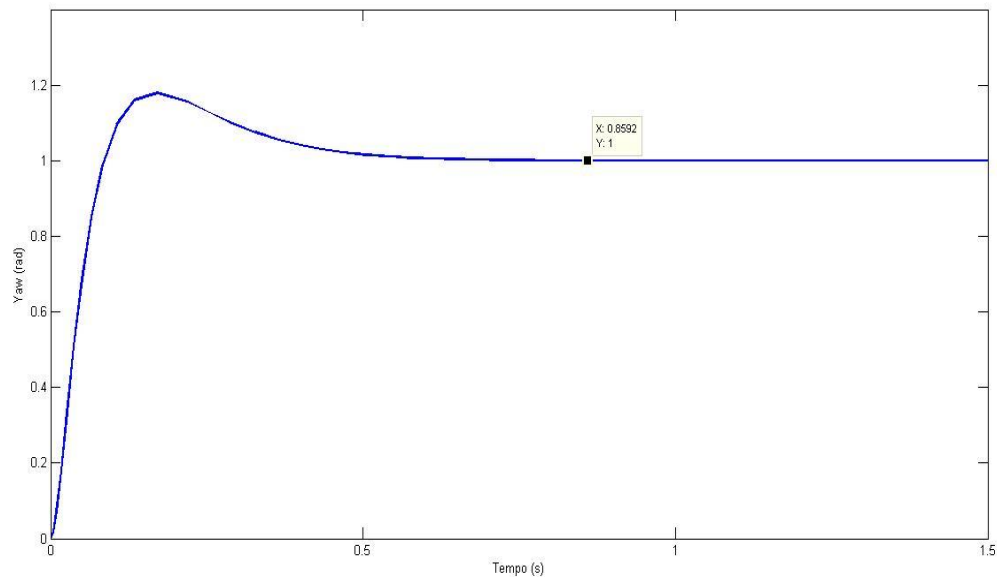


Figura 5.6: Estabilização da guinada.

Fonte: Elaboração própria.

A simulação do controle do quadrotor foi implementada em MATLAB, conforme ilustrado pelo diagrama das figuras 5.1, 5.2 e 5.3. Os valores dos parâmetros utilizados na simulação são mostrados na tabela 4.1. Tais parâmetros foram baseados em Gottsfritz et. al.

(2014). Foi utilizado um controlador PID e os valores de seus ganhos são mostrados na tabela 5.1. Os gráficos das figuras 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam os resultados da simulação do controlador. A simulação mostrou que a modelagem do quadrotor foi satisfatória, uma vez que, o controlador PID funcionou bem como um tempo de estabilização satisfatório e um sobressinal bom.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O principal objetivo deste trabalho foi realizar a modelagem matemática da dinâmica do quadrotor. O modelo dinâmico foi determinado satisfatoriamente mediante o formalismo de Euler-Lagrange, que permite a determinação do movimento do sistema físico de um corpo. As equações a partir deste método apresentaram uma não linearidade, porém foi possível linearizar o modelo ao redor de um ponto de equilíbrio. Isso tornou o problema mais simplificado.

O problema de controle proposto foi estabilizar os ângulos de ϕ , θ e ψ e sua altura z . Ao ter as equações linearizadas, foi proposto um controlador PID. A simulação realizada no *Simulink* apresentou resultados satisfatórios para conseguir manter o voo estacionário. Apresentou um sobressinal aproximado de 23% para os ângulos de ϕ e θ , de 20% para o ângulo de ψ e de 19% para a altura z . Tendo tempo de estabilização de 2,6 s para a altura, 0,7 s para arfagem e rolagem e 0,8 para guinada. Outros resultados retirados de outros trabalhos podem ser visto na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Resultados de estabilização.

Autor	Tempo de estabilização				Sobressinal
	Ângulo ϕ	Ângulo θ	Ângulo ψ	Altura z	
Oliveira (2015)	1,6 s	1,6 s	1,5 s	-	68%
Sá (2012)	2,5 s	1,5 s	3s	6,25 s	38%
Bouabdallah (2007)	2 s	1,4 s	2,3 s	-	60%
Brandão (2013)	3 s	3 s	4 s	2,5 s	25 %

Fonte: Elaboração própria.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Baseado nos resultados obtidos com esse trabalho, pode-se sugerir alguns ajustes para trabalhos futuros, tais como:

- Identificar a dinâmica do conjunto motor-hélice, fazendo com que os dados das simulações gerem resultados mais próximos dos dados reais.
- Estudar outros tipos de controladores podem para melhorar o desempenho de controle.

- Desenvolver mais o método de controle utilizado, podendo complementando-o com uma rede neural de modo a adicionar uma inteligência ao sistema.
- Implementar o controlador diretamente em uma plataforma real para validar seu desempenho.

REFERÊNCIAS

AMIR, Y.; ABBASS, V. Modeling of Quadrotor Helicopter Dynamics. IEEE International Conference on Smart Manufacturing Application, Coreia do Sul, p.100-105, 09-11 April 2008.

AHMED, B.; POTA, H. R. & GARRATT M. Flight control of a rotary wing uav using backstepping, em ‘International Journal of Robust and Nonlinear Control’, p. 639 –658, 2010.

BRANDÃO, A. S. Projeto de controladores não lineares para voo autônomo de veículos aéreos de pás rotativas. 234 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica), Universidade Federal do Espírito Santo, 2013.

BOUHALI, O. & H. BOUDJEDIR, Neural network control with neuro-sliding mode observer applied to quadrotor helicopter, em ‘Innovations in Intelligent Systems and Applications (INISTA)’, p. 24 –28, 2011.

BOUABDALLAH, S.; MURRIERI, P.; SIEGWART, R. Design and Control of an Indoor Micro Quadrotor. IEEE International Conference on Robotics and Automation, New Orleans, p. 4393 – 4398, 2004.

BOUABDALLAH, S.; NOTH, A.; SIEGWART, R. Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor. IEEE. Intelligent Robots and Systems, Proceedings IEEE/RSJ International Conference on, v. 3, p. 2451-2456, 2004.

BOUABDALLAH, S. Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying. 155 f. Tese (Doutorado em Ciências) - EPFL, Lausanne, 2007.

CAMPESTRINI, L. Sintonia de controladores PID descentralizados baseada no método do ponto crítico. 98 f. Tese (Mestrado em Engenharia Elétrica). Porto Alegre – RS, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.

CAMPOS, M. C. M. M. & TEIXEIRA, H. C. G. Controles típicos de equipamentos e processos industriais. 1ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, p.415, 2006.

CASTILLO, P.; LOZANO, R. & DZUL, A. Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors. IEEE Control Systems Magazine, v. 25, n. 6, p. 45-55, 2005.

CASTILLO, P.; LOZANO, R. & DZUL, E. Modelling and control of mini-flying machines. Springer, 2006.

DIAO, C.; XIAN, B.; YIN, Q.; ZENG, W.; LI, H. & YANG, Y. A nonlinear adaptive control approach for quadrotor uavs, '8th Asian Control Conference (ASCC)', p. 223– 228, 2011.

DUNFIED, J.; M. TARBOUCHI & G. LABONTE . Neural network based control of a four rotor helicopter, em 'Industrial Technology, IEEE ICIT '04. IEEE International Conference on', Vol. 3, pp. 1543 – 1548 ,2004.

GUIMARÃES, A. O. Algoritmo genético aplicado no controle de posição do rotor de um motor de corrente contínua com rejeição a distúrbios por ação feedforward. , 75f. Tese (Mestrado em Sistemas de Comunicação e Automação). Natal– RN, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2013.

HEHN, M. & D'ANDREA, R,. A Flying Inverted Pendulum. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2011.

JASIM, W. & GU, D. H_∞ Control for Quadrotor Attitude Stabilization. IEEE Ukacc International Conference on control, Loughborough. *Proceedings ...IEEE*, p. 19-24, 2014.

KIM, S. K. AND TILBURY, D. M. Mathematical modeling and experimental identification of a model helicopter, Proceedings of the AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit, Boston, MA, USA, p. 203–213, 1998.

LEE, D.; KIM, H. J. & SASTRY, S. Feedback Linearization vs. Adaptive Sliding Mode Control for a Quadrotor Helicopter. International Journal of Control, Automation, and Systems , Springer, Vol. 7, pp 419-428, 2011.

LY, D. M. & CHEOLKEUN, H. Modeling and Control of Quadrotor MAV Using Vision-based Measurement. IEEE International Forum on Strategic Technology (ifost), Ulsan. *Proceedings ... IEEE*, p. 1-6, 2010.

LEISHMAN, J. G. (2002), The bréget-richet quad-rotor helicopter of 1907, Página na internet. Disponível em <http://aero.umd.edu/~leishman/Aero/Breguet.pdf>

LOPES, R.V.; SANTANA, P.H.R.Q.A. ; BORGES, G.A. & ISHIHARA J.Y. Model Predictive Control applied to tracking and attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft. 21st International Congress of Mechanical Engineering. (Submitted), 2011.

MOHAMED, H., YANG, S., AND MOGHAVVEMI, M. (2009). Sliding mode controller design for a flying quadrotor with simplified action planner. IEEE Iccas-sice, p 1279 – 1283, 2009.

MOURA, M. Modelagem matemática de um quadrotor do tipo Xquad usando o método de Euler-Newton, 63f. Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) Mossoró-RN, Universidade Federal Rural do Sêmi-Árido, 2014.

MUÑOZ ,M. H. P. Modelagem matemática e controle de um quadrimotor. 104 f. Dissertação de Mestrado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília-DF, 2012.

MADANI, T.; BENALLEGUE, A. Backstepping control for a quadrotor helicopter. In: IEEE. Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on. p. 3255-3260, 2006.

MADANI, T.; BENALLEGUE, A. Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique. In: IEEE. Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on, p. 1515-1520, 2006.

MISTLER, V.; BENALLEGUE, A.; M'SIRDI, N. Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback. IEEE. Robot and Human Interactive Communication. Proceedings. 10th IEEE International Workshop on, p. 586-593, 2001.

OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno, Addison Wesley, 2007.

OGATA, K. Engenharia de controle moderno. [S.l.]: PEARSON EDUCATION DO BRASIL, 2011.

OLIVEIRA, S. F. C. Análise comparativa entre o controlador PID-Fuzzy e o PID convencional aplicados à estabilidade da atitude de um quadrimotor. 78f. Dissertação (Mestrado Sistemas de Controle e Automação) Mossoró/RN, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2015.

PRADO, T. A. Implementação de um controlador PID embarcado para o controle em malha fechada de um estimulador neuromuscular funcional. 77 f. Tese (Mestrado em Engenharia Elétrica, área Automação). Ilha Solteira – SP, UNESP, 2009.

PAULA, J. C. Desenvolvimento de um VANT do tipo Quadrirrotor para obtenção de imagens aéreas em alta definição. 84 f. Tese (Mestrado em Engenharia Elétrica, área Automação). UFPR, 2012.

PETRUSEVSKI, I.; RAKIC, A. Simple Fuzzy Solution for Quadrotor Attitude Control. IEEE Symposium on Neural Network Applications in Eletrical Engineering (neurel), 12, 2014, Belgrado. *Proceedings* ... p. 93-98, 2014.

PFEIFER, E. Projeto e controle de um UAV quadrirotor. 115f. Dissertação (Engenharia de sistemas). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2013.

POUNDS, P.; MAHONY, R.; HYNES, P. AND ROBERTS, J., *Design of a four rotor aerial robot*, Proceedings of the Australasian Conference on Robotics and Automation, Auckland, Australia, 2002.

RAFFO, G. Modelado y Control de un Helicóptero Quad-Rotor. Master's thesis, 2007.

RAFFO, G., ORTEGA, M., AND RUBIO, F. An integral predictive/nonlinear H1 control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica*, p.29 – 39, 2010.

ROMERO, et al. Discrete Optimal Control for a Quadrotor UAV: experimental approach. IEEE International Conference on Unmanned Aircraft Systems (icuas), Orlando. *Proceedings* ... IEEE, p. 1138-1145, 2014.

RITZ, R., HEHN, M., LUPASHIN, S. AND D'ANDREA, R. Quadrocopter Performance Benchmarking Using Optimal Control. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2011.

ROCHA, Fabiano L. Identificação de sistemas não lineares multivariáveis usando redes neurais perceptron multicamadas e função de base radial. Dissertação de Mestrado. Curitiba: PUC/PR, 2006.

SCHREIER, M. Modeling and Adaptive Control of a Quadrotor. IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (icma), Chengdu. *Proceedings* ... IEEE, 2012. p. 383-390, 2012.

SÁ, R. C. Construção, modelagem dinâmica e controle PID para estabilidade de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadrirotor. 67f. Dissertação (Mestrado Engenharia de Teleinformática) Fortaleza/CE, Universidade Federal do Ceará, 2012.

SOUSA, J. D. A., Simulação e desenvolvimento de um veículo aéreo autónomo de quatro rotores.150 f. Dissertação (Mestrado em Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores Major Automação) - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto, Portugal,2011.

SANTOS, M.; LÓPEZ, V.; MORATA, F. Intelligent Fuzzy Controller of a Quadrotor.IEEE International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (iske), Hangzhou. *Proceedings ... IEEE*, 2010. p. 141-146, 2010.

SANTANA, P.H.R.Q.A. & BORGES, G.A. Modelagem e Controle de Quadrirrotores. IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, SBAI, 2009.

THOMASSON, A., ERIKSSON, L. Model-Based Throttle Control using Static Compensators and IMC based PID-Design. *IFAC Workshop on Engine and Powertrain Control, Simulation and Modeling*. Paris – France. 7p, 2009.

XU, R. Y U. OZGUNER, «Sliding Mode Control of a Quadrotor Helicopter, em *Decision and Control,45th IEEE Conference on*, IEEE, págs. 4957–4962, Diciembre 2006.

WIEREMA, M. B. SC. Design, implementation and flight test of indoor navigation and control system for a quadrotor UAV, Dissertação de mestrado, Delft University of Technology, Holanda, 2008.

ZAIRI, S.; HAZRY, D. Adaptive neural controller implementation in autonomous mini aircraft quadrotor (amac-q) for attitude control stabilization. IEEE. Signal Processing and its Applications (CSPA), 2011 IEEE 7th International Colloquium.. p. 84-89, 2011.

ÂPENDICE I

w_n é a matriz de transformação linear (ângulos de Euler) entre o corpo do veículo e o sistema de referência inercial escrito como:

$$w_n = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_\phi \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_\phi R_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Essa relação entre a derivada dos ângulos ϕ, θ e ψ e o vetor $[p \ q \ r]^t$.

$$R_\psi = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_\theta = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \text{ e } R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix}$$

Onde

$$R_\phi \cdot R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s\theta \\ s\phi s\theta & c\phi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

Assim

$$w_n = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s\theta \\ s\phi s\theta & c\phi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$w_n = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} c\phi \\ -\dot{\theta} s\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\psi} s\theta \\ \dot{\psi} s\phi c\theta \\ \dot{\psi} c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

$$w_n = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} s\theta \\ \dot{\theta} c\phi + \dot{\psi} s\phi c\theta \\ -\dot{\theta} s\phi + \dot{\psi} c\phi c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

ÂPENDICE II

Vamos definir o seguinte com o auxilio da matriz Jacobiana

$$J(n) = w_n^t I w_n$$

$$J(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

$$J(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

$$J(n) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & c\phi I_{yy} & -s\theta I_{zz} \\ -s\theta I_{xx} & s\phi c\theta I_{yy} & c\phi c\theta I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

$$J(n) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xx}s\theta \\ 0 & c^2\phi I_{yy} + s^2\phi I_{zz} & c\phi s\phi c\theta I_{yy} - c\phi s\phi c\theta I_{zz} \\ -s\theta I_{xx} & c\phi s\phi c\theta I_{yy} - c\phi s\phi c\theta I_{zz} & s^2\theta I_{xx} + s^2\phi c\theta I_{yy} + c^2\phi c^2\theta I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$J(n) = w_n^t I w_n = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -s\theta I_{xx} \\ 0 & c^2\phi I_{yy} + s^2\phi I_{zz} & c\phi s\phi c\theta (I_{yy} - I_{zz}) \\ -s\theta I_{xx} & c\phi s\phi c\theta (I_{yy} - I_{zz}) & s^2\theta I_{xx} + c^2\theta (s^2\phi I_{yy} + c^2\phi I_{zz}) \end{bmatrix}$$

ÂPENDICE III

$$C(n, \dot{n}) = J - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} (\dot{n}^t J(n))$$

$$\begin{aligned} \dot{n}^t J &= [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}] \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -s\theta I_{xx} \\ 0 & c^2 I_{yy} + \phi I_{zz} & c\phi s\theta (I_{yy} - I_{zz}) \\ -s\theta I_{xx} & c\phi s\theta c\theta (I_{yy} - I_{zz}) & s^2 \theta I_{xx} + c^2 \theta (s^2 \phi I_{yy} + c^2 \phi I_{zz}) \end{bmatrix} \\ &= [\dot{\phi} I_{xx} - \dot{\psi} s\theta I_{xx} \dot{\theta} (c^2 \phi I_{yy} + s^2 \phi I_{zz}) + \dot{\psi} c\phi s\theta c\theta (I_{yy} - I_{zz}) - \dot{\phi} s\theta I_{xx} + \dot{\theta} c\phi s\theta c\theta (I_{yy} - I_{zz}) + \dot{\psi} (s^2 \theta I_{xx} + c^2 \theta (s^2 \phi I_{yy} + c^2 \phi I_{zz}))] \end{aligned}$$

Temos as funções coordenadas do vetor $\dot{n}^t J$ dadas por

$$\begin{cases} f_1 = \dot{\phi} I_{xx} - \dot{\psi} s\theta I_{xx} \\ f_2 = \dot{\theta} c^2 I_{yy} + \dot{\theta} s^2 \phi I_{zz} + \dot{\psi} c\phi s\theta c\theta I_{yy} - \dot{\psi} c\phi s\theta c\theta I_{zz} \\ f_3 = -\dot{\phi} s\theta I_{xx} + \dot{\theta} c\phi s\theta c\theta I_{yy} - \dot{\theta} c\phi s\theta c\theta I_{zz} + \dot{\psi} s^2 \theta I_{xx} + \dot{\psi} c^2 \theta s^2 \phi I_{yy} + \dot{\psi} c^2 \theta c^2 \phi I_{zz} \end{cases}$$

Temos que

$$\frac{\partial}{\partial n} (\dot{n}^t j) = \begin{bmatrix} f_1 \phi & f_1 \theta & f_1 \psi \\ f_2 \phi & f_2 \theta & f_2 \psi \\ f_3 \phi & f_3 \theta & f_3 \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \phi & f_1 \theta & 0 \\ f_2 \phi & f_2 \theta & 0 \\ f_3 \phi & f_3 \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Pois f_1 , f_2 e f_3 não dependem de ψ . Logo,

$$\begin{aligned} C(n, \dot{n}) &= \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -s\theta I_{xx} \\ 0 & c^2 \phi I_{yy} + s^2 \phi I_{zz} & c\phi s\theta c\theta (I_{yy} - I_{zz}) \\ -s\theta I_{xx} & c\phi s\theta c\theta (I_{yy} - I_{zz}) & s^2 \theta I_{xx} + c^2 \theta (s^2 \phi I_{yy} + c^2 \phi I_{zz}) \end{bmatrix} - \\ &\frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_1 \phi & f_1 \theta & 0 \\ f_2 \phi & f_2 \theta & 0 \\ f_3 \phi & f_3 \theta & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx} - \frac{1}{2} f_1 \phi & -\frac{1}{2} f_1 \theta & -s\theta I_{xx} \\ -\frac{1}{2} f_2 \phi & c^2 \phi I_{yy} + s^2 \phi I_{zz} - \frac{1}{2} f_2 \theta & c\phi s\theta c\theta (I_{yy} - I_{zz}) \\ -s\theta I_{xx} - \frac{1}{2} f_3 \phi & c\phi s\theta c\theta (I_{yy} - I_{zz}) - \frac{1}{2} f_3 \theta & s^2 \theta I_{xx} + c^2 \theta (s^2 \phi I_{yy} + c^2 \phi I_{zz}) \end{bmatrix}$$

$$f_1 \phi = 0$$

$$f_1 \theta = -\dot{\psi} c\theta I_{xx}$$

$$\begin{aligned} f_2 \phi &= -\dot{\theta} 2c\phi s\theta I_{yy} + \dot{\theta} 2s\phi c\theta I_{zz} - \dot{\psi} s^2 \phi c\theta I_{yy} + \dot{\psi} c^2 \phi c\theta I_{yy} + \dot{\psi} s^2 \phi c\theta I_{zz} - \dot{\psi} c^2 \phi c\theta I_{zz} \\ &= -\dot{\theta} s(2\phi) I_{yy} + \dot{\theta} s(2\phi) I_{zz} + \dot{\psi} c\theta I_{yy} (c^2 \phi - s^2 \phi) - \dot{\psi} c\theta I_{zz} (c^2 \phi - s^2 \phi) \\ &= -\dot{\theta} s(2\phi) (I_{yy} - I_{zz}) + \dot{\psi} c\theta c(2\phi) (I_{yy} - I_{zz}) \\ &= (-\dot{\theta} s(2\phi)) + (\dot{\psi} c\theta c(2\phi)) (I_{yy} - I_{zz}) \end{aligned}$$

$$f_2\theta = -\dot{\psi}c\phi s\phi s\theta I_{yy} + \dot{\psi}c\phi s\phi s\theta I_{zz} \\ = (\dot{\psi}c\phi s\phi s\theta)(I_{zz} - I_{yy})$$

$$f_3\phi = -\dot{\theta}s^2\phi c\theta I_{yy} + \dot{\theta}c^2\phi c\theta I_{yy} + \dot{\theta}s^2\phi c\theta I_{zz} - \dot{\theta}c^2\phi c\theta I_{zz} + \dot{\psi}c^2\theta s\phi c\phi I_{yy} - \\ \dot{\psi}c^2\theta s\phi c\phi I_{zz} \\ = \dot{\theta}c\theta I_{yy}(c^2\phi - s^2\phi) - \dot{\theta}c\theta I_{zz}(c^2\phi - s^2\phi) + \dot{\psi}c^2\theta s(2\phi)I_{yy} - \dot{\psi}c^2\theta s(2\phi)I_{zz} \\ = \dot{\theta}c\theta c(2\phi)I_{yy} - \dot{\theta}c\theta c(2\phi)I_{zz} + \dot{\psi}c^2\theta s(2\phi)(I_{yy} - I_{zz}) \\ = \dot{\theta}c\theta c(2\phi)(I_{yy} - I_{zz}) + \dot{\psi}c^2\theta s(2\phi)(I_{yy} - I_{zz}) \\ = (\dot{\theta}c\theta c(2\phi) + \dot{\psi}c^2\theta s(2\phi))(I_{yy} - I_{zz})$$

$$f_3\theta = -\dot{\phi}c\theta I_{xx} - \dot{\theta}c\phi s\phi s\theta I_{yy} + \dot{\theta}c\phi s\phi s\theta I_{zz} + \dot{\psi}2s\theta c I_{xx} + \dot{\psi}2c\theta(-s\theta)s^2\phi I_{yy} + \\ \dot{\psi}2c\theta(-s\theta)c^2\phi I_{zz} \\ = -\dot{\phi}c\theta I_{xx} - \dot{\theta}c\phi s\phi s\theta(I_{yy} - I_{zz}) + \dot{\psi}s(2\theta)I_{xx} - \dot{\psi}s(2\theta)s^2\phi I_{yy} - \dot{\psi}s(2\theta)c^2\phi I_{zz} \\ = -\dot{\phi}c\theta I_{xx} - \dot{\theta}c\phi s\phi s\theta(I_{yy} - I_{zz}) + \dot{\psi}s(2\theta)I_{xx} - \dot{\psi}s(2\theta)(s^2\phi I_{yy} + c^2\phi I_{zz}) \\ = -\dot{\phi}c\theta I_{xx} - \dot{\theta}c\phi s\phi s\theta(I_{yy} - I_{zz}) + \dot{\psi}s(2\theta)(I_{xx} - s^2\phi I_{yy} - c^2\phi I_{zz})$$

Temos

$$C(n, \dot{n}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Com

$$c_{11} = I_{xx} \\ c_{12} = \frac{1}{2}\dot{\psi}c\theta I_{xx} \\ c_{13} = -s\theta I_{xx} \\ c_{21} = -\frac{1}{2}\left(-\dot{\theta}s(2\phi) + \dot{\psi}c\theta c(2\phi)\right)(I_{yy} - I_{zz}) \\ c_{22} = c^2\phi I_{yy} + s^2\phi I_{zz} - \frac{1}{2}\dot{\psi}c\phi s\phi s\theta(I_{zz} - I_{yy}) \\ c_{23} = c\phi s\phi c\theta(I_{yy} - I_{zz}) \\ c_{31} = -s\theta I_{xx} - \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}c\theta c(2\phi) + \dot{\psi}c^2\theta s(2\phi)\right)(I_{yy} - I_{zz}) \\ c_{32} = c\phi s\phi c\theta(I_{yy} - I_{zz}) - \frac{1}{2}(-\dot{\phi}c\theta I_{xx} - \dot{\theta}c\phi s\phi s\theta(I_{yy} - I_{zz}) + \dot{\psi}s(2\theta)(I_{xx} - s^2\phi I_{yy} - \\ c^2\phi I_{zz})) \\ c_{33} = s^2\theta I_{xx} + c^2\theta(s^2\phi I_{yy} + c^2\phi I_{zz})$$