

FUNÇÕES INTEGRÁVEIS SEGUNDO RIEMANN E O TEOREMA DE LEBESGUE

João Daniel da Costa Vieira¹, Alexsandro Belém da Silva²

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma demonstração completa do Teorema de Lebesgue, o qual caracteriza funções integráveis em subconjuntos da reta como aquelas cujos pontos de descontinuidades são “pequenos”. Conhecimentos sobre funções reais e suas propriedades mais elementares, assim como noções sobre a topologia de $\mathbb{R}$, são essenciais para o entendimento do texto. O objetivo do trabalho é construir a integral de Riemann, expondo de forma didática e concisa a demonstração dos resultados e apresentar aplicações.

Palavras-chave: Teorema de Lebesgue; funções integráveis; conjuntos de medida nula.

1. INTRODUÇÃO

Arquimedes (287-212 A.C.) contribuiu com o cálculo de áreas e volumes de figuras geométricas complicadas usando figuras mais simples, essa ideia foi convencionada de *Cálculo Infinitesimal*. Esse método de calcular áreas só teve sua devida formalização nos últimos séculos com Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), estes são considerados os criadores do *Cálculo Diferencial*. Newton e Leibniz aperfeiçoaram o método de Arquimedes, lançando as bases do *Cálculo Integral*. Entretanto, eles deixaram vários pontos de seu trabalho duvidosos. Posteriormente, com os trabalhos de Cauchy (1789-1857) e Riemann (1826-1866) o conceito de *integral* foi estabelecido em bases rigorosas.

A grosso modo, as ideias de Arquimedes baseavam-se primordialmente em considerar um conjunto A determinado por uma função, a qual podemos supor não-negativa sem perda de generalidade, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada no intervalo $[a, b]$, de modo que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, e calcular a área desse conjunto. Primeiramente, é preciso entender o significado de área, para em seguida tentar calculá-la. Depois de esclarecidos esses conceitos via, o que se conhece hoje, como *somas inferiores* e *somas superiores* (veja seção 2.1 abaixo) vê-se então que para considerar a área do conjunto A basta tomar *polígonos retangulares* cujas bases inferiores estão sobre o eixo das abscissas e cujas bases superiores tocam o gráfico da função.

Mesmo após uma série de melhorias na integral, o conceito proposto por Riemann apresentava ainda certas deficiências as quais impediam a solução de uma gama de problemas, como, por exemplo, no caso das funções que fossem descontínuas em algum ponto do seu domínio. Se fazia necessário, então, uma nova abordagem, ou mesmo uma generalização, de tal noção a fim de preencher as lacunas anteriores.

Henri L. Lebesgue (1875-1941), matemático francês, em 1902, publicou sua famosa tese de doutoramento, intitulada: *Intégrale, longueur, Aire*, (Integral, Comprimento, Área), que generalizava os conceitos de Riemann e eliminava as deficiências existentes na sua integral. O conceito de integral originalmente proposto por Lebesgue baseia-se na noção de *medida de conjuntos* (abordada aqui na seção 2.4). Na melhor das hipóteses, as ideias de Lebesgue foram aceitas com desconfiança. Todavia, a originalidade de suas ideias encontrou crescente reconhecimento, vindo a completar definitivamente os hiatos inerentes à integral de Riemann.

Os pré-requisitos para essa leitura são Álgebra Linear e um primeiro curso de Cálculo a nível de [2]. Tentaremos abordar o texto de forma mais simples possível dando as devidas justificativas aos resultados apresentados, além de exemplos de teoria, ou então as devidas referências para esclarecer ou melhorar os conceitos apresentados.

2. DESENVOLVIMENTO

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *limitado superiormente* quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Nesse caso, diz-se que b é uma *cota superior* de X . Analogamente, diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é

¹Autor - UFERSA

²Orientador - UFERSA

limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a chama-se então uma *cota inferior* de X . Se X é limitado superiormente e inferiormente, diz-se que X é um *conjunto limitado*. Isto significa que X está contido em algum intervalo limitado $[a, b]$ ou, equivalentemente, que existe $k > 0$ tal que

$$|x| \leq K, \quad \forall x \in X.$$

Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *limitada* se sua imagem $f(X)$ é um conjunto limitado. A função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *localmente limitada* no ponto $x \in X$ quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $f|(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ é limitada.

As funções $\cos$ e $\sin$ são dois exemplos de funções limitadas, já que $|f(x)| \leq 1$, tanto para $f(x) = \cos x$ como para $f(x) = \sin x$. No caso de outras funções como as polinomiais, é necessário determinar um intervalo $[a, b]$ para que possam se tornar localmente limitadas.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o *supremo* do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X . Mais explicitamente, b é supremo de X , quando cumpre as duas condições:

- (i) Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;
- (ii) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.

A condição (ii) pode admitir a seguinte reformulação: se $c < b$, então existe $x \in X$ com $c < x$.

Escreveremos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X .

Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente e não-vazio, um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se o *ínfimo* do conjunto X , e escreve-se $a = \inf X$, quando é a maior das cotas inferiores de X . Isto equivale às duas condições:

- (i) Para todo $x \in X$, tem-se $a \leq x$;
- (ii) Se $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$.

Essa condição (ii) também pode ser assim reformulada: se $a < c$, então existe $x \in X$ com $x < c$.

O exemplo a seguir, por sua importância, será apresentado como um teorema.

Teorema 1 *O ínfimo do conjunto $X = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$ é igual a 0.*

Prova: 0 é evidentemente uma cota inferior de X . Basta então provar que nenhum $c > 0$ é cota inferior de X . Dado $c > 0$, existe um número natural $n > \frac{1}{c}$ (pois $\mathbb{N}$ é não-limitado superiormente) donde $\frac{1}{n} < c$. ■

Na verdade, é possível provar que esse resultado equivale a dizer que o conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dos números naturais não é limitado superiormente. Essas condições significam que $\mathbb{R}$ é um corpo *arquimediano*.

Algumas das propriedades elementares do supremo e do ínfimo de um subconjunto limitado da reta serão apresentadas no texto, para facilitar a sua aplicabilidade. No entanto, por questões de espaço, poderemos assumir outras. Mais detalhes encontram-se, por exemplo, em [4].

2.1 Somas inferiores e somas superiores

Consideramos aqui funções reais $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas num intervalo compacto $[a, b]$ (veja o início da seção 2.3 para a definição formal de conjunto compacto) e limitadas nesse intervalo.

Uma *partição* P de um intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [a, b]$ onde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Uma partição P de $[a, b]$ divide o intervalo em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$, indicaremos por m_i o ínfimo e por M_i o supremo dos valores de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Usaremos ainda as notações:

$$m = \inf \{f(x); x \in [a, b]\},$$

$$M = \sup \{f(x); x \in [a, b]\}.$$

A *oscilação* de f no conjunto $X \subset [a, b]$ é definida por $\omega(f; X) = \sup f(X) - \inf f(X)$. Analogamente, dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma partição P de $[a, b]$, indicaremos por $\omega_i = M_i - m_i$ a oscilação de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, onde M_i, m_i são respectivamente o sup e o inf de f em $[t_{i-1}, t_i]$.

A *soma inferior* $s(f; P)$ de f relativa à partição P é o número

$$s(f; P) = m_1(t_1 - t_0) + \dots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}).$$

A soma superior $S(f; P)$ de f relativa à partição P é o número

$$S(f; P) = M_1(t_1 - t_0) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}).$$

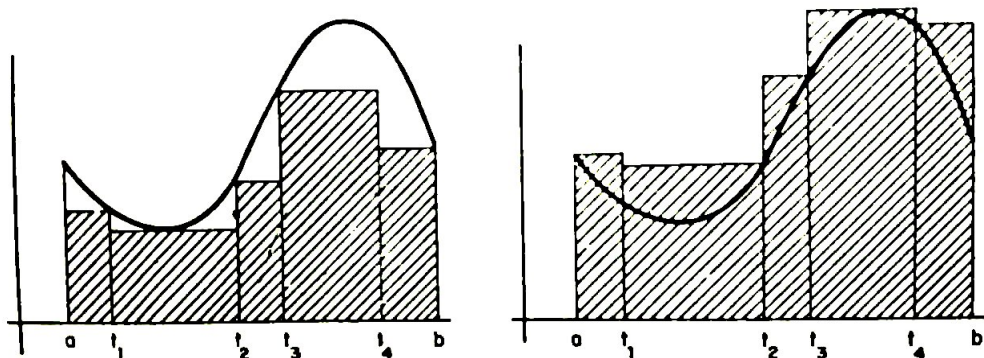


Figura 1: A soma inferior e a soma superior

Quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, os números $s(f; P)$ e $S(f; P)$ são valores aproximados, respectivamente por falta e por excesso, da área da região limitada pelo gráfico de f , pelo intervalo $[a, b]$ do eixo das abscissas e pelas verticais levantadas nos pontos a e b desse eixo (figura 1). Quando $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, essas somas são valores aproximados de tal área, com o sinal trocado.

Sejam P e Q partições do intervalo $[a, b]$. Diz-se que Q *refina* P quando $P \subset Q$, ou seja, os pontos da partição P pertencem a partição Q .

Teorema 2 Quando se refina uma partição, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta. Ou seja: $P \subset Q \Rightarrow s(f; P) \leq s(f; Q)$ e $S(f; P) \leq S(f; Q)$.

Prova: Suponhamos inicialmente que a partição $Q = P \cup \{r\}$ resulte de P pelo acréscimo de um único ponto r , digamos com $t_{j-1} < r < t_j$. Sejam m' e m'' respectivamente os infimos de f nos intervalos $[t_{j-1}, r]$ e $[r, t_j]$. Evidentemente, $m_j \leq m', m_j \leq m''$ e $t_j - t_{j-1} = (t_j - r) + (r - t_{j-1})$. Portanto

$$\begin{aligned} s(f; Q) - s(f; P) &= m''(t_j - r) + m'(r - t_{j-1}) - m_j(t_j - t_{j-1}) \Rightarrow \\ s(f; Q) - s(f; P) &= (m'' - m_j)(t_j - r) + (m' - m_j)(r - t_{j-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Para obter o resultado geral, onde Q resulta de P pelo acréscimo de k pontos, usa-se k vezes o que acabamos de provar. Com as devidas alterações, é possível provar que $P \subset Q \Rightarrow S(f; P) \leq S(f; Q)$. ■

Com isto, resulta-se que toda soma inferior de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é menor do que ou igual a qualquer soma superior. Com efeito, se P e Q são partições de $[a, b]$ então a partição $P \cup Q$ refina P e Q . Logo:

$$s(f; P) \leq s(f; P \cup Q) \leq S(f; P \cup Q) \leq S(f; Q).$$

Estamos agora em condições de definir integrais inferiores e superiores.

A *integral inferior* e a *integral superior* da função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas, respectivamente, por

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_P s(f; P), \quad \overline{\int}_a^b f(x) dx = \inf_P S(f; P),$$

tomando relativamente o sup e o inf a todas as partições P do intervalo $[a, b]$.

Exemplos:

1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1$ quando x é racional. Dada uma partição arbitrária P de $[a, b]$, como cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ contém números racionais e irracionais, temos $m_i = 0$ e $M_i = 1$, logo $s(f; P) = 0$ e $S(f; P) = b - a$. Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\int}_a^b f(x) dx = b - a.$$

2. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ constante, $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$. Então, seja qual for a partição P , temos $m_i = M_i = c$ em todos os intervalos, logo $s(f; P) = S(f; P) = c \cdot (b - a)$. Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = c \cdot (b - a).$$

2.2 Funções Integráveis

Vamos assumir nesse ponto alguns fatos sobre a topologia de $\mathbb{R}$. Trataremos sobre conjuntos abertos e/ou fechados, definições e propriedades mais elementares destes, sem maiores preocupações.

Por exemplo, dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, um ponto $x \in X$ chama-se *ponto interior* de X quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$. Quando todos os pontos do conjunto X são interiores, dizemos que X é um conjunto *aberto*. Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ é dito ser *fechado* quando seu complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto, isto equivale a dizer que F é igual ao seu *fecho* $\overline{F}$, i.e., igual ao conjuntos dos pontos de $\mathbb{R}$ que são limites de seqüências de pontos de F .

Um detalhamento mais profundo sobre o tema pode ser encontrado em qualquer livro introdutório de Análise na Reta, como por exemplo [3].

Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *integrável* quando sua integral inferior e sua integral superior são iguais. Esse valor comum chama-se *integral de Riemann* de f e se denota por

$$\int_a^b f(x) dx \text{ ou, simplesmente, } \int_a^b f.$$

Por exemplo, toda função constante $f(x) = c$, é integrável, com $\int_a^b f(x) dx = c \cdot (b - a)$, (exemplo 2). Mais geralmente, seja $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ constante (digamos igual a c_i) em cada subintervalo aberto (t_{i-1}, t_i) para $i = 1, \dots, n$ (nesse caso f é chamada *função escada*), então f é integrável e $\int_a^b f(x) dx = \sum c_i \cdot (t_i - t_{i-1})$, onde os c_i são os valores que f assume nos intervalos (t_{i-1}, t_i) . Por outro lado, a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, igual a 1 se $x \in \mathbb{Q}$ e a 0 se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é integrável, (exemplo 1).

Lema 3 *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leq y$. Então $\sup A \leq \inf B$. A fim de ser $\sup A = \inf B$ é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$.*

Prova: Todo $y \in B$ é cota superior de A , logo $\sup A \leq y$. Isto mostra que $\sup A$ é cota inferior de B , portanto $\sup A \leq \inf B$. Se valer a desigualdade estrita $\sup A < \inf B$ então $\varepsilon = \inf B - \sup A > 0$ e $y - x \leq \varepsilon$ para quaisquer $x \in A$, $y \in B$. Reciprocamente, se $\sup A = \inf B$ então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ não é cota superior de A e $\inf B + \frac{\varepsilon}{2}$ não é cota inferior de B , logo existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq \sup A = \inf B \leq y < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}$. Segue-se que $y - x < \varepsilon$. ■

O próximo resultado é um primeiro contato no sentido de caracterizar funções integráveis em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Teorema 4 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) f é integrável.
- (ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P, Q de $[a, b]$ tais que $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$.
- (iii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$S(f; P) - s(f; P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

Prova: Seja A o conjunto das somas inferiores e B o conjunto das somas superiores de f . Pela observação feita após o teorema [2] tem-se $s \leq S$ para todo $s \in A$ e toda $S \in B$. Supondo (i), por definição temos $\sup A = \inf B$. Logo, pelo lema [3], podemos concluir que (i) $\Rightarrow$ (ii). Para provar que (ii) $\Rightarrow$ (iii) basta observar que se $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$ então, como a partição $P_0 = P \cup Q$ refina ambas P e Q , segue-se do teorema [2] que $s(f; P) \leq s(f; P_0) \leq S(f; P_0) \leq S(f; Q)$, donde se conclui que $S(f; P_0) - s(f; P_0) < \varepsilon$. Finalmente, (iii) $\Rightarrow$ (i) novamente pelo lema [3]. ■

Exemplo 3: Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas que diferem apenas num subconjunto finito de $[a, b]$. Então f será integrável se, e somente se, g o for. No caso afirmativo tem-se $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. Com efeito, a diferença $f - g$ é uma função escada. (Os pontos onde $f(x) \neq g(x)$ formam, juntamente com a e b , uma partição de $[a, b]$ e $f - g$ é constante, igual a zero, no interior de cada intervalo dessa partição.) Logo, $f - g$ é integrável e $\int_a^b (f - g) = 0$. Como $f = g + (f - g)$, segue-se do item (3) do teorema abaixo que f é integrável se, e somente se, g o é, com $\int_a^b f = \int_a^b g + \int_a^b (f - g)$, ou seja $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Valem as propriedades elementares conhecidas dos cursos de cálculo:

Teorema 5 Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis. Então:

1. Para $a < c < b$, $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$ são integráveis e se tem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Reciprocamente, se $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$ são integráveis, então f é integrável, e vale a igualdade acima.

2. Para todo $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot f$ é integrável e

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

3. $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

4. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Em particular, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

5. $|f(x)|$ é integrável e se tem

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Segue-se de (4) e (5) que se $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$, então $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq K \cdot (b - a)$.

6. O produto $f \cdot g$ é integrável.

Prova: As propriedades acima, em suma, são consequências do teorema 4. Faremos aqui a primeira delas, a qual será utilizada para provar os corolário 12 e 13 no teorema 11. Omitiremos as demais, sem grande perda de compreensão do texto.

Prova de (1): Sejam $\alpha = \int_a^c f(x) dx$, $A = \overline{\int}_a^c f(x) dx$, $\beta = \int_c^b f(x) dx$ e $B = \overline{\int}_c^b f(x) dx$. Então $\overline{\int}_a^b f(x) dx = A + B$ e $\int_a^b f(x) dx = \alpha + \beta$. Sempre se tem $\alpha \leq A$ e $\beta \leq B$. Logo $\alpha + \beta = A + B \Leftrightarrow \alpha = A$ e $\beta = B$, ou seja, f é integrável se, e somente se, $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$ são integráveis. ■

2.3 Condições suficientes de integrabilidade

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, com $X \subseteq \mathbb{R}$, chama-se *crescente* quando $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Se $x < y$ implicar apenas $f(x) \leq f(y)$, dizemos que f é *não-decrescente*. De modo análogo se define função *decrescente* e função *não-crescente*. Uma função de qualquer desses tipos chama-se *monótona*.

Teorema 6 Toda função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.

Prova: Sem perda de generalidade podemos supor f não-decrescente. Dado $\varepsilon > 0$, seja $P = \{a = t_0, \dots, t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ cujos os intervalos têm todos comprimento $< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Para $i = 1, \dots, n$ temos $\omega_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$ portanto $\sum \omega_i = f(b) - f(a)$ e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1}) &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum_{i=1}^n \omega_i \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})] = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot f(b) - f(a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema 4, f é integrável. ■

Um dos resultados mais importantes dos cursos iniciais do Cálculo Integral é o Teorema 10, o qual afirma que “*toda função contínua num compacto de $\mathbb{R}$ é integrável*”. Para a demonstração desse teorema precisamos de algumas preliminares.

Uma *cobertura* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma família $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}$, tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, i.e., para todo $x \in X$ existe algum $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.

Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ é uma subfamília $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, $L' \subset L$, tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

Uma cobertura $\mathcal{C}$ é dita *aberta* quando cada $C_\lambda \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$. Uma cobertura $\mathcal{C}$ (respec. uma subcobertura $\mathcal{C}'$) é dita *finita* quando L (respec. L') é um conjunto finito.

Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ é dito ser *compacto* quando toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.

Na reta, ou mesmo em espaços métricos mais gerais, é possível provar que K ser compacto equivale a dizer que K é limitado e fechado. O que equivale ainda a “*Todo conjunto infinito limitado $K \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação*”, fato esse conhecido como *Teorema de Bolzano-Weierstrass*. O que, por sua vez, equivale a “*Toda sequência em K possui uma subsequência que converge para um ponto de K* ”, resultado muitas vezes também atribuído a *Bolzano-Weierstrass*.

Como referências podemos consultar [4] para o caso da reta, enquanto que [6] generaliza esses resultados para espaços métricos quaisquer.

Para espaços topológicos mais gerais, não necessariamente metrizáveis, a equivalência entre essas propriedades não se mantém (veja, por exemplo, [5]).

A definição que demos aqui se mostra mais útil em diversas situações, por isso em geral é a escolhida para definir conjuntos compactos.

Por exemplo, um intervalo $[a, b]$ da reta é compacto (isto será provado diretamente no Teorema de *Borel-Lebesgue* mais a frente). O conjunto $\{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ é compacto. Todo conjunto finito é compacto. A reta, $\mathbb{R}$, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ e $\mathbb{Z}$ não são compactos.

Um exemplo menos trivial de conjunto compacto é o chamado *conjunto de Cantor*. Tal conjunto é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de abertos, do seguinte modo: retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio aberto $(1/3, 2/3)$. Depois retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos restantes $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$, sobra então $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses quatro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Se indicarmos com $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ os intervalos abertos omitidos, temos $K = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, ou seja, $K = [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n)$.

Logo K é fechado, sendo a interseção dos fechados $[0, 1]$ e $\mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ (aqui estamos usando tacitamente o fato que a reunião arbitrária de abertos é um aberto e que o complementar de um aberto é fechado). Sendo limitado, contido no intervalo $[0, 1]$, concluímos que K é compacto. Note-se que os pontos extremos dos intervalos omitidos, como $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$, etc. pertencem ao conjunto de Cantor. Com efeito, em cada etapa da construção de K são retirados apenas pontos interiores nos intervalos restantes da etapa anterior. Esses pontos extremos dos intervalos omitidos formam um subconjunto infinito enumerável de K . Notemos ainda que K não contém intervalo aberto algum e portanto nenhum $x \in K$ é ponto interior. Com efeito, depois da n -ésima etapa da construção de K restam apenas intervalos abertos de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Assim, dado qualquer intervalo aberto $J \subset [0, 1]$, de comprimento $l > 0$, ele não restará incólume depois da n -ésima etapa, se $\frac{1}{3^n} < l$. Consequentemente não se pode ter $J \subset K$.

Com um pouco mais de informações, é possível provar ainda que K é não-enumerável – veja o exemplo 19 e teorema 9 (corolário 2) do parágrafo 3, capítulo V de [4].

Lembrando que uma função $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *contínua* no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a . Ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Em termos de intervalos: dado qualquer intervalo aberto J contendo $f(a)$ existe um intervalo aberto I , contendo a , tal que $f(I \cap X) \subset J$. Sempre que desejarmos, podemos tomar $J = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$ e $I = (a - \delta, a + \delta)$, com $\delta > 0$.

Dizemos, simplesmente que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *contínua* quando f for contínua em todos os pontos de X .

Caso a função não seja contínua, dizemos que há *descontinuidade na função*, ou seja, há um ponto de descontinuidade ou um conjunto de pontos de descontinuidade na função.

Teorema 7 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se X é compacto então $f(X)$ é compacto.*

Prova: Dada uma cobertura aberta $f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, podemos, para cada $x \in X$, escolher $A_{\lambda(x)}$ tal que $f(x) \in A_{\lambda(x)}$. Em virtude da continuidade de f , cada ponto $x \in X$ pode ser posto num intervalo aberto I_x tal que $y \in X \cap I_x \Rightarrow f(y) \in A_{\lambda(x)}$. Obtemos assim uma cobertura aberta $X \subset \bigcup_{x \in X} I_x$. Como X é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita $X \subset I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_n}$. Consequentemente, $f(X) \subset A_{\lambda(x_1)} \cup \dots \cup A_{\lambda(x_n)}$, o que prova a compacidade de $f(X)$. ■

Uma simples, porém bastante útil, consequência disso é o *Teorema de Weierstrass*.

Corolário 8 (Weierstrass) *Toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto X é limitada e atinge seus extremos (i.e., existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in X$).*

Com efeito, $f(X)$ sendo compacto, é limitado e fechado. Logo $\sup f(X) \in f(X)$ e $\inf f(X) \in f(X)$. Portanto existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $\inf f(X) = f(x_1)$ e $\sup f(X) = f(x_2)$.

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$ podemos para cada $a \in X$, obter $\delta > 0$ (que depende de ε e de a) tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Em geral, não é possível obter, a partir do $\varepsilon > 0$ dado, um único $\delta > 0$ que sirva para todos os pontos $a \in X$.

Exemplos:

4. Seja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dado $\varepsilon > 0$, mostraremos que não se pode escolher $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon$ seja qual for o $a > 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, suponhamos escolhido $\delta > 0$.

Tomemos um número positivo a tal que $0 < a < \delta$ e $0 < a < \frac{1}{3\varepsilon}$. Então, para $x = a + \frac{\delta}{2}$, temos $|x - a| < \delta$ mas

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{1}{a + \frac{\delta}{2}} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{2}{2a + \delta} - \frac{1}{a} \right| = \frac{\delta}{(2a + \delta)a} > \frac{\delta}{3\delta \cdot a} = \frac{1}{3a} > \varepsilon.$$

5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cx + d$, com $c \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{|c|}$. Então, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, temos

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |(cx + d) - (ca + d)| = |cx - ca| = |c| \cdot |x - a| < |c| \cdot \delta = \varepsilon.$$

Neste caso, foi possível, a partir de ε dado, obter um $\delta > 0$, que servisse para todos os pontos a do domínio de f .

As funções com essa propriedade chamam-se uniformemente contínuas. Mais precisamente:

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser *uniformemente contínua* quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

É óbvio que toda função uniformemente contínua é contínua. A recíproca, porém, não é verdadeira.

Assim, a função contínua $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua pois, como vimos no exemplo 4, dado $\varepsilon > 0$, seja qual for o $\delta > 0$, podemos encontrar pontos x, y no domínio de f , com $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Por outro lado, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = cx + d$, é uniformemente contínua, como vimos no exemplo 5. Ali supusemos $c \neq 0$, mas é claro que $c = 0$ dá uma função constante, que é uniformemente contínua.

Teorema 9 *Seja X compacto. Toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Prova: Seja $\varepsilon > 0$ dado. Para cada $x \in X$, f é contínua no ponto x . Logo existe $\delta_x > 0$ tal que $y \in X$, $|y - x| < 2\delta_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pondo $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$, a cobertura $X \subset \bigcup_{x \in X} I_x$ admite uma subcobertura finita $X \subset I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_n}$. Seja δ o menor dos números $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$. Se $x, y \in X$ e $|x - y| < \delta$, devemos ter $x \in I_{x_j}$ para algum j , donde $|x - x_j| < \delta_{x_j}$ e daí $|y - x_j| \leq |y - x| + |x - x_j| < 2\delta_{x_j}$. Estas desigualdades implicam $|f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f(y) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ■

Teorema 10 *Toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.*

Prova: Como $[a, b]$ é compacto, segue do teorema de Weierstrass que f é limitada. Além disso, o teorema [9] garante que f é uniformemente contínua: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b - a}{n} < \delta$. Através dos pontos $t_i = a + i \frac{b - a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, obtemos uma partição de $[a, b]$ tal que $x, y \in [t_{i-1}, t_i] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$. Isto mostra que a oscilação ω_i de f em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ é $\leq \frac{\varepsilon}{(b - a)}$. Segue-se que $\sum \omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq \varepsilon$ e portanto f é integrável, pelo teorema [4]. ■

Ora, exemplos aqui são aos montes, na verdade esse resultado é um dos mais utilizados nos cursos tradicionais de Cálculo para garantir a integrabilidade de funções limitadas, onde lá não se está interessado se determinada função é integrável ou não, mas somente em calcular o valor da integral. Assim, funções polinomiais, funções trigonométricas, funções exponenciais, logarítmicas, suas compostas, seus múltiplos ou quocientes (onde estão definidos) definidas em intervalos limitados e fechados de $\mathbb{R}$, por serem contínuas, são sempre integráveis. No exemplo (7) a seguir usamos um importante método para o cálculo da integral – a saber, *O Teorema da Mudança de Variáveis*, também conhecido como *método da substituição*. Os teoremas clássicos do cálculo, como *Mudança de Variáveis*, *Teorema Fundamental do Cálculo*, *Integração por Partes*, são, evidentemente, válidos. A verificação desses resultados não trará grande diferença ao desenrolar do nosso texto, por isso, e por questões de espaço também, serão omitidas. A referência [3] trata com simplicidade esse assunto.

Exemplos:

6. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Poderíamos aqui argumentar que f é uma função contínua, por ser quociente de contínuas, e portanto, pelo teorema [10] ela é integrável. Preferimos, no entanto, lançar mão do teorema [6] e dizer que a monotonicidade de f garante que ela seja uma função integrável no intervalo $[0, 1]$. Mas precisamente, se $x_1, x_2 \in [0, 1]$, $x_1 \leq x_2$, então $x_1^2 \leq x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 1 \leq x_2^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{x_2^2 + 1} \leq \frac{1}{x_1^2 + 1} \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$, ou seja, f é não-crescente. Agora, o Teorema Fundamental do Cálculo nos dá

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

7. As funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ são contínuas para todo x em $\mathbb{R}$. Como produto de funções contínuas é uma função contínua, segue que $h(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, o teorema [10] garante que h é integrável no intervalo compacto $[0, \pi/2]$. Vamos então usar novamente o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx.$$

Façamos $u = \sin x$, assim $du = \cos x dx$. Quando $x = 0$ tem-se $u = 0$ e quando $x = \frac{\pi}{2}$ então $u = 1$. Substituindo, obtemos

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^1 u^3 du = \frac{u^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

O teorema [10] pode ser substancialmente melhorado. Na verdade, uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não precisa sequer ter uma quantidade finita de descontinuidades para ser integrável. Por enquanto, nos limitaremos ao corolário [13] a seguir.

Teorema 11 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Se para cada $c \in [a, b]$, $f|_{[a, c]}$ é integrável, então f é integrável.*

Prova: Seja $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $c \in [a, b)$ tal que $K \cdot (b - c) < \frac{\varepsilon}{4}$. Como $f|_{[a, c]}$ é integrável, existe uma partição $\{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, c]$ tal que $\sum_{i=1}^n \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pondo $t_{n+1} = b$, obtemos uma partição $\{t_0, \dots, t_n, t_{n+1}\}$ de $[a, b]$. Certamente $\omega_{n+1} \leq 2K$. Logo $\omega_{n+1} \cdot (t_{n+1} - t_n) = \omega_{n+1} \cdot (b - c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, $\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ e assim f é integrável. ■

Corolário 12 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Se, para $a < c < d < b$ quaisquer, $f|_{[c, d]}$ é integrável, então f é integrável.*

Prova: Com efeito, fixemos um ponto p , com $a < p < b$. Pelo o teorema [11], $f|_{[a, p]}$ e $f|_{[p, b]}$ são integráveis. Logo f é integrável. (Veja o Item (1) do teorema [5].)

Corolário 13 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, com um número finito de descontinuidades. Então f é integrável.*

Prova: Com efeito, sejam $t_0, \dots, t_n$ os pontos de descontinuidade de f em $[a, b]$. Pelo corolário [12], para cada $i = 1, \dots, n$, $f|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é integrável pois f é contínua em todo intervalo $[c, d]$ com $t_{i-1} < c < d < t_i$. Logo f é integrável. (Veja o Item (1) do teorema [5].)

Exemplo 8: A função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, é integrável pois é limitada, sendo descontínua apenas no ponto 0.

2.4 O Teorema de Lebesgue

O teorema [4] nos dá uma condição necessária e suficiente para uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ser integrável. Entretanto, tal condição que se revelou eficiente na demonstração de alguns teoremas, é pouco prática na verificação da integrabilidade de funções dadas explicitamente. Os teoremas [6] e [10] assim como o corolário [13] fornecem condições suficientes para a integrabilidade.

Nessa seção daremos uma condição necessária e suficiente para integrabilidade, a qual é de grande interesse prático e teórico. A primeira definição rigorosa de integral é devida a Cauchy (em 1823) que considerou funções contínuas num intervalo $[a, b]$ e definiu

$$\int_a^b f = \lim \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}),$$

onde $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ é uma partição de $[a, b]$ e o limite é tomado quando $|P| = \max\{t_i - t_{i-1}; i = 1, \dots, n\}$ (chamada a *norma* da partição P) tende a 0. É possível provar que essa definição coincide com a construção aqui apresentada por somas inferiores e superiores (veja a referência [4].)

Após Cauchy, durante todo o resto do século XIX, os matemáticos desenvolveram um enorme esforço para definir integral para funções que não fossem contínuas. Em 1867, coube a Riemann dar um passo decisivo nessa direção, o próprio definiu integral como limite de certas somas (estas somas são precisamente o que conhecemos como somas de Riemann nos cursos iniciais de cálculo integral). A equivalência citada anteriormente garante que uma função é integrável no sentido de Riemann se ela for integrável no sentido definido na seção 2.2, e reciprocamente (veja [4]). Por esse motivo a integral aqui estudada é chamada de *integral de Riemann*. Em seus trabalhos, Riemann se propõe a questão de saber quais funções são integráveis e quais não são. Ele recai então no conceito de oscilação de uma função f (apresentada na seção 2.1) e prova que “uma função é integrável se, e somente se, para cada $\delta > 0$ dado, a soma dos comprimentos dos subintervalos da partição de $[a, b]$, nos quais a oscilação da função é menor que δ tende a zero”. Uma melhor formalização das ideias seria conseguida com introdução no conceito de “conteúdo”, por Hankel, em 1882, e pelos que se seguiram Du Bois-Reymond e Harnack. As ideias necessárias para a teoria da medida estavam em fermentação, Lebesgue, em 1901, poria essa teoria em bases sólidas.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X tem *conteúdo nulo*, e escrevemos $c(X) = 0$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter uma coleção finita de intervalos abertos $I_1, \dots, I_k$ tal que $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ e a soma dos comprimentos dos intervalos I_j seja $< \varepsilon$, $j = 1, \dots, k$.

Indiquemos com $|I| = b - a$ o comprimento de um intervalo I cujos extremos são a e b .

Então $c(X) = 0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que podemos fazer $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$, onde $I_1, \dots, I_k$ são intervalos abertos, com $|I_1| + \dots + |I_k| < \varepsilon$.

Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *medida nula* (segundo Lebesgue), e escrevemos $m(X) = 0$, quando, para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter uma coleção enumerável de intervalos abertos $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ tais que

$$X \subset I_1 \cup \dots \cup I_n \cup \dots \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

Em particular, se X tem conteúdo nulo, então $m(X) = 0$.

Decorre imediatamente desta definição que todo subconjunto de um conjunto de medida nula tem a mesma medida nula.

Exemplos:

9. Seja $A = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ um subconjunto enumerável da reta real $\mathbb{R}$. Para cada $\varepsilon > 0$, consideremos os intervalos $I_n = \left\{x \in \mathbb{R}; r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} < x < r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right\}$ para $n = 1, 2, \dots$. A família $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura enumerável de A e a amplitude de cada I_n é dada por $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Logo a soma das amplitudes dos I_n é $< \varepsilon$. Conclui-se que qualquer conjunto enumerável tem medida nula. Em particular, $\mathbb{Q}$ tem medida nula e, com maior razão, os números racionais contidos num intervalo $[a, b]$ formam um conjunto de medida nula. Além disso qualquer conjunto finito tem medida nula.

10. Se $Y = X_1 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$, onde $m(X_1) = \dots = m(X_n) = \dots = 0$ então $m(Y) = 0$. Em palavras: uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ podemos, para cada n , escrever $X_n \subset I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_j} \cup \dots$ onde os I_{I_j} são intervalos abertos tais que $\sum_{j=1}^{\infty} |I_{n_j}| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Segue-se

que $Y \subset \bigcup_{n,j=1}^{\infty} I_{n_j}$, onde $\sum_n \sum_j |I_{n_j}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. Logo $m(Y) = 0$.

11. Seja $K \subset [0, 1]$ o conjunto de Cantor. Tem-se aqui um conjunto não-enumerável cujo conteúdo é nulo. Com efeito, depois da n -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor, foram omitidos intervalos abertos cuja soma dos comprimentos é

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

A n -ésima etapa da construção de K fornece uma partição P de $[0, 1]$ tal que os pontos de K estão contidos nos intervalos de P que não foram omitidos. Como a soma dos comprimentos dos intervalos de P é 1, a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contêm pontos de K é $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Tomando n grande, podemos fazer esta soma tão pequena quanto se deseje. Logo $c(K) = 0$.

Para uma parte do teorema de Lebesgue, precisamos ainda do teorema de Borel-Lebesgue, o qual apresentaremos a seguir:

Teorema 14 (Borel-Lebesgue) *Seja $[a, b]$ um intervalo da reta. Toda cobertura de $[a, b]$ por meio de intervalos abertos admite uma subcobertura finita.*

Prova: Seja X o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tais que o intervalo $[a, x]$ pode ser coberto por um número finito dos I_λ , isto é, $[a, x] \subset \bigcup \dots \cup I_{\lambda_n}$. Temos $X \neq \emptyset$: por exemplo, $a \in X$. Seja $c = \sup X$. Evidentemente, $c \in [a, b]$. Com efeito, existe algum $I_{\lambda_0} = (\alpha, \beta)$ tal que $c \in I_{\lambda_0}$. Sendo $\alpha < c$, deve existir $x \in X$ tal que $\alpha < x \leq c$. Logo $x \in I_{\lambda_0}$. Mas como $x \in X$, temos $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$ e daí $[a, c] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$, o que prova que $c \in X$. Mostraremos agora que $c = b$. Se fosse $c < b$, existiria algum $c' \in I_{\lambda_0}$ com $c < c' < b$. Então $[a, c'] \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$ donde $c' \in X$, o que é absurdo, pois $c' > c$ e c é o sup de X . Vemos, portanto, que o intervalo $[a, b]$ está contido numa reunião finita dos I_λ , o que prova o teorema. ■

Teorema 15 (Lebesgue) *Se o conjunto D dos pontos de descontinuidade de uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem medida nula então f é integrável.*

Prova: Se D tem medida nula, então dado $\varepsilon > 0$ existem intervalos abertos $I_1, \dots, I_k, \dots$ tais que $D \subset \bigcup I_k$ e $\sum |I_k| < \varepsilon/2K$, onde $K = M - m$ é a oscilação de f em $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b] - D$, seja J_x um intervalo aberto de centro x no qual a oscilação de f é menor do que $\varepsilon/2(b - a)$. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, a cobertura aberta $[a, b] \subset (\bigcup_k I_k) \cup (\bigcup_x J_x)$ possui uma subcobertura finita $[a, b] \subset I_1 \cup \dots \cup I_m \cup J_{x_1} \cup J_{x_n}$. Seja P uma partição de $[a, b]$ formada pelos pontos a, b e os pontos extremos desses $m + n$ intervalos de P que estão contidos em algum I_k e com $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ os demais intervalos de P . Então $\sum (t_\alpha - t_{\alpha-1}) < \varepsilon/2K$ e a oscilação de f em cada intervalo $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ é $\omega_\beta < \varepsilon/2(b - a)$. Logo,

$$\begin{aligned} S(f; P) - s(f; P) &= \sum \omega_\alpha (t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \omega_\beta (t_\beta - t_{\beta-1}) \\ &< \sum K(t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \frac{\varepsilon(t_\beta - t_{\beta-1})}{2(b - a)} \end{aligned}$$

$$< \frac{K\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon.$$

Segue então, do teorema 4, que f é integrável. ■

Uma consequência imediata do teorema anterior é que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada com o conjunto dos seus pontos de descontinuidades tendo conteúdo nulo, então f é integrável.

Para finalizar analisaremos a recíproca do teorema anterior que virá a caracterizar as funções integráveis como aquelas cujos pontos de descontinuidades formam conjuntos “pequenos”. Isso será feito mediante a noção de conjunto de *medida nula* (segundo Lebesgue).

A oscilação de uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ num conjunto $X \subset [a, b]$ já foi definida como

$$\omega(f, x) = \sup f(x) - \inf f(x) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}.$$

Claro que, $X \subset Y \Rightarrow \omega(f; X) \leq \omega(f; Y)$. Definiremos agora a oscilação de f num ponto $x \in [a, b]$.

Fixemos x, f e escrevamos para $\delta > 0$, $\omega(\delta)$ = oscilação de f no conjunto $(x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$.

Se $a < x < b$ e δ é suficientemente pequeno, então $\omega(\delta) = \omega(f, [x - \delta, x + \delta])$. Se $x = a$ e $\delta \leq b - a$, então $\omega(\delta) = \omega(f; [a, a + \delta])$. Se $x = b$ e $\delta \leq b - a$, então $\omega(\delta) = \omega(f; (b - \delta, b])$.

Mantendo sempre f e x fixos, $\omega(\delta)$ é uma função monótona não-decrescente de δ , definida num intervalo $(0, \delta_0)$. Como f é limitada, a função $\delta \mapsto \omega(\delta)$ também é limitada. Existe, portanto, o limite

$$\omega(f; x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = \inf(\omega(\delta), \delta > 0),$$

que chamaremos a *oscilação de f no ponto x* .

O teorema a seguir, devido a Du Bois-Reymond, é o que faz, digamos assim, todo o “trabalho pesado” no Teorema de Lebesgue. Sua demonstração baseia-se no lema abaixo, o que por sua vez é consequência do Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Lema 16 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada em $[a, b]$. Suponha que existe $\alpha > 0$ tal que $\omega(f; x) < \alpha \forall x \in [a, b]$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\omega(c, d) < \alpha$, onde $\omega(c, d) = \sup\{f(x); c < x < d\} - \inf\{f(x); c < x < d\}$, para todos $c < d$ em $[a, b]$ com $d - c < \delta$.*

prova: Dado $\delta = \frac{1}{n}$, suponha que existe $c_n < d_n$ em $[a, b]$ tais que $d_n - c_n < \frac{1}{n}$ e $\omega(c_n, d_n) \geq \alpha$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass existem subsequências (c_n) e (d_n) , que, por um abuso de notação, denotaremos ainda por (c_n) e (d_n) , tais que $c_n \rightarrow c$ e $d_n \rightarrow d$. Como $c_n - d_n < \frac{1}{n}$, fazendo $n \rightarrow +\infty$, obtemos $c = d$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[c_n, d_n] \subset [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, para todo $n > n_0$. Isso implica que $\omega(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \geq \omega(c_n, d_n) \geq \alpha$ e passando ao limite obtemos $\omega(f; c) \geq \alpha$ o que contradiz a hipótese do lema, pois $c \in [a, b]$. ■

Teorema 17 (Du Bois-Reymond) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e seja $E_\delta = \{x \in [a, b]; \omega(f, x) \geq \delta\}$. Então f é integrável se, e somente se, para cada $\delta > 0$, E_δ tem conteúdo nulo.*

Prova: A condição é necessária. De fato, suponha que existe $\delta_0 > 0$ tal que $c(E_{\delta_0})$ não seja zero. Isso quer dizer que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer coleção finita de intervalos $I_1, \dots, I_k$ abertos cobrindo E_{δ_0} , tem-se $\sum_{i=1}^n |I_i| \geq \varepsilon_0$. Seja agora P uma partição qualquer de $[a, b]$. O conjunto E_{δ_0} está contido na união dos subintervalos abertos da partição P com os pontos da partição, uma vez que tal união é precisamente $[a, b]$. Sendo estes pontos da partição em um número finito, poderemos cobri-los por uma coleção finita de intervalos abertos $J_1, \dots, J_p$ cuja somas dos comprimentos seja menor que $\frac{\varepsilon_0}{2}$ (todo conjunto nulo tem conteúdo nulo). Logo, a soma dos comprimentos dos subintervalos abertos da partição que contém os pontos de E_{δ_0} não pode ter comprimento menor do que $\frac{\varepsilon_0}{2}$, pois de outro modo E_{δ_0} seria coberto por uma coleção de intervalos abertos cuja soma dos comprimentos seria menor do que ε_0 . Logo, $S(f; P) - s(f; P) \geq \delta_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ para qualquer partição P , o que contradiz o fato que, f é integrável (teorema 4).

Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ e $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$, onde $M = \sup f$ e $m = \inf f$, existem, por hipóteses, intervalos abertos $I_1, \dots, I_k$ que cobrem E e tais que $\sum_{i=1}^n < \varepsilon_1$. É claro que $[a, b] - \bigcup_{n=1}^k I_i$ é uma união finita de intervalos fechados, digamos $J_1, \dots, J_n$. Em cada ponto de J_i a oscilação de f é menor do que

δ . Logo, aplicando o lema 16 a cada intervalo J_i , obtemos um δ_i . Seja agora P uma partição de $[a, b]$ formada pelas extremidades dos intervalos $I_1, \dots, I_k$ e por pontos adicionais em J_i , de modo que a distância entre dois consecutivos desse pontos em J_i seja menor do que δ_i , para $i = 1, \dots, n$. Assim,

$$\begin{aligned} S(f; P) - s(f; P) &\leq (M - m)\varepsilon_1 + (b - a)\delta \\ &= (M - m)\frac{\varepsilon}{2(M - m)} + (b - a)\frac{\varepsilon}{2(b - a)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Segue então do teorema 4 que f é integrável. ■

Teorema 18 (Teorema de Lebesgue) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Então f é integrável se, e somente se, o conjunto D dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.*

Demonstração: Pelo teorema 15 se D tem medida nula, então f é integrável. Suponhamos agora f integrável. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, o teorema 17 garante que $E_{1/n}$ tem conteúdo nulo, e portanto, medida nula. Sendo $D = \bigcup_{\delta > 0} E_\delta = \bigcup E_{1/n}$ temos que D é uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula a qual tem medida nula (exemplo 10). Logo $m(D) = 0$. ■

Como reunião enumerável de conjuntos de medida nula é ainda um conjunto de medida nula (exemplo 10), é imediato o seguinte corolário do teorema 18:

Corolário 19 *Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis então o produto $f \cdot g$ é integrável. Se, além disso, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$ e $\frac{1}{f}$ é limitada, então $\frac{1}{f}$ é integrável.*

Pelo exemplo 9 qualquer subconjunto enumerável (em particular finito) de $\mathbb{R}$ tem medida nula, o corolário a seguir generaliza, portanto, o corolário 13.

Corolário 20 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, se o conjunto dos seus pontos de descontinuidades é enumerável. Então f é integrável.*

Exemplos:

12. Analisemos agora a função do exemplo (1) do ponto de vista de suas possíveis descontinuidades. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Particionando $[0, 1]$ em intervalos da forma $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $k = 1, \dots, n$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$, segue que cada I_k possui pontos racionais e irracionais, donde $\inf_{x \in I_k} f = 0$ e $\sup_{x \in I_k} f = 1$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

Logo,

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \text{ e } \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Donde concluímos que $\int f$ no sentido de Riemann não existe (como já havíamos concluído no exemplo 1). Logo, pelo teorema anterior, podemos afirmar que o conjunto dos pontos de descontinuidades de f não tem medida nula, mesmo sem exibir tal conjunto de fato. Claro que exibir tal conjunto não é tarefa das mais árduas, basta observar que dado qualquer $a \in [0, 1]$ não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ou seja, f é descontínua em todos os reais do intervalo $[0, 1]$.

13. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \{0\} \\ \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ é uma fração irredutível com } p \neq 0. \end{cases}$$

Note-se que $0 \leq f(x) \leq 1$, de modo que f é limitada. Além disso, f é descontínua num conjunto infinito, a saber: o conjunto dos números racionais do intervalo $[a, b]$. De fato, se pusermos $f_1 = f|_{\mathbb{Q}}$ e $f_2 = f|_{(\mathbb{R} - \mathbb{Q})}$, teremos para todo $a \in [0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$, já que $f_2 \equiv 0$. Segue-se imediatamente que, para todo número real a em $[0, 1]$, tem-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Concluímos assim, que f é contínua nos números irracionais e descontínua nos racionais pertencentes ao intervalo $[0, 1]$. (Seria impossível obter uma função

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujos pontos de descontinuidade fossem exatamente os números irracionais. Veja [4] capítulo 7.) Como $\mathbb{Q}$ tem medida nula (exemplo 9) e um subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula, segue do teorema 18 que f é integrável. Vamos calcular $\int_a^b f dx$ efetivamente. Mais precisamente, temos $\int_a^b f(x) dx = 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $F = \left\{ x \in [a, b]; f(x) \geq \frac{\varepsilon}{b-a} \right\}$ é finito pois é o conjunto das frações irredutíveis pertencentes a $[a, b]$ cujos denominadores são $\leq \frac{b-a}{\varepsilon}$. Tomemos uma partição P de $[a, b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contêm algum ponto de F seja menor do que ε . Observemos que se $F \cap [t_{i-1}, t_i] = \emptyset$ então $0 \leq f(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$ e, portanto, $M_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. A soma $S(f; P) = \sum M_i(t_i - t_{i-1})$ relativa a esta partição se decompõe em duas parcelas:

$$\sum M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = \sum M'_i(t'_i - t'_{i-1}) + \sum M''_i(t''_i - t''_{i-1}),$$

onde assinalamos com um apóstrofo os intervalos $[t'_{i-1}, t'_i]$ que contêm algum ponto de F e com dois, $[t''_{i-1}, t''_i]$, os que são disjuntos de F . O primeiro somatório é $< \varepsilon$ porque $\sum(t'_i - t'_{i-1}) < \varepsilon$ e $M'_i \leq 1$. O segundo é $< \varepsilon$ porque $M''_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ e $\sum(t''_i - t''_{i-1}) < b-a$. Logo $S(f; P) = \sum M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < 2\varepsilon$. Segue-se que $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Como $f(x) \geq 0$ para todo x , temos $0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx = 0$. Conclusão: $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Definamos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $g(x) = 0$ se x é irracional, $g(0) = 1$ e $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ quando $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível não-nula, com $q > 0$. Se escrevermos $g_1 = g|_{\mathbb{Q}}$ e $g_2 = g|_{(\mathbb{R} - \mathbb{Q})}$, teremos para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} g_1(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g_2(x) = 0$, porque $g_2 \equiv 0$. Segue-se imediatamente que, para todo número real a , tem-se $\lim_{x \rightarrow a} g_1(x) = 0$. Concluimos assim, que g é contínua nos números irracionais e descontínua nos racionais. (Seria impossível obter uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujos pontos de descontinuidade fossem exatamente os números irracionais.

14. O exemplo 13 apresenta uma função cujos pontos de descontinuidades formam um conjunto infinito mas enumerável. Podemos ir mais além e dá um exemplo de uma função cujo conjunto dos pontos de descontinuidades é não-enumerável. Seja $K \subset [0, 1]$ o conjunto de Cantor. Definamos uma função $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte modo: pomos $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in K$. Se $x \notin K$, pomos $\varphi(x) = 1$. O conjunto dos pontos de descontinuidades de φ é K . Com efeito, sendo $A = [0, 1] - K$ um aberto (complementar de fechado) no qual φ é constante (e, portanto, contínua), segue que $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em cada ponto de $a \in A$. Por outro lado, como vimos no início da seção 2.3, K não possui pontos interiores, daí para cada $k \in K$ podemos obter uma sequência de pontos $x_n \in A$ com $\lim x_n = k$. Então $\lim \varphi(x_n) = 1 \neq 0 = \varphi(k)$. Logo φ é descontínua em todos os pontos $k \in K$. Como K tem medida nula (exemplo 11), o Teorema 18 garante que φ é integrável no intervalo $[0, 1]$. Agora, dada qualquer partição P de $[0, 1]$ todos os intervalos de P contêm pontos que não pertencem a K , pois $\text{int. } K = \emptyset$. Assim $M_i = 1$ e $S(\varphi; P) = 1$ para toda partição P . Segue-se que $\int_0^1 \varphi(x) dx = \overline{\int}_0^1 \varphi(x) dx = 1$.

3. CONCLUSÕES

Foi apresentado de maneira concisa o conceito de Integral de Riemann e teoremas de caracterização de Lebesgue, antes disso abordamos uma série de conceitos preliminares necessários para a compreensão do texto. Claro que há muito a ser estudado, mas é notória a conclusão, que com sua inovadora *Teoria de Medida*, Lebesgue conseguiu garantir a integrabilidade de funções as quais não eram possíveis com os conceitos de Riemann.

Atualmente, essas ideias continuam sendo abordados em praticamente todos os cursos da área de ciências exatas e mais profundamente em cursos de matemática pura propriamente ditos. A integrabilidade é, certamente, uma ferramenta poderosa na resolução de inúmeros problemas em equações diferenciais, cálculo de variações, questões oriundas da engenharia e etc.

Referências

- [1] Figueiredo, D. G. - *Análise I*. Rio de Janeiro, L.T.C., 1974.
- [2] Guidorizzi, H. L. - *Um Curso de Cálculo*, vol. 1, 5ed. São Paulo, L.T.C., 2001.

- [3] Lima, E. L. – *Análise Real - Funções de Uma Variável*, vol. 1. Rio de Janeiro, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2006.
- [4] Lima, E. L. – *Curso de Análise*, vol. 1. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2006.
- [5] Lima, E.L. – *Elementos de Topologia Geral*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1970.
- [6] Lima, E. L. – *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2005.
- [7] Rudin, W. – *Princípios de Análise Matemática*. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1970.



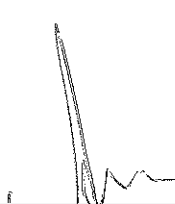
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA
Centro de Ciências Exatas e Naturais – CCEN

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Às 10h horas do dia 21 de março de dois mil e dezenove, no auditório do CCEN – Centro de Ciências Exatas e Naturais da UFERSA – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, reuniu-se a Banca Examinadora de defesa de trabalho de conclusão de curso de autoria do aluno **JOÃO DANIEL VIEIRA DA SILVA**, aluno do curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia desta universidade, N° de matrícula **2016010384**, com o título **“FUNÇÕES INTEGRÁVEIS SEGUNDO RIEMANN E O TEOREMA DE LEBESGUE”**. A Banca Examinadora ficou assim constituída por três membros: Prof. Msc. ALEXSANDRO BELÉM DA SILVA, presidente da banca e orientador do Trabalho de Conclusão de Curso; Prof. Dr. FABRÍCIO DE FIGUEIREDO OLIVEIRA e Prof. Dr. ANTÔNIO GOMES NUNES, como membros. Concluída a defesa, procedeu-se o julgamento pelos membros da banca examinadora, tendo o aluno obtido as seguintes notas: 9,0; 9,0; 9,0. Apuradas as notas verificou-se que o aluno foi aprovado com média geral 9,0. E para constar, eu, ALEXSANDRO BELÉM DA SILVA, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada pelos membros da banca examinadora, será assinada por todos.

Mossoró, 21 de março de 2019.

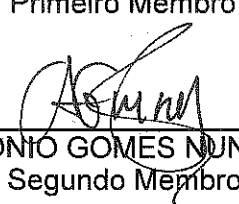
Assinatura dos membros da Banca Examinadora.



Prof. Msc. ALEXSANDRO BELÉM DA SILVA – UFERSA
Presidente e orientador



Prof. Dr. FABRÍCIO DE FIGUEIREDO OLIVEIRA – UFERSA
Primeiro Membro



Prof. Dr. ANTÔNIO GOMES NUNES – UFERSA
Segundo Membro