



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

EDSON ALVES DA SILVA

ANÁLISE ESTATÍSTICA DESCRITIVA E DE MULTIESCALA EM SINAIS DE
ONDAS GRAVITACIONAIS DETECTADAS PELO *LIGO*.

Caraúbas/RN
(2022)

EDSON ALVES DA SILVA

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DESCRITIVA E DE MULTIESCALA EM SINAIS DE
ONDAS GRAVITACIONAIS DETECTADAS PELO *LIGO*.**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação em
Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia do
Centro Multidisciplinar de Caraúbas da
Universidade Federal Rural do Semi-Árido,
como requisito parcial à obtenção do grau
de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Mackson Matheus
França Nepomuceno.

Caraúbas/RN
(2022)

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S586a Silva, Edson Alves da.
ANÁLISE ESTATÍSTICA DESCRITIVA E DE
MULTIESCALA EM SINAIS DE ONDAS GRAVITACIONAIS
DETECTADAS PELO LIGO. / Edson Alves da Silva. -
2022.
99 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Mackson Matheus França
Nepomuceno.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2022.

1. Séries temporais. 2. Ondas Gravitacionais.
3. LIGO. 4. Expoente de Hurst. 5. Fractal. I.
Nepomuceno, Prof. Dr. Mackson Matheus França,
orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Caraúbas
Bibliotecária: Dalvanira Brito Rodrigues
CRB: 15/700

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

EDSON ALVES DA SILVA

**ANÁLISE ESTATÍSTICA DESCRITIVA E DE MULTIESCALA EM SINAIS DE
ONDAS GRAVITACIONAIS DETECTADAS PELO *LIGO*.**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação em
Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia do
Centro Multidisciplinar de Caraúbas da
Universidade Federal Rural do Semi-Árido,
como requisito parcial à obtenção do grau
de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Mackson Matheus
França Nepomuceno.

APROVADO EM: 13/06/2022

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Mackson Matheus França Nepomuceno – UFERSA Presidente e orientador

Prof. Dr. Francisco de Assis Brito Filho – UFERSA Primeiro Membro

Prof. Dr. Francisco César de Medeiros Filho – UFERSA Segundo Membro

Dedicado a meus familiares que me apoiaram nesta jornada, em especial aos meus pais:

Francisco Alves Neto

&

Edvania Pereira da Silva Alves

AGRADECIMENTOS

Se faz necessário agradecer a todos os indivíduos que contribuíram fervorosamente para a realização deste trabalho. É importante deixar claro que todos aqui mencionados foram peças fundamentais para o desenvolvimento, seja acadêmico ou moral, de formas direta ou indiretamente.

- A Deus, por me agraciar com o Dom da Vida.
- Ao meu pai Francisco Alves Neto, por inspirar, incentivar e apoiar a minha busca pelo conhecimento.
- A minha mãe Edvania Pereira da Silva Alves, que sempre me apoiou em todas as decisões, visando o melhor para mim.
- A minha avó materna, Helena Maria da Silva, que sempre cuidou de mim sem medir esforços.
- A todos os meus familiares que contribuíram positivamente na minha jornada, em especial minha avó paterna, Abília Santana da Silva e meu tio Pedro Alves Neto.
- A minha namorada Ailane Lorrane, pelo companheirismo incessante.
- Ao meu orientador Prof. Dr. Mackson Matheus França Nepomuceno, por acreditar em mim e guiar-me no âmbito científico com a excelência de seu conhecimento.
- Aos Professores Dr. Francisco César de Medeiros Filho e Dr. Francisco de Assis Brito Filho por aceitar e se disponibilizarem para compor a banca avaliadora do presente trabalho.
- A todos os professores que participaram da minha formação acadêmica seja no ensino fundamental, médio ou superior.
- Aos desenvolvedores do site Sci-Hub, que com o caráter inclusivo, possibilita o acesso livre as ciências.
- A todos meus amigos, cujo os nomes são muitos para serem mencionados, do âmbito acadêmico ou não, que ajudaram no meu desenvolvimento pessoal e intelectual. Em especial a Ana Carla, Eric Facundo, Fábio Caetano, Gesley Alves.
- Ao meu amigo, Wesley Vinícius, pela correção ortográfica e amizade fervorosa.

*“O importante é não parar de questionar. A curiosidade
tem sua própria razão de existir.”*

- Albert Einstein

RESUMO

No presente trabalho foram realizadas análises estatísticas nas séries temporais referentes as ondas gravitacionais, do tipo *BBH* e detectadas pelo *LIGO*, em busca de correlações entre uma grandeza física associada ao evento que gerou a onda gravitacional e um parâmetro estatístico calculado com os dados da série temporal. Foram criados códigos capazes de acessar, baixar, realizar o tratamento de frequências e selecionar a janela temporal adequada para que o sinal expresso em uma série temporal, pudesse ser analisado por meio da estatística descritiva e a estatística de multiescala. Após as análises realizadas, com os dados dos detectores de *Livingston* e *Hanford*. Pode-se concluir que a estatística descritiva, por meio dos métodos utilizados, não possui bons indicadores de parâmetros físico. A estatística de multiescala, por outro lado, obteve resultados significantes com o expoente de Hurst, tornando possível inferir a Chirpmass, que é uma grandeza relacionada a massa do sistema coalescente, por meio desse parâmetro que detecta comportamentos fractais. Os resultados obtidos apontam para uma possível natureza multifractal das ondas gravitacionais, o que sugere uma análise utilizando métodos mais robustos tais com métodos multifractais e estatísticas não-extensivas.

Palavras – Chave: Séries temporais. Ondas Gravitacionais. LIGO. Expoente de Hurst. Fractal.

ABSTRACT

In the present work, statistical analyzes were carried out in the gravitational waves time series. Those gravitational waves were generated by Binaries-Black Hole systems and detected by LIGO. This research was made to search for correlations between a physical quantity associated with the event that generated the gravitational wave and a statistical parameter calculated with the series data temporal. We wrote codes in Python capable of accessing, downloading, processing frequencies and select the appropriate time window for the signal expressed in a time series, to be analyzed using descriptive statistics and the multiscale statistics. After the analyzes was carried out with the data from the LIGO detectors in Livingston and Hanford. It can be concluded that descriptive statistics, through the methods used, do not have good physical parameters indicators. The multiscale statistic, on the other hand, obtained significant results with the Hurst exponent, making it possible to infer the Chirpmass, which is a quantity related to the mass of the coalescing system. This parameter detects fractal behaviors. The results show a possible multifractal nature of the gravitational waves time series, which suggests an analysis using more robust methods such as multifractal methods and non-extensive statistics.

Key-words: Time series. Gravitational Waves. LIGO. Hurst exponent. Fractal.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIMBOLOS

- *LIGO* – Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory
- BBH – Binary Black Hole
- BNS – Binary Neutron Stars
- GWOSC – Gravitational Wave Open Science Center
- GW – Gravitational Wave
- FFT – Fast Fourier Transform
- DFT – Discrete Fourier Transform
- *H1* – Detector *LIGO* Hanford
- *L1* – Detector *LIGO* Livingston
- R_{uv} – Tensor de Curvatura de Ricci
- g_{uv} – Tensor métrico (“métrica”)
- $\mathcal{R}$ - Curvatura escalar
- T_{uv} – Tensor Momento – Energia
- h - Deformação Strain
- ω_0 – Frequência fundamental
- θ_n - Ângulo de Fase
- μ – Média Aritmética
- σ - Desvio Padrão
- σ^2 – Variância
- A_{max} – Amplitude máxima de frequência
- M_f - Massa final. [$M_\odot$]
- $\mathcal{M}$ - *Chirpmass*. [$M_\odot$]
- $M_1 - M_2 = \Delta M$ - Diferença das Massas. [$M_\odot$]
- d_L - Distância. [Mpc]
- *SNR* - Signal Noise Ratio.
- t_{INF} - Tamanho do Intervalo Inferior da Janela. [s]
- t_{SUP} - Tamanho do Intervalo Superior da Janela. [s]
- H – Expoente de Hurst
- $|r|$ – Coeficiente de correlação Produto-Momento
- $M_\odot$ - Massa solar
- *ASD* – *Amplitude Spectral Density*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Efeito da passagem de uma onda gravitacional com polarização (+) por um anel de partículas.	21
Figura 2 - Efeito da passagem de uma onda gravitacional com polarização (×) por um anel de partículas.	21
Figura 3 - Gráficos das séries temporais e comparações com os modelos da Relatividade Geral para os detectores de Livingston e Hanford referentes a <i>GW150914</i> : A primeira onda gravitacional detectada.	23
Figura 4 - Diagrama do Advanced <i>LIGO</i> e seu funcionamento.	23
Figura 5 - Representações das interferências construtiva (esquerda) e destrutiva (direita).	24
Figura 6 - Faixas de Sensibilidade dos detectores do GWOSC.	25
Figura 7 - Níveis de sensibilidade do <i>LIGO</i> durante a O1.	25
Figura 8 - Níveis de sensibilidade do <i>LIGO</i> durante a O2.	26
Figura 9 - Visualização de um sinal no domínio do tempo e da frequência.....	28
Figura 10 – ASD (Amplitude de densidade espectral) – deformação relativa normalizada em função da frequência da <i>GW150914</i>	29
Figura 11 - Cálculo da mediana para um conjunto de dados de tamanho $N=8$	30
Figura 12 - Representações geométricas para as regressões simples e múltipla, a e b, respectivamente.	33
Figura 13 - Nível de correlação baseado no valor de r	34
Figura 14 - Fractal ilustrado, representando uma imagem que é auto semelhante.	35
Figura 15 - Diferença entre as Dimensões Euclidianas e as Dimensões Fractais....	36
Figura 16 - Painel superior: Representação ilustrativa de X_t , $\xi(t)$, ξ_τ e R em uma barragem. Painel inferior: Comportamento desses parâmetros ao longo de trinta anos.	38
Figura 17 - Descrição da Janela temporal em termos do GPS.....	47

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - <i>GW150914</i> - <i>H1</i> - Dados puros antes do tratamento de frequências.	43
Gráfico 2 - <i>GW150914</i> - <i>H1</i> - Dados após o tratamento de frequências.	43
Gráfico 3 - ASD do sinal da <i>GW150914</i> detectada pelo <i>H1</i>	44
Gráfico 4 - Gráficos de Massa final por Desvio padrão para ambos os detectores. .	50
Gráfico 5 - Gráficos de <i>Chirpmass</i> por Desvio padrão para ambos os detectores. ...	50
Gráfico 6 – Gráficos de Distância por Desvio padrão para ambos os detectores. ...	51
Gráfico 7 - Gráficos de Diferença das Massas por Desvio padrão para ambos os detectores.	51
Gráfico 8 - Gráficos de <i>SNR</i> por Desvio padrão para ambos os detectores.	52
Gráfico 9 - <i>SNR</i> por Expoente de Hurst para o detector <i>L1</i>	53
Gráfico 10 - <i>SNR</i> por Expoente de Hurst para o detector <i>H1</i>	54
Gráfico 11 – Análise de $M_{final} \times H$ para ambos os detectores e todas as amostras.	55
Gráfico 12 - Análise de $M_{final} \times H$ para ambos os detectores e $SNR \geq 9,6$	56
Gráfico 13 - Análise de $\mathcal{M} \times H$ para ambos os detectores e todas as amostras.	56
Gráfico 14 - Análise de $\mathcal{M} \times H$ para ambos os detectores e $SNR \geq 9,6$	57
Gráfico 15 - Análise de $dL \times H$ para ambos os detectores e todas as amostras.	59
Gráfico 16 - Análise de $dL \times H$ para ambos os detectores e $SNR \geq 9,6$	59
Gráfico 17 - Análise de $M1 - M2 \times H$ para ambos os detectores e todas as amostras.	60
Gráfico 18 - Análise de $M1 - M2 \times H$ para ambos os detectores e $SNR \geq 9,6$	60
Gráfico 19 – Gráficos de cores: <i>Chirpmass</i> x Expoente de Hurst x <i>SNR</i> para ambos os detectores. Sendo o <i>SNR</i> representado pela escala em cores contendo todas as amostras.	62
Gráfico 20 - Gráficos de cores: <i>Chirpmass</i> x Expoente de Hurst x <i>SNR</i> para ambos os detectores. Sendo o <i>SNR</i> representado pela escala em cores. Para $SNR \geq 9,6$	63
Gráfico 21 - Representação 2D das relações individuais das três variáveis para o detector <i>L1</i>	64
Gráfico 22 - Representação 2D das relações individuais das três variáveis para o detector <i>H1</i>	64
Gráfico 23 - Comportamento do expoente de Hurst com janelas constantes para cada evento.	66

Gráfico 24 - Ajuste linear - para janela $M = 13,3$	67
Gráfico 25 - Ajuste linear - para janela $M = 63,1$	67
Gráfico 26 - Ajuste linear - para janela $M = 175$	67
Gráfico 27 - Forma de Onda da <i>GW190521</i>	68
Gráfico 28 - Forma de Onda da <i>GW151226</i>	68
Gráfico 29 - Gráficos em 3D: <i>Chirpmass</i> x Expoente de Hurst x <i>SNR</i> para ambos os detectores. Contendo todas as amostras e os planos de ajuste descritos pelas equações da tabela 5.	88
Gráfico 30 - Gráficos em 3D: <i>Chirpmass</i> x Expoente de Hurst x <i>SNR</i> para ambos os detectores. Com $SNR \geq 9,6$ e contendo os planos de ajuste descritos pelas equações da tabela 5.....	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Avaliação qualitativa do grau de correlação entre duas variáveis.....	34
Tabela 2 - Índices de Correlação detector <i>L1</i>	57
Tabela 3 - Índices de Correlação detector <i>H1</i>	58
Tabela 4 – Coeficientes de Correlação da Regressão Múltipla entre Expoente de Hurst e <i>SNR</i> por <i>Chirpmass</i> para ambos os detectores.	61
Tabela 5 – Equações da Regressão Múltipla entre Expoente de Hurst e <i>SNR</i> por <i>Chirpmass</i> para ambos os detectores.	61
Tabela 6 - Lista de eventos selecionados.	76
Tabela 7 - Frequências removidas e quantidades máximas - detector <i>L1</i>	78
Tabela 8 - Frequências removidas e quantidades máximas - detector <i>H1</i>	80
Tabela 9 - Dados finais, obtidos pelo programa em <i>python</i> , utilizados na análise final.	82
Tabela 10 - Resultados da Análise Descritiva para ambos os detectores.	84
Tabela 11 - Resultados dos cálculos do expoente de Hurst para $\tau = 20$, $\tau = 40$ e $\tau = 60$ para ambos os detectores.	86

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
2. OBJETIVOS	17
2.1. Objetivo Geral.....	17
2.2. Objetivos Específicos	17
3. JUSTIFICATIVA.....	18
4. REFERENCIAL TEÓRICO	20
4.1. Relatividade Geral.....	20
4.2. Ondas Gravitacionais	20
4.2.1. Noções Básicas	20
4.2.2. A primeira detecção direta de ondas gravitacionais.....	22
4.2.3. Introdução ao <i>LIGO</i>	23
4.2.4. Sensibilidade do detector.....	24
4.3. Séries temporais	26
4.3.1. Transformada rápida de Fourier (FFT)	27
4.4. Estatística Descritiva	29
4.4.1. Definição	29
4.4.2. Parâmetros estatísticos descritivos.....	29
4.5. Ajustes das Curvas.....	31
4.6. Coeficiente de Correlação Produto-Momento (r).....	33
4.7. Estatística de Multiescala.....	35
4.7.1. Noções básicas.....	35
4.7.2. Séries temporais como objetos fractais	36
4.7.3. O Expoente de Hurst.....	37
5. METODOLOGIA DA PESQUISA.....	41
5.1. Selecionando dados	41
5.2. Acessando, Tratando e Armazenando os Dados.....	43

5.3.	Definindo a Janela Temporal.	46
6.	RESULTADOS E DISCUSSÕES	49
6.1.	Análise com estatística descritiva	49
6.2.	Contribuições do <i>SNR</i>	53
6.3.	Análise Fractal com o expoente de Hurst	54
6.4.	Regressão Múltipla	61
6.5.	Tamanho da janela temporal.....	65
7.	CONCLUSÃO.....	69
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72
	APÊNDICE A – Lista de eventos selecionados	76
	APÊNDICE B – Lista de frequências removidas	78
	APÊNDICE C – Tabela de dados coletados do gwosc e tamanho das janelas temporais.	82
	APÊNDICE D – Resultados da análise descritiva.....	84
	APÊNDICE E – Resultados da análise fractal com expoente de hurst.....	86
	APÊNDICE F – Gráficos tridimensionais com planos de ajuste da regressão múltipla	88
	APÊNDICE G – Códigos em <i>Python</i> utilizados para a realização do trabalho.	90

1. INTRODUÇÃO

De acordo com a teoria da cosmologia moderna, há 14 bilhões de anos, após o surgimento dos primeiros átomos, deu-se início a expansão do universo que perdura até os dias de hoje. Esse é o modelo do *Big Bang* que, segundo Nascimento (2018), é fundamentado também pela teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, que foi publicada em 1915. Essa teoria descreve a maneira como o espaço é curvado na presença de matéria, explicando assim a atração gravitacional, não como uma força, e sim como uma consequência dessa curvatura.

A publicação da teoria da relatividade trouxe várias pautas científicas. Além de prever a existência de buracos negros, que são corpos celestes de alta densidade cujos os quais nem a luz consegue escapar, a maneira como Einstein descreveu o espaço-tempo, segundo Bertolami (2017), permite a existência de perturbações que se propagam distorcendo-o e causando dilatações espaciais e temporais por onde passam. Esse tipo de perturbação é chamado de onda gravitacional, é gerado por massas em movimento acelerado e, assim como as ondas mecânicas e eletromagnéticas, é capaz de transportar energia. Einstein previu com sua teoria, mas duvidava que as ondas gravitacionais pudessem ser detectadas experimentalmente, isso porque a interação gravitacional das ondas é muito fraca, sendo que a dilatação espacial causada por elas é da ordem de um décimo milésimo do diâmetro de um próton. Dado o contexto histórico, com a tecnologia da década de 1910, construir um detector sensível a essas deformações espaciais não passava de ficção.

Com o tempo surgiram ideias para realizar a detecção de uma onda gravitacional. Segundo LIGO Lab | Caltech (2017), o físico, Joseph Weber, na década de 1960, realizou a primeira tentativa, utilizando grandes cilindros de alumínio que, supostamente, iriam vibrar com a passagem de uma onda gravitacional e apesar de não obter sucesso, o físico foi responsável por abrir as cortinas para aqueles que queriam ouvir os “sons do universo”: As ondas gravitacionais. No ano de 1962, a teoria de usar um interferômetro a laser para medir as deformações foi proposta por Michael Gertsenshtein e Vladislav Pustovoit e 30 anos depois *Hanford* e *Livingston* foram escolhidos como locais para a construção dos interferômetros do *LIGO* (Observatório de Ondas Gravitacionais por Laser-Interferometria, em tradução livre), o detector que foi dito (LIGO Lab | Caltech (2016)) como “A régua mais precisa já construída” e foi

capaz, segundo ABBOTT, P.B. *et al* (2016), em 14 de setembro de 2015, de realizar a primeira detecção de ondas gravitacionais.

Segundo ABBOTT, P.B. *et al* (2016), o dispositivo se utiliza de espelhos para refletir o laser que percorre sua estrutura. A interferência gerada pela superposição dos raios luminosos refletidos pelos espelhos, dá ao *LIGO* a capacidade de armazenar os dados relativos à deformação espacial. Extrair informações como massa e distância sobre a fonte geradora da onda é crucial para compreender e analisar o evento, sendo assim o presente trabalho se propôs a utilizar estatística descritiva e estatística de multiescala para buscar correlações entre as grandezas associadas a série temporal (desvio padrão, média etc.) e as grandezas físicas (massa, distância etc.) atreladas ao evento, podendo assim facilitar este processo.

Este trabalho seguiu um escopo que evolui gradativamente e vai desde a parte introdutória motivadora até uma conclusão que pode ser considerada parcial tendo em vista a possibilidade de uma possível continuação em trabalhos futuros. A introdução será seguida dos objetivos gerais e específicos, que descrevem o intuito desse trabalho perante uma justificativa plausível. Em outras palavras o trabalho buscou cumprir seus objetivos visando resolver um problema que foi justificado na seção posterior.

Logo após tem-se a fundamentação teórica que embasa os conteúdos discutidos e traz as ferramentas necessárias para a realização e análise da pesquisa. Na seguinte seção tem-se a metodologia da pesquisa, que explica o passo a passo para seu desenvolvimento, que é seguida pela exposição e discussão dos resultados. Por fim o trabalho traz as conclusões finais, onde buscou-se fazer a síntese dos resultados buscando alcançar o objetivo geral.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo Geral

- Verificar a existência de uma correlação entre uma ou mais grandezas físicas associadas a fonte geradora de uma onda gravitacional e uma grandeza estatística calculada através dos dados coletados pelo *LIGO*.

2.2. Objetivos Específicos

- Selecionar, pela massa dos objetos, todas as ondas gravitacionais detectadas referentes as colisões do tipo BBH (Binário de Buracos Negros em tradução livre), excluindo os eventos que envolvam estrelas de Neutrons como os BNS (Binário de Estrelas de Neutros em tradução livre), já detectadas pelo *LIGO* utilizando a biblioteca *GWpy* do *python*.
- Coletar e armazenar os dados brutos das séries temporais fornecidas pela equipe do *LIGO* utilizando o *GWpy*.
- Desenvolver um critério que define quais frequências devem ser eliminadas bem como os intervalos viáveis e depois realizar a filtragem de frequências.
- Desenvolver um critério para o tamanho da janela temporal que contém a onda gravitacional. Para que, com o critério bem estabelecido, seja possível aplicar as técnicas de estatística descritiva, ou até mesmo estatística de multiescala.
- Extrair o máximo de informações estatísticas das amostras, associadas somente a série temporal e compará-las aos valores das grandezas físicas como massa e distância fornecidas pelo GWOSC na busca de uma relação matemática entre elas.
- Estabelecer métodos computacionais que utilizam estatística para obtenção dos parâmetros físicos dos sistemas coalescentes de buracos negros que geram as ondas gravitacionais.

3. JUSTIFICATIVA

Segundo ABBOTT et al. (2016), em 1916 foi publicada a primeira solução para as equações de campo de Einstein que descreve um buraco negro. Mais tarde, em 1963, Kerr foi capaz de generalizar essa solução para buracos negros em rotação. Devido a não linearidade das equações, o fato de adicionar a rotação em um buraco negro, aumentou consideravelmente a dificuldade para solucioná-las por métodos analíticos. Desse modo, para descrever os sistemas coalescentes de buracos negros e prever a forma das ondas gravitacionais foi necessário utilizar métodos computacionais, mais tarde essa área viria a se tornar um ramo fundamental da relatividade geral: A relatividade numérica. “A relatividade numérica é um dos ramos da relatividade geral que usa métodos e algoritmos numéricos para resolver e analisar problemas.” (STRING FIXER, 2018)

A relatividade numérica trouxe grandes desafios. “O progresso na relatividade numérica tridimensional foi impedido em parte pela falta de computadores com memória e poder computacional suficientes para realizar cálculos bem resolvidos de espaços-tempos 3D.” (ANNINOS et al., 1995). Com esta frase, Anninos et al. (1995) tornou evidente um dos maiores obstáculos para as resoluções das equações de campo para sistemas coalescentes: O baixo poder computacional. Esse problema perdurou até o ano de 2005, quando foram utilizados os métodos do projeto Lazarus, de Baker, Campanelli e Lousto (2002).

Apesar de já existirem computadores capazes de resolver as equações utilizando os métodos atuais, este processo, como demonstra a história, demanda um grande poder computacional, um grande tempo computacional e o uso de algoritmos capazes de driblar as divergências numéricas baseados na Relatividade Geral. Diante desta situação, tornou-se válido buscar parâmetros estatísticos bem definidos analiticamente atrelados a série temporal, para compará-los aos dados disponibilizados pelo GWOSC que foram inferidos através da relatividade numérica. Desse modo, esta pesquisa realizou diversos tipos de comparações utilizando estatísticas descritiva e de multiescala para chegar a um consenso a respeito deste tema pertinente.

O método utilizado na detecção da primeira onda gravitacional para estimar a *Chirpmass*, que é uma combinação das massas dos buracos negros que geraram a onda gravitacional, é baseado, segundo ABBOTT, P.B. et al (2016), na frequência e na derivada temporal da frequência que são combinadas com a constante da

gravitação e a velocidade da luz no vácuo como mostra a equação 3 (seção 4.2.1). Até então foram lançadas 3 versões de diferentes catálogos que trazem análises respectivas a primeira detecção cujos os valores de *Chirpmass* são um pouco diferentes. Dessa forma, buscar uma maneira de calcular tal parâmetro, que dispensa a utilização direta da relatividade numérica e do cálculo diferencial, é imprescindível, pois assim é possível reafirmar os resultados com um maior nível de confiabilidade e possivelmente estimar os parâmetros com mais facilidade. Os parâmetros estatísticos estão ligados intimamente às séries temporais. Sendo assim é possível enxergar essas séries como gráficos de dispersão ou objetos fractais que carregam consigo informações sobre seu comportamento. Desse modo seus parâmetros podem carregar informações sobre os eventos que geraram a série, no caso, o sistema coalescente de buracos negros.

4. REFERENCIAL TEÓRICO

4.1. Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral foi divulgada por Albert Einstein em 1915. “Ela consiste em um conjunto de hipóteses que generaliza a relatividade especial e a lei da gravitação universal de Newton, fornecendo uma descrição da gravidade como uma propriedade geométrica do espaço-tempo.” (AGUIAR, 2018). Segundo Aguiar (2018), essa teoria, além de apontar para existência de buracos negros e a curvatura da luz na presença de campos gravitacionais, também aponta para a existência de ondas gravitacionais. Após as devidas formulações matemáticas, bem descritos por Aguiar (2018) em sua monografia, respeitando os princípios fundamentais da relatividade geral, é possível chegar as “equações de movimento” dadas pela equação de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

“O espaço diz à matéria como se mover; a matéria diz ao espaço como se curvar” (WHEELER; FORD, 1998). Apesar de não estar em total acordo com os princípios relativísticos, a frase de Wheeler e Ford (1998) retrata bem a relação mútua entre o espaço-tempo e a matéria descrita pela equação acima. Ao tratar dessa equação linearizada no vácuo, é possível perceber, como disse Aguiar 2018, que ela permite que ondas se propaguem pela estrutura do espaço tempo e essas são as ditas ondas gravitacionais.

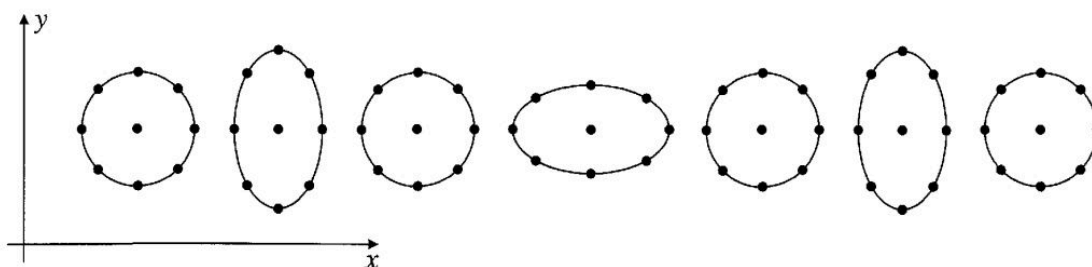
4.2. Ondas Gravitacionais

4.2.1. Noções Básicas

As ondas gravitacionais são perturbações que se propagam pelo espaço-tempo distorcendo-o. Segundo Nascimento (2018), ao estudar a passagem de uma onda gravitacional por um conjunto de partículas organizadas em forma de anel, que se encontram em um determinado referencial local de Lorentz, de acordo com a teoria da relatividade geral, existem dois tipos de polarização previstos que definem o comportamento do espaço no qual o anel de partículas está contido: A polarização ($\times$) e a Polarização (+). Ver-se abaixo nas figuras 1 e 2 a ações da passagem de

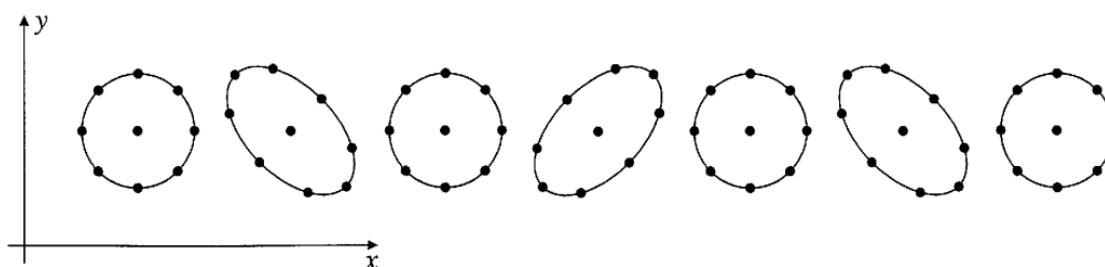
uma onda gravitacional, de acordo com seu tipo de polarização, pelo anel de partículas.

Figura 1 - Efeito da passagem de uma onda gravitacional com polarização (+) por um anel de partículas.



Fonte: CARROLL, 2004.

Figura 2 - Efeito da passagem de uma onda gravitacional com polarização ($\times$) por um anel de partículas.



Fonte: CARROLL, 2004.

Segundo Maggiore (2018), corpos que possuem massa em movimento acelerado geram ondas gravitacionais, isso inclui pessoas, carros e os grandes corpos celestes, por exemplo, em sistemas coalescentes. Vale salientar que as ondas gravitacionais, assim como outros tipos de ondas, transportam energia, sendo essa, uma das maneiras de se notar uma onda gravitacional, uma vez que, segundo Aguiar (2018), é possível obter uma expressão para a energia da onda usando o teorema de Noether, o que a torna bem definida.

Um dos parâmetros físicos que será utilizado para a descrição das ondas gravitacionais é a *Chirp mass* que, segundo Cutler e E. Flanagan (1994), é uma combinação das massas M_1 e M_2 referentes as massas dos corpos celestes que geraram a onda gravitacional. M_1 se refere ao corpo mais massivo e M_2 o menos

massivo. Segundo ABBOTT, P.B. *et al* (2016), a *Chirpmass* pode ser calculada pelas equações abaixo:

$$\mathcal{M} = \frac{(M_1 M_2)^{\frac{3}{5}}}{(M_1 + M_2)^{\frac{1}{5}}} \quad (2)$$

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\frac{5}{96} \pi^{-\frac{8}{3}} f^{-\frac{11}{3}} \dot{f} \right)^{\frac{3}{5}} \quad (3)$$

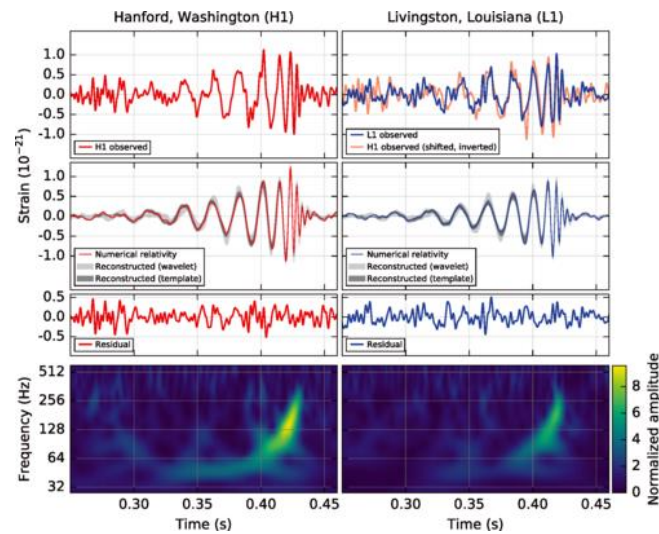
Também necessário dar importância a maneira como o *LIGO* opera quando se trata de armazenamento de dados. O *LIGO* possui sua própria linha do tempo, que é medida em tempos GPS. Um tempo GPS equivale a um segundo, porém a referência desse sistema temporal, ou seja, o momento no qual se iniciou a contagem foi às 21 horas do dia 5 de janeiro de 1980. Desse modo as ondas gravitacionais são marcadas nessa linha do tempo possuindo um valor de tempo GPS atrelado a essa escala.

4.2.2. A primeira detecção direta de ondas gravitacionais

A primeira detecção de ondas gravitacionais se deu de forma indireta quando Russell A. Hulse e Joseph H. Taylor Jr. (1974) descobriram um Pulsar Binário e observaram variações periódicas nos pulsos enviados pelo pulsar. Segundo Nepomuceno (2016), ao utilizar a teoria da relatividade, descobriu-se que o pulsar estava em um sistema coalescente com outra estrela e por decorrência disso, posteriormente, pôde-se perceber que, o fato de ocorrerem as variações periódicas nos pulsos do pulsar, estava associado a deformação causada no espaço-tempo pelas massas, ou seja, a formação de ondas gravitacionais que “roubavam” energia do pulsar.

Só em 2015, no dia 14 de setembro, foi detectada a primeira onda gravitacional de maneira direta: A *GW150914*. A figura 4 mostra a forma da onda gravitacional pela perspectiva de ambos os detectores do *LIGO*.

Figura 3 - Gráficos das séries temporais e comparações com os modelos da Relatividade Geral para os detectores de Livingston e Hanford referentes a *GW150914*: A primeira onda gravitacional detectada.



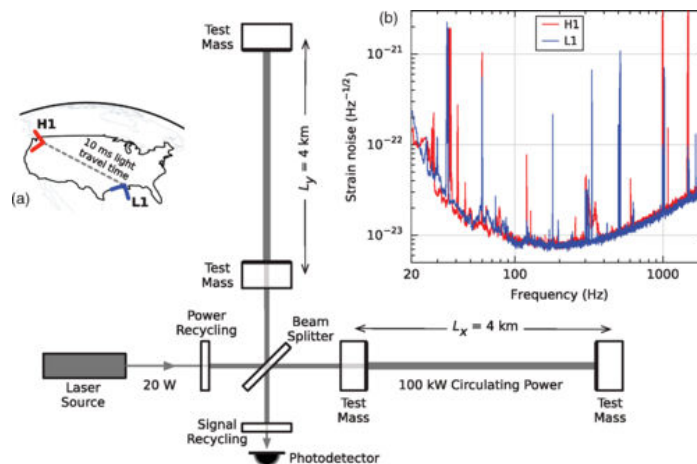
Fonte: ABBOTT, P.B. *et al*, 2016.

4.2.3. Introdução ao *LIGO*.

Essa detecção foi realizada pelo *LIGO*, ABBOTT, P.B. *et al.*, que se utiliza do fenômeno da dilatação espacial mostrado nas figuras 1 e 2.

LIGO significa "Observatório de ondas gravitacionais com interferômetro a laser". É o maior observatório de ondas gravitacionais do mundo e uma maravilha da engenharia de precisão. Composto por dois enormes interferômetros a laser localizados a 3.000 quilômetros de distância, o *LIGO* explora as propriedades físicas da luz e do próprio espaço para detectar e entender as origens das ondas gravitacionais (*GW*). (*LIGO* Lab | Caltech, 2019)

Figura 4 - Diagrama do Advanced *LIGO* e seu funcionamento.



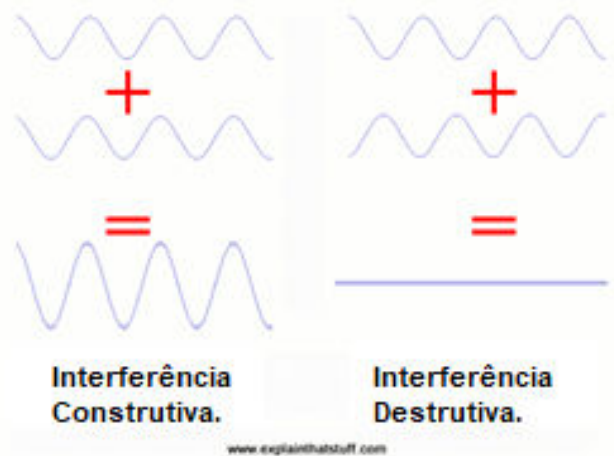
Fonte: ABBOTT, P.B. *et al*, 2016.

O *LIGO*, é formado por dois braços e opera baseado em interferências, assim como pode-se ver na figura 4. Quando a luz (onda eletromagnética) percorre os braços do detector e retorna para o mesmo ponto, ela pode sofrer defasagem devido a diferença entre as distancias percorridas pelos raios de luz em cada braço. É dessa maneira que o detector se torna sensível a ondas gravitacionais, pois quando uma onda gravitacional atravessa o detector, os braços ortogonais mudam, ligeiramente, de comprimento sendo comprimidos e expandidos alternadamente. Com isso o Fotodetector é capaz de detectar, pelas interferências (figura 5), os efeitos da onda gravitacional e armazenar os dados de h (deformação relativa) versus tempo. Segundo Nascimento (2018) a deformação relativa pode ser escrita como:

$$h \sim \frac{\Delta L}{L} \quad (4)$$

Onde L é o comprimento do braço do detector.

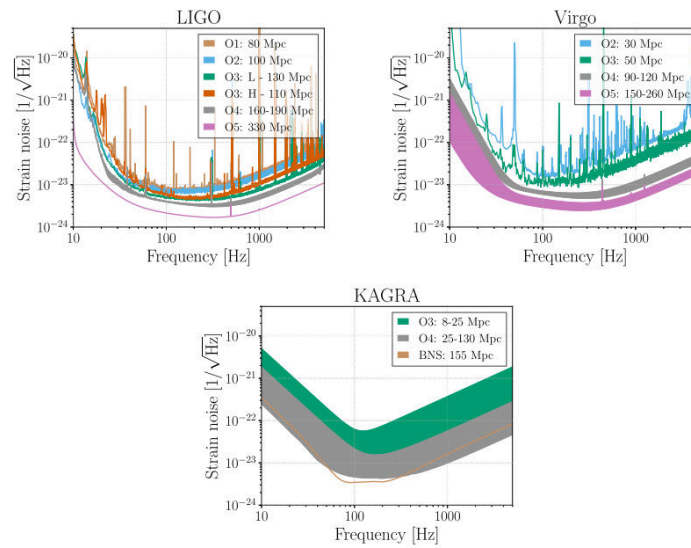
Figura 5 - Representações das interferências construtiva (esquerda) e destrutiva (direita).



Fonte: Adaptada de *LIGO LAB* | CALTECH, 2019

4.2.4. Sensibilidade do detector

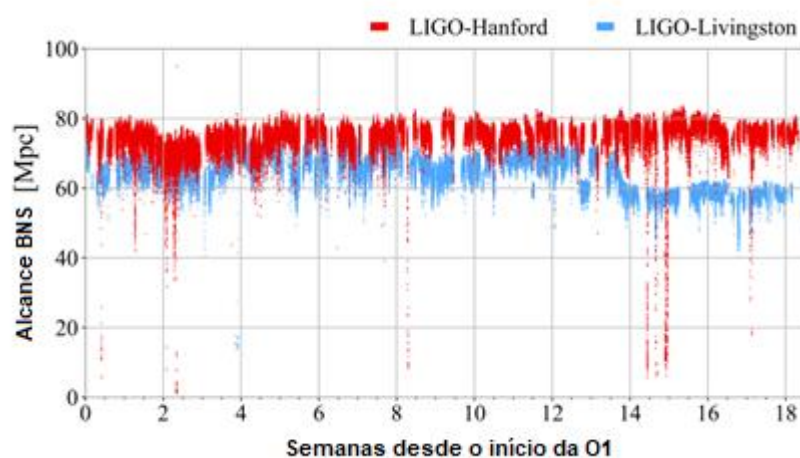
A equipe do GWOSC (Perde o sentido na tradução) conta com quatro detectores: *LIGO Hanford*, *LIGO Livingston*, VIRGO e o KAGRA. Mas, os dois últimos, segundo Abbott et al. (2020), ainda possuem níveis de sensibilidade baixos e não participaram de todas as corridas de observação, assim como é visto na figura 6.

Figura 6 - Faixas de Sensibilidade dos detectores do GWOSC.

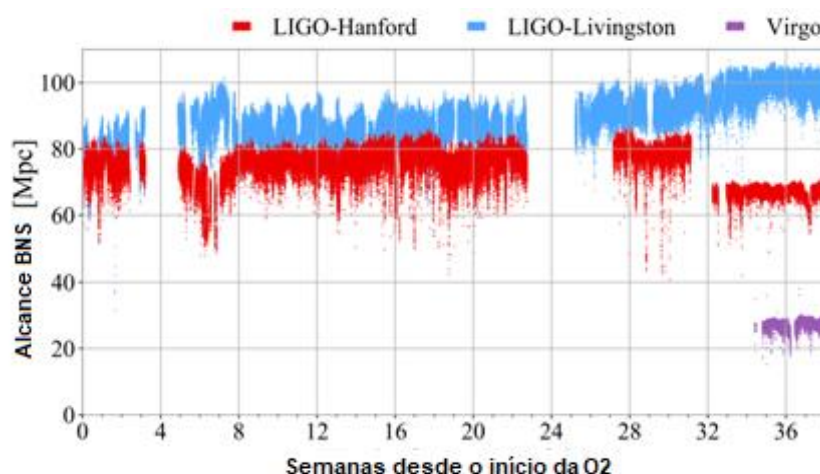
Fonte: (ABBOTT et al., 2020)

Pelo fato de possuir menores faixas de sensibilidade e não estarem ativos na primeira corrida de observações, neste trabalho optou-se por utilizar apenas os dados advindos do *LIGO*.

Outro fato interessante sobre a sensibilidade do *LIGO* é que ela muda a corrida de observações, pois nos intervalos são feitas melhorias nos detectores para aumentá-la. É importante notar também que há uma diferença de sensibilidade até mesmo entre os dois detectores do *LIGO* e essa diferença deve ser levada em conta na desenvoltura deste trabalho. Nas figuras 7 e 8 é possível ver o nível de sensibilidade dos dois detectores na O1 e O2, respectivamente.

Figura 7 - Níveis de sensibilidade do *LIGO* durante a O1.

Fonte: Adaptada de ABBOTT et al., 2019.

Figura 8 - Níveis de sensibilidade do *LIGO* durante a O2.

Fonte: Adaptada de ABBOTT et al., 2019.

Analizando as figuras 7 e 8 é possível perceber que durante a primeira corrida, o detector de *Hanford* possuía maiores níveis de sensibilidade, porém, na segunda corrida, a sensibilidade do detector de *Livingston* aumentou e superou a do detector de *Hanford*. Esses níveis de sensibilidade podem trazer diferenças às formas de ondas que são captadas pelos detectores e interferir diretamente na análise estatística.

4.3. Séries temporais

Quando uma onda gravitacional passa pelo espaço no qual os braços ortogonais do *LIGO* estão contidos, ocorre uma dilatação espacial que torna as medidas dos braços levemente diferentes, gerando níveis de interferência no detector, que são armazenados instantaneamente, associando deformação à instante de tempo gerando assim uma série temporal. “A definição mais simples para uma série temporal é a disposição de medidas de uma determinada grandeza ao longo do tempo. Quando essa medição não se dá de forma contínua, temos uma série temporal discreta.” (NEPOMUCENO, 2016, p.4). Junto ao grande desafio de conseguir detectar as *GW* (ondas gravitacionais), surgiu também a necessidade de processar e interpretar o conjunto de dados (séries temporais) fornecidos pelo detector.

Se for gerado um gráfico de deformação por tempo de uma série temporal bruta (sem nenhum processamento) vinda do *LIGO*, é praticamente impossível detectar, a olho nu, a presença de qualquer padrão advindo de uma onda gravitacional. Apesar dos esforços da equipe do *LIGO* para eliminar ruídos e isolar os espelhos para que

não sofram interferências externas, por se tratar de medidas tão sucintas, o detector registra em seus dados outros sinais de maior amplitude, que predominam na série temporal bruta. Segundo *LIGO* Lab (2019), o *LIGO* é um grande sismômetro capaz de detectar vários tipos de vibração.

4.3.1. Transformada rápida de Fourier (FFT)

Como foi dito por Nepomuceno (2016), as séries temporais podem ser contínuas ou discretas e para ambos os tipos de séries temporais podem ser utilizadas técnicas para gerar séries de frequência que representam o sinal não mais no domínio do tempo, e sim da frequência. A transformada de Fourier é uma técnica fundamental que foi expandida e generalizada para tempos discretos. “A série trigonométrica compacta de Fourier da Eq. (6.12) indica que um sinal periódico $x(t)$ pode ser descrito como a soma de senóides de frequências 0 (cc), $\omega_0, 2\omega_0, \dots, n\omega_0, \dots$ cujas amplitudes são $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ e fases são $0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$ respectivamente.” (LATHI, 2006, p.532). A equação a qual o autor se refere se encontra logo abaixo:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (5)$$

Essa é a forma reduzida que descreve a transformada de Fourier para um sinal contínuo e periódico. No livro, Lathi (2006) utiliza o teorema da amostragem e de conversões A/D (analógico para digital) para trabalhar a transformada de Fourier com sinais discretos. Esse método é comumente chamado de DFT (Discrete Fourier Transform que se traduz como Transformada Discreta de Fourier), utilizando a seguinte equação:

$$x_n = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{\infty} X_r e^{jr\Omega_0 n} \quad (6)$$

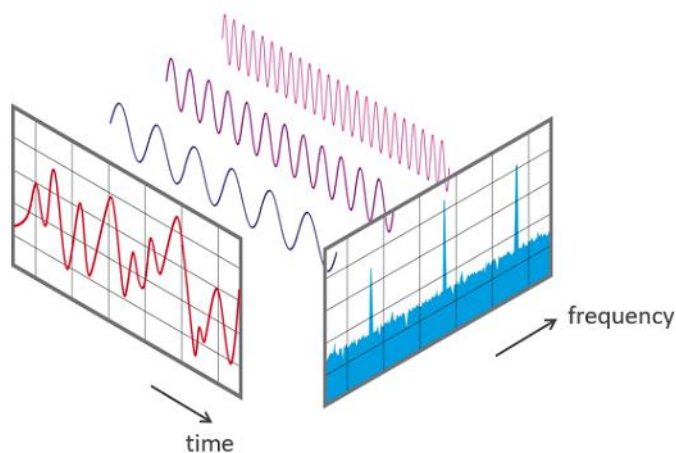
Vale salientar que, “Se $x(t)$ ou $X(\omega)$ possuir um salto de descontinuidade no ponto de amostragem, o valor da amostra deve ser considerado como sendo a média dos valores dos dois lados da descontinuidade” (LATHI, 2006, p.704).

A autora Marcia Bartusiak deu ao seu livro o seguinte título: “Einstein's Unfinished Symphony: Listening to the Sounds of Space-Time” (Em tradução livre: A sinfonia inconclusa de Einsten: Ouvindo os sons do Espaço-tempo) (BARTUSIAK,

2000). Essa frase se refere a ouvir os sons do espaço tempo, que são na verdade as ondas gravitacionais. Não existe som no vácuo do espaço, mas as ondas gravitacionais são análogas as ondas sonoras, por este motivo, a transformada discreta de Fourier é tão útil para análise das séries temporais advindas do *LIGO* quanto para a engenharia de áudio. Bianchi (2014) utilizou o tempo que um microprocessador demora para calcular a FFT (Fast Fourier Transform que se traduz como Transformada Rápida de Fourier) como critério para análise do desempenho no processamento de áudio.

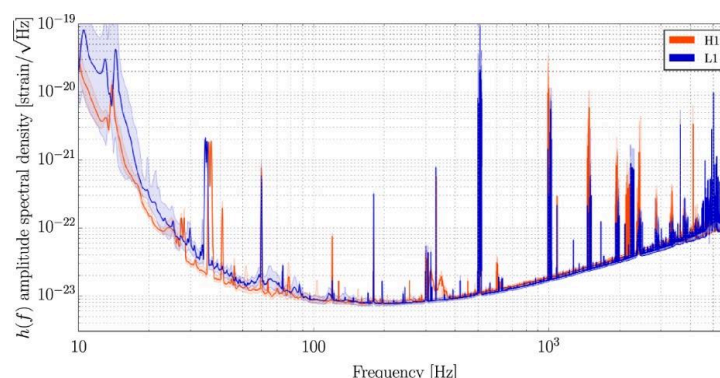
A FFT é, segundo Lathi (2006), um algoritmo desenvolvido por Cooley e Tukey em 1965 capaz de diminuir o número de cálculos da ordem de N_0^2 para $N_0 \log N_0$. Esse algoritmo é utilizado pela biblioteca *GWpy* para gerar as séries de frequência que são capazes de descrever os sinais captados pelo *LIGO*. Na figura 9 pode-se ver um sinal decomposto por suas componentes de frequência e o resultado da FFT.

Figura 9 - Visualização de um sinal no domínio do tempo e da frequência



Fonte: NTI ÁUDIO, 2019.

Figura 10 – ASD (Amplitude de densidade espectral) – deformação relativa normalizada em função da frequência da *GW150914*.



Fonte: ABBOTT et al., 2016, p. 10.

A figura 10 é um gráfico de ASD (Em português, Amplitude de densidade espectral) onde é demonstrada a caracterização de ruídos no sinal captado pelo *LIGO* durante a primeira detecção de ondas gravitacionais (*GW150914*), sendo um resultado prático da transformada rápida de Fourier. Através da distribuição de frequências é possível notar, por exemplo, uma forte contribuição da frequência de 60 *Hz* que possivelmente está atrelada a rede elétrica que oscila com a mesma frequência. Também é notório que a série contém sinais que não estão na faixa de frequências de melhor sensibilidade que, segundo Abbott et al. (2016), é de 50-300 *Hz*.

4.4. Estatística Descritiva

4.4.1. Definição

A estatística é utilizada em vários ramos do conhecimento humano. Vejamos a visão de Guedes (2005) a respeito da estatística descritiva:

A estatística descritiva, cujo objetivo básico é o de sintetizar uma série de valores de mesma natureza, permitindo dessa forma que se tenha uma visão global da variação desses valores, organiza e descreve os dados de três maneiras: por meio de tabelas, de gráficos e de medidas descritivas. (GUEDES, 2005)

4.4.2. Parâmetros estatísticos descritivos

- Número de elementos (*N*): condiz com o tamanho da amostra, o número de observações.

- Média (μ): É o resultado da divisão entre a soma de todos os valores do conjunto de dados pela quantidade de valores, segundo Guedes (2005).

Para um conjunto de dados.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (7)$$

Para uma distribuição de frequências, onde F_i representa o número de ocorrências na distribuição.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i F_i}{N} \quad (8)$$

- Mediana (M_d): é o valor central de um conjunto de dados (em ordem crescente), de maneira que a quantidade de dados abaixo da mediana é a mesma quantidade de dados acima da mediana, segundo Guedes (2005). A figura 11 ilustra o método utilizado para calcular a mediana.

Figura 11 - Cálculo da mediana para um conjunto de dados de tamanho N=8.

X	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄		x ₅	x ₆	x ₇	x ₈
Valor observado	0	1	1	2	$\frac{x_4 + x_5}{2}$	2	2	3	4

$\leftarrow$ 4 observações $\rightarrow$ $M_d=2$ $\leftarrow$ 4 observações $\rightarrow$

Fonte: GUEDES, 2005.

- Variância (σ^2): Segundo Morettin, P.A. e Bussab, W.D.O (2017) a variância é definida por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N} \quad (9)$$

- Desvio Padrão (σ): Segundo Morettin, P.A. e Bussab, W.D.O (2017) o desvio padrão é definido pela raiz quadrada da variância e é uma medida de dispersão indicando o quão dispersos os dados estão.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad (10)$$

4.5. Ajustes das Curvas

“Muitas vezes a posição dos pontos experimentais no diagrama de dispersão sugere a existência de uma relação funcional entre duas variáveis. Surge então o problema de se determinar uma função que exprima esse relacionamento.” (NETO, 2006). Diante disso, tem-se a regressão linear sendo a mais simples, por tratar de somente dois termos e a suas generalizações como por exemplo, a regressão polinomial. Vale salientar que existem bibliotecas do *python* que são munidas com ferramentas de ajustes de curva. A função *curvefit* da biblioteca *scipy* é capaz de realizar regressões lineares, polinomiais e até mesmo de outras funções como a exponencial.

Regressão Linear Simples: Trata-se de definir a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos. Sendo y a função da reta, segundo Neto (2006), tem-se:

$$y = ax + b \quad (11)$$

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (12)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (13)$$

Este método de ajuste também é chamado de método dos mínimos quadrados. Sobre ele, Lima e Zappa (2014), fizeram uma descrição matemática onde os coeficientes da reta podem ser reescritos da seguinte maneira.

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (14)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (15)$$

Regressão Polinomial: Trata-se de uma generalização da regressão linear que agora irá abranger mais termos, utilizando um exemplo de um ajuste para uma função de segundo grau. Segundo Neto (2006), tem-se o seguinte sistema de equações que pode ser sem grandes dificuldades utilizando os métodos computacionais atuais:

$$(16)$$

$$(17)$$

$$\begin{cases} \sum y_i = na + c \sum (x_i - \bar{x})^2 \\ \sum (x_i - \bar{x})y_i = b \sum (x_i - \bar{x})^2 \\ \sum (x_i - \bar{x})^2 y_i = a \sum (x_i - \bar{x})^2 + c \sum (x_i - \bar{x})^4 \end{cases} \quad (18)$$

Onde os parâmetros a, b e c são formam a equação da parábola:

$$y = a + bx + cx^2 \quad (19)$$

Em seu material descritivo para laboratórios, Lima e Zappa (2014) demonstraram também uma técnica muito utilizada para trabalhar com funções de potência: A linearização. Analisando uma função do tipo:

$$y = k * x^m \quad (20)$$

Aplica-se o logaritmo em ambos os membros da equação para que seja executada uma mudança de variável.

$$\log(y) = \log(k * x^m) \quad (21)$$

$$\log(y) = \log(k) + m * \log(x) \quad (22)$$

$$\begin{cases} Y = \log(y) \\ B = \log(k) \\ A = m \\ X = \log(x) \end{cases} \quad (23)$$

$$Y = B + AX \quad (24)$$

Com essa mudança de variável é possível utilizar o método dos mínimos quadrados, explanado anteriormente, para realizar ajustes do tipo linear.

Regressão Linear Múltipla: A regressão linear múltipla pode ser entendida como uma expansão generalizada da regressão linear simples, onde existe uma combinação linear de duas ou mais variáveis independentes, que resulta na variável dependente. Chein (2019, p.33), introduz em seu material, para exemplificar, o seguinte modelo de uma regressão simples onde Y_i é a variável dependente, o termo β_0 é a intersecção, β_1 é o coeficiente, X_i é a variável independente e ε_i é o erro associado.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (25)$$

Em seguida a autora introduz a expressão de uma regressão múltipla, que agora possui duas variáveis independentes X_{1i} e X_{2i} e tem-se os coeficientes β_1 e β_2

que são chamados de coeficientes parciais de regressão. Tal modelo de regressão múltipla está exposto logo abaixo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i \quad (26)$$

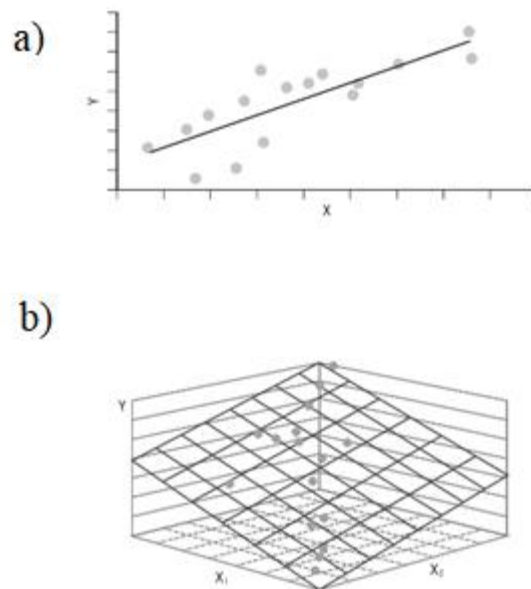
A figura 12, elaborada por Maia (2017), representa as configurações dos ajustes para ambos os modelos, sendo o painel superior a representação da reta da regressão simples e o painel inferior a representação do plano da regressão múltipla. Chein (2019, p.37), demonstra que os coeficientes parciais e a intersecção podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\beta_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \widehat{\beta}_2 \bar{X}_2 \quad (27)$$

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{(\sum Y_i X_{1i})(\sum X_{2i}^2) - (\sum Y_i X_{2i})(\sum X_{1i} X_{2i})}{(\sum X_{2i}^2)(\sum X_{1i}^2) - (\sum X_{1i} X_{2i})^2} \quad (28)$$

$$\widehat{\beta}_2 = \frac{(\sum Y_i X_{2i})(\sum X_{1i}^2) - (\sum Y_i X_{1i})(\sum X_{1i} X_{2i})}{(\sum X_{2i}^2)(\sum X_{1i}^2) - (\sum X_{1i} X_{2i})^2} \quad (29)$$

Figura 12 - Representações geométricas para as regressões simples e múltipla, a e b, respectivamente.



Fonte: Adaptada de MAIA, 2017, p.98.

4.6. Coeficiente de Correlação Produto-Momento (r)

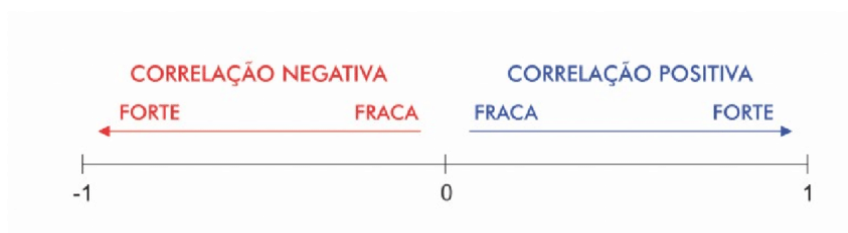
Segundo CALLEGARI-JACQUES (2003, p. 85), uma das maneiras de avaliar a correlação entre duas variáveis é por meio de um coeficiente. “O coeficiente de correlação produto-momento (r) é uma medida da intensidade de associação existente entre duas variáveis quantitativas, e sua fórmula de cálculo foi proposta por

Karl Pearson em 1896.” (CALLEGARI-JACQUES, 2003, p. 85). O coeficiente r pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$r = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sqrt{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right]}} \quad (30)$$

O valor de r pode variar de -1 até 1 com os valores positivos indicando correlações positivas, ou seja, o crescimento da variável independente implica no crescimento da variável dependente e os valores negativos indicando correlações negativas, onde o crescimento de uma variável implica no decréscimo da outra. O nível de correlação está associado ao módulo de r , de maneira que quando o valor de $|r|$ se aproxima de 1, o nível de correlação aumenta. A figura 13 representa bem o enunciado acima.

Figura 13 - Nível de correlação baseado no valor de r .



Fonte: (ARAUJO; SANTOS; GOMES, 2019)

CALLEGARI-JACQUES (2003, p. 85) sugere uma avaliação qualitativa baseada na quantidade $|r|$. Demonstrada logo abaixo na tabela 1, essa sugestão foi utilizada no presente trabalho para realizar uma análise qualitativa dos resultados.

$$|r| = \sqrt{R^2} \quad (31)$$

Tabela 1 - Avaliação qualitativa do grau de correlação entre duas variáveis.

$ r $	A correlação é dita
0	Nula
0 — 0,3	Fraca
0,3 — 0,6	Regular
0,6 — 0,9	Forte
0,9 — 1	Muito forte
1	Plena ou perfeita

Fonte: (CALLEGARI-JACQUES, 2003, p. 90).

4.7. Estatística de Multiescala

4.7.1. Noções básicas

Existem comportamentos naturais que não são bem descritos pela estatística descritiva. Alguns desses sistemas podem ser melhor descritos por uma lei de escala que seria:

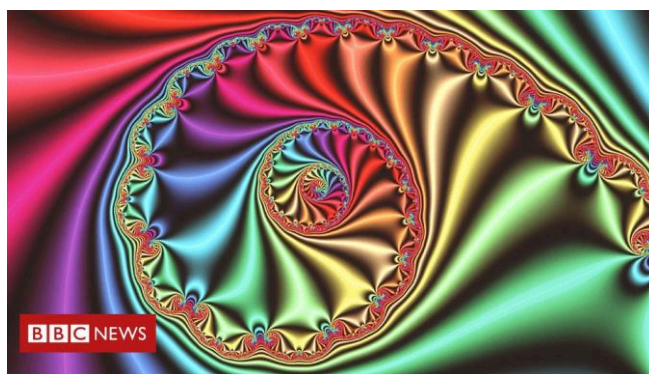
Uma lei de potência com um expoente de escala (por exemplo, α) descrevendo o comportamento de uma quantidade F (por exemplo, flutuação, potência espectral) como função de um parâmetro de escala (por exemplo, escala de tempo, frequência) pelo menos assintoticamente (KANTEHARDT, 2008)

Seguindo o seguinte formato:

$$F(s) \sim s^\alpha \quad (32)$$

O conceito de Lei de escala é base para a estatística de multiescala, pois o tipo do expoente α é relativo à maneira como os dados estão dispostos no sistema. Segundo Kantelhardt (2008), um sistema fractal é caracterizado por uma lei de escala que possui um expoente não inteiro. Segundo o autor, esse tipo de sistema é caracterizado pela autossemelhança, ou seja, o todo se reflete em uma pequena parte, assim como mostra a figura 14. Já um sistema multifractal é “um sistema caracterizado por leis de escala com um número infinito de diferentes expoentes fractais” (KANTEHARDT, 2008).

Figura 14 - Fractal ilustrado, representando uma imagem que é auto semelhante.

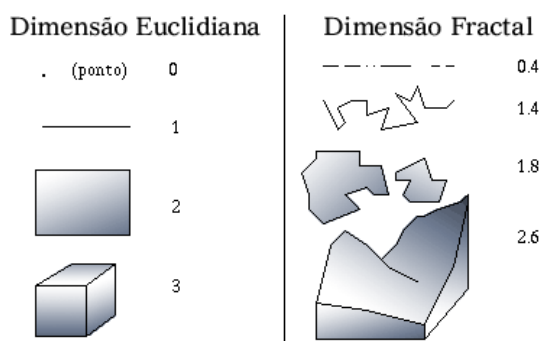


Fonte: VENTURA, 2009.

O fato de possuírem expoente não inteiro, dá aos fractais a característica de dimensão “quebrada”, diferentemente das dimensões convencionais Euclidianas. Esse fato pode ser ilustrado pela figura 15. A dimensão dos Fractais pode ser calculada, segundo Siqueira (2005) através da seguinte fórmula:

$$D = \frac{\log(\text{número de cópias})}{\log(\text{escala})} \quad (33)$$

Figura 15 - Diferença entre as Dimensões Euclidianas e as Dimensões Fractais.



Fonte: SIQUEIRA, 2005.

Assim como na estatística descritiva, também existem métodos de análise que apontam para as correlações na estatística de multiescala. Nepomuceno (2016), esquematiza alguns métodos que podem ser utilizados para análise de séries temporais estacionárias e fractais sendo eles a Função de autocorrelação, a Análise de flutuação – FA e a Análise de alcance reescalado – R/S (expoente de Hurst). O presente trabalho, além da análise descritiva, foi voltado para o Expoente de Hurst que será explanado nas próximas seções.

4.7.2. Séries temporais como objetos fractais

Ao observar a figura 15, pela perspectiva da geometria plana, o senso comum leva a acreditar que a dimensão 1,4 é algo imaginário e não é capaz de descrever a realidade. Mas ao observar, por exemplo, a costa marítima em um mapa, torna-se notória a semelhança com dimensão fractal. São inúmeros exemplos de formas assimétricas da realidade, cuja a matemática euclidiana tem dificuldade de descrever. Isso acontece, porque muitas vezes na natureza, a geometria é fractal. Com a frase: “a partir das décadas de 1960 e 1970, com o desenvolvimento da geometria fractal por Benoit Mandelbrot estes desafios puderam então ser superados.” (SANTOS, 2013, p. 38). Com “desafios”, Santos (2013), refere-se a dificuldades de representar as formas assimétricas com a matemática euclidiana e afirmar que elas foram superadas com o desenvolvimento da geometria fractal.

Uma série temporal que representa um determinado fenômeno, nada mais é do que a quantificação dele de acordo com o tempo. Desse modo é totalmente plausível que algumas séries temporais também possuam uma natureza fractal, sendo

auto similares, onde uma pequena parte da série pode refletir o comportamento dela como um todo. Assim como disse Kantelhardt (2008), as séries temporais são geradas por sistemas complexos e possuem variações em uma ampla escala de tempo e/ou na distribuição dos valores. Nas duas situações essas variações naturais possuem uma relação de escala ao longo de várias ordens de magnitude. Essa relação de escala permite a caracterização da série por meio de expoentes fractais ou multifractais. Ainda segundo Kantelhardt (2008), o comportamento fractal já foi observado em séries de dados de física experimental, geofísica, medicina, fisiologia entre outras. Desse modo, neste trabalho, foi possível tratar as séries temporais, advindas do *LIGO*, das ondas gravitacionais, como objetos fractais utilizando o expoente de Hurst, que é sensível a fractalidade da série.

4.7.3. O Expoente de Hurst

O expoente de Hurst é uma técnica conceituada no âmbito da estatística de multiescala. O expoente foi batizado em homenagem a Harold Edwin Hurst, engenheiro hídrico e físico que trabalhou no departamento de Pesquisa do Egito. Em trabalho publicado em 1951 Hurst (1951) elaborou uma técnica que ajudava na construção de barragens otimizando o seu dimensionamento, baseado em dados coletados ao longo do tempo. Para analisar as séries temporais que representavam a taxa de vazão dos rios, os índices pluviométricos e o crescimento das arvores, Hurst (1951) utilizou sua técnica conhecida como Análise do Alcance Reescalado, a análise R/S. Através da análise R/S, Hurst (1951) percebeu que essas séries temporais não eram compatíveis com a teoria do movimento Browniano de Feller (1951), ou seja, não eram aleatórias, pois o expoente encontrado na análise diferia de $\frac{1}{2}$. O expoente encontrado por Hurst valia em torno de 0,72, indicando um comportamento persistente na série temporal. Esse fato constatado por Hurst, em que houve o conflito entre a teoria de Feller e o seu resultado, ficou conhecido como o *fenômeno de Hurst*.

A técnica elaborada por Hurst foi descrita por ele em seu livro *Long-term Storage: An Experimental Study* (HURST, 1965) e rediscutida por Feder (1988). Para descrevê-la, considera-se um reservatório cuja a quantidade de água acrescida é $\xi(t)$. Então, para obter-se as condições ideais do nível do reservatório, sem que haja problemas com a fluidez do rio, um volume médio deve ser descartado pela barragem ao longo de um tempo τ . Esse volume é dado por:

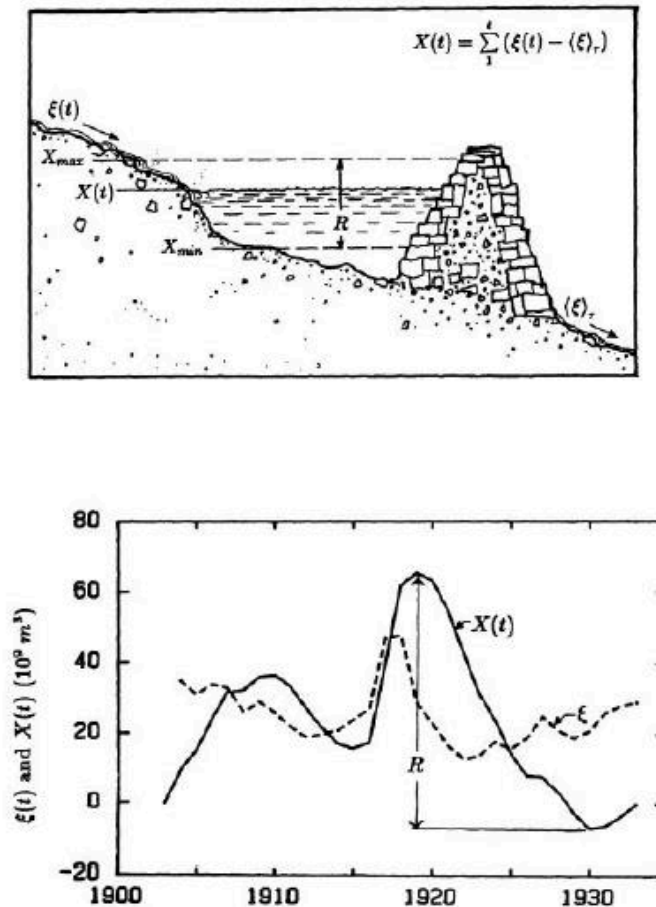
$$\langle \xi(t) \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t) \quad (34)$$

Dessa forma, pode-se definir uma função $X(t, \tau)$, com t pertencente ao seguinte intervalo $1 \leq t \leq \tau$, que está totalmente atrelada ao nível do reservatório, pois trata-se justamente da diferença entre o volume de água que entra e o volume de água que saí do reservatório. Com isso pode ser definido o alcance $R(\tau)$ do nível do reservatório como sendo a diferença entre o valor máximo e mínimo da função $X(t, \tau)$. A figura 16 contextualiza os parâmetros matemáticos de acordo com a realidade dos reservatórios.

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t [\xi(u) - \langle \xi(t) \rangle_\tau] \quad (35)$$

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} (X(t, \tau)) - \min_{1 \leq t \leq \tau} (X(t, \tau)) \quad (36)$$

Figura 16 - Paineis superior e inferior: Representação ilustrativa de $X(t)$, $\xi(t)$, $\langle \xi \rangle_\tau$ e R em uma barragem.
Painel inferior: Comportamento desses parâmetros ao longo de trinta anos.



Fonte: (FEDER, 1968)

Hurst utilizou o valor de R como constante para um valor fixo de τ . Isso restringe a aplicação da técnica a apenas séries estacionárias. Segundo SEURONT (2009), ao utilizar várias janelas de tamanho τ , a técnica se torna aplicável para todos os tipos de séries temporais.

O próximo passo para análise é definir o desvio padrão $S(\tau)$ como sendo a raiz quadrada da variância dado por:

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{u=1}^{\tau} [\xi(u) - \langle \xi(t) \rangle_{\tau}]^2} \quad (37)$$

Efetuada a razão R/S , Hurst estabeleceu empiricamente a seguinte relação matemática:

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H \quad (38)$$

Onde H é o expoente de Hurst, um valor que pode variar no intervalo de 0 a 1 e trazer informações relativas ao comportamento da série temporal em longos prazos. Segundo QUANTSTART (2021), o valor do expoente de Hurst pode revelar as tendências da série temporal da seguinte maneira:

- $H < 0,5$. Comportamento anti-persistente, também chamado de reversão a média. Nesse processo um valor alto é seguido de um valor baixo e vice-versa.
- $H = 0,5$. Passeio aleatório. É quando a série segue o movimento Browniano de Feller.
- $H > 0,5$. Comportamento persistente. Onde a série possui claramente uma tendência de crescimento ou decrescimento, ou seja, um valor alto é seguido por um valor mais alto, ou um valor baixo é seguido por um mais baixo.

Existem várias maneiras de determinar o expoente de Hurst. O procedimento representado acima consiste na análise R/S de Hurst que é uma delas. É possível realizar uma generalização do expoente assim como Gorski, Drozd e Speth (2002), fizeram em seu trabalho que é dada pela seguinte expressão:

$$S_q(\tau) = \langle |g(t + \tau) - g(t)|^q \rangle_T^{1/q} \sim \tau^{H(q)} \quad (39)$$

Que possui como condições $q > 0$ e $T \gg \tau$. Sendo τ o número de atrasos que define o tamanho das janelas temporais seccionadas. Baseado nessa generalização, LEWINSON (2021), implementou um código em *python*, responsável por calcular o expoente de Hurst de uma série temporal qualquer, baseado no parâmetro τ , que influencia diretamente no expoente de Hurst. Segundo LEWINSON (2021) o parâmetro τ influencia na detecção da memória na série temporal. Se estão sendo analisadas as memórias de curto prazo, com valores de τ (janela) menores, ou se estão sendo analisadas as memórias de longo prazo, com valores de τ (janela) maiores.

Sendo assim, o código de LEWINSON (2021), baseado no trabalho QUANTSTART (2021), foi implementado no presente trabalho para o cálculo do expoente de Hurst.

5. METODOLOGIA DA PESQUISA

Esta pesquisa prezou pelo objetivo de associar, por meio de relações matemáticas, uma grandeza estatística como desvio padrão ou o expoente de Hurst a uma grandeza física como, por exemplo, a massa final que equivale a massa do novo buraco negro formado. Desse modo a pesquisa pode ser classificada como uma pesquisa quantitativa. A pesquisa também possui um caráter descritivo, pois o intuito é descrever e explorar os sinais das ondas gravitacionais.

Para a realização deste trabalho foram utilizados alguns materiais imprescindíveis que estão elencados logo abaixo:

- Computador Pessoal com Windows 10 e acesso à internet.
- Linguagem de Programação *python* v3.8.
- PyCharm Edu 2021.3.3.
- Microsoft® Excel® para Microsoft 365.
- Symbolab.

A linguagem de programação *python* é muito utilizada para Data Science e conta com muitas bibliotecas para realizar essa função, porém a principal motivação para utilizá-la foi a existência de uma biblioteca voltada para a análise de ondas gravitacionais: A *GWpy*. Essa biblioteca foi desenvolvida por Macleod et al. (2021) para lidar com dados de ondas gravitacionais emitidos pela equipe do *LIGO* e foi fundamental para o desenvolvimento da presente pesquisa. Aliada a esta biblioteca foi utilizada a biblioteca do GWOSC que também foi criada por Macleod para acessar os dados disponibilizados no site do GWOSC (Gravitational Wave Open Science Center, que perde o sentido na tradução) reconhecidos em Abbott et al. (2021).

5.1. Selecionando dados

No site do GWOSC está disponibilizada toda a base de dados gerada pelo *LIGO* para que cientistas possam acessar livremente. O site é atualizado com um catálogo de eventos que conta com os sinais puros de todas as ondas gravitacionais detectadas e publicadas. Nele também existem eventos que ainda estão em análise e por isso não possuem dados totalmente descritos e estão passíveis de modificações. A nomenclatura de evento se refere a detecção de uma onda gravitacional que recebe em seu nome a sigla em inglês “*GW*” seguida da data na qual foi detectada, no padrão

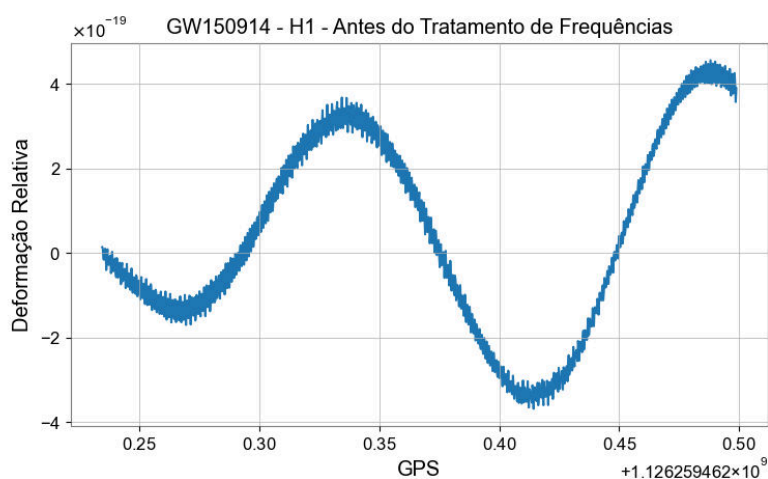
americano. A primeira detecção de uma onda gravitacional ocorreu no dia 14 de setembro de 2015 e o evento foi batizado como *GW150914*. A base de dados utilizada como fonte de pesquisa foi composta por todos os eventos do tipo BBH, que possuem os dados de *strain* (Em português, deformação relativa) e os parâmetros físicos bem descritos em seu catálogo, ou seja, as massas dos corpos e a distância na qual ocorreu o evento. Para estas análises também foi utilizado um parâmetro que é diretamente ligado a qualidade da detecção chamado *SNR* (*signal noise ratio*, que em português significa “Relação Sinal Ruído”). Os eventos também possuem versões, pois são lançadas atualizações e alguns dados são revistos. Desse modo deve-se buscar pelas versões mais atuais de cada evento.

Para realizar a seleção dos eventos foi criado um código em *python* com o *Pycharm* que utiliza a biblioteca GWOSC, criada por Macleod, para acessar os dados do site. Dessa forma o programa buscou, pelas versões mais novas, as informações necessárias descritas acima, selecionando as que possuem ambas as massas maiores que $5 M_{\odot}$. Excluir os eventos que possuem ao menos uma massa menor que $5 M_{\odot}$, garante que todos os eventos listados serão do tipo BBH, formados por 2 buracos negros, pois ainda não foram detectados buracos negros com massas tão pequenas. Os eventos que não são do tipo BBH, que contém elementos como estrelas de nêutrons, podem ser o foco de trabalhos futuros. Vale salientar que o parâmetro da *Chirp mass* foi calculado a partir da equação 3, pois alguns eventos carecem do acesso a essa informação utilizando a biblioteca GWOSC. Como esse parâmetro é função direta das massas esse tipo de problema não foi um impasse. A maioria dos eventos selecionados possuem os dados de *strain* de ambos os detectores (*L1* e *H1*), mas durante alguns eventos, um ou outro detector estava desabilitado ou ocorreu algum tipo de falha na detecção que impossibilitou a disponibilização dos dados desse evento. Desse modo alguns eventos possuem dados de apenas um detector. A lista dos 85 eventos selecionados pelo programa que contém os parâmetros e são elegíveis para a pesquisa, está contida na tabela 6 no Apêndice - A. As colunas referentes aos detectores *H1* (*Hanford*) e *L1* (*Livingston*) indicam com um “X” a presença dos dados. Vale ressaltar que o código foi executado no dia 22 de abril de 2022, sendo assim todos os resultados obtidos foram baseados nos dados contidos na plataforma, até esta data.

5.2. Acessando, Tratando e Armazenando os Dados.

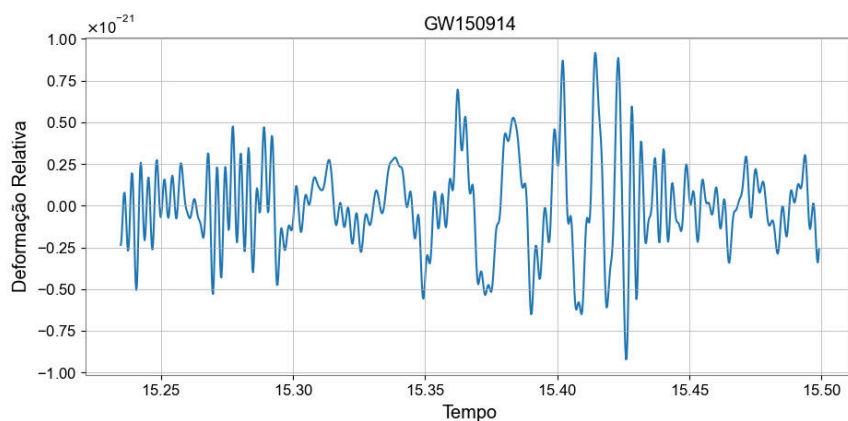
Após conhecer os eventos, foi criado um programa capaz de buscar, utilizando as bibliotecas *GWpy* e *GWOSC*, o tempo GPS de cada onda para que se pudesse obter os dados brutos advindo do *LIGO*. Por padrão, são disponibilizados arquivos de 32 segundos e 4096 segundos cada um em duas faixas de *simple rate* (taxa de amostragem), 4 kHz e 16 kHz. Nesse trabalho o código acessou arquivos de 32 segundos com um *simple rate* de 4 kHz para cada onda gravitacional. Porém as séries temporais que foram acessadas, ainda são inadequadas para as análises estatísticas, propostas por este trabalho, pois o sinal da onda gravitacional está imerso em ruídos de altas amplitudes e baixas frequências. Os gráficos 1 e 2, expressam a diferença entre um sinal puro, dominado por baixas frequências e altas amplitudes, e um sinal após o tratamento adequado a forma de onda graficamente representada.

Gráfico 1 - GW150914 - H1 - Dados puros antes do tratamento de frequências.



Fonte: Autoria Própria.

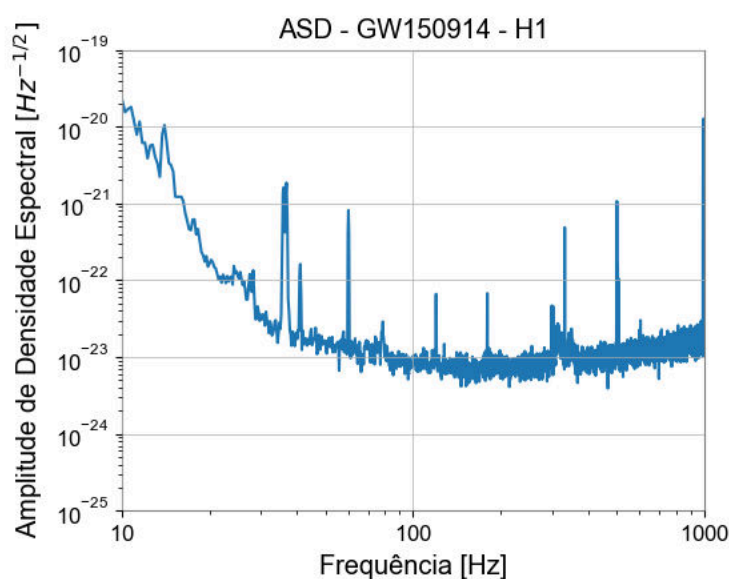
Gráfico 2 - GW150914 - H1 - Dados após o tratamento de frequências.



Fonte: Autoria Própria.

O sinal visto no gráfico 1, possui deformações de *strain* da ordem de 10^{-19} , mas a onda detectada pelo *LIGO*, possui deformações de *strain* da ordem de 10^{-21} , como é visto no gráfico 2. O motivo disso é que o sinal visto no gráfico 1, é dominado por frequências de ruídos que estão atrelados ao sinal. A equipe do *LIGO* busca constantemente diminuir os níveis de ruído imputados ao sinal pelo ambiente externo, mas devido à alta sensibilidade necessária dos detectores, sempre haverá a detecção de ruídos. Para contornar o problema dos ruídos, é necessário realizar um tratamento de frequências adequado. As ondas gravitacionais, cujo o *LIGO* é sensível, estão em torno de 50 a 300 *Hz*, segundo Aboott et al. (2016). Vale salientar que a onda gravitacional possui uma frequência variante, pois é gerada a partir do movimento coalescente dos buracos negros, que se torna mais intenso de acordo com aproximação das massas (regida pela relatividade geral de Einstein) e aumenta gradativamente a frequência. Por essa característica física da onda gravitacional, sempre deve-se buscar um intervalo de frequências, pois só uma frequência seria incapaz de descrever o sinal adequadamente. O gráfico 3 mostra a plotagem de um ASD, procedimento que transcreve, por meio de uma FFT (Transformada Rápida de Fourier), o sinal para o domínio da frequência, mostrando as contribuições de cada uma delas.

Gráfico 3 - ASD do sinal da *GW150914* detectada pelo *H1*.



Fonte: Autoria Própria.

Analisando o gráfico 3, é possível perceber que as menores amplitudes, em torno de 10^{-23} , se localizam, assim como Aboott et al. (2016) disse, em torno 50 a 300

Hz. Como o interesse da pesquisa é nas ondas gravitacionais que se encontram justamente nos sinais detectáveis de menor amplitude, as faixas de frequência que estão fora do intervalo de sensibilidade do *LIGO* devem ser excluídas. No presente trabalho utilizou-se uma margem para essas frequências sendo levado em conta a exclusão de frequências fora do intervalo de 40 a 350 *Hz*, intervalo este que foi embasado pelo gráfico 3. Este é apenas o primeiro estágio do tratamento de frequências, onde é aplicado um filtro *bandpass* (filtro passa banda), ferramenta disponibilizada pela própria biblioteca do *GWpy*, com frequências mínimas de 40 *Hz* e frequências máximas de 350 *Hz*. Certamente o sinal detectado está presente neste intervalo e a grande parte das interferências causadas pelos ruídos foi eliminada com o filtro *bandpass*. Dessa forma é possível notar no gráfico 3 que ainda há picos de frequências que são contemplados pelo filtro que certamente não pertencem a onda gravitacional, tendo em vista a baixa amplitude dela. Um desses picos expressivos está localizado na frequência de 60 *Hz*, seguido de outros dois nas frequências de 120 e 180 *Hz* que são harmônicas do primeiro. É muito provável que este ruído seja provocado pela rede elétrica que também oscila com uma frequência de 60 *Hz*. Com isso se faz necessária a remoção deste tipo de ruído pontual e para isso utiliza-se o filtro *notch*. O filtro *notch*, também disponibilizado pela biblioteca do *GWpy*, elimina a contribuição da frequência de maneira pontual. Para exemplificar, no sinal da *GW150914* detectado pelo *H1*, uma sugestão da aplicação do filtro *notch* seria aplicá-lo três vezes para as frequências de 60, 120 e 180 *Hz*, que seria equivalente ao segundo estágio do tratamento de frequência. Após o tratamento de frequência, a série temporal referente a onda gravitacional, como é vista no gráfico 2, está quase pronta para análise. É necessário pontuar que os filtros são baseados no ASD e são aplicados à série temporal de 32 segundos, obtendo-se como resultado, uma série temporal de 32 segundos que contém a onda gravitacional.

Para realizar o tratamento de frequências foi criado um código em *python* capaz de executar o filtro *bandpass* e identificar as frequências a serem removidas e removê-las utilizando o filtro *notch*. O código examina a série de frequências e calcula um valor máximo de amplitude de densidade espectral para um dado intervalo de frequências, eliminando os picos que ultrapassam este valor. Primeiro o código elimina as frequências abaixo de 40 *Hz* e acima de 350 *Hz* para todas as ondas restando as frequências de 40 a 350 *Hz*. Dentro desse intervalo é calculada a média das

amplitudes e o valor máximo pré-estabelecido é equivalente à média multiplicada por um fator de 2,4 vezes. É importante destacar que essa relação matemática foi sugerida por este trabalho e foi criada de maneira empírica.

$$A_{max} = 2,4 * média(Amplitudes) \quad (40)$$

As frequências que possuíam amplitudes maiores que A_{max} foram eliminadas pelo código. Vale salientar que este critério foi adotado e pensado para que a máquina pudesse identificar os picos, que variam sua amplitude dependendo do sinal do qual se originou. As tabelas 7 e 8 do Apêndice B, mostram as frequências removidas e os valores de A_{max} para os detectores de $L1$ e $H1$, respectivamente.

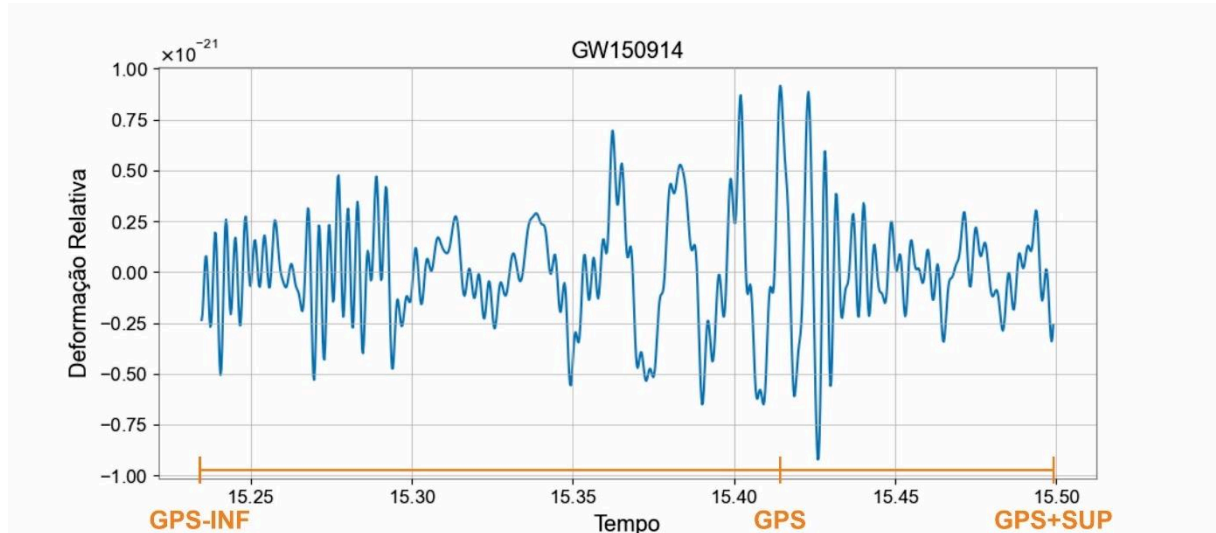
Possuindo os sinais devidamente tratados o código finaliza a execução escrevendo e salvando arquivos *.txt* com todos os dados de deformação relativa e medidas temporais, arquivando 32 s de cada onda, para cada detector, com um *sample rate* de 4 kHz.

5.3. Definindo a Janela Temporal.

Os sinais estão salvos com um comprimento temporal de 32 segundos. As ondas gravitacionais nos sistemas coalescentes estão sendo emitidas a muito tempo, isso porque para que haja a emissão de uma onda gravitacional, basta que haja o movimento acelerado de uma massa. O problema é que, apesar dos objetos serem muito massivos (buracos negros), as ondas gravitacionais geradas pelo movimento deles, deformam muito pouco a malha do espaço-tempo, isso porque a interação gravitacional é a mais fraca das interações. Sendo assim, o *LIGO* consegue detectar com precisão poucos instantes antes da colisão entre os buracos negros. Desse modo, a forma ondulatória, vista no gráfico 2, equivale a uma janela temporal que contém a parte da onda que é forte o suficiente para atingir o nível de sensibilidade do *LIGO*. O tamanho da janela temporal que deve ser selecionado está diretamente atrelado as características físicas do evento. Entre buracos negros mais massivos o evento deve possuir uma janela temporal menor, pois ocorrerá de forma rápida devido à forte atração gravitacional, acelerando a colisão. Já em colisões onde os corpos possuem massas menores, a interação será menor, consequentemente a janela temporal será maior. Essa visão pode parecer um pouco contraintuitiva, mas quando se trata do movimento dos corpos celestes, não existe ação de forças como o arrasto ou atrito, que possivelmente tornariam as massas maiores mais lentas. Com essas

considerações foi necessário estabelecer um critério de acordo com a massa dos objetos para o tamanho da janela temporal, critério esse que foi pensado para contemplar todas as formas de ondas em todos os eventos.

Figura 17 - Descrição da Janela temporal em termos do GPS.



Fonte: Autoria Própria.

A figura 17 indica como o programa seleciona a janela temporal que contém a forma de onda. Possuindo a informação do tempo GPS do evento, o programa calculou quais deveriam ser os tamanhos inferiores e superiores ao tempo GPS, sendo a janela total a soma dos dois intervalos. Os intervalos foram calculados utilizando as seguintes equações, estabelecidas de maneira empírica, para a realização deste trabalho, sendo uma assim uma sugestão.

$$t_{INF} = 0,25 * (M_{final})^{-0,1} \quad (41)$$

$$t_{SUP} = 0,6 * t_{INF} \quad (42)$$

Como pode-se observar na equação 42, o intervalo superior equivale a 60% do tamanho do intervalo inferior, devido o tempo GPS estar localizado em torno do pico de amplitude que seria o instante da colisão. Já o intervalo inferior, é definido por uma lei de potência devidamente ajustada para garantir que todos os sinais estarão contidos nas janelas temporais. A lei de potência deve ser mais eficiente em caso mais extremos de massas muito pequenas ou muito grandes. Se fosse utilizada uma relação linear, poderia haver problemas como intervalos de janelas negativos, para massas muito grandes ou janelas muito pequenas, para oscilações muito demoradas

com massas pequenas. Uma lei de potência se ajusta melhor a realidade, pois se as massas tendem a 0, o tamanho da janela diverge indicando que a oscilação nunca vai terminar, pois não existem massas. Por outro lado, se as massas tendem ao infinito o tamanho da janela tende a 0, mas nunca será zero, pois seria fisicamente impossível. Na seção de resultados a discussão sobre o tamanho da janela temporal, será para esclarecer algumas questões pertinentes a respeito de sua influência sobre os resultados obtidos.

Na tabela 9 do Apêndice C estão situados os dados que serão utilizados na análise para obtenção dos resultados. Todos eles foram obtidos através do código em *python* e estão elencados na tabela 9 do Apêndice C.

Em posse de todos os parâmetros físicos relacionados aos eventos e todas as séries temporais devidamente tratadas e selecionadas por sua janela temporal adequada. Foram realizados cálculos estatísticos com os dados de *strain* dos eventos para que possa ser realizada a análise. Foram utilizados códigos em *python* que fizeram cálculos acerca de três áreas estatísticas: A estatística descritiva e a estatística de multiescala com o expoente de Hurst.

Na estatística descritiva, calculou-se o desvio padrão e a média das séries temporais. Com a estatística de multiescala, foram realizadas análises, tentando encontrar um comportamento fractal nas séries temporais através do expoente de Hurst. O cálculo do expoente de Hurst foi executado várias vezes, variando o número τ em intervalos de 20 até 300. Todas essas grandezas foram comparadas com os parâmetros físicos elencados acima, por meio de ajustes de curvas linear e de potência. Vale ressaltar também, que as análises que utilizaram o expoente de Hurst foram segregadas pelo nível de sinal ruído, onde verificou-se o resultado contendo todas as amostras e o resultado contendo as amostras que possuem $SNR \geq 9,6$. Toda a discussão em torno dessa segregação foi realizada no capítulo 6. Ao realizar um ajuste, verifica-se a capacidade de explicar o comportamento do gráfico utilizando a equação encontrada, através do coeficiente de correlação ($|r| = \sqrt{R^2}$) que indica os níveis de correlação. Também foram feitas análises sobre tamanho da janela temporal selecionada, por meio de testes que contemplam outros tipos de critérios, e realizadas regressões múltiplas, que relacionam duas variáveis independentes a uma dependente.

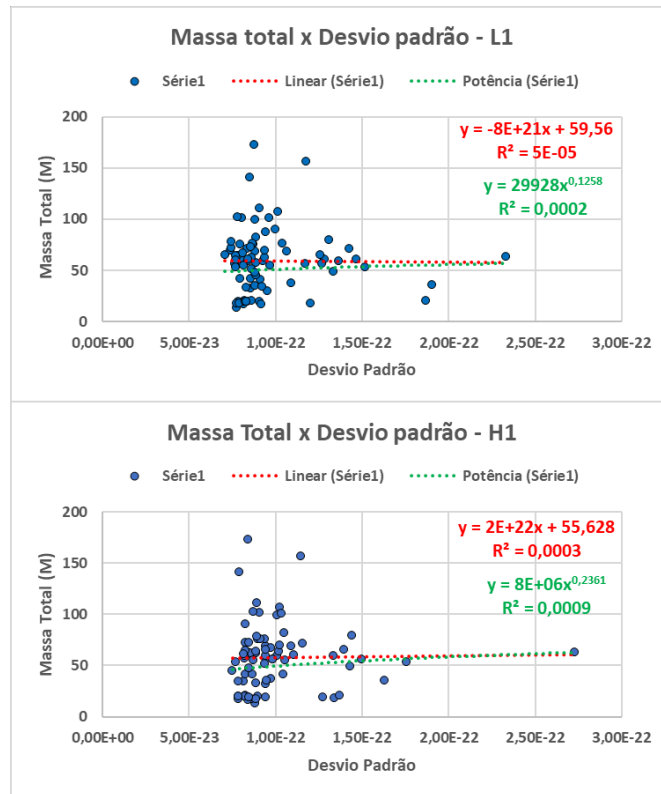
6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1. Análise com estatística descritiva

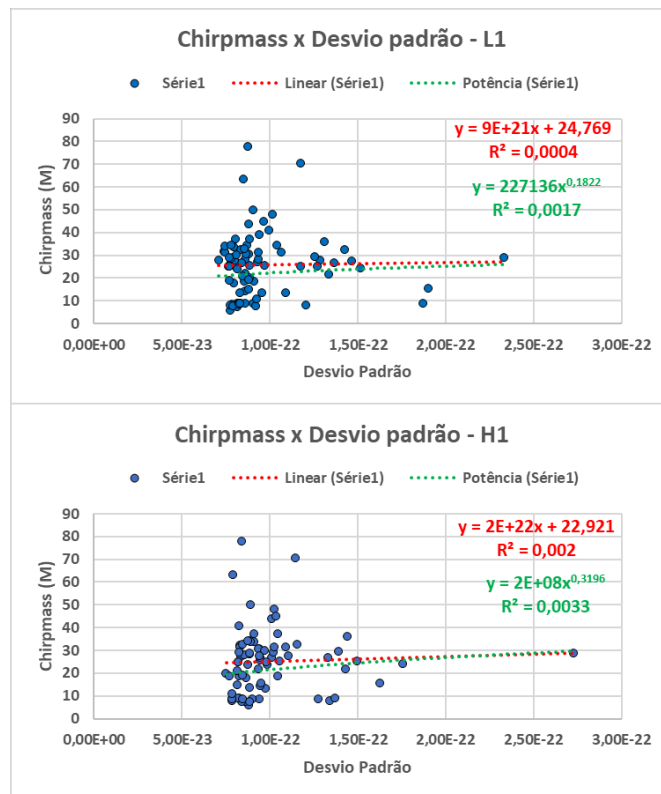
A primeira etapa de análise se deu com a utilização da estatística descritiva. Foram calculados e armazenados (em arquivos de texto) por um programa em *python*, o desvio padrão e a média das séries temporais devidamente tratadas e cortadas de acordo com o critério da lei de potência. A partir deste ponto é necessário ter em mente que todas as análises foram feitas com as séries temporais tratadas e cortadas, só serão feitas mudanças no critério de seleção de janela na seção 6.5, para averiguar os resultados obtidos nas análises. Na seção 6.2 o motivo da segregação dos dados é discutido.

Os gráficos serão gerados pelo software Microsoft® Excel® para Microsoft 365, utilizando os dados contidos na tabela 9 do Apêndice C, onde se encontram as informações extraídas do site GWOSC e a tabela 10 do Apêndice D, onde se encontram os resultados da análise descritiva. O Excel® é capaz ler os arquivos de texto gerados pelo código em *python*. O código realizou todos os cálculos que mais tarde foram lidos e manipulados pelo Excel®.

Pela tabela 10 do Apêndice D é perceptível que os desvios padrões se encontram em valores na ordem de 10^{-23} , o que era esperado devido a ordem de grandeza dos dados de *strain*, que é também muito pequena da ordem de 10^{-21} . Já os valores das médias de h , são da ordem de 10^{-25} e muito pequenos, o que os torna muito suscetíveis a qualquer ruído restante. Dessa forma, se torna inviável realizar análises baseadas nos valores de média aritmética. É importante deixar explícito que os valores calculados na tabela 6, foram advindos das séries temporais tratadas, ou seja, séries temporais onde as ondas gravitacionais são descritas de forma pontual e discreta, com a somatória desses pontos resultando no sinal visto no gráfico 2. A quantidade *simple rate* significa justamente quantos pontos descrevem um segundo da série, ou seja, no presente trabalho, as séries são descritas com um total de 4096 pontos por segundo. Feita essa consideração, as variáveis físicas, Massa final, *Chirpmass*, Diferença das Massas e Distância, juntamente ao *SNR* (que não é uma variável física atrelada ao evento, mas pode explicar alguns resultados posteriores), foram comparadas aos desvios padrões de ambos os detectores. Estão situados logo abaixo, os gráficos que representam essas comparações. Neles estão expressas as equações de ajuste e os valores de R^2 , que foram utilizados para calcular os valores de $|r|$.

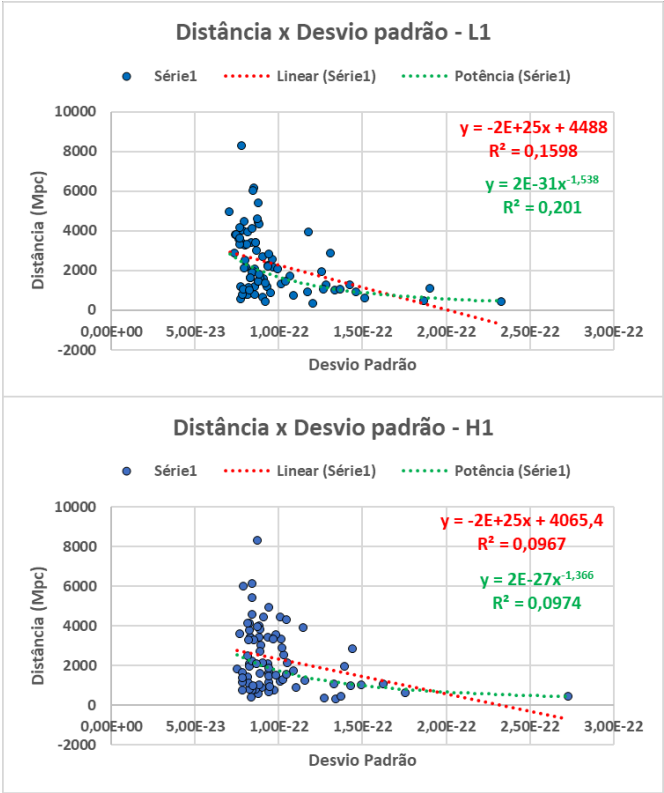
Gráfico 4 - Gráficos de Massa final por Desvio padrão para ambos os detectores.

Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 5 - Gráficos de *Chirpmass* por Desvio padrão para ambos os detectores.

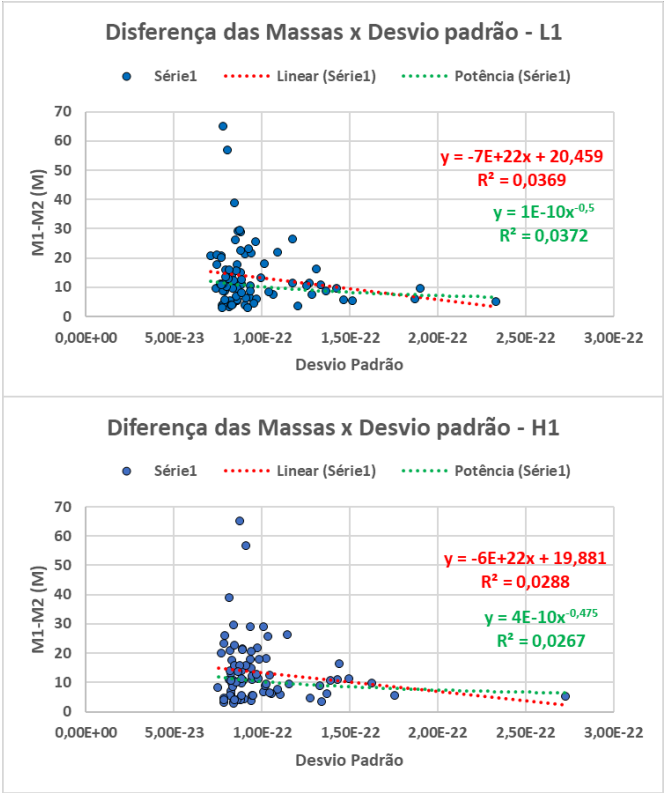
Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 6 – Gráficos de Distância por Desvio padrão para ambos os detectores.

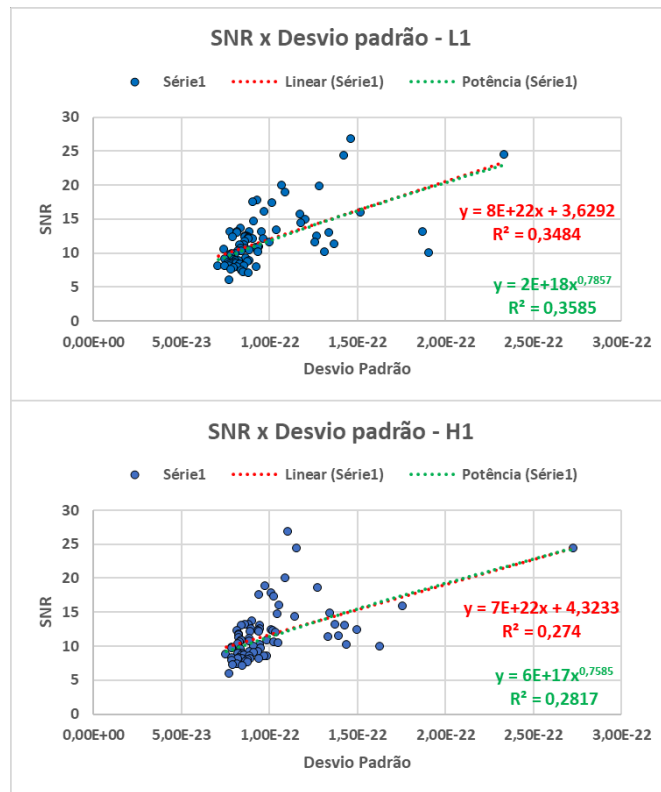


Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 7 - Gráficos de Diferença das Massas por Desvio padrão para ambos os detectores.



Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 8 - Gráficos de *SNR* por Desvio padrão para ambos os detectores.

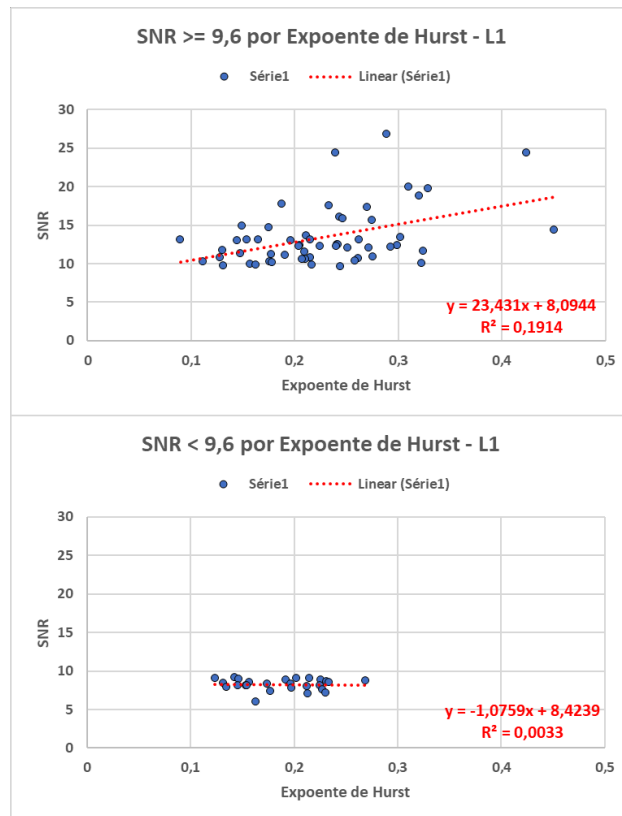
Fonte: Autoria Própria.

Analisando os gráficos 4, 5, 6 e 7 não é possível identificar nenhum nível de correlação satisfatório. O resultado mais coerente dentre eles, ocorre no ajuste de potência do gráfico 6 com o detector *L1*. Neste gráfico, tem-se um índice de correlação igual a 0,448 ($r = \sqrt{0,201}$) que pode indicar uma correlação regular, entretanto pode-se observar no mesmo gráfico que existe uma concentração enorme de pontos em torno de $0,8 * 10^{-22}$ com uma grande variação nesse intervalo. Desse modo seria muito difícil inferir o valor de distância correto de um evento, a partir de um desvio padrão de uma série temporal. No gráfico 8, tem-se o cruzamento entre o *SNR* e o desvio padrão, cujos níveis de correlação são de $r = 0,59 = \sqrt{0,3484}$ para *L1* e $r = 0,523 = \sqrt{0,274}$ para *H1*, que são mais elevados e podem ser classificados como correlação regular. Entretanto o *SNR* não é a proposta desse trabalho, mas levantar discursões sobre ele é importante tendo em vista a sua influência nos resultados estatísticos.

6.2. Contribuições do *SNR*

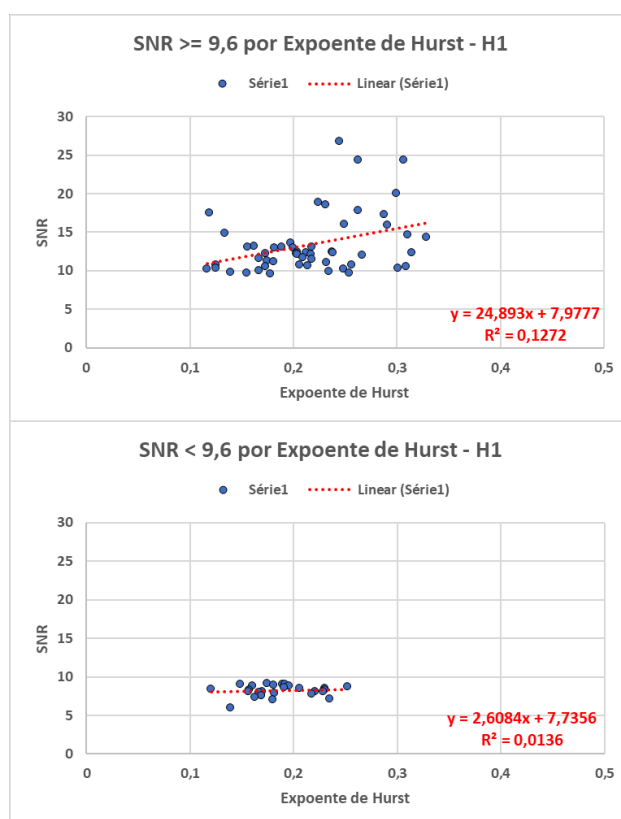
Os gráficos que representam a relação entre o expoente de Hurst e o *SNR* foram separados das análises dos parâmetros físicos, pois necessitam ser feitos de forma diferente para que tragam as informações necessárias. Os gráficos 8 e 9 de *SNR* por Hurst foram plotados em duas partes: A primeira para os eventos com $SNR \geq 9,6$ e a segunda para $SNR < 9,6$.

Gráfico 9 - *SNR* por Expoente de Hurst para o detector *L1*.



Fonte: Autoria Própria.

Como pode se observar no gráfico 9, que representa os resultados do detector *L1*. Os níveis de *SNR* menores que 9,6 não afetam o expoente de Hurst, já os maiores que 9,6 afetam linearmente com uma relação linear regular ($r = \sqrt{R^2} = 0,4374$), isso justifica a segregação feita no item 6.3, tendo em vista que precisa-se conhecer o comportamento dessa dependência linear, para interpretação dos resultados. Algo semelhante acontece no detector *H1* e isso pode ser visto no gráfico 10.

Gráfico 10 - SNR por Expoente de Hurst para o detector $H1$.

Fonte: Autoria Própria.

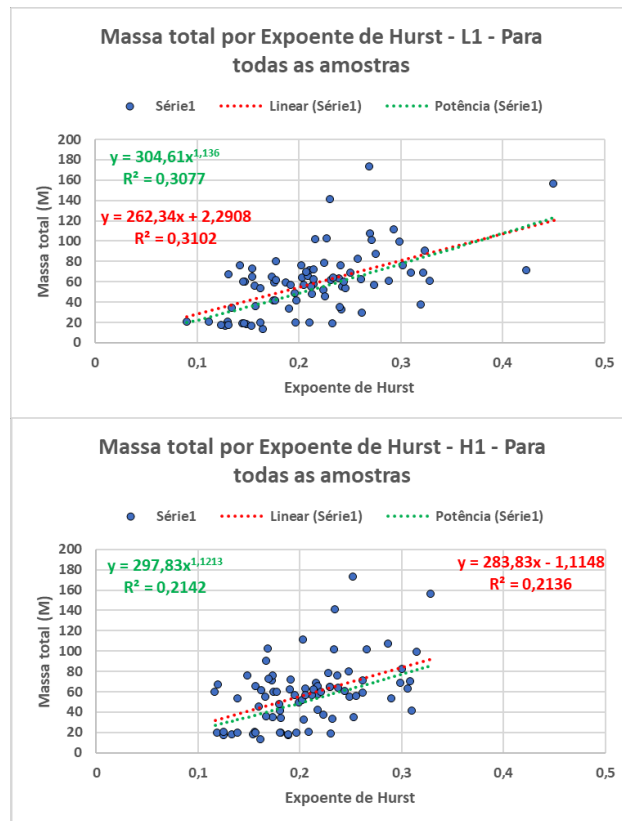
De maneira resumida, o comportamento do expoente de Hurst perante o nível de SNR observado nos gráficos 9 e 10, especificamente nos painéis superiores onde se encontram os valores maiores que 9,6, é crescente e linear. Desse modo foram feitas duas análises separadas onde, uma trata de todas as amostras sem nenhuma restrição quanto ao SNR e outra que trata apenas daquelas que possuem taxas de $SNR \geq 9,6$. A análise com restrição de nível de SNR é interessante, pois, a priori, busca-se estimar um parâmetro físico através um indicador estatístico (expoente de Hurst). Com isso é necessário entender os efeitos que os níveis de sinal ruído podem causar nos ajustes e níveis de correlação.

6.3. Análise Fractal com o expoente de Hurst

Com as análises anteriores não foi possível obter bons índices de correlação. Desse modo se fez necessário utilizar um método mais sofisticado que trabalha com as dimensões fractais: O expoente de Hurst. O cálculo do expoente de Hurst, assim como nos cálculos utilizando estatística descritiva, foram realizados pelo código em *python* e analisados com o auxílio do Excel®. Como dito na etapa metodológica, foram realizados vários cálculos variando o número τ em um intervalo de 20 a 300,

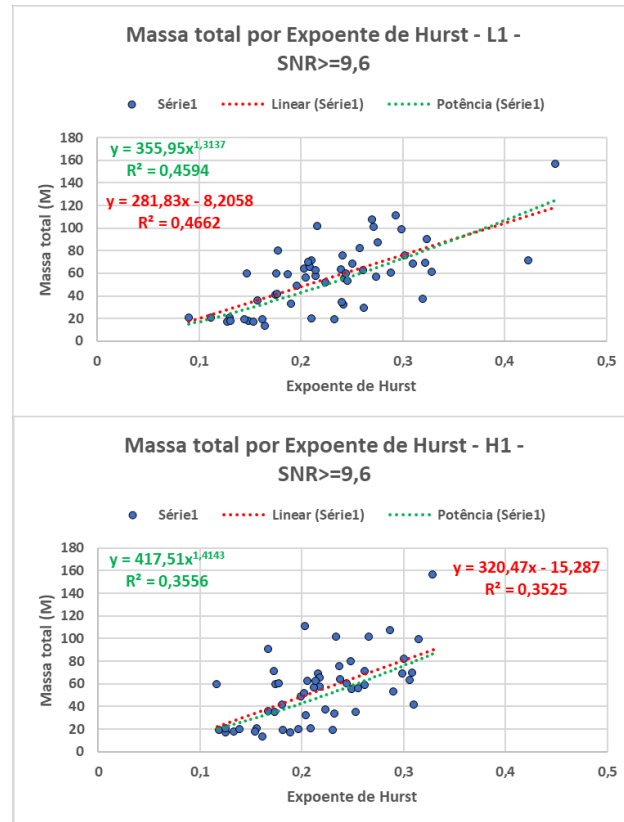
entretanto serão mostradas e levadas em consideração as análises de $\tau = 20$, $\tau = 40$ e $\tau = 60$, pois com apenas essas três já é possível executar a análise técnica sem grandes problemas. A tabela 11 do Apêndice E traz os resultados obtidos através do código em *python* e nela pode-se observar que os valores para $\tau = 60$ possuem pequenos valores variando muito pouco entre si. O valor de H pode variar de 0 até 1, mas nessa análise os valores circundam valores muito próximos a 0,1, porém não é ideal realizar análises com esse tipo de valores pelo mesmo motivo o qual a média foi descartada da análise da estatística descritiva. O valor de $\tau = 20$ possui variações, mas não foi sensível aos parâmetros. Deve-se lembrar que variar o valor de τ significa procurar diferentes relações de memória na série temporal. Com $\tau = 40$, foram obtidos resultados mais coerentes, indicando uma sensibilidade aos parâmetros nessa faixa. Por este motivo o presente trabalho irá voltar suas discussões a análise com $\tau = 40$. Vale salientar que, na análise do expoente de Hurst, foi realizada uma divisão dos dados considerando o *SNR*. Desse modo, as análises foram realizadas em gráficos contendo todas as amostras e em gráficos utilizando as amostras que possuem $SNR \geq 9,6$.

Gráfico 11 – Análise de $M_{final} \times H$ para ambos os detectores e todas as amostras.



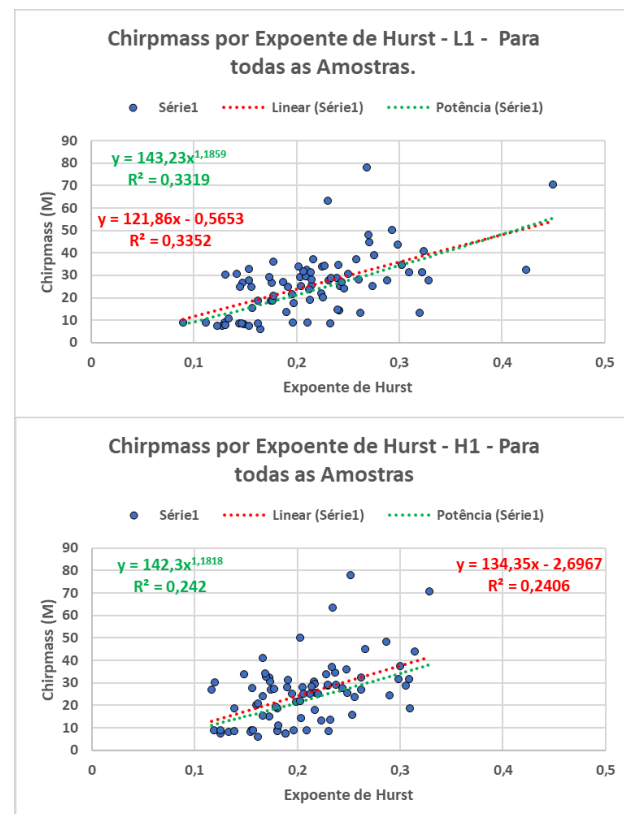
Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 12 - Análise de $M_{final} \times H$ para ambos os detectores e $SNR \geq 9,6$.



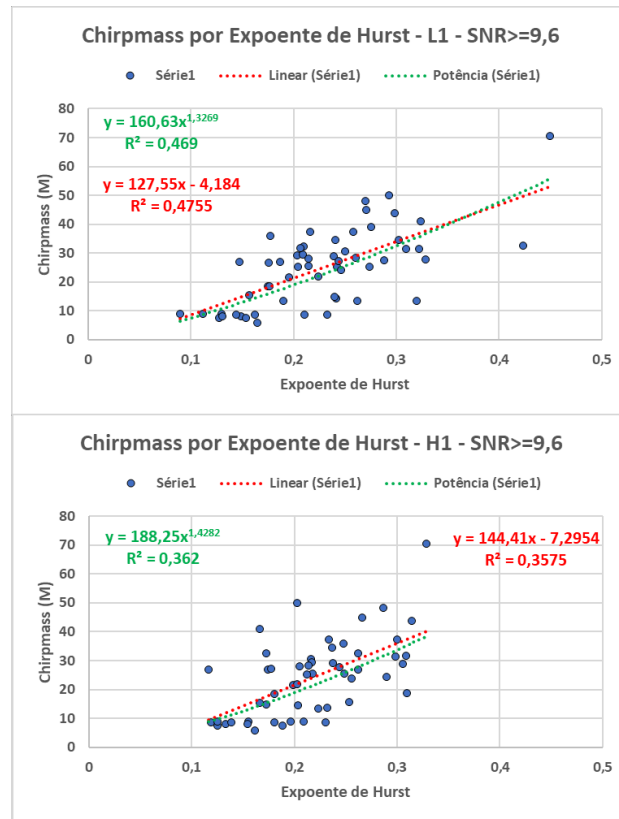
Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 13 - Análise de $\mathcal{M} \times H$ para ambos os detectores e todas as amostras.



Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 14 - Análise de $\mathcal{M} \times H$ para ambos os detectores e $SNR \geq 9,6$.



Fonte: Autoria Própria.

Antes de discutir os resultados dessa primeira etapa de análise é indicado que se note que os gráficos de Massa final e *Chirpmass* são bem semelhantes, bem como as correlações dos ajustes que também possuem valores semelhantes, diferindo apenas na amplitude dos dados. Isso acontece pela relação linear existente entre essas duas grandezas, uma vez que a *Chirpmass* pode ser escrita como uma combinação das massas. Feita essa consideração, pode-se seguir com a análise.

É possível notar que há correlações mais expressivas nos gráficos de *Chirpmass* e Massa final em ambas as seleções de amostras. Considerando os ajustes lineares, que indicaram melhores índices de correlação, tem-se:

Tabela 2 - Índices de Correlação detector *L1*.

	M_f	$\mathcal{M}$
Todas as Amostras	0,5569	0,5789
$SNR \geq 9,6$	0,6827	0,6895

Fonte: Autoria Própria.

Tabela 3 - Índices de Correlação detector $H1$.

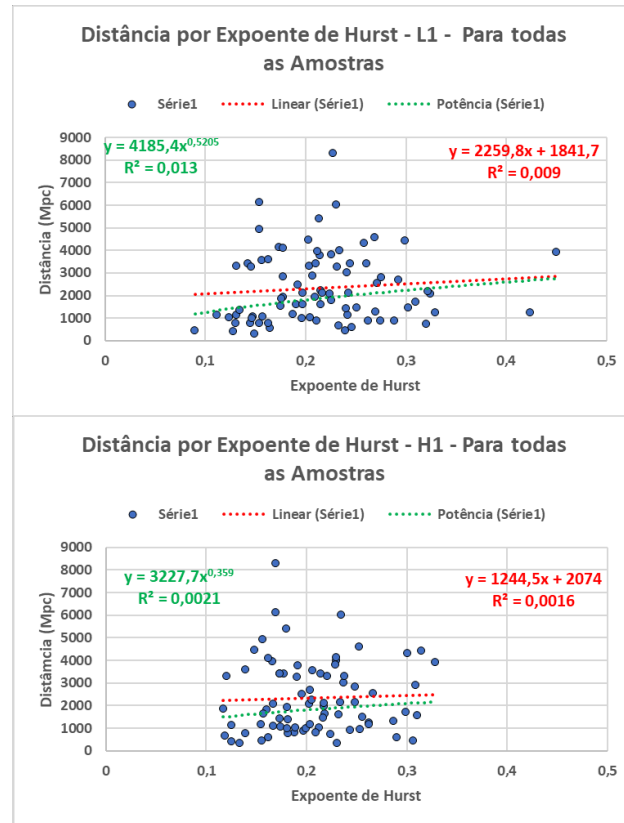
	M_f	$\mathcal{M}$
Todas as Amostras	0,4621	0,4905
$SNR \geq 9,6$	0,5937	0,5979

Fonte: Autoria Própria.

Como é visto nas tabelas 2 e 3, todos os índices r , que são a raiz quadrada de R^2 (valor é retornado pelas ferramentas computacionais), indicam correlação regular em ambos os detectores quando se trata de todas as amostras. É notório que os índices de correlação aumentam consideravelmente, quando os sinais que possuem baixo SNR são removidos, chegando a níveis de correlação fortes (ou aproximadamente fortes no caso de $H1$) quando são eliminadas as amostras com $SNR < 9,6$. Essa diferença dos níveis de correlação entre o detector $H1$ e $L1$ pode ser explicada por dois motivos:

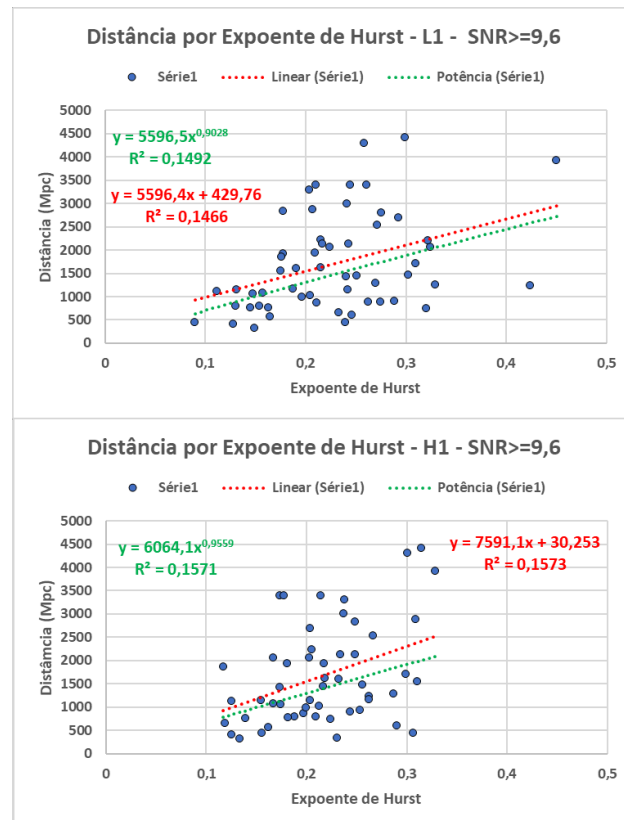
- A sensibilidade dos detectores é diferente. O $L1$ se tornou mais sensível após a segunda corrida de observações, e como muitos eventos são das observações mais recentes as análises de $L1$ tendem a ser mais precisas.
- Os eventos são diferentes. Apesar de poucas diferenças o detector $L1$ conta com 6 eventos indisponíveis no detector $H1$. Já o $H1$ conta com 3 eventos que não estão disponíveis no $L1$.

Gráfico 15 - Análise de $d_L \times H$ para ambos os detectores e todas as amostras.



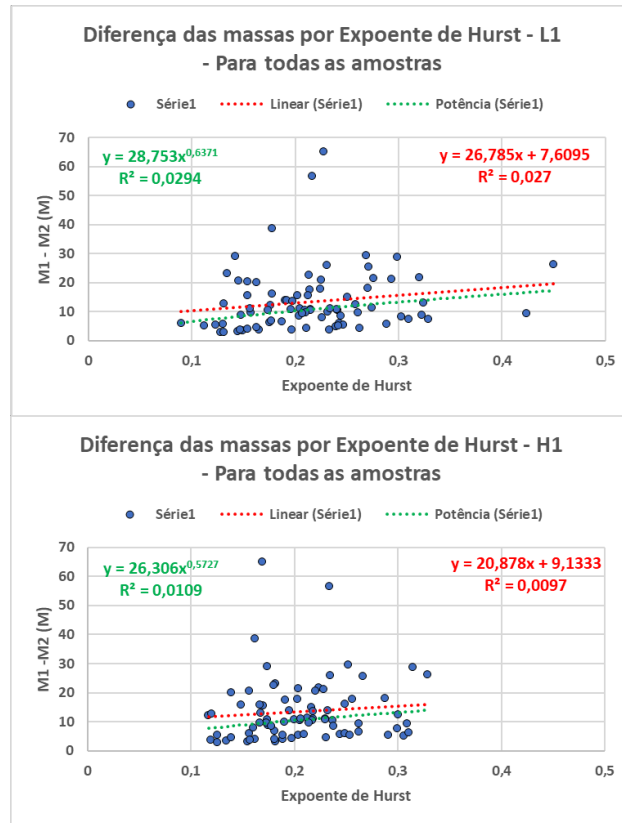
Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 16 - Análise de $d_L \times H$ para ambos os detectores e $SNR \geq 9,6$.



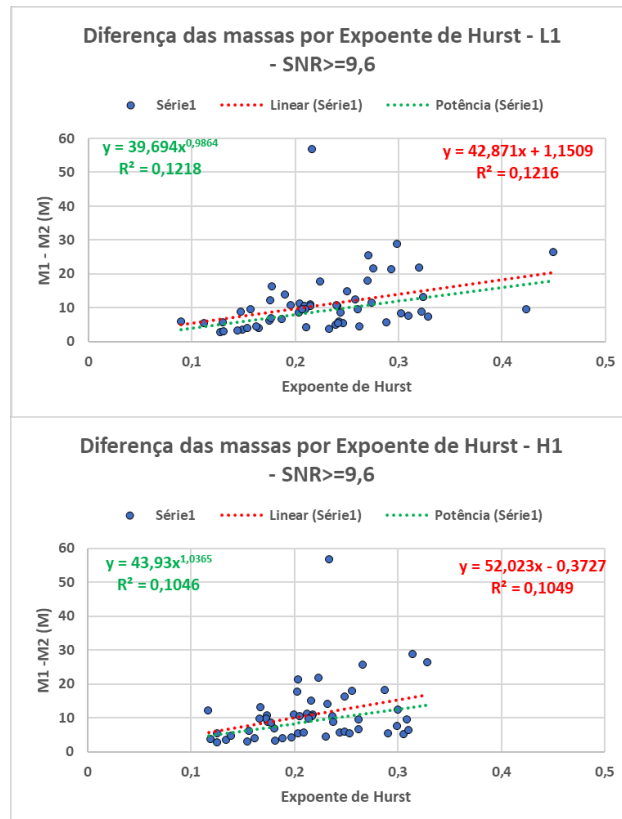
Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 17 - Análise de $(M_1 - M_2) \times H$ para ambos os detectores e todas as amostras.



Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 18 - Análise de $(M_1 - M_2) \times H$ para ambos os detectores e $SNR \geq 9,6$.



Fonte: Autoria Própria.

Os níveis de correlação referentes aos parâmetros ΔM e d_L , não foram tão expressivos como os níveis de correlação da Massa final e *Chirpmass*. Por este motivo, é provável que o expoente de Hurst não seja um bom indicador para Distância e Diferença das massas. Desse modo, a pesquisa irá se ater as grandezas relacionadas a Massa final e *Chirpmass*.

6.4. Regressão Múltipla

Sabendo que o expoente de Hurst é influenciado pelo *SNR*, há a possibilidade de que as correlações vistas no item 6.3 sejam mais expressivas, mas o método de regressão simples, que envolve apenas uma variável, não pode detectá-la adequadamente. Sendo assim, foi aplicada uma regressão múltipla que relaciona duas variáveis independentes à uma dependente. Esse método foi aplicado utilizando o expoente de Hurst e o *SNR* como variáveis independentes e a *Chirpmass* como variável dependente, pois o trabalho foi proposto para facilitar a maneira de estimar os parâmetros físicos conhecendo parâmetros estatísticos. Também foi considerada a segregação dos dados utilizada no item 6.3, onde foram feitas uma análise geral e uma análise com $SNR \geq 9,6$. Os gráficos 19 e 20 descrevem o comportamento mútuo das três variáveis por meio da variação por cor. Já os gráficos 21 e 22, mostram o comportamento intercalado das variáveis entre si. Vale salientar que a correlação múltipla foi calculada com o software Excel® e os resultados estão exibidos logo abaixo nas tabelas 4 e 5.

Tabela 4 – Coeficientes de Correlação da Regressão Múltipla entre Expoente de Hurst e *SNR* por *Chirpmass* para ambos os detectores.

	<i>L1</i>	<i>H1</i>
Todas as Amostras	0,66613	0,55589
$SNR \geq 9,6$	0,73813	0,61895

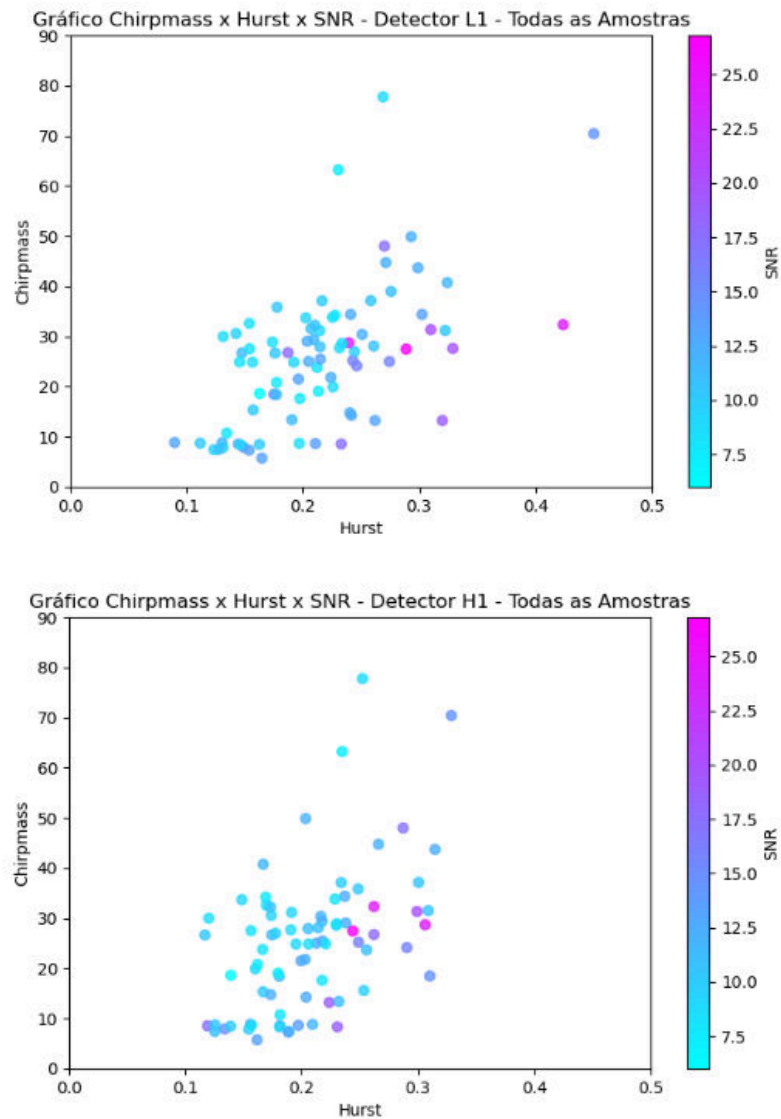
Fonte: Autoria Própria.

Tabela 5 – Equações da Regressão Múltipla entre Expoente de Hurst e *SNR* por *Chirpmass* para ambos os detectores.

	<i>L1</i>	<i>H1</i>
Todas as Amostras	$\mathcal{M} = 160,152 * H - 1,279 * SNR + 6,473$	$\mathcal{M} = 167,871 * H - 1,007 * SNR + 2,130$
$SNR \geq 9,6$	$\mathcal{M} = 151,254 * H - 1,012 * SNR + 4,005$	$\mathcal{M} = 159,495 * H - 0,606 * SNR - 2,461$

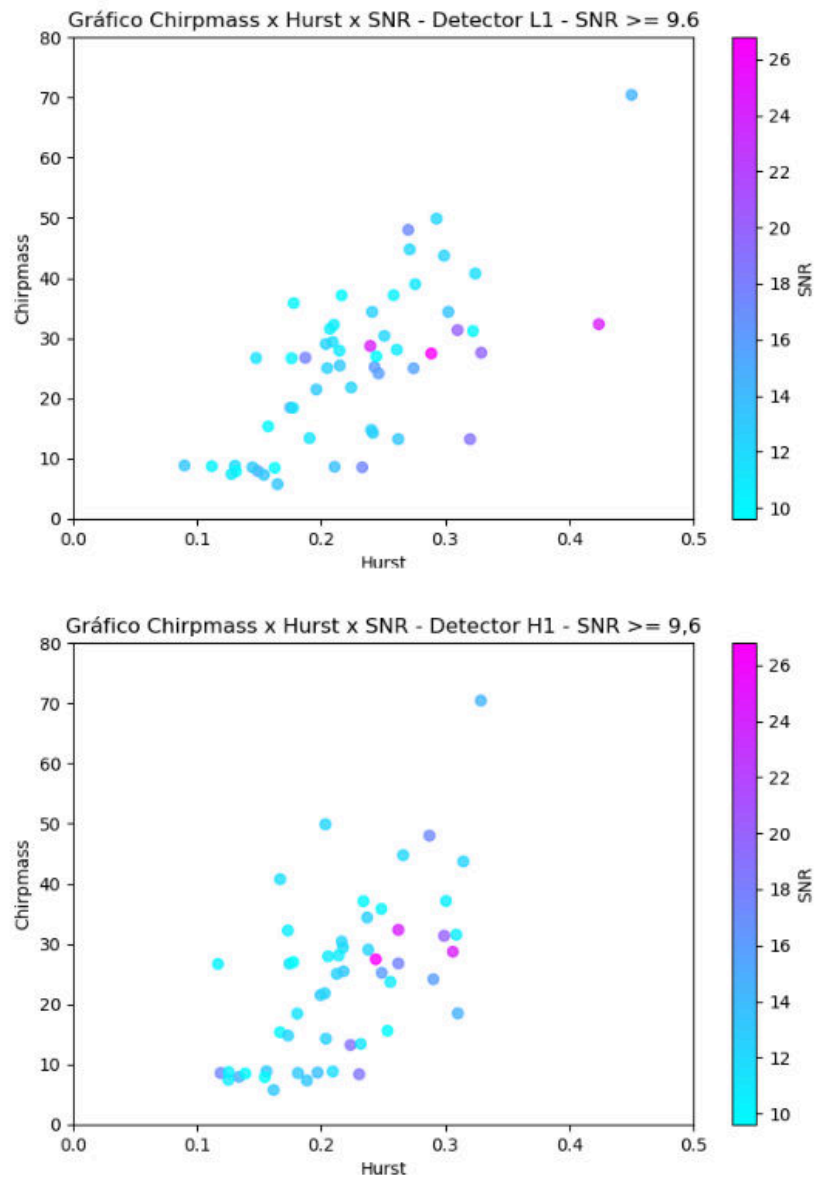
Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 19 – Gráficos de cores: *Chirpmass* x Expoente de Hurst x *SNR* para ambos os detectores. Sendo o *SNR* representado pela escala em cores contendo todas as amostras.

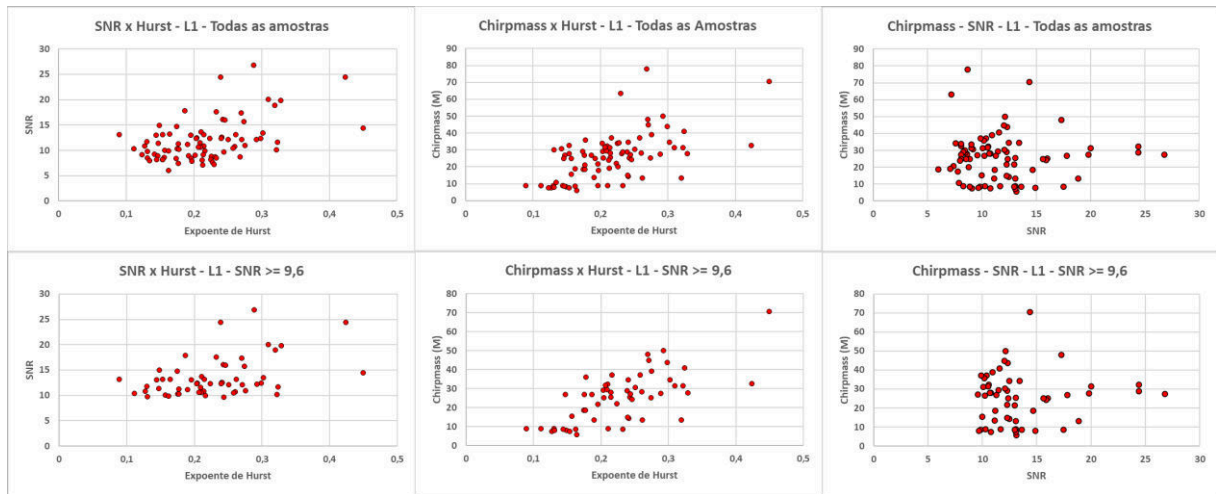


Fonte: Autoria Própria.

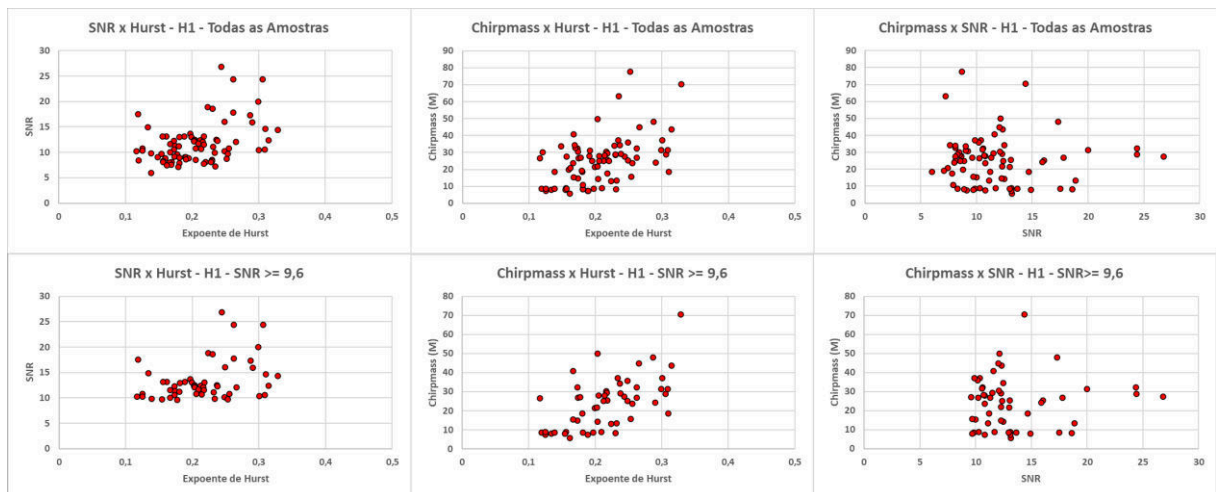
Gráfico 20 - Gráficos de cores: *Chirpmass* x Expoente de Hurst x *SNR* para ambos os detectores. Sendo o *SNR* representado pela escala em cores. Para $SNR \geq 9,6$.



Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 21 - Representação 2D das relações individuais das três variáveis para o detector L1.

Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 22 - Representação 2D das relações individuais das três variáveis para o detector H1.

Fonte: Autoria Própria.

Os dados obtidos na tabela 4, indicativos dos níveis de correlação, mostram um aumento na qualidade do ajuste, com relação a análise de regressão simples, que utilizou somente uma variável. Todos os níveis de correlação aumentaram, podendo ser classificados como correlações fortes, com um em especial atingindo um valor de $r \cong 0,74$ sendo referente ao índice de correlação equivalente ao detector *L1* com $SNR \geq 9,6$. Apenas a análise do detector *H1* para todas as amostras, onde $r = 0,55$, se encontra em um nível de correlação regular. Esse fenômeno pode ser explicado pela diferença de sensibilidade dos detectores e a leve diferença entre as amostras.

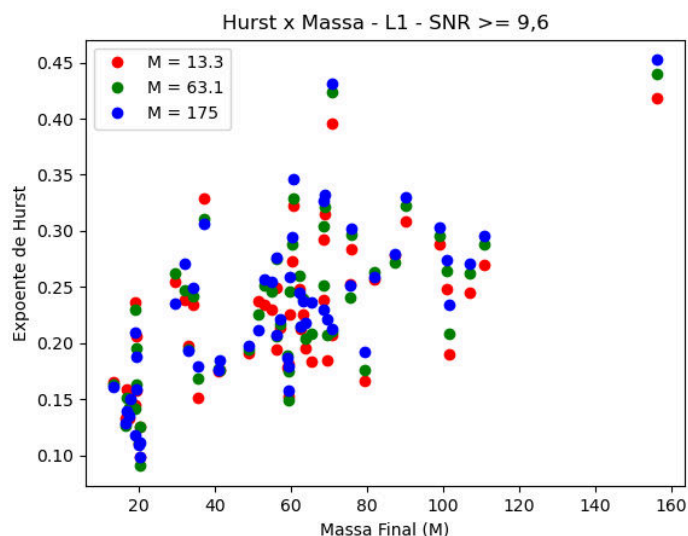
6.5. Tamanho da janela temporal

A discussão referente ao tamanho da janela se faz necessária antes de realizar a conclusão, pois surgem duas perguntas a seu respeito que são elementais para a derradeira avaliação:

1. O tamanho da janela temporal, selecionada pela lei de potência, pode ter induzido as correlações detectadas pelo expoente de Hurst?
2. A questão cuja esse trabalho se propõe a resolver é motivada pela necessidade de inferir um parâmetro físico a partir de um ou mais parâmetros estatísticos. Mas para a seleção da janela utilizou-se como critério a massa final que é uma das variáveis onde foi detectada uma correlação. Percebe-se que esse critério é inválido para situações em que a massa é desconhecida. Dessa forma, como deve ser selecionada a janela, haja visto que não se possui a massa?

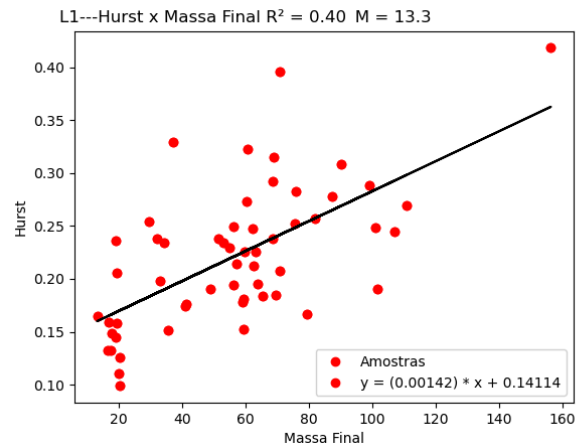
O tamanho da janela poderia influenciar diretamente se o expoente de Hurst fosse sensível ao tamanho da amostra, haja visto que o *simple rate* é o mesmo, selecionar janelas temporais diferentes significa estar pegando tamanhos de amostras diferentes. É certo que mudar a amostra trará mudanças nos resultados, isso porque é praticamente impossível obter exatamente o mesmo resultado com amostras diferentes, resta saber se essa mudança é detectada diretamente pelo expoente de Hurst, a ponto de forjar uma relação entre variáveis, ou se as mudanças serão mínimas devido a simples flutuações nos dados. Para realizar o teste foi utilizada a seguinte metodologia. Foram selecionados três eventos: o de maior massa ($M_f = 175$), o de menor massa ($M_f = 13,3$) e um de massa intermediária ($M_f = 63,1$). Com esses três valores de massa foram calculadas três janelas temporais com a lei de potência usada anteriormente. E por fim, todos os eventos foram cortados e analisados de acordo com cada uma das três janelas, de maneira que, para cada análise, todas as séries possuam exatamente o mesmo tamanho temporal. O gráfico 23 mostra o comportamento do expoente de Hurst com as três análises. Nesta discussão serão utilizados como exemplo apenas os dados do detector *L1*.

Gráfico 23 - Comportamento do expoente de Hurst com janelas constantes para cada evento.

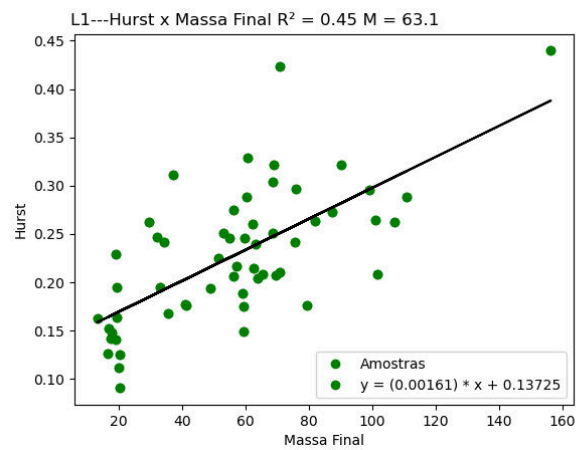


Fonte: Autoria Própria.

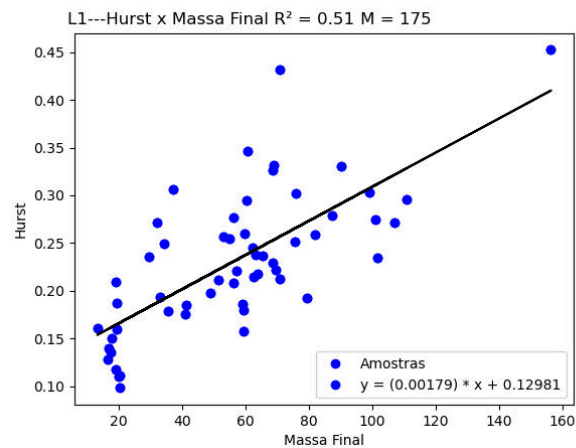
No gráfico é perceptível que, apesar de pequenas flutuações, o expoente de Hurst continua variando de maneira linear com o aumento da massa. Existem poucos casos em que o resultado das três janelas temporais difere por valores consideráveis, mas isso pode ser facilmente explicado. A medida em que todos os eventos foram cortados com o tamanho da janela da onda de maior massa, é provável que algumas formas de onda tenham sido cortadas. Já no caso do corte pela janela da menor massa, devido ao fato das janelas aumentarem, aumentou-se também a quantidade de sinal ruidoso que não faz parte da onda gravitacional, atrapalhando a estatística real. Por este motivo, se fez necessário o uso da lei de potência, que de certa forma maximizou o processo sem interferir ou induzir nenhuma correlação aos dados. Nos gráficos 24, 25 e 26 podem ser vistos os gráficos com a reta de ajuste gerados a partir da plotagem das três janelas.

Gráfico 24 - Ajuste linear - para janela $M = 13,3$.

Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 25 - Ajuste linear - para janela $M = 63,1$.

Fonte: Autoria Própria.

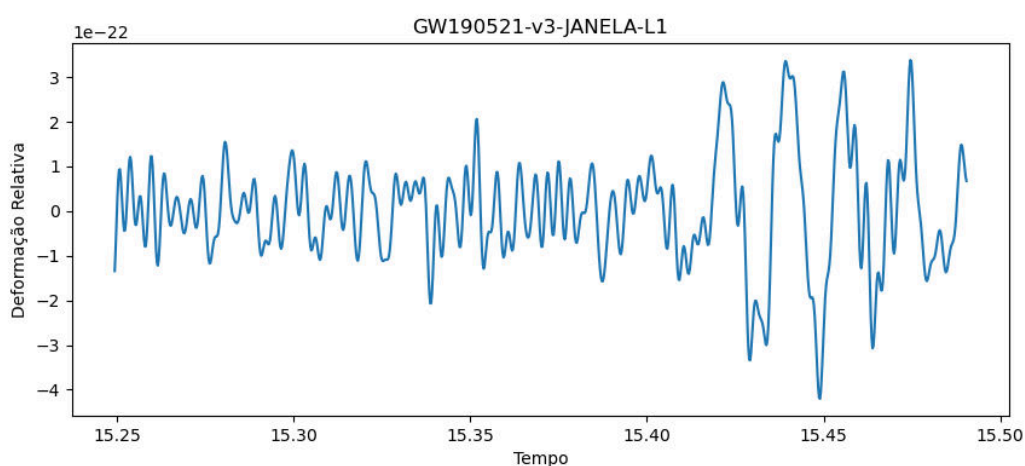
Gráfico 26 - Ajuste linear - para janela $M = 175$.

Fonte: Autoria Própria.

Através dessa análise, pode-se perceber que o critério para a escolha da janela faz diferença, mas, apesar de variar a janela pelos dois pontos de extremo utilizados pela lei de potência, a correlação linear persistiu indicando que o expoente de Hurst é uma boa referência.

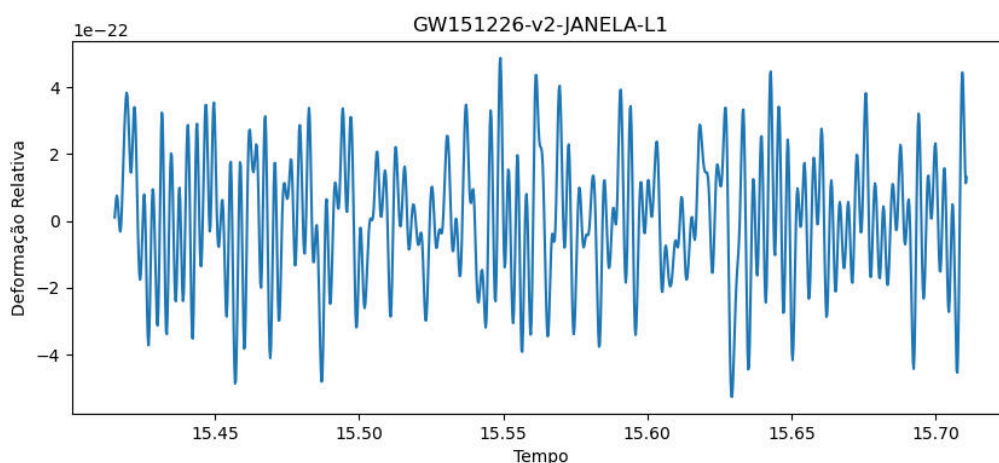
Segundo a tabela 11 do Apêndice E, a onda gravitacional que obteve o maior valor para o expoente de Hurst foi a *GW190521* enquanto que a *GW151226* obteve o menor valor. Vejamos as duas formas de onda nos gráficos 27 e 28, respectivamente. Como pode-se observar, a diferença primordial entre os dois sinais, é a forma de onda bem definida em um, e o outro praticamente dominado pelo ruído. Esse fato se repete em outros eventos como a *GW150914* ou a *GW190521_074359*, demonstrando que o expoente de Hurst é diretamente sensível a forma de onda.

Gráfico 27 - Forma de Onda da *GW190521*.



Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 28 - Forma de Onda da *GW151226*.



Fonte: Autoria Própria.

7. CONCLUSÃO

O presente trabalho se propôs a encontrar correlações entre uma ou mais grandezas físicas associadas ao sistema coalescente, que gerou uma onda gravitacional, com algum índice estatístico que é calculado através da série temporal que o *LIGO* descreveu. A principal justificativa para realizá-lo, é a necessidade de encontrar meios alternativos para calcular ou estimar esses parâmetros, haja visto a necessidade de utilizar, atualmente, relatividade numérica e cálculo diferencial para estimar a *Chirpmass*. No âmbito científico é importante reafirmar as teorias embasando-as com o maior número de experimentos possíveis. Então, utilizar de ferramentas estatísticas para inferir a *Chirpmass*, seria um novo “caminho” para solidificar a física das ondas gravitacionais de maneira geral.

A análise inicial tratou as séries temporais como medidas de dispersão e aplicou os conceitos básicos da estatística descritiva, porém verificou-se que essa análise não é capaz de descrever bem o comportamento de nenhum parâmetro físico. As médias das séries temporais (por se tratar de oscilações) foram muito próximas de zero, o que torna essa quantidade um péssimo indicativo. Já o desvio padrão, apesar de estar em uma faixa de amplitude coerente, não se mostrou um bom indicador de parâmetros físicos, apresentando baixos níveis de correlação r .

Percebendo que a análise descritiva não possui bons indicadores, decidiu-se utilizar uma técnica mais robusta que trata as séries temporais como objetos fractais: O expoente de Hurst. Ao aplicar os algoritmos, foi possível notar índices de correlação regular nos ajustes lineares, que envolviam o expoente de Hurst e os parâmetros ligados a massa como *Chirpmass* e Massa Final. Também se notou que o expoente de Hurst era influenciado pelo *SNR*, de maneira que essa quantidade poderia estar diminuindo a qualidade do ajuste de curva. Por isso a análise do expoente de Hurst foi feita em duas modalidades: Com todas as amostras e com as amostras que possuem $SNR \geq 9,6$. Com isso foi possível perceber que os dados se ajustam melhor quando os níveis de $SNR \geq 9,6$. Desse modo, decidiu-se utilizar uma técnica de regressão múltipla que foi capaz de estimar a *Chirpmass* baseando-se no expoente de Hurst e o *SNR*. O ajuste múltiplo obteve níveis de correlação que são considerados fortes, fazendo do expoente de Hurst um bom indicador para o parâmetro da *Chirpmass*.

É claro que, apesar de se tratar de uma correlação forte, analisar uma onda gravitacional sem conhecer o nível de *SNR*, remete ao nível de correlação encontrado

na análise em que são utilizadas todas as amostras ($r = 0,5789$), que se trata de uma correlação regular. Sendo assim, é possível estimar o valor da *Chirpmass*, mas com um baixo nível de confiança.

Vale salientar que, como foi dito na discussão dos gráficos 27 e 28, o expoente de Hurst é sensível ao comportamento da série temporal, sendo assim, ele é sensível a parâmetros capazes de modificar a forma de onda. Grandezas como massa alteram diretamente a forma de onda por meio da frequência e de suas variações. Os níveis de sinal ruído, podem, quando baixos, prejudicar o sinal afetando também a forma de onda. Formas de ondas bem definidas fazem o valor do expoente aumentar, e formas de ondas ruidosas fazem o expoente diminuir, sendo assim, a informação da massa que está contida na forma de onda, está sendo refletida pelo expoente Hurst, que a princípio é uma técnica Fractal. Desse modo, sabendo dessa característica peculiar, as correlações vistas nos gráficos se tornam consequências desse comportamento estatístico fractal.

Nepomuceno (2016) identificou uma possível relação entre um parâmetro multifractal e a memória da onda gravitacional. Desse modo, o comportamento do expoente de Hurst com relação a forma de onda, e o fato desse indicador não conseguir estimar, com alto nível de confiança, o parâmetro da *Chirpmass*, podem ser consequências de um comportamento multifractal das ondas gravitacionais. Nesse caso, a técnica do expoente de Hurst não seria capaz de representar essa característica multifractal, tornando necessária a utilização de um método mais robusto.

Considerações Finais:

- O presente trabalho conseguiu atingir todos os objetivos específicos.
- A análise estatística realizada se mostrou ineficiente para estimar a Massa Final, *Chirpmass*, Diferença das massas ou distância.
- A análise fractal com o expoente de Hurst mostrou-o como um bom indicador que é sensível a *Chirpmass* do sistema coalescente. Isso possibilita a realização de estimativas razoáveis, mas não é suficiente para propô-lo como maneira alternativa de cálculo de *Chirpmass*, sendo incapaz de colocar a prova os métodos atuais.

Perspectiva:

- Analisar as séries temporais das ondas gravitacionais, do tipo BBH, detectadas pelo LIGO, com técnicas multifractais, em busca de correlações com as grandezas físicas atreladas aos sistemas coalescentes que as geraram.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBOTT, P.B. *et al.* Characterization of transient noise in Advanced *LIGO* relevant to gravitational wave signal GW150914. **IOPscience**, [S. l.], p. 1-34, 11 fev. 2016.

ABBOTT, P.B. *et al.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. **APSphysics**, [S. l.], p. 1-16, 11 fev. 2016.

ABBOTT, R. *et al.* Open data from the first and second observing runs of Advanced LIGO and Advanced Virgo. **SoftwareX**, [S. l.], p. 1-42, 25 dez. 2019. DOI <https://doi.org/10.1016/j.softx.2021.100658>. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.11716>. Acesso em: 3 jun. 2022.

ABBOTT, Rich *et al.* Open data from the first and second observing runs of Advanced *LIGO* and Advanced Virgo. **SoftwareX**, [S. l.], p. 1-22, 5 jan. 2021. DOI <https://doi.org/10.1016/j.softx.2021.100658>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352711021000030?via%3Dihub>. Acesso em: 19 maio 2022.

ABBOTT, B.P. *et al.* Prospects for observing and localizing gravitational-wave transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA. **Living Reviews in Relativity**, [S. l.], p. 1-52, 27 maio 2020. DOI <https://doi.org/10.1007/s41114-020-00026-9>. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1304.0670>. Acesso em: 2 jun. 2022.

AGUIAR, Bernardo França de. **Relatividade Geral**. 2018. 90 f. Monografia (Graduação em Física) - Instituto De Física Universidade Federal Fluminense, [S. l.], 2018.

ANNINOS, Peter *et al.* Three dimensional numerical relativity: the evolution of black holes. **APSphysics**, [S. l.], p. 1-50, 15 mar. 1995.

ARAUJO, Jonathas Vinícius Gonzaga Alves; SANTOS, Marcos; GOMES, Carlos Francisco Simões. Desenvolvimento de um código em python para geração dematrizes de correlação de pearson com laços a partir de “n” variáveis tomadas duas a duas. **SPOLM2019**, [S. l.], p. 1-10, 1 dez. 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/337669684_DESENVOLVIMENTO_DE_U_M_CODIGO_EM_PYTHON_PARA_GERACAO_DE_MATRIZES_DE_CORRELACAO_DE_PEARSON_COM_LACOS_A_PARTIR_DE_N_VARIAVEIS_TOMADAS_DUA_S_A_DUAS. Acesso em: 29 maio 2022.

BAKER, John; CAMPANELLI, Manuela; LOUSTO, Carlos O. The Lazarus project: A pragmatic approach to binary black hole evolutions. **PHYSICAL REVIEW D**, [S. l.], p. 1-16, 7 jan. 2002.

BARTUSIAK, Marcia. **Einstein's Unfinished Symphony**: Listening to the Sounds of Space-Time. [S. l.: s. n.], 2000.

BERTOLAMI, Orfeu; GOMES, Cláudio. Ondas Gravitacionais. **Rev. Ciência Elem.**, [S. l.], p. 1-4, 6 dez. 2017.

BIANCHI, A. J. **Processamento de áudio em tempo real em dispositivos computacionais de alta disponibilidade e baixo custo**. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

CALLEGARI-JACQUES, Sidia M. **Bioestatística: princípios e aplicações**. Porto Alegre: Grupo A, 2003. 9788536311449. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788536311449/>. Acesso em: 29 mai. 2022.

CARROLL, S. M. Spacetime and geometry. An introduction to general relativity. [S.l.:s.n.], 2004.

CHEIN, Flávia. **Introdução aos modelos de regressão linear**. Brasília – DF: Enap, 2019. 76 p. ISBN 978-85-256-0115-5.

CUTLER, Curt; E. FLANAGAN, Eanna. Gravitational waves from merging compact binaries: How accurately can one extract the binary's parameters from the inspiral waveform?. **Theoretical Astrophysics**, [S. l.], p. 1-103, 4 fev. 1994. DOI <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.2658>. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9402014>. Acesso em: 19 maio 2022.

FEDER, Jens. **Fractals**. [S. l.]: Springer, 1988. 284 p. ISBN 978-1489921260.

FELLER, William. The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of Independent Random Variables. **The Annals of Mathematical Statistics**, [S. l.], p. 427-432, 3 set. 1951. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2236629>. Acesso em: 26 maio 2022.

GORSKI, A. Z.; DROZDZ, S.; SPETH, J. Financial multifractality and its subtleties: an example of DAX. **Elsevier**, [S. l.], p. 496-510, 15 dez. 2002. DOI [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01021-X](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01021-X). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0205482>. Acesso em: 29 maio 2022.

Estatística Descritiva. **Guedes et al.**, São Paulo, 12 de jun. de 2005. Disponível em: < http://www.each.usp.br/rvicente/Guedes_et_al_Estatistica_Descritiva.pdf >. Acesso em: 04 de mar. de 2022.

HULSE, R.; TAYLOR, Jr. A high-sensitivity pulsar survey. **The Astrophysical Journal**, v.191, p. L59, 1974.

HURST, H. E. Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. **Transactions of the American Society of Civil Engineers**, [S. l.], p. 770-808, 1 jan. 1951. DOI <https://doi.org/10.1061/TACEAT.0006518>. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/TACEAT.0006518>. Acesso em: 26 maio 2022.

HURST, H. E.; BLACK, R. P.; SIMAIKA, Y. M. **Long-term Storage**: An Experimental Study. [S. l.]: Constable, 1965. 145 p.

Introdução aos Fractais. **Rodrigo Siqueira**, São Paulo, 18 de abr. de 2005. Disponível em: < <http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php> >. Acesso em: 04 de mar. de 2022.

KANTELHARDT, Jan W. Fractal and Multifractal Time Series. **Physics**, [S. l.], p. 1-59, 4 abr. 2008.

LATHI, B.P. **Sinais e Sistemas Lineares**. Porto Alegre (RS): Grupo A, 2006. 9788577803910. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577803910/>. Acesso em: 18 mai. 2022.

LEWINSON, Eryk. **Introduction to the Hurst exponent**: With code in Python. [S. l.], 25 maio 2021. Disponível em: <https://towardsdatascience.com/introduction-to-the-hurst-exponent-with-code-in-python-4da0414ca52e>. Acesso em: 29 maio 2022.

Most Precise Ruler Ever Constructed. **LIGO Lab | Caltech**, Pasadena, 10 de fev. de 2016. Disponível em: <https://www.ligo.caltech.edu/video/ligo20160211v6?highlight=ruler> >. Acesso em: 28 de fev. de 2022.

LIGO LAB | CALTECH. Gravitational Waves Detected 100 Years After Einstein's Prediction. **News Release**, Tri-Cities, Washington, p. 1-5, 11 fev. 2016.

A Brief History of *LIGO*. **LIGO Lab | Caltech**, Pasadena, 02 de out. de 2017. Disponível em: https://www.ligo.caltech.edu/system/media_files/binaries/386/original/LIGOHistory.pdf >. Acesso em: 27 de fev. de 2022.

What is an Interferometer?. **LIGO Lab | Caltech**, Pasadena, 25 de jul. de 2019. Disponível em: < <https://www.ligo.caltech.edu/page/what-is-interferometer> >. Acesso em: 04 de mar. de 2022.

What is *LIGO*?. **LIGO Lab | Caltech**, Pasadena, 25 de jul. de 2019. Disponível em: < <https://www.ligo.caltech.edu/page/what-is-ligo> >. Acesso em: 04 de mar. de 2022.

Vibration Isolation. **LIGO Lab | Caltech**, Pasadena, 29 de jul. de 2019. Disponível em: < <https://www.ligo.caltech.edu/page/vibration-isolation> >. Acesso em: 26 de fev. de 2022.

LIMA, Carlos R. A.; ZAPPA, Fábio. **Análise de dados para Laboratório de Física**. [S. l.: s. n.], 2014. 57 p.

MACLEOD, D.M. *et al.* GWpy: A Python package for gravitational-wave astrophysics. **Elsevier**, [S. l.], p. 1-5, 5 jan. 2021.

MAGGIORE, Michele. **Gravitational Waves**: Astrophysics and Cosmology. [S. l.: s. n.], 2018. v. 2.

MAIA, Alexandre G. **Econometria Conceitos e Aplicações**. São Paulo: Saint Paul Publishing (Brazil), 2017. 9788580041286. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580041286/>. Acesso em: 30 mai. 2022.

MEDRONHO, R. A., CARVALHO, D.M.de, BLOCH K.V., LUIZ, R.R. E WERNECK, G.L. Epidemiologia. São Paulo: Editora Atheneu, 2003.

MILONE, Giuseppe. Estatística Geral e Aplicada. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

MORETTIN, P.A.; BUSSAB, W.D.O. **Estatística básica**. São Paulo: Editora Saraiva, 2017. 9788547220228. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788547220228/>. Acesso em: 04 Mar 2022.

NASCIMENTO, João Paulo Gomes do. **O Papel da Cosmologia no Cálculo de um Fundo Estocástico de Ondas Gravitacionais**. 2018. 81 p. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, [S. l.], 2018.

NEPOMUCENO, Mackson Matheus França. **Natureza Fractal e Multifractal da Onda Gravitacional GW150914 Detectada pelo LIGO**. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

NETO, P.L.D.O. C. **Estatística**. São Paulo: Editora Blucher, 2006. 9788521215226. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521215226/>. Acesso em: 04 Mar 2022.

NTI ÁUDIO. **Transformação rápida de Fourier FFT: Noções básicas**. [S. l.], 4 jul. 2019. Disponível em: <https://www.nti-audio.com/pt/suporte/saber-como/transformacao-rapida-de-fourier-fft>. Acesso em: 19 maio 2022.

PAGANO, Marcello; GAUVREAU, Kimberlee. **Princípios de Bioestatística**. Tradução da 2ª edição norte-americana. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004 REIS, Elizabeth. **Estatística descritiva**. Lisboa: Silabo, ed. 4, 1998.

QUANTSTART. **Basics of Statistical Mean Reversion Testing**. [S. l.], 3 nov. 2021. Disponível em: <https://www.quantstart.com/articles/Basics-of-Statistical-Mean-Reversion-Testing/>. Acesso em: 29 maio 2022.

Relatividade numérica. **String Fixer**, Pasadena, 27 de abr. de 2018. Disponível em: < https://stringfixer.com/pt/Numerical_relativity >. Acesso em: 28 de fev. de 2022.

SANTOS, Alessandra Gazzoli. **Estrutura Fractal em Séries Temporais: uma Investigação quanto à Hipótese de Passeio Aleatório no Mercado à Vista de Commodities Agrícolas Brasileiro**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ciências Econômicas) - Fundação Getúlio Vargas, [S. l.], 2013.

SEURONT, Laurent. **Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science**. [S. l.]: CRC Press, 2009.

A distribuição Normal. **Silvia Shimakura**, São Paulo, 8 de nov. de 2005. Disponível em: < <http://leg.ufpr.br/~silvia/CE701/node36.html> >. Acesso em: 04 de mar. de 2022.

VENTURA, Dalia. **O que são os fractais, padrões matemáticos infinitos apelidados de 'impressão digital de Deus'**. BBC News Mundo, 4 dez. 2009. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-50656301>. Acesso em: 4 mar. 2022.

WHEELER, John Archibald; FORD, Kenneth William. **Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics**. [S. l.]: Norton, 1998. 380 p.

APÊNDICE A – Lista de eventos selecionados

Tabela 6 - Lista de eventos selecionados.

Evento	Versão	Catálogo	L1	H1
GW150914	v3	GWTC-1-confident	X	X
GW151012	v3	GWTC-1-confident	X	X
GW151226	v2	GWTC-1-confident	X	X
GW170104	v2	GWTC-1-confident	X	X
GW170608	v3	GWTC-1-confident	X	X
GW170729	v1	GWTC-1-confident	X	X
GW170809	v1	GWTC-1-confident	X	X
GW170814	v3	GWTC-1-confident	X	X
GW170818	v1	GWTC-1-confident	X	X
GW170823	v1	GWTC-1-confident	X	X
GW190403_051519	v1	GWTC-2.1-confident	X	X
GW190408_181802	v1	GWTC-2	X	X
GW190412	v3	GWTC-2	X	X
GW190413_052954	v1	GWTC-2	X	X
GW190413_134308	v1	GWTC-2	X	X
GW190421_213856	v1	GWTC-2	X	X
GW190424_180648	v1	GWTC-2	X	###
GW190426_190642	v1	GWTC-2.1-confident	X	X
GW190503_185404	v1	GWTC-2	X	X
GW190512_180714	v1	GWTC-2	X	X
GW190513_205428	v1	GWTC-2	X	X
GW190514_065416	v1	GWTC-2	X	X
GW190517_055101	v1	GWTC-2	X	X
GW190519_153544	v1	GWTC-2	X	X
GW190521	v3	GWTC-2	X	X
GW190521_074359	v1	GWTC-2	X	X
GW190527_092055	v1	GWTC-2	X	X
GW190602_175927	v1	GWTC-2	X	X
GW190620_030421	v1	GWTC-2	X	###
GW190630_185205	v1	GWTC-2	X	###
GW190701_203306	v1	GWTC-2	X	X
GW190706_222641	v1	GWTC-2	X	X
GW190707_093326	v1	GWTC-2	X	X
GW190708_232457	v1	GWTC-2	X	###
GW190719_215514	v1	GWTC-2	X	X
GW190720_000836	v1	GWTC-2	X	X
GW190725_174728	v1	GWTC-2.1-confident	X	X
GW190727_060333	v1	GWTC-2	X	X
GW190728_064510	v1	GWTC-2	X	X
GW190731_140936	v1	GWTC-2	X	X
GW190803_022701	v1	GWTC-2	X	X
GW190805_211137	v1	GWTC-2.1-confident	X	X
GW190828_063405	v1	GWTC-2	X	X

GW190828_065509	v1	GWTC-2	X	X
GW190909_114149	v1	GWTC-2	X	X
GW190910_112807	v1	GWTC-2	X	###
GW190915_235702	v1	GWTC-2	X	X
GW190916_200658	v1	GWTC-2.1-confident	X	X
GW190924_021846	v1	GWTC-2	X	X
GW190925_232845	v1	GWTC-2.1-confident	###	X
GW190926_050336	v1	GWTC-2.1-confident	X	X
GW190929_012149	v1	GWTC-2	X	X
GW190930_133541	v1	GWTC-2	X	X
GW191103_012549	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191105_143521	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191109_010717	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191113_071753	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191126_115259	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191127_050227	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191129_134029	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191204_110529	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191204_171526	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191215_223052	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191216_213338	v1	GWTC-3-confident	###	X
GW191222_033537	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW191230_180458	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200112_155838	v1	GWTC-3-confident	X	###
GW200128_022011	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200129_065458	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200202_154313	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200208_130117	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200208_222617	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200209_085452	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200216_220804	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200219_094415	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200220_061928	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200220_124850	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200224_222234	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200225_060421	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200302_015811	v1	GWTC-3-confident	###	X
GW200306_093714	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200308_173609	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200311_115853	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200316_215756	v1	GWTC-3-confident	X	X
GW200322_091133	v1	GWTC-3-confident	X	X
Total	85 eventos		82	79

Fonte: Autoria própria.

APÊNDICE B – Lista de frequências removidas

Tabela 7 - Frequências removidas e quantidades máximas - detector *L1*.

Evento	Frequências Removidas - <i>L1</i>	A_{max}
GW150914	[42, 60, 69, 180, 300, 307, 315, 331]	3,03E-23
GW151012	[41, 60, 180, 300, 306, 315, 331]	2,78E-23
GW151226	[41, 43, 44, 46, 48, 60, 72, 120, 180, 300, 306, 315, 331]	3,07E-23
GW170104	[41, 60, 306, 315]	1,93E-23
GW170608	[43, 60, 307, 315]	1,83E-23
GW170729	[306, 315]	1,85E-23
GW170809	[41, 306, 315]	1,87E-23
GW170814	[40, 43, 60, 307, 315]	1,90E-23
GW170818	[307, 315]	1,82E-23
GW170823	[307, 315]	1,87E-23
GW190403_051519	[40, 42, 60, 306, 315]	1,18E-23
GW190408_181802	[41, 307, 315]	1,19E-23
GW190412	[41, 307, 315]	1,18E-23
GW190413_052954	[40, 307, 315]	1,20E-23
GW190413_134308	[44, 306, 315]	1,18E-23
GW190421_213856	[307, 315]	1,23E-23
GW190424_180648	[41, 43, 45, 48, 307, 315]	1,23E-23
GW190426_190642	[40, 43, 45, 48, 51, 60, 307, 315]	1,26E-23
GW190503_185404	[41, 44, 60, 307, 315]	1,27E-23
GW190512_180714	[40, 43, 307, 315]	1,16E-23
GW190513_205428	[41, 45, 48, 52, 61, 307, 315]	1,26E-23
GW190514_065416	[41, 42, 45, 58, 307, 315]	1,22E-23
GW190517_055101	[40, 44, 46, 307, 315]	1,20E-23
GW190519_153544	[41, 44, 307, 315]	1,20E-23
GW190521	[45, 48, 60, 307, 315]	1,23E-23
GW190521_074359	[42, 44, 306, 315]	1,23E-23
GW190527_092055	[40, 307, 315]	1,22E-23
GW190602_175927	[41, 44, 47, 60, 307, 315]	1,23E-23
GW190620_030421	[42, 44, 59, 306, 315]	1,25E-23
GW190630_185205	[60, 306, 315]	1,36E-23
GW190701_203306	[41, 43, 45, 307, 315]	1,26E-23
GW190706_222641	[60, 306, 315]	1,22E-23
GW190707_093326	[44, 307, 315]	1,20E-23
GW190708_232457	[41, 44, 307, 315]	1,21E-23
GW190719_215514	[41, 60, 307, 315]	1,22E-23
GW190720_000836	[40, 44, 307, 315]	1,24E-23
GW190725_174728	[60, 307, 315]	1,19E-23
GW190727_060333	[47, 60, 307, 315]	1,22E-23
GW190728_064510	[46, 307, 315]	1,21E-23
GW190731_140936	[40, 44, 60, 307, 315]	1,21E-23
GW190803_022701	[47, 306, 315]	1,22E-23
GW190805_211137	[44, 60, 307, 315]	1,21E-23
GW190828_063405	[41, 44, 60, 307, 315]	1,22E-23
GW190828_065509	[47, 59, 307, 315]	1,27E-23
GW190909_114149	[41, 42, 45, 48, 60, 307, 315]	1,21E-23

GW190910_112807	[40, 44, 47, 307, 315]	1,22E-23
GW190915_235702	[40, 60, 307, 315]	1,23E-23
GW190916_200658	[40, 42, 60, 307, 315]	1,20E-23
GW190924_021846	[41, 42, 44, 46, 60, 307, 315]	1,24E-23
GW190925_232845	nan	nan
GW190926_050336	[42, 45, 307, 315]	1,19E-23
GW190929_012149	[41, 307, 315]	1,24E-23
GW190930_133541	[40, 42, 44, 49, 307, 315]	1,24E-23
GW191103_012549	[59, 60, 307, 315]	1,34E-23
GW191105_143521	[40, 60, 61, 307, 315]	1,28E-23
GW191109_010717	[40, 60, 307, 315]	1,29E-23
GW191113_071753	[40, 48, 50, 307, 315]	1,39E-23
GW191126_115259	[40, 307, 315]	1,25E-23
GW191127_050227	[41, 60, 307, 315]	1,24E-23
GW191129_134029	[60, 307, 315]	1,26E-23
GW191204_110529	[307, 315]	1,23E-23
GW191204_171526	[306, 315]	1,25E-23
GW191215_223052	[307, 315]	1,26E-23
GW191216_213338	nan	nan
GW191222_033537	[41, 307]	1,22E-23
GW191230_180458	[306, 315]	1,25E-23
GW200112_155838	[60, 307, 315]	1,28E-23
GW200128_022011	[41, 307, 315]	1,27E-23
GW200129_065458	[40, 42, 44, 306, 315]	1,29E-23
GW200202_154313	[307, 315]	1,30E-23
GW200208_130117	[60, 307, 315]	1,27E-23
GW200208_222617	[50, 307, 315]	1,31E-23
GW200209_085452	[41, 307, 315]	1,31E-23
GW200216_220804	[60, 306, 315]	1,25E-23
GW200219_094415	[43, 45, 307, 315]	1,24E-23
GW200220_061928	[41, 307, 315]	1,23E-23
GW200220_124850	[41, 44, 307, 315]	1,26E-23
GW200224_222234	[41, 307, 315]	1,28E-23
GW200225_060421	[41, 307, 315]	1,22E-23
GW200302_015811	nan	nan
GW200306_093714	[41, 44, 60, 307, 315]	1,26E-23
GW200308_173609	[41, 307, 315]	1,33E-23
GW200311_115853	[41, 60, 307, 315]	1,27E-23
GW200316_215756	[41, 307, 315]	1,28E-23
GW200322_091133	[41, 307, 315]	1,30E-23

Fonte: Autoria Própria.

Tabela 8 - Frequências removidas e quantidades máximas - detector *H1*.

Evento	Frequências Removidas - <i>H1</i>	A_{max}
GW150914	[41, 60, 120, 180, 299, 303, 332]	3,00E-23
GW151012	[41, 60, 120, 180, 299, 303, 332]	3,06E-23
GW151226	[41, 46, 56, 60, 120, 180, 300, 303, 332]	2,81E-23
GW170104	[41, 43, 45, 46, 59, 69, 299, 303]	2,14E-23
GW170608	[41, 43, 46, 58, 65, 299, 303]	1,96E-23
GW170729	[41, 43, 45, 47, 49, 50, 53, 55, 56, 60, 66, 70, 299, 303]	2,21E-23
GW170809	[41, 43, 45, 47, 48, 50, 54, 56, 66, 69, 300, 303, 331, 333, 334]	2,32E-23
GW170814	[41, 43, 45, 47, 49, 51, 52, 60, 66, 70, 299, 302]	2,21E-23
GW170818	[41, 43, 45, 47, 49, 50, 53, 56, 59, 61, 66, 70, 299, 303]	2,43E-23
GW170823	[41, 43, 45, 47, 49, 52, 53, 66, 68, 70, 299, 303]	2,21E-23
GW190403_051519	[41, 43, 45, 47, 49, 300, 303]	1,39E-23
GW190408_181802	[41, 43, 44, 47, 49, 299, 303]	1,45E-23
GW190412	[41, 42, 47, 49, 60, 299, 303]	1,45E-23
GW190413_052954	[41, 43, 46, 48, 299, 303]	1,47E-23
GW190413_134308	[41, 43, 46, 299, 303]	1,47E-23
GW190421_213856	[41, 43, 45, 46, 300, 303]	1,47E-23
GW190424_180648	nan	nan
GW190426_190642	[41, 43, 45, 47, 49, 50, 60, 299, 302]	1,43E-23
GW190503_185404	[41, 44, 46, 49, 300, 303]	1,45E-23
GW190512_180714	[41, 42, 44, 48, 60, 300, 303]	1,41E-23
GW190513_205428	[41, 43, 45, 49, 54, 60, 300, 303]	1,37E-23
GW190514_065416	[41, 43, 48, 49, 60, 300, 303]	1,36E-23
GW190517_055101	[41, 48, 49, 60, 300, 303]	1,47E-23
GW190519_153544	[41, 42, 47, 49, 50, 60, 300, 303]	1,46E-23
GW190521	[41, 43, 46, 48, 49, 51, 60, 299, 303]	1,47E-23
GW190521_074359	[41, 42, 47, 49, 50, 60, 299, 303]	1,39E-23
GW190527_092055	[41, 43, 48, 50, 58, 60, 299, 303]	1,50E-23
GW190602_175927	[41, 42, 44, 47, 49, 51, 60, 299, 303]	1,45E-23
GW190620_030421	nan	nan
GW190630_185205	nan	nan
GW190701_203306	[41, 43, 45, 48, 50, 300, 303]	1,44E-23
GW190706_222641	[41, 43, 44, 48, 50, 300, 303]	1,36E-23
GW190707_093326	[41, 43, 44, 48, 49, 53, 299, 303]	1,45E-23
GW190708_232457	nan	nan
GW190719_215514	[41, 43, 44, 47, 49, 50, 60, 89, 300, 302]	1,41E-23
GW190720_000836	[41, 43, 45, 46, 49, 50, 299, 303]	1,39E-23
GW190725_174728	[41, 43, 44, 46, 49, 50, 300, 303]	1,44E-23
GW190727_060333	[41, 42, 46, 300, 303]	1,43E-23
GW190728_064510	[41, 43, 45, 46, 49, 59, 300, 303]	1,44E-23
GW190731_140936	[41, 44, 46, 48, 49, 58, 299, 303]	1,45E-23
GW190803_022701	[41, 43, 46, 49, 300, 303]	1,48E-23
GW190805_211137	[41, 43, 48, 49, 300, 303]	1,51E-23
GW190828_063405	[41, 43, 48, 59, 300, 303]	1,41E-23

GW190828_065509	[41, 43, 45, 48, 57, 59, 299, 303]	1,41E-23
GW190909_114149	[41, 43, 46, 49, 60, 62, 300, 303]	1,40E-23
GW190910_112807	nan	nan
GW190915_235702	[41, 43, 44, 48, 49, 299, 303]	1,38E-23
GW190916_200658	[41, 43, 44, 48, 49, 52, 299, 303]	1,38E-23
GW190924_021846	[41, 43, 48, 49, 299, 303]	1,42E-23
GW190925_232845	[41, 43, 60, 300, 303]	1,38E-23
GW190926_050336	[41, 43, 45, 48, 59, 299, 303]	1,41E-23
GW190929_012149	[41, 42, 45, 60, 303]	1,39E-23
GW190930_133541	[41, 43, 59, 300, 303]	1,38E-23
GW191103_012549	[41, 43, 300, 302]	1,39E-23
GW191105_143521	[41, 43, 44, 60, 300, 303]	1,41E-23
GW191109_010717	[41, 43, 60, 300, 303]	1,41E-23
GW191113_071753	[41, 43, 45, 47, 50, 51, 53, 56, 60, 300, 303]	1,40E-23
GW191126_115259	[41, 43, 45, 60, 300, 303]	1,33E-23
GW191127_050227	[41, 43, 45, 47, 54, 60, 300, 303]	1,35E-23
GW191129_134029	[41, 43, 44, 60, 299, 303]	1,38E-23
GW191204_110529	[41, 43, 44, 46, 53, 56, 60, 299, 303]	1,38E-23
GW191204_171526	[41, 43, 44, 46, 60, 299, 303]	1,47E-23
GW191215_223052	[40, 43, 44, 46, 60, 300, 303]	1,39E-23
GW191216_213338	[41, 43, 44, 47, 60, 300, 303]	1,43E-23
GW191222_033537	[41, 43, 44, 47, 60, 299, 303]	1,34E-23
GW191230_180458	[41, 43, 44, 60, 300, 303]	1,50E-23
GW200112_155838	nan	nan
GW200128_022011	[41, 43, 45, 46, 59, 300, 303]	1,34E-23
GW200129_065458	[41, 42, 44, 47, 60, 299, 303]	1,36E-23
GW200202_154313	[41, 43, 44, 58, 300, 303]	1,42E-23
GW200208_130117	[41, 43, 45, 47, 49, 52, 56, 60, 300, 303]	1,31E-23
GW200208_222617	[41, 43, 45, 47, 52, 60, 300, 303]	1,34E-23
GW200209_085452	[41, 43, 45, 46, 52, 60, 299, 303]	1,32E-23
GW200216_220804	[41, 43, 45, 60, 299, 303]	1,30E-23
GW200219_094415	[41, 43, 45, 47, 60, 300, 303]	1,34E-23
GW200220_061928	[41, 43, 45, 60, 300, 303]	1,32E-23
GW200220_124850	[41, 43, 45, 48, 50, 299, 303]	1,56E-23
GW200224_222234	[40, 43, 45, 47, 49, 60, 300, 303]	1,33E-23
GW200225_060421	[41, 43, 44, 46, 60, 300, 303]	1,33E-23
GW200302_015811	[41, 43, 44, 47, 60, 75, 300, 303]	1,34E-23
GW200306_093714	[41, 43, 45, 49, 60, 75, 299, 303]	1,30E-23
GW200308_173609	[41, 43, 45, 50, 52, 60, 64, 300, 303]	1,33E-23
GW200311_115853	[41, 43, 44, 49, 75, 300, 303]	1,34E-23
GW200316_215756	[41, 43, 45, 47, 50, 60, 64, 75, 299, 303]	1,35E-23
GW200322_091133	[40, 43, 44, 47, 48, 60, 75, 300, 303]	1,36E-23

Fonte: Autoria Própria.

APÊNDICE C – Tabela de dados coletados do gwosc e tamanho das janelas temporais.

Tabela 9 - Dados finais, obtidos pelo programa em *pyhton*, utilizados na análise final.

Evento	M_f	$\mathcal{M}$	ΔM	d_L	SNR	t_{INF}	t_{SUP}
GW150914	63,1	28,716	5	440	24,40	0,165	0,099
GW151012	35,6	15,355	9,6	1080	10,00	0,175	0,105
GW151226	20,5	8,868	6	450	13,10	0,185	0,111
GW170104	48,9	21,507	10,8	990	13,00	0,169	0,102
GW170608	17,8	7,933	3,4	320	14,90	0,187	0,112
GW170729	79,5	35,830	16,2	2840	10,20	0,161	0,097
GW170809	56,3	25,033	11,2	1030	12,40	0,167	0,100
GW170814	53,2	24,152	5,4	600	15,90	0,168	0,101
GW170818	59,4	26,711	8,7	1060	11,30	0,166	0,100
GW170823	65,4	29,394	10,5	1940	11,50	0,165	0,099
GW190403_051519	105,2	36,725	65,9	8000	7,96	0,157	0,094
GW190408_181802	41,1	18,482	6,2	1550	14,67	0,172	0,103
GW190412	37,3	13,235	21,8	740	18,86	0,174	0,104
GW190413_052954	56	24,875	11	3550	8,56	0,167	0,100
GW190413_134308	75,5	33,699	15,7	4450	9,03	0,162	0,097
GW190421_213856	69,7	31,546	9,4	2880	10,55	0,164	0,098
GW190424_180648	68,9	31,196	8,7	2200	10,09	0,164	0,098
GW190426_190642	175	78,559	30,3	4350	9,57	0,149	0,089
GW190503_185404	68,6	30,393	14,9	1450	12,10	0,164	0,098
GW190512_180714	34,5	14,778	10,7	1430	12,26	0,175	0,105
GW190513_205428	51,6	21,816	17,7	2060	12,29	0,169	0,101
GW190514_065416	64,5	28,900	10,6	4130	8,30	0,165	0,099
GW190517_055101	59,3	26,677	12,1	1860	10,24	0,166	0,100
GW190519_153544	101	44,743	25,5	2530	12,05	0,158	0,095
GW190521	156,3	70,411	26,3	3920	14,38	0,151	0,091
GW190521_074359	71	32,337	9,4	1240	24,38	0,163	0,098
GW190527_092055	56,4	24,861	13,9	2490	8,87	0,167	0,100
GW190602_175927	110,9	49,863	21,3	2690	12,13	0,156	0,094
GW190620_030421	87,2	38,976	21,6	2810	10,92	0,160	0,096
GW190630_185205	56,4	25,013	11,4	890	15,64	0,167	0,100
GW190701_203306	90,2	40,745	13,1	2060	11,59	0,159	0,096
GW190706_222641	99	43,700	28,8	4420	12,35	0,158	0,095
GW190707_093326	19,2	8,571	3,2	770	12,98	0,186	0,112
GW190708_232457	29,5	13,242	4,4	880	13,07	0,178	0,107
GW190719_215514	54,9	23,800	15,7	3940	7,99	0,167	0,100
GW190720_000836	20,4	8,836	5,6	790	11,70	0,185	0,111
GW190725_174728	17,4	7,406	5,1	1050	9,07	0,188	0,113
GW190727_060333	63,8	29,050	8,6	3300	12,30	0,165	0,099
GW190728_064510	19,6	8,652	4,2	870	13,64	0,186	0,111
GW190731_140936	67	29,997	12,7	3300	8,46	0,164	0,099
GW190803_022701	61,7	27,713	10	3270	8,61	0,166	0,099
GW190805_211137	75,8	34,047	16,2	5310	8,25	0,162	0,097
GW190828_063405	54,9	25,220	5,9	2130	16,04	0,167	0,100
GW190828_065509	33,1	13,406	13,9	1600	11,13	0,176	0,106
GW190909_114149	72	31,162	17,5	3770	9,05	0,163	0,098

GW190910_112807	75,8	34,378	8,3	1460	13,42	0,162	0,097
GW190915_235702	57,2	25,463	10,9	1620	13,07	0,167	0,100
GW190916_200658	65,7	28,062	20,4	4460	8,21	0,165	0,099
GW190924_021846	13,3	5,760	3,9	570	13,16	0,193	0,116
GW190925_232845	35,2	15,795	5,6	930	9,88	0,175	0,105
GW190926_050336	60,5	26,264	16,6	3780	9,00	0,166	0,100
GW190929_012149	101,5	37,111	56,7	2130	9,88	0,158	0,095
GW190930_133541	19,4	8,483	4,5	760	9,84	0,186	0,112
GW191103_012549	19	8,372	3,9	990	8,90	0,186	0,112
GW191105_143521	17,6	7,881	3	1150	9,70	0,188	0,113
GW191109_010717	107	47,991	18	1290	17,30	0,157	0,094
GW191113_071753	34	10,749	23,1	1370	7,90	0,176	0,105
GW191126_115259	19,6	8,693	3,8	1620	8,30	0,186	0,111
GW191127_050227	76	30,577	29	3400	9,20	0,162	0,097
GW191129_134029	16,8	7,331	4	790	13,10	0,189	0,113
GW191204_110529	45	19,923	8	1800	8,80	0,171	0,103
GW191204_171526	19,21	8,570	3,7	650	17,50	0,186	0,112
GW191215_223052	41,4	18,435	6,8	1930	11,20	0,172	0,103
GW191216_213338	18,87	8,361	4,4	340	18,60	0,186	0,112
GW191222_033537	75,5	34,380	10,4	3000	12,50	0,162	0,097
GW191230_180458	82	37,141	12,4	4300	10,40	0,161	0,097
GW200112_155838	60,8	27,596	7,3	1250	19,80	0,166	0,099
GW200128_022011	71	32,236	9,6	3400	10,60	0,163	0,098
GW200129_065458	60,3	27,467	5,6	900	26,80	0,166	0,100
GW200202_154313	16,76	7,455	2,8	410	10,80	0,189	0,113
GW200208_130117	62,5	27,944	10,4	2230	10,80	0,165	0,099
GW200208_222617	61	20,807	38,7	4100	7,40	0,166	0,099
GW200209_085452	59,9	26,990	8,5	3400	9,60	0,166	0,100
GW200216_220804	78	33,816	21	3800	8,10	0,162	0,097
GW200219_094415	62,2	28,097	9,6	3400	10,70	0,165	0,099
GW200220_061928	141	63,220	26	6000	7,20	0,152	0,091
GW200220_124850	64	28,601	11	4000	8,50	0,165	0,099
GW200224_222234	68,6	31,354	7,5	1710	20,00	0,164	0,098
GW200225_060421	32,1	14,273	5,3	1150	12,50	0,177	0,106
GW200302_015811	55,5	23,699	17,8	1480	10,80	0,167	0,100
GW200306_093714	41,7	17,633	13,5	2100	7,80	0,172	0,103
GW200308_173609	47,4	19,074	22,6	5400	7,10	0,170	0,102
GW200311_115853	59	26,765	6,5	1170	17,80	0,166	0,100
GW200316_215756	20,2	8,742	5,3	1120	10,30	0,185	0,111
GW200322_091133	53	18,634	20	3600	6,00	0,168	0,101

Fonte: Autoria Própria.

APÊNDICE D – Resultados da análise descritiva.

Tabela 10 - Resultados da Análise Descritiva para ambos os detectores.

Evento	σ_{L1}	$\bar{h}_{L1}$	σ_{H1}	$\bar{h}_{H1}$
GW150914-v3	2,33E-22	2,23E-24	2,73E-22	-2,47E-24
GW151012-v3	1,90E-22	-2,22E-24	1,63E-22	1,43E-24
GW151226-v2	1,87E-22	1,92E-24	1,37E-22	8,86E-25
GW170104-v2	1,34E-22	1,00E-24	1,43E-22	-4,57E-25
GW170608-v3	1,20E-22	1,23E-25	1,34E-22	-9,17E-25
GW170729-v1	1,31E-22	1,08E-25	1,44E-22	-6,14E-25
GW170809-v1	1,27E-22	-4,01E-25	1,50E-22	3,10E-24
GW170814-v3	1,52E-22	4,21E-25	1,76E-22	7,26E-26
GW170818-v1	1,37E-22	-1,41E-24	1,33E-22	-1,32E-24
GW170823-v1	1,26E-22	-8,33E-26	1,39E-22	-1,09E-24
GW190403_051519-v1	7,83E-23	-5,92E-25	8,74E-23	-1,13E-24
GW190408_181802-v1	9,12E-23	-4,29E-25	1,05E-22	4,32E-25
GW190412-v3	1,09E-22	1,01E-24	9,74E-23	5,70E-25
GW190413_052954-v1	7,65E-23	2,17E-25	9,83E-23	8,80E-25
GW190413_134308-v1	7,98E-23	-1,11E-24	9,13E-23	-5,00E-25
GW190421_213856-v1	7,41E-23	-4,41E-25	1,02E-22	-5,90E-25
GW190424_180648-v1	9,37E-23	1,85E-25	###	###
GW190426_190642-v1	8,76E-23	-6,90E-25	8,43E-23	3,61E-25
GW190503_185404-v1	8,82E-23	5,44E-25	9,43E-23	-7,99E-25
GW190512_180714-v1	8,81E-23	7,18E-25	8,15E-23	1,10E-24
GW190513_205428-v1	8,62E-23	1,30E-24	9,38E-23	8,01E-25
GW190514_065416-v1	7,72E-23	-3,26E-25	8,26E-23	6,75E-25
GW190517_055101-v1	8,43E-23	-9,53E-26	9,44E-23	-8,74E-25
GW190519_153544-v1	9,65E-23	-2,36E-25	1,04E-22	-3,01E-25
GW190521-v3	1,18E-22	-2,00E-26	1,15E-22	1,19E-24
GW190521_074359-v1	1,42E-22	3,81E-25	1,16E-22	-8,06E-25
GW190527_092055-v1	8,04E-23	5,79E-25	8,20E-23	-3,01E-25
GW190602_175927-v1	9,08E-23	-1,08E-24	8,91E-23	-5,39E-25
GW190620_030421-v1	9,43E-23	-2,77E-25	###	###
GW190630_185205-v1	1,17E-22	9,84E-26	###	###
GW190701_203306-v1	9,98E-23	1,34E-24	8,27E-23	4,45E-25
GW190706_222641-v1	8,81E-23	6,37E-25	1,01E-22	2,12E-24
GW190707_093326-v1	8,15E-23	2,15E-26	8,43E-23	3,43E-25
GW190708_232457-v1	9,55E-23	-9,60E-25	###	###
GW190719_215514-v1	8,18E-23	-7,03E-25	8,74E-23	7,50E-26
GW190720_000836-v1	8,61E-23	-8,19E-26	8,29E-23	9,76E-25
GW190725_174728-v1	7,89E-23	-1,10E-24	8,88E-23	-3,43E-25
GW190727_060333-v1	7,89E-23	-6,69E-25	1,02E-22	9,57E-26
GW190728_064510-v1	8,37E-23	1,35E-24	9,00E-23	-3,90E-25
GW190731_140936-v1	8,13E-23	5,96E-25	9,72E-23	1,49E-25
GW190803_022701-v1	8,02E-23	5,57E-25	8,56E-23	1,97E-25

GW190805_211137-v1	8,55E-23	1,11E-24	8,46E-23	9,02E-25
GW190828_063405-v1	9,70E-23	-1,02E-24	1,06E-22	-7,75E-25
GW190828_065509-v1	8,33E-23	-1,33E-24	8,88E-23	-1,29E-24
GW190909_114149-v1	7,46E-23	-3,22E-25	8,29E-23	2,71E-25
GW190910_112807-v1	1,04E-22	-2,37E-25	###	###
GW190915_235702-v1	8,89E-23	2,31E-25	9,46E-23	-1,25E-25
GW190916_200658-v1	7,08E-23	-5,94E-25	9,43E-23	1,18E-24
GW190924_021846-v1	7,76E-23	3,27E-25	8,82E-23	-2,68E-27
GW190925_232845-v1	###	###	9,49E-23	6,19E-25
GW190926_050336-v1	7,69E-23	-8,33E-25	8,23E-23	1,22E-25
GW190929_012149-v1	8,08E-23	5,27E-25	9,09E-23	3,45E-25
GW190930_133541-v1	7,84E-23	-1,38E-25	7,87E-23	-3,67E-25
GW191103_012549-v1	8,28E-23	1,15E-24	8,48E-23	2,46E-25
GW191105_143521-v1	7,75E-23	6,06E-25	7,84E-23	2,07E-25
GW191109_010717-v1	1,02E-22	-4,69E-25	1,03E-22	1,68E-25
GW191113_071753-v1	9,25E-23	-1,13E-24	7,85E-23	-4,72E-25
GW191126_115259-v1	8,32E-23	-1,22E-24	7,88E-23	7,33E-25
GW191127_050227-v1	8,66E-23	4,52E-25	9,36E-23	1,41E-24
GW191129_134029-v1	8,14E-23	4,85E-25	8,64E-23	8,90E-25
GW191204_110529-v1	8,85E-23	-2,02E-25	7,52E-23	3,61E-25
GW191204_171526-v1	9,06E-23	-5,80E-25	9,42E-23	3,60E-25
GW191215_223052-v1	8,56E-23	-4,33E-25	8,26E-23	-5,14E-25
GW191216_213338-v1	###	###	1,28E-22	9,82E-25
GW191222_033537-v1	8,71E-23	-5,94E-25	8,96E-23	-6,62E-25
GW191230_180458-v1	8,88E-23	4,85E-25	1,05E-22	5,03E-25
GW200112_155838-v1	1,29E-22	-1,92E-25	###	###
GW200128_022011-v1	8,36E-23	2,28E-25	8,32E-23	8,02E-25
GW200129_065458-v1	1,47E-22	4,13E-26	1,10E-22	-3,63E-25
GW200202_154313-v1	9,21E-23	9,85E-25	8,40E-23	-9,40E-26
GW200208_130117-v1	9,38E-23	-1,57E-24	8,43E-23	-8,23E-25
GW200208_222617-v1	8,44E-23	-5,69E-25	8,17E-23	2,07E-25
GW200209_085452-v1	7,79E-23	-5,62E-25	8,35E-23	-5,44E-26
GW200216_220804-v1	7,47E-23	2,13E-25	8,91E-23	1,35E-24
GW200219_094415-v1	8,63E-23	-7,26E-25	8,88E-23	-1,63E-25
GW200220_061928-v1	8,51E-23	-9,14E-25	7,92E-23	5,93E-25
GW200220_124850-v1	7,83E-23	-2,72E-25	8,88E-23	-7,62E-25
GW200224_222234-v1	1,07E-22	1,17E-24	1,09E-22	1,01E-25
GW200225_060421-v1	8,60E-23	5,95E-25	9,45E-23	-1,15E-25
GW200302_015811-v1	###	###	9,85E-23	6,94E-26
GW200306_093714-v1	7,97E-23	4,41E-25	8,68E-23	-3,79E-25
GW200308_173609-v1	8,81E-23	-5,97E-26	8,45E-23	9,41E-25
GW200311_115853-v1	9,30E-23	3,51E-25	1,01E-22	-5,31E-25
GW200316_215756-v1	8,23E-23	-6,63E-25	8,20E-23	8,08E-25
GW200322_091133-v1	7,70E-23	1,09E-25	7,70E-23	-1,99E-25

Fonte: Autoria Própria.

APÊNDICE E – Resultados da análise fractal com expoente de hurst

Tabela 11 - Resultados dos cálculos do expoente de Hurst para $\tau = 20$, $\tau = 40$ e $\tau = 60$ para ambos os detectores.

Eventos	Valores do expoente de Hurst = H					
	$L1, \tau = 20$	$L1, \tau = 40$	$L1, \tau = 60$	$H1, \tau = 20$	$H1, \tau = 40$	$H1, \tau = 60$
GW150914-v3	0,353018	0,239556	0,178013	0,416557	0,306116	0,224024
GW151012-v3	0,229854	0,157314	0,119677	0,234912	0,166899	0,142409
GW151226-v2	0,211505	0,089796	0,063348	0,282442	0,155922	0,116676
GW170104-v2	0,316939	0,196128	0,128738	0,359194	0,199459	0,129353
GW170608-v3	0,324875	0,149017	0,100072	0,379731	0,133808	0,099283
GW170729-v1	0,34335	0,177885	0,128801	0,421723	0,248518	0,187946
GW170809-v1	0,324662	0,204867	0,144073	0,337416	0,212479	0,115763
GW170814-v3	0,389284	0,246284	0,166783	0,400487	0,290386	0,189818
GW170818-v1	0,330641	0,147567	0,115536	0,386435	0,174296	0,109688
GW170823-v1	0,345397	0,20928	0,141344	0,378573	0,217533	0,143786
GW190403_051519-v1	0,359501	0,227633	0,142153	0,286157	0,168998	0,101521
GW190408_181802-v1	0,335935	0,175154	0,125041	0,396859	0,310138	0,181376
GW190412-v3	0,483687	0,319995	0,188384	0,353057	0,22365	0,126667
GW190413_052954-v1	0,2722	0,156726	0,111793	0,357321	0,205854	0,140574
GW190413_134308-v1	0,397949	0,202567	0,134464	0,378688	0,148494	0,114538
GW190421_213856-v1	0,34026	0,207027	0,137496	0,471489	0,308897	0,20031
GW190424_180648-v1	0,456887	0,322353	0,193915	###	###	###
GW190426_190642-v1	0,32185	0,268936	0,196213	0,323365	0,252238	0,159735
GW190503_185404-v1	0,408153	0,250899	0,147258	0,428353	0,216515	0,134404
GW190512_180714-v1	0,349634	0,240383	0,153677	0,287799	0,173325	0,097561
GW190513_205428-v1	0,388396	0,224163	0,12991	0,358236	0,202864	0,137015
GW190514_065416-v1	0,351483	0,173925	0,109097	0,378173	0,230008	0,156205
GW190517_055101-v1	0,363024	0,176068	0,123369	0,216934	0,116837	0,068957
GW190519_153544-v1	0,444656	0,271313	0,156793	0,471072	0,266057	0,162198
GW190521-v3	0,52377	0,450168	0,297314	0,418729	0,32868	0,20628
GW190521_074359-v1	0,578002	0,423809	0,293716	0,457386	0,262204	0,162916
GW190527_092055-v1	0,343082	0,192218	0,128627	0,337375	0,195094	0,130015
GW190602_175927-v1	0,466106	0,292995	0,182734	0,361339	0,203432	0,11891
GW190620_030421-v1	0,480531	0,275743	0,193892	###	###	###
GW190630_185205-v1	0,449442	0,274461	0,190615	###	###	###
GW190701_203306-v1	0,486422	0,324208	0,231401	0,349735	0,166968	0,107536
GW190706_222641-v1	0,402258	0,299014	0,188458	0,429191	0,314576	0,183276
GW190707_093326-v1	0,306798	0,144609	0,087031	0,34107	0,181284	0,099712
GW190708_232457-v1	0,406788	0,262098	0,161421	###	###	###
GW190719_215514-v1	0,349501	0,212257	0,145005	0,313292	0,166481	0,091774
GW190720_000836-v1	0,25126	0,130539	0,081246	0,360407	0,20934	0,117228
GW190725_174728-v1	0,311825	0,123588	0,083269	0,301631	0,18898	0,10433
GW190727_060333-v1	0,358811	0,203762	0,139682	0,411813	0,237908	0,139945
GW190728_064510-v1	0,387298	0,21084	0,148292	0,378198	0,197076	0,120654
GW190731_140936-v1	0,303775	0,131514	0,098566	0,243135	0,120172	0,079699
GW190803_022701-v1	0,380655	0,23148	0,156981	0,325331	0,190663	0,107559

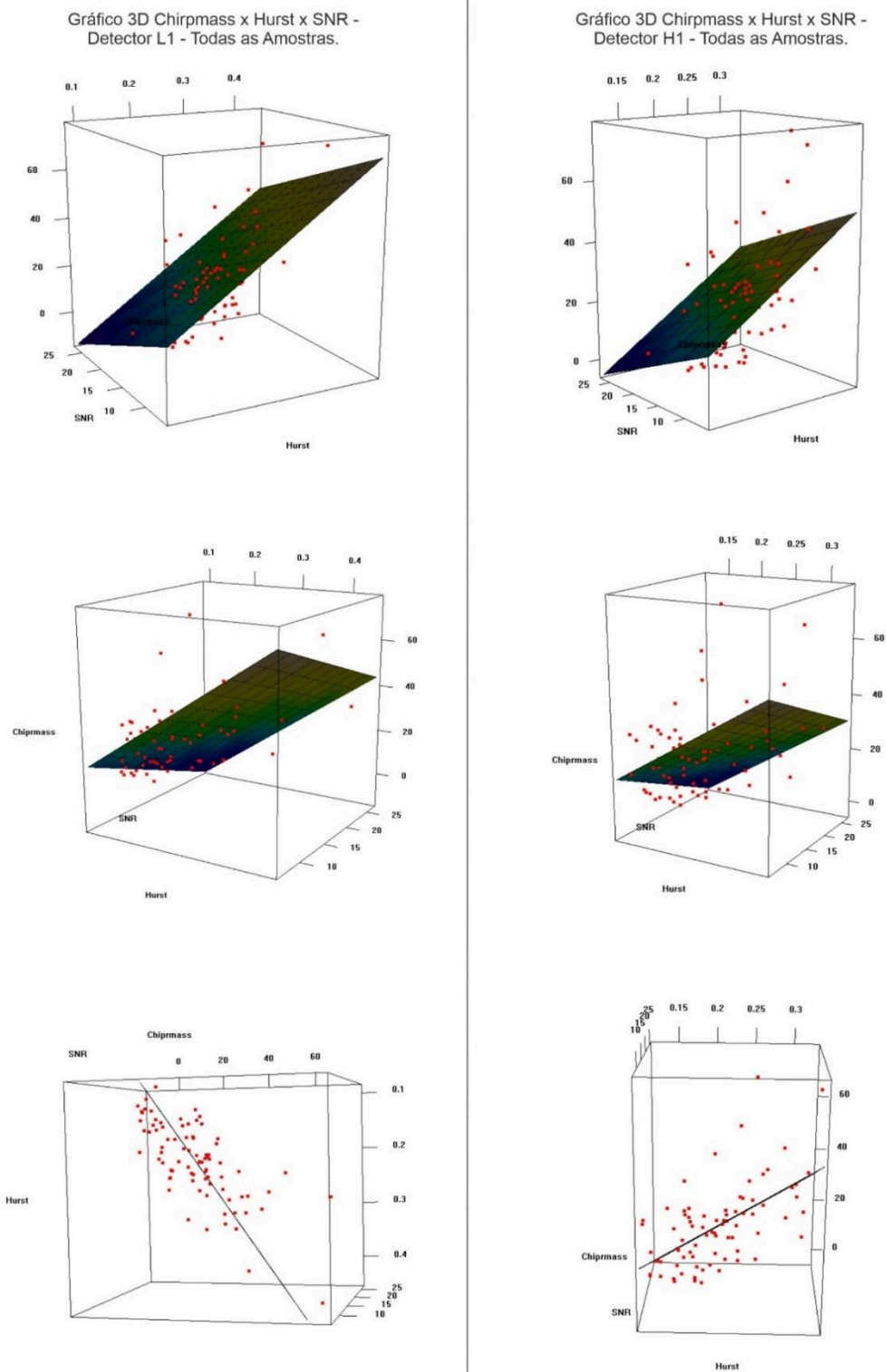
GW190805_211137-v1	0,327017	0,154032	0,118641	0,325947	0,169625	0,106025
GW190828_063405-v1	0,433604	0,242961	0,169053	0,407857	0,2488	0,159779
GW190828_065509-v1	0,295027	0,190602	0,130175	0,371645	0,231949	0,172549
GW190909_114149-v1	0,378923	0,214509	0,145848	0,34643	0,191337	0,113645
GW190910_112807-v1	0,502385	0,302466	0,192095	###	###	###
GW190915_235702-v1	0,302204	0,215002	0,141504	0,448038	0,21793	0,12744
GW190916_200658-v1	0,295677	0,154177	0,101947	0,292651	0,156379	0,109704
GW190924_021846-v1	0,297382	0,164804	0,095705	0,303375	0,161669	0,108965
GW190925_232845-v1	###	###	###	0,353988	0,253476	0,150728
GW190926_050336-v1	0,250523	0,145694	0,097001	0,341956	0,220627	0,133992
GW190929_012149-v1	0,359435	0,216478	0,155982	0,380844	0,234026	0,15696
GW190930_133541-v1	0,304999	0,162581	0,094401	0,289693	0,138837	0,093922
GW191103_012549-v1	0,24464	0,146595	0,097656	0,366266	0,180873	0,114132
GW191105_143521-v1	0,311335	0,131437	0,078757	0,337968	0,154538	0,079547
GW191109_010717-v1	0,496798	0,270135	0,178956	0,478994	0,287232	0,205491
GW191113_071753-v1	0,269308	0,134514	0,08447	0,337247	0,181417	0,111678
GW191126_115259-v1	0,330376	0,196852	0,143053	0,30959	0,156909	0,097886
GW191127_050227-v1	0,271092	0,1425	0,100374	0,319663	0,173874	0,10916
GW191129_134029-v1	0,323703	0,153813	0,089922	0,345551	0,188526	0,117952
GW191204_110529-v1	0,328073	0,22586	0,16776	0,302857	0,160171	0,089658
GW191204_171526-v1	0,424191	0,233064	0,129418	0,258806	0,118992	0,08233
GW191215_223052-v1	0,302581	0,177263	0,09451	0,305969	0,180653	0,109151
GW191216_213338-v1	###	###	###	0,455703	0,230634	0,128042
GW191222_033537-v1	0,431119	0,241087	0,18229	0,431538	0,237045	0,134924
GW191230_180458-v1	0,400494	0,258383	0,18253	0,452977	0,300608	0,210274
GW200112_155838-v1	0,508168	0,328976	0,223499	###	###	###
GW200128_022011-v1	0,312199	0,210291	0,159247	0,316533	0,17312	0,125375
GW200129_065458-v1	0,534509	0,288767	0,195996	0,431358	0,243973	0,142348
GW200202_154313-v1	0,341187	0,127594	0,107712	0,285804	0,125303	0,081042
GW200208_130117-v1	0,34329	0,214745	0,163176	0,39166	0,20555	0,13341
GW200208_222617-v1	0,32467	0,177476	0,114172	0,359441	0,162092	0,122215
GW200209_085452-v1	0,380514	0,244393	0,147316	0,323743	0,177538	0,12558
GW200216_220804-v1	0,382168	0,225443	0,144826	0,39851	0,228612	0,147649
GW200219_094415-v1	0,441539	0,260924	0,162181	0,327263	0,214118	0,133909
GW200220_061928-v1	0,290015	0,230468	0,167531	0,329846	0,234747	0,144418
GW200220_124850-v1	0,367558	0,233657	0,134208	0,367239	0,229786	0,143048
GW200224_222234-v1	0,452597	0,309923	0,221291	0,489087	0,299113	0,190367
GW200225_060421-v1	0,368577	0,241754	0,157811	0,33505	0,20378	0,139379
GW200302_015811-v1	###	###	###	0,385589	0,255764	0,154054
GW200306_093714-v1	0,326082	0,197413	0,128962	0,367926	0,21758	0,142295
GW200308_173609-v1	0,306996	0,213395	0,139734	0,329765	0,179687	0,123264
GW200311_115853-v1	0,418727	0,187221	0,138306	0,414982	0,262184	0,136485
GW200316_215756-v1	0,27935	0,11179	0,073221	0,304373	0,125443	0,083498
GW200322_091133-v1	0,306452	0,162777	0,116253	0,324777	0,13896	0,091954

Fonte: Autoria Própria.

APÊNDICE F – Gráficos tridimensionais com planos de ajuste da regressão múltipla

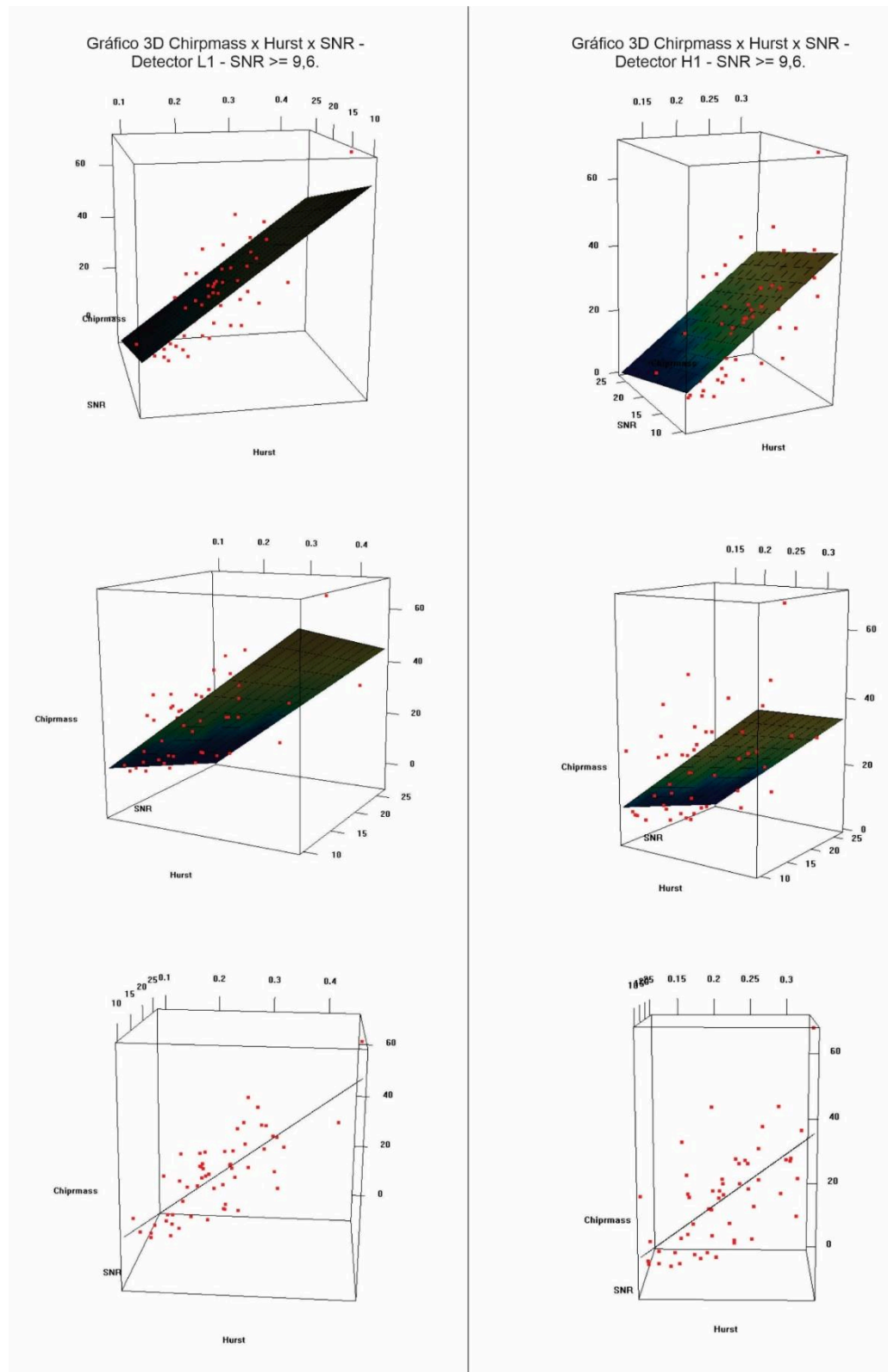
Gráfico 29 - Gráficos em 3D: *Chirpmass* x Expoente de Hurst x *SNR* para ambos os detectores.

Contendo todas as amostras e os planos de ajuste descritos pelas equações da tabela 5.



Fonte: Autoria Própria.

Gráfico 30 - Gráficos em 3D: *Chirpmass* x Expoente de Hurst x *SNR* para ambos os detectores. Com $SNR \geq 9,6$ e contendo os planos de ajuste descritos pelas equações da tabela 5.



Fonte: Autoria Própria.

APÊNDICE G – Códigos em *Python* utilizados para a realização do trabalho.

Biblioteca de Funções:

```
import math
import scipy.stats as stats
from gwosc.datasets import event_gps
from gwosc.datasets import _event_metadata
import matplotlib.pyplot as plt
import os
import statistics
import numpy as np

def arquivoExiste(nome):
    """
    Verifica se o arquivo existe.
    :param nome: Nome do arquivo.
    :return: Verdadeiro ou Falso.
    """
    try:
        a = open(nome, 'rt')
        a.close()
    except FileNotFoundError:
        return False
    else:
        return True

def criarArquivo(nome):
    """
    Cria um arquivo de texto com o nome desejado.
    :param nome: Nome do arquivo.
    :return: Não retorna nada.
    """
    try:
        a = open(nome, 'wt+')
        a.close()
    except:
        print('Erro! Ao criar o arquivo {}'.format(nome))

def deletaArquivo(nome):
    try:
        os.remove(nome)
    except OSError as e:
        print(e)
    finally:
        return

def infoGW(event):
    """
    Essa função será capaz de buscar no site do GWOSC o gps exato do evento, bem como
    armazená-lo em um arquivo de texto
    para utilizá-lo posteriormente offline.
    :param event: Nome do evento. Ex: 'GW150914'
    :return: Retorna um dicionário com as informações necessárias: (Nome do evento, Gps exato,
    tempo t0, nome do arquivo h e nome do arquivo l)
    """
    arq = event + '.txt'
    gps = 0
    dado = list()
    # VERIFICA SE O ARQUIVO EXISTE, SE NÃO IRÁ CRIAR
    if not arquivoExiste(arq):
        time = event_gps(event)
        metainfo = _event_metadata(event)
        mass = metainfo['final_mass_source']
        criarArquivo(arq)
        a = open(arq, 'at')
        a.write(f'{event};{time};{mass}')
        a.close()
    # LENDO O ARQUIVO
    try:
        b = open(arq, 'rt')
```

```

except:
    print('Erro ao ler o arquivo')
else:
    for linha in b:
        dado = linha.split(';')
finally:
    b.close()
#VERIFICANDO A VERACIDADE DO DADO
if dado[0] == event:
    gps = float(dado[1])
    M0 = float(dado[2])
else:
    print('Erro no dados')
#ENCAMINHANDO DADOS
t0 = int(gps) - 15
harq = 'H-H1_GWOSC_16KHZ_R1-' + str(t0) + '-32.hdf5'
larq = 'L-L1_GWOSC_16KHZ_R1-' + str(t0) + '-32.hdf5'
info = {'evento': event, 'gps': gps, 't0': t0, 'final_mass': M0, 'harq': harq, 'larq':
larq}
return info

def plotAsd(asd, titulo):
    """
    Função capaz de plotar um gráfico de ASD com legendas
    :param asd: Dados do asd
    :param titulo: Título do gráfico
    """
    plotasd = asd.plot()
    axasd = plotasd.gca()
    axasd.set_xlim(10, 1000)
    axasd.set_ylim(1e-25, 1e-19)
    axasd.set_title(titulo)
    plotasd.show()

def tramentoSinal(serietemporal, asd, detector='', sqrtf=3e-23, fmin=40, fmax=350,
remove=True):
    """
    Função que consegue limpar os ruídos conhecidos através de um asd.
    :param serietemporal: Deve ser enviada a série temporal do tipo TimeSeries. Parâmetro
obrigatório.
    :param asd: Deve ser enviado o asd da mesma série temporal. Parâmetro obrigatório.
    :param sqrtf: Define o limite superior de amplitude no asd onde as frequências devem ser
removidas. Parâmetro opcinal.
    :param fmin: Define o limite inferior de frequência para filtragem. Parâmetro opcinal.
    :param fmax: Define o limite superior de frequência para filtragem. Parâmetro opcinal.
    :param remove: Se FALSO irá remover todas as frequências inteiras maiores que o limite
sqrtf. Parâmetro opcinal.
    :return: Retorna a série temporal com o mínimo de ruídos.
    """
    # criando a lista de frequência a serem removidas
    freqlist = list()
    # filtro de banda nos extremos (fmin, fmax)
    databand = serietemporal.bandpass(fmin, fmax)

    # calculando sqrtf
    valores = list()
    for i, dado in enumerate(asd):
        freq = int(i * 0.25)
        if fmin <= freq <= fmax:
            valores.append(dado.value)
    media = statistics.mean(valores)
    sqrtf = 2.4 * media
    print(sqrtf)
    # verificando frequencias e armazenando-as
    for f, y in enumerate(asd):
        if y.value >= sqrtf:
            freq = int(f * 0.25)
            if fmin <= freq <= fmax:
                if freq not in freqlist:
                    freqlist.append(freq)
    # Remove as frequencias proximas evitando repetições e calculos desnecessarios,
    # pode ser desabilitado via parametro
    if remove:
        for frequencia in freqlist:
            if frequencia+1 in freqlist:

```

```

        freqlist.remove(frequencia)
# mostra a lista de frequências
print(freqlist)
if detector != '':
    if detector == 'H1' or detector == 'L1':
        arqfreq = 'freq-remove-list-' + detector + '.txt'
        if arquivoExiste(arqfreq):
            deletaArquivo(arqfreq)
        criarArquivo(arqfreq)
        a = open(arqfreq, 'w')
        a.write(str(freqlist))
        a.close()
# eliminando as frequências
for frequencia in freqlist:
    databand = databand.notch(frequencia)
return [databand, freqlist, sqrtf]

def escreveTxt(nomeGw, detector, série, sobrepor=False):
    if detector == 'H1' or detector == 'L1':
        arq = nomeGw + '-32-' + detector + '-clear.txt'
    else:
        print('Erro, detector inválido.')
        return
    dados = list()
    if arquivoExiste(arq):
        if sobrepor:
            deletaArquivo(arq)
        else:
            return
    criarArquivo(arq)
    for valor in série:
        dados.append(valor)
    a = open(arq, 'w')
    for item, strain in enumerate(dados):
        dt = len(dados)/32
        tempo = item / dt
        a.write(f'{tempo};{strain}\n')
    a.close()

def corteTxt(nomeGw, detector, gpsi, gpsf, sobrepor=False, plotagem=False):
    info = infoGW(nomeGw)
    ti = gpsi - info['t0']
    tf = gpsf - info['t0']
    if detector == 'H1' or detector == 'L1':
        arq = nomeGw + '-32-' + detector + '-clear.txt'
        arqcorte = nomeGw + '-' + 'JANELA' + '-' + detector + '.txt'
    else:
        print('Erro, detector inválido.')
        return
    if arquivoExiste(arqcorte):
        if sobrepor:
            deletaArquivo(arqcorte)
        else:
            if plotagem:
                plotTxt(arqcorte)
            return arqcorte
    gw = list()
    b = open(arq, 'rt')
    for linha in b:
        dado = linha.split(';')
        dado[0] = float(dado[0])
        dado[1] = float(dado[1].replace('\n', ''))
        gw.append(dado)
    b.close()
    criarArquivo(arqcorte)
    a = open(arqcorte, 'w')
    for dado in gw:
        if ti <= dado[0] <= tf:
            a.write(f'{dado[0]};{dado[1]}\n')
        elif dado[0] > tf:
            break
    a.close()
    if plotagem:
        plotTxt(arqcorte)
    return arqcorte

```

```

def janela(mass):
    inferior = 0.25 * mass ** -0.1
    superior = 0.6 * inferior
    intervalo = {'inferior': inferior, 'superior': superior}
    return intervalo

def plotTxt(nome, titulo='', labelx='Tempo', labely='Strain', x=0, y=1, ordene=False,
ponto=False, salvar=False, mostrar=True):
    gráfico = ''
    if titulo == '':
        gráfico = nome[:8]
    else:
        gráfico = titulo
    a = open(nome, 'rt')
    gw = list()
    for linha in a:
        dado = linha.split(';')
        for i in range(0, len(dado)):
            if i == len(dado) - 1:
                dado[i] = dado[i].replace('\n', '')
        gw.append(dado)
    matrizx = list()
    matrizy = list()
    print(gw)
    for j in gw:
        try:
            matrizx.append(float(j[x]))
            matrizy.append(float(j[y]))
        except:
            continue
    if ordene:
        matrizx.sort()
        matrizy.sort()
    plt.rcParams["figure.figsize"] = (16, 6)
    if ponto:
        plt.plot(matrizx, matrizy, 'o')
    else:
        plt.plot(matrizx, matrizy)
    plt.title(gráfico)
    plt.xlabel(labelx)
    plt.ylabel(labely)
    plt.rcParams["figure.figsize"] = (16, 6)
    if salvar:
        plt.savefig(gráfico + '.png', format='png')
        plt.close()
    if mostrar:
        plt.show()

def grauCorrelação(r2):
    relação = ''
    r = math.sqrt(r2)
    if r == 1:
        relação = 'Perfeita'
    if 0.9 <= r < 1:
        relação = 'Muito Forte'
    if 0.6 <= r < 0.9:
        relação = 'Forte'
    if 0.3 <= r < 0.6:
        relação = 'Regular'
    if 0 < r < 0.3:
        relação = 'Fraca'
    if r == 0:
        relação = 'Nula'
    return relação

def testeNormalidade_A_D(matrizy, confiança):
    ad_stat, ad_critico, ad_teorico = stats.anderson(matrizy, dist='norm')
    numero = 100 - confiança
    for c in range(0, len(ad_teorico)):
        if ad_teorico[c] == numero:
            break
    if ad_stat < ad_critico[c]:
        enunciado = f'Com {confiança}% de confiança, SIM é Normal'
        sentença = True

```

```

else:
    enunciado = f'Com {confiança}% de confiança, NÃO é Normal'
    sentença = False
    return sentença, enunciado, ad_stat, ad_critico[c]

def chirpmass(m1, m2):
    chirp = ((m1 * m2) ** (3/5)) / ((m1 + m2) ** (1/5))
    return chirp

def get_hurst_exponent(time_series, max_lag=20):
    """Retorna o expoente de Hurst de uma série temporal"""

    lags = range(2, max_lag)

    # variances of the lagged differences
    tau = [np.std(np.subtract(time_series[lag:], time_series[:-lag])) for lag in lags]

    # calculate the slope of the log plot -> the Hurst Exponent
    reg = np.polyfit(np.log(lags), np.log(tau), 1)

    return reg[0]

```

Código que encontra eventos e seleciona os tipos BBH:

```

from gwosc.datasets import find_datasets
from gwosc.datasets import _event_metadata
from Biblioteca import criarArquivo, arquivoExiste

teste = find_datasets()
ondas = list()
for item in teste:
    if item[:2] == 'GW' and item[3:8].isnumeric():
        posição = item.find('-')
        novo = item[posição:]
        if novo not in ondas:
            ondas.append(novo)

BBHtype = list()
print(len(ondas))
arq = 'eventos.txt'
if not arquivoExiste(arq):
    criarArquivo(arq)
abrir = open(arq, 'w')
count1 = 0
count2 = 0
erro = list()
erronotfound = list()
classificado = list()
notBBH = list()

for wave in ondas:
    for version in ['-v4', '-v3', '-v2', '-v1']:
        try:
            a = _event_metadata(wave+version)
            mass2 = a['mass_2_source']
            if mass2 >= 5:
                BBHtype.append(wave+version)
                classificado.append(wave)
                abrir.write(f'{wave+version}\n')
            else:
                classificado.append(wave)
                notBBH.append(wave)
        except:
            #print('Erro')
            erro.append(wave+version)
            count1 += 1
            continue
    else:
        break

for wave in ondas:
    if wave not in classificado:
        erronotfound.append(wave)
abrir.close()

```

```

arquivoconsideração = 'Resquícios.txt'
if not arquivoExiste(arquivoconsideração):
    criarArquivo(arquivoconsideração)
resquícios = open(arquivoconsideração, 'w')
resquícios.write(f'BBHtype: {BBHtype}\n'
                 f'Com {len(BBHtype)} eventos\n'
                 f'Não BBHtype: {notBBH}\n'
                 f'Com {len(notBBH)} eventos\n'
                 f'Erros: {erronotfound}\n'
                 f'Nesses {len(erronotfound)} eventos, ocorreu algum erro, geralmente por não
estar disponível no próprio site\n'
                 f'ou está disponível, mas não possui a informação de massa 2 (caso atual
26/11/2021: GW190814_211039) sendo as outras não encontradas nessa data')
resquícios.close()

```

Código que Baixa, trata, armazena e calcula os parâmetros estatísticos

```

from gwpy.timeseries import TimeSeries
from Biblioteca import infoGW, tramentoSinal, janela, escreveTxt, corteTxt, arquivoExiste,
criarArquivo
from gwosc.datasets import _event_metadata
import statistics

a = open('eventos.txt', 'rt')
gw = list()
for linha in a:
    dado = linha.replace('\n', '')
    gw.append(dado)
a.close()
arqerro = 'erro.txt'

for evento in gw:
    # Coletando o tempo gps exato do evento
    info = infoGW(evento)
    seg = [(info['t0']), (info['t0']+32)]
    erroH = False
    erroL = False
    arquivoclearH = info['evento'] + '-32-' + 'H1' + '-clear.txt'
    clearH = arquivoExiste(arquivoclearH)

    # Lendo dados online H1
    if not clearH:
        try:
            hdata = TimeSeries.fetch_open_data('H1', *seg)
        except:
            erroH = True
            if not arquivoExiste(arqerro):
                criarArquivo(arqerro)
            e = open(arqerro, 'at')
            e.write(
                f'{evento}-H1\n')
            e.close()

    if not erroH:
        if not clearH:
            # Asd para análise de frequências
            hasd = hdata.asd(fftfreq=4, method="median")

            # Tratamento de frequências
            hdatanotch = tramentoSinal(hdata, hasd)

            # Escrevendo txt das séries tratadas
            escreveTxt(info['evento'], 'H1', hdatanotch[0], False)

        # Intervalo: Janela de tempo
        intervalo = janela(info['final_mass'])

        # Escrevendo Txts Cortados
        arqh1 = corteTxt(info['evento'], 'H1', info['gps'] - intervalo['inferior'],
info['gps'] + intervalo['superior'], sobrepor=True)

        # Lendo a janela no txt H1
        b = open(arqh1, 'rt')
        strainH1 = list()

```

```

for linha in b:
    lista = linha.split(';')
    dado = lista[1].replace('\n', '')
    strainH1.append(float(dado))
b.close()

# Calculo da média aritmetica
médiaaritH1 = statistics.mean(strainH1)

# Cálculo do desvio padrão
desvioH1 = statistics.stdev(strainH1)
else:
    desvioH1 = 'nan'
    médiaaritH1 = 'nan'
    hdatanotch = ['nan', 'nan', 'nan']

# Lendo dados online L1
arquivoclearL= info['evento'] + '-32-' + 'L1' + '-clear.txt'
clearL = arquivoExiste(arquivoclearL)
if not clearL:
    try:
        ldata = TimeSeries.fetch_open_data('L1', *seg)
    except:
        erroL = True
        if not arquivoExiste(arqerro):
            criarArquivo(arqerro)
        e = open(arqerro, 'at')
        e.write(
            f'{evento}-H1\n')
        e.close()

if not erroL:
    if not clearL:
        # Asd para análise de frequências
        lasd = ldata.asd(fftlength=4, method="median")

        # Tratamento de frequências
        ldatanotch = tramentoSinal(ldata, lasd)

        # Escrevendo txt das séries tratadas
        escreveTxt(info['evento'], 'L1', ldatanotch[0], False)

    # Intervalo: Janela de tempo
    intervalo = janela(info['final_mass'])

    # Escrevendo Txts Cortados
    arql1 = corteTxt(info['evento'], 'L1', info['gps'] - intervalo['inferior'],
info['gps'] + intervalo['superior'], sobrepor=True)

    # Lendo a janela no txt L1
    a = open(arql1, 'rt')
    strainL1 = list()
    for linha in a:
        lista = linha.split(';')
        dado = lista[1].replace('\n', '')
        strainL1.append(float(dado))
    a.close()

    # Calculo da média aritmetica
    médiaaritL1 = statistics.mean(strainL1)

    # Cálculo do desvio padrão
    desvioL1 = statistics.stdev(strainL1)
else:
    desvioL1 = 'nan'
    médiaaritL1 = 'nan'
    ldatanotch = ['nan', 'nan', 'nan']

if not clearL and not clearH:
    # Frequências removidas
    arqfrequencia = 'Frequências-removidas.txt'
    if not arquivoExiste(arqfrequencia):
        criarArquivo(arqfrequencia)
    f = open(arqfrequencia, 'at')
    f.write(

```

```
f'{evento}';{str(ldatanotch[1])};{ldatanotch[2]};{str(hdatanotch[1])};{hdatanotch[2]}\n')
f.close()

# Lendo Metadados
metadados = _event_metadata(evento)
finalmass = metadados['final_mass_source']
m1 = float(metadados['mass_1_source'])
m2 = float(metadados['mass_2_source'])
chirpmass = ((m1 * m2) ** (3/5)) / ((m1 + m2) ** (1/5))
distancia = float(metadados['luminosity_distance'])
SNR = float(metadados['network_matched_filter_snr'])

arq = 'dados-GW.txt'
if not arquivoExiste(arq):
    criarArquivo(arq)
c = open(arq, 'at')
c.write(f'{evento};{m1};{m2};{finalmass};{chirpmass};{distancia};{m1-m2};{m1+m2}-
finalmass};{SNR};{desvioL1};{desvioH1};{médiaaritL1};{médiaaritH1}\n')
c.close()
```

Código que Plota todas as formas de onda cortadas, pelo critério da janela temporal

```
from Biblioteca import infoGW, janela, plotTxt

a = open('eventos.txt', 'rt')
gw = list()
for linha in a:
    dado = linha.replace('\n', '')
    gw.append(dado)
a.close()

detectores = ['L1', 'H1']

for evento in gw:
    for detector in detectores:
        # Coletando o tempo gps exato do evento
        info = infoGW(evento)
        intervalo = janela(info['final_mass'])
        gpsi = info['gps'] - intervalo['inferior']
        gpsf = info['gps'] + intervalo['superior']
        ti = gpsi - info['t0']
        tf = gpsf - info['t0']
        arqcorte = info['evento'] + '-' + 'JANELA' + '-' + detector + '.txt'
        cabeçalho = info['evento'] + '-' + 'JANELA' + '-' + detector
        try:
            plotTxt(arqcorte, titulo=cabeçalho, salvar=True, mostrar=False)
        except:
            print("File not Found: 404")
```

Código que realiza os cálculos do expoente de Hurst.

```
from Biblioteca import infoGW, get_hurst_exponent, criarArquivo, arquivoExiste
from gwosc.datasets import _event_metadata

lages = [20, 40, 60]
dadosfisicos = True
gw = list()
a = open('eventos.txt', 'rt')
for linha in a:
    dado = linha.replace('\n', '')
    gw.append(dado)
a.close()

detectores = ['L1', 'H1']

for indice in range(1, 100):
    arq2 = fr"Dados-Gw-Hurst-{indice}.txt"
    if not arquivoExiste(arq2):
        criarArquivo(arq2)
        break
    else:
        continue
```

```

for evento in gw:
    if dadosfisicos:
        # Lendo Metadados
        metadados = _event_metadata(evento)
    for detector in detectores:
        # Coletando o tempo gps exato do evento
        info = infoGW(evento)
        arqcorte = info['evento'] + '-' + 'JANELA' + '-' + detector + '.txt'

        try:
            a = open(arqcorte, 'rt')
        except:
            print(f'File {arqcorte} não encontrado')
            arq = 'errofilenotfound.txt'
            if not arquivoExiste(arq):
                criarArquivo(arq)
            c = open(arq, 'at')
            c.write(f'{arqcorte}\n')
            c.close()
            continue
    gw = list()
    for linha in a:
        dado = linha.split(';')
        for i in range(0, len(dado)):
            if i == len(dado) - 1:
                dado[i] = dado[i].replace('\n', '')
        gw.append(dado)
    matrizx = list()
    matrizy = list()
    for j in gw:
        if j[0] != 'nan' and j[1] != 'nan':
            try:
                matrizx.append(float(j[0]))
                matrizy.append(float(j[1]))
            except:
                continue
        else:
            print(f' {arqcorte} -erro nan')
            arq3 = 'erronan.txt'
            if not arquivoExiste(arq3):
                criarArquivo(arq3)
            c = open(arq3, 'at')
            c.write(f'{arqcorte}\n')
            c.close()
            break
    if len(matrizy) != len(gw):
        continue

    for i, lag in enumerate(lages):
        hurst = get_hurst_exponent(matrizy, max_lag=lag)
        print(f'Onda {evento}\n'
              f'Expoente de Hurst: {hurst}\n'
              f'Detector: {detector}\n'
              f'Número Tau: {lag}\n')

        c = open(arq2, 'at')

        if dadosfisicos:
            finalmass = metadados['final_mass_source']
            m1 = float(metadados['mass_1_source'])
            m2 = float(metadados['mass_2_source'])
            chirpmass = ((m1 * m2) ** (3/5)) / ((m1 + m2) ** (1/5))
            distancia = float(metadados['luminosity_distance'])
            SNR = float(metadados['network_matched_filter_snr'])

        c.write(f'{evento};{detector};{lag};{hurst};{finalmass};{chirpmass};{distancia};{m1-
m2};{SNR}\n')
        else:
            c.write(f'{evento};{detector};{lag};{hurst}\n')
            ultimo = len(lages) - 1
            if i == ultimo and len(lages) != 1:
                c.write(f'\n')
            c.close()

```

Repositório online contendo os códigos utilizados e os dados das ondas gravitacionais.

Link para repositório:

<https://drive.google.com/drive/folders/1mqIRUOJi37WYQu1F2bcZVdv2ArOJfzxP?usp=sharing>

[g](#)