

ESTUDO DE TRELIÇA PLANA VIA MODELAGEM NUMÉRICA

Roberto Karson Soares dos Santos

Resumo

A análise de estruturas é uma etapa importante na elaboração de projetos para engenheiros pois permite entender o comportamento das estruturas nos aspectos analíticos, experimentais e numéricos. A análise numérica pode ser realizada através do método dos elementos finitos que é um procedimento que apresenta um nível de desenvolvimento que possibilita sua utilização de forma acessível e eficiente em decorrência da generalidade de estruturas existentes além da complexidade de suas formas. As treliças são estruturas bastante utilizadas em edificações como parte, por exemplo, de soluções para telhados e desta forma tratar esse elemento como parte de um trabalho de pesquisa acadêmica de engenharia permite trazer para os alunos e alunas envolvidos mais conhecimento quando se trata de suas análises. O presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise estrutural, contemplando os estudos analíticos e numéricos, bem como a determinação de esforços internos e externos, das tensões correspondentes, até a determinação dos deslocamentos e deformações de uma treliça de madeira isostática e homogênea composta por membros retangulares. Além de introduzir na análise numérica o conceito de método dos elementos finitos em programas automáticos de modo a atestar a sua eficiência comparando com os resultados analíticos. Como resultado do trabalho, ao final pode-se perceber a eficácia dos modelos numéricos em análise de estruturas quando se comparou os resultados analíticos de reações, esforços internos e deflexões nos elementos estruturais da treliça analisada.

Palavras-chave: Elementos Finitos. Análise de Estruturas. Estruturas Reticulares.

1 INTRODUÇÃO

Segundo Martha (2010), o conceito de estruturas pode ser entendido como um conjunto de elementos dispostos de forma que atenda às necessidades a que é idealizada, satisfazendo condições de segurança, de utilização, economia, estéticas, ambientais, construtivas e legais. A concepção de um projeto estrutural leva em consideração etapas obrigatórias, sendo elas: estudos analítico, experimental e numérico. Ainda segundo o mesmo autor, a análise estrutural tem como finalidade a determinação de esforços internos e externos, das tensões correspondentes, bem como a determinação dos deslocamentos e deformações da estrutura.

Uma das etapas da análise estrutural e que será objeto de estudo nesse trabalho é a numérica. Nela são utilizados métodos numéricos para simulações de diversos aspectos da estrutura. Um desses métodos é o dos elementos finitos (MEF) que possibilita ao engenheiro analisar o comportamento de diversas estruturas, por meio de um modelo computacional (SORIANO, 2009).

O planejamento de uma construção passa por diversas fases complementares e estabelecidas da engenharia estrutural, desde a concepção de um projeto estrutural até na elaboração de uma análise estrutural (MARTHA, 2010). No entanto, a concepção de uma análise estrutural apresenta alguns desafios tanto de ordem cronológica, ou seja, relacionado aos prazos e metas da obra, quanto à confiabilidade dos resultados analíticos de representarem ou se aproximarem do comportamento real da estrutura.

Outra questão de suma importância para a análise estrutural está relacionada aos meios que o projetista dispõe, para validar os resultados analíticos e ter uma representação antecipada com base nos resultados previamente calculados de como se comporta a estrutura em análise.

É Consenso entre os estudiosos da literatura voltada ao estudo da análise estrutural, que não se consegue realizar os procedimentos da análise estrutural sem o auxílio de programas computacionais. Entre esses programas é muito usado atualmente, softwares que trabalhem a base do método dos elementos finitos. O método dos elementos finitos possibilita ao engenheiro analisar diversos problemas de estruturas de forma mais rápida e eficiente, e com a vantagem de trabalhar com peças de geometria mais complexa. Pois, com seus programas automáticos é possível analisar o comportamento de qualquer sistema físico regido por equações diferenciais ou integrais, (SORIANO, 2009).

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1.1 Conceitos Gerais

Segundo Martha (2010), estrutura pode ser entendida como um projeto que atenda as satisfações para as quais ela é construída, atendendo as condições de segurança, de utilização, econômicas, estéticas, ambientais, construtivas e legais. Uma estrutura é confeccionada a base de recursos providos do meio natural, dentre os quais destaca-se estruturas a base de aço, madeira entre outros. As estruturas devem ser capaz de resistir a intemperes, ventos e a solicitações que são impostas ao longo da vida útil. O projeto e a confecção de uma estrutura compõe uma das áreas da engenharia civil em que muitos engenheiros se especializam. Estes são os chamados engenheiros estruturais.

A engenharia estrutural trata do planejamento, construção e manutenção de sistemas estruturais para transporte, trabalho e lazer. Daí a importância de métodos numéricos que possam complementar na engenharia estrutural, garantindo maior segurança em seus resultados analíticos. Além da vantagem da idealização em tempo real do comportamento da estrutura garante a alternância de modelos estruturais, com a vantagem da praticidade em testar diferentes modificações podendo ser geométricas, no material, nos esforços solicitantes, no tipo de análise, entre outros, garantindo melhor dimensionamento da estrutura, permitindo realizar reparos de forma mais rápida e eficiente.

2.1.2 Método dos Elementos Finitos

De acordo com Soriano (2009) o método dos elementos finitos parte do arbítrio de leis polinomiais simples para as variáveis dependentes primárias em subdomínios denominados elementos finitos, em substituição às leis exatas de solução do modelo matemático e de maneira a se ter continuidade nas interfaces dos elementos, na grande maioria dos desenvolvimentos. Esses elementos são interconectados através de pontos nodais em seus contornos e, os infinitos pontos do modelo matemático contínuo são substituídos por um número finito de pontos, o que é chamado de processo de discretização do modelo matemático contínuo. Na medida em que se reduz o tamanho dos elementos, maior é a precisão dos resultados.

O MEF é uma ferramenta poderosa na análise para qualquer aplicação da engenharia civil. Ela consiste em simular o comportamento de uma estrutura real por meio de um modelo computacional composto de vários elementos. A solução de um sistema de equações algébricas permite descrever o comportamento provável da estrutura como um todo. Com os atuais programas automáticos é possível praticamente analisar o comportamento de qualquer sistema físico regido por equações diferenciais ou integrais, como da mecânica dos sólidos deformáveis. Está perfeitamente compreendido e é reconhecido como um dos melhores métodos para resolução de uma ampla gama de problemas de engenharia e física.

O método dos elementos finitos possibilita ao engenheiro analisar diversos problemas de estruturas de forma mais rápida e eficiente, e com a vantagem de trabalhar com peças de geometria mais complexa. Pois, com seus programas automáticos é concebível analisar o comportamento de qualquer sistema físico regido por equações diferenciais ou integrais. E certamente, o profissional da engenharia que necessitar deste método encontrará uma vasta possibilidade de programas que satisfará às suas exigências como o SAP2000 e o ANSYS, que são programas computacionais que utilizam do conceito de elementos finitos.

2.1.3 Trelças

A trelça é uma das principais artes de uma estrutura física empregada em projetos estruturais em que esta será o foco deste trabalho. Segundo Martha (2010), uma trelça é uma componente estrutural formada por partes reticuladas que tem suas ligações entre as barras, isto é, existem rótulas em todos os nós. Na análise de uma trelça, as cargas são consideradas atuantes diretamente sobre os nós. A consequência disso em conjunto com uma hipótese de ligações articuladas, é que uma trelça apresenta apenas esforços internos axiais, desse modo, gerando esforços normais de tração ou compressão.

Segundo Hibbeler (2010), trelça é uma estrutura de membros esguios conectados entre si em suas extremidades. Os elementos normalmente usados em construção consistem de barras de metal ou escoras de madeira. Trelças também podem ser entendidas como estruturas constituídas por barras conectadas entre si pelas extremidades por meio de parafusos, pinos ou soldas. Para projetar os membros e as conexões de uma trelça, é necessário primeiro determinar a força desenvolvida em cada elemento quando a trelça está sujeita a um determinado carregamento. Para isso, é necessário considerar duas hipóteses fundamentais, que são:

- Todas as cargas são aplicadas nos nós: Em diversos casos, tais como trelças de telhados e pontes, essa hipótese é verdadeira. O peso dos membros é desprezado porque a força suportada por cada membro normalmente é muito maior do que seu peso.

- Os membros são conectados entre si por pinos lisos: As conexões normalmente são formadas aparafusando as extremidades dos membros a uma placa comum, chamada *placa de ligação*. Desse modo, assumir-se que essas conexões atuam como pinos, já que as linhas centrais dos membros articulados são concorrentes. Vale lembrar que trata de uma idealização, por não existir rótula perfeita e também atuar o seu peso próprio.

As trelças podem ser classificadas quanto à formação em: simples, compostas e complexas (SORIANO, 2010).

-Trelças simples: formada a partir de três barras birotuladas ligadas em forma de triângulo, às quais acrescentam duas barras não colineares ligadas através de uma rótula. Ao acrescentar a esse conjunto condições de contorno mínimas para o impedimento de seus deslocamentos de corpos rígidos, obtém-se uma trelça plana simples e isostática.

-trelça composta: formada pela união de duas ou mais trelças simples de madeira que não haja deslocamentos relativos entre essas e que o conjunto não seja uma trelça simples.

-trelça complexa: é toda trelça que não seja simples e nem composta.

As trelças também podem ser classificadas quanto ao equilíbrio estático em: hipostática, isostática e hiperestática.

-trelça hipostática: quando o número de equações é inferior ao número de incógnitas, ou seja, a estrutura apresenta mais incógnitas do que equações.

-trelça isostática: quando o número de equações é igual ao número de incógnitas.

-trelça hiperestática: quando o número de equações excede o número de incógnitas.

2.1.4 Análise de Trelças

Segundo Hibbeler (2010), para projetar ou analisar uma trelça, é necessário determinar força em cada um de seus membros. Uma das possibilidades para determinar os esforços em cada membro é através do **Método dos Nós** e o **Método das Seções**.

O método dos nós: baseia-se no fato de que se a trelça inteira está em equilíbrio, então cada um de seus nós também estarão em equilíbrio. Desse modo, é desenhado o diagrama de corpo livre de cada nó, as equações de equilíbrio podem ser usadas para obter as forças dos membros. Como os membros da trelça plana são membros retos de duas forças situadas em um único plano que é concorrente e coplanar.

O método das seções: é usado quando é preciso encontrar os esforços internos em alguns membros específicos. Este método está fundamentado pelo princípio de que se a trelça está em equilíbrio, então qualquer membro dela seccionado também estará em equilíbrio. Desse modo, ao desenhar o corte para os membros em que se deseja determinar os esforços, é escolhido qualquer uma das partes e então se aplica as equações de equilíbrio a esta parte.

2.1.5 Trelças com cargas fora dos nós

As trelças com cargas fora dos nós, segundo Cascão (2009), são resolvidas superpondo a solução de uma trelça ideal equivalente com um ajuste localizado somente na barra com carregamento. A trelça ideal equivalente é obtida determinando-se para cada barra carregada, as forças nos pontos nodais equivalentes ao carregamento aplicado na barra. Estas forças são aplicadas nos nós finais e iniciais de cada barra que apresente carregamento.

2.1.5 Deflexão em Estruturas

Para poder determinar o deslocamento vertical em certo ponto de um membro da estrutura em análise é importante entender os conceitos de deflexão. Desse modo para Hibbeler (2010), antes de determinar o deslocamento em um ponto de uma barra, se faz a verificação parcial dos resultados da forma defletida de uma viga carregada, por exemplo.

Para o entendimento do conceito é importante entender o conceito de linha elástica, que pode ser entendida como o eixo longitudinal que passa pelo centroide de cada área da seção e que geralmente é usada como uma representação da forma defletida da viga em análise. Para fazer a representação por meio da linha elástica da forma defletida da viga, é importante saber os tipos de apoios e como estes estão restringindo a peça. De modo geral, os apoios de primeiro gênero restringem o deslocamento vertical, e os apoios que resistem a um momento como um apoio de terceiro gênero, restringem tanto a inclinação quanto ao deslocamento.

Para determinar os parâmetros e a equação que mede a deflexão, é importante falar da relação momento-curvatura em que, em que é estabelecido uma relação entre momento fleto interno da viga ao raio de curvatura $\rho(r\acute{o})$, em que a equação resultante será usada como base para estabelecer os métodos para determinar a deflexão.

Tomando como base o exemplo de uma viga reta que sofre deformação elástica por cargas perpendiculares ao eixo longitudinal da viga. Se o comprimento da viga for muito menor que a sua altura, então a maior deformação será calculada por flexão.

Quando o momento fleto interno representado por (**M**), deforma o elemento da viga, o ângulo entre as seções transversais torna-se um ângulo infinitesimal. O arco infinitesimal representa uma porção da linha elástica que intercepta o eixo neutro. O raio de curvatura para esse arco é definido como $\rho(r\acute{o})$, Tomando como base que

qualquer comprimento de arco sobre o elemento exceto o elemento infinitesimal sobre a linha neutra está sujeito a deformação normal. Temos que a relação entre a deformação com o raio de curvatura é dado pela Equação 1.

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y} \quad \text{Eq.1}$$

Adotando a hipótese que o material é homogêneo e comporta-se de forma linear elástica, a lei de Hooke ($\epsilon = \sigma/E$), é aplicável. Desse modo, sabendo que a fórmula de flexão é $\sigma = (-MY/I)$, ao combinar-se as equações tem-se a relação dada pela Equação 2:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. 2}$$

Essa equação representa a relação entre o raio da curvatura e a deformação onde;

ρ (m) = raio de curvatura em um ponto específico sobre a curva da linha elástica.

M (Nm) = momento fletor da viga.

E (Pa) = módulo de elasticidade do material.

I (m⁴) = momento de inércia calculado em torno do eixo neutro.

Ainda segundo Hibbeler (2010), o contorno da linha elástica para uma determinada estrutura pode ser expressa por meio de integração. Para isso é preciso representar a curva ($1/\rho$) em termos da flexão e da posição ao longo do eixo longitudinal que é dada pela equação 3.

$$\frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq.3}$$

Esta equação representa uma equação diferencial não linear de segunda ordem. Utilizando de artifícios matemáticos e artifícios numéricos é possível chegar na Equação 4.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. 4}$$

Para obter a equação da deflexão (v), da linha elástica é necessário realizar integrações consecutivas. Após cada integração é necessário acrescentar uma constante de integração. Desse modo ao utilizar a equação anterior teremos de avaliar duas constantes de integração. Para determinar essas constantes de integração são utilizados condições de contorno e continuidade.

2.1.6 Modelagem Numérica Através do Método dos Elementos Finitos

Em uma análise estrutural é imprescindível prover-se de meios computacionais para que possa ser feita a idealização da estrutura em análise. Na maioria dos modelos matemáticos contínuos de estruturas reticuladas ou não, a resolução analítica para a determinação de esforços internos, deslocamentos, deformações, inclinações, entre outros; costumam oferecer grandes dificuldades. A alternativa a não obtenção de soluções analíticas como exemplo a determinação da deflexão por meio de integração de equações diferenciais com condições de contorno iniciais, é a utilizar um modelo computacional que substitua os infinitos graus de liberdade por um número finito de parâmetros a ser determinado (SORIANO, 2010).

Com os métodos analíticos atuais, a engenharia atual busca soluções diretas para todo o domínio do modelo estrutural além de sua idealização por completo. Por esse motivo, esses métodos analíticos apresentam grandes dificuldades em sua aplicação em todo o domínio de estruturas com contorno irregular ou não retangular, além de requerer nova reformulação em caso de mudanças no domínio da peça, mudança no carregamento, na seção reta ou no material da peça em análise. Desse modo, torna-se imprescindível para o analista conhecer e saber manusear programas que operem com simulação aproximada de finitos parâmetros da

estrutura, ou seja, finitos subdomínios em que a solução da estrutura seja resultado do somatório das finitas soluções dos mesmos.

Segundo Soriano (2009), o método dos elementos finitos parte do princípio de leissimples para os subdomínios, de modo a substituir as leis exatas e resultados analíticos. Esses subdomínios também conhecidos por malha de elementos finitos estão conectados por meio de pontos nodais em suas extremidades, em que são regidos por condições matemáticas que garantem a solução aproximada desses elementos de modo que forneça a solução aproximada do modelo original, garantindo maior exatidão na medida em que se reduz o tamanho dos elementos. A esse processo dar-se o nome *discretização*.

O método dos elementos finitos opera com parâmetros nodais para que elementos “vizinhos” possam interagir entre si, por isso o comportamento da malha é o resultado da combinação dos comportamentos, em que resultados exatos são substituídos por soluções aproximadas simples e na medida em que se refina a malha, as soluções locais se aproximam das soluções exatas.

São várias as formas dos elementos finitos, podendo ser uni, bi, tridimensional, de diversas formas e padrões e com o número distinto de pontos nodais em suas faces. Essas formas dos elementos são escolhidos de acordo com a forma da estrutura discretizada.

Segundo Soriano (2009), o conjunto de informações que juntamente com a utilização de um programa automático a base do método dos elementos finitos, ofertar condições ao iniciante de fazer experimentos simples com este método.

Para o autor os programas de modelagem numérica são divididos em três partes. O pré-processador que é a parte que trata da elaboração da discretização da estrutura. O processador que trata da análise do modelo já discretizado. E o pós-processador que é a parte que prepara as soluções numéricas para objeto de análise.

-Pré-processador: A construção de um modelo discreto, isto é, a escolha das propriedades, da forma e como ficaram distribuídos os elementos finitos do domínio, além das condições geométricas de contorno, ou seja, os apoios e restrições que a estrutura está sujeita bem como as especificações dos esforços externos, costumam ser um processo muito trabalhoso que demanda tempo e está sujeito a falha humana. Para auxiliar nesse processo foram desenvolvidos softwares que funcionam a base do método dos elementos finitos como o ANSYS e o SAP2000. Esses programas funcionam como um conjunto de rotinas de geração, visualização e modificação do modelo discreto, além de apresentar opções de visualização e programas e zoom e de janelas.

Soriano destaca algumas etapas importantes como sendo a melhor estratégia na confecção de uma modelagem adequada, em que serão elencados apenas alguns dos pontos principais e que será adotado para este trabalho.

1. Começar a modelagem de forma simples, e gradativamente ir sofisticando o modelo em função de mostrar apenas as suas características e pontos principais. Optar por trabalhar com estruturas bidimensionais.
2. Deve escolher os elementos ou subdomínios que sejam mais adequados ao modelo estrutural em análise.
3. Em casos de estruturas mistas, como por exemplo, uma treliça isostática em que seus membros estejam conectados por pinos impedindo assim o surgimento de esforços internos de momento e que comporte em uma de suas barras um carregamento concentrado, pode-se iniciar a análise isolada desse membro específico.
4. É necessário maior refinamento de malhas nas regiões de variações elevadas de tensão, como em proximidades de forças e de apoios concentrados.
5. Não é necessário um refinamento muito acurado no modelo discreto, pois os modelos analíticos já guardam aproximações em relação aos fenômenos físicos. E caso seja necessário pode ser feito o refinamento em trecho específico de forma automática quando o engenheiro julgar necessário.

-processador: é o conjunto de rotinas de um meio computacional que realizam a análise numérica propriamente dita, de maneira a obter soluções nodais que juntas resultam na solução geral do domínio do sistema.

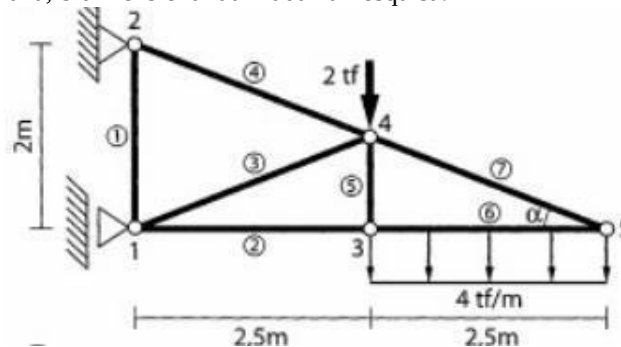
-pós-processador: conjunto de procedimentos automatizados de ação posterior a determinação das soluções nodais, que tem como finalidade apresentar os resultados de forma gráfica, por meio de desenhos e tabelas, para a interpretação, comparação e validação dos resultados analíticos, bem como a documentação por parte do engenheiro.

2.2 Metodologia do Trabalho

2.2.1 Descrição da treliça analisada

A treliça que será objeto de análise (Figura 7) é de madeira, isostática com seus membros retangulares com densidade (ρ) igual a $3,60 \text{ Mg/m}^3$, coeficiente de Poisson (ν) igual a $0,31$ e o módulo de elasticidade (E) correspondente a $96,5 \text{ GPa}$ (HIBBELER, 2010). Apresenta 5 m de vão e altura máxima de 2 m com seção transversal quadrada de lado 5 cm .

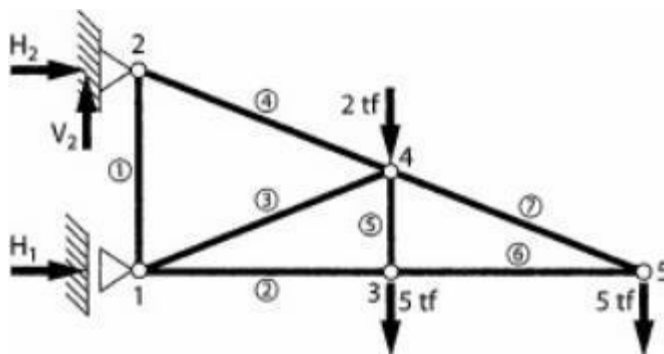
Figura 1: Treliça isostática plana, bidimensional utilizada na Pesquisa.



Fonte: Cascão (2009).

A treliça terá seus membros conectados por pinos. A mesma é composta por 7 barras, sendo uma delas submetida a um carregamento distribuído entre os nós que a compõe. Desse modo seguindo os requisitos de CASCÃO (2009), será montado uma treliça ideal equivalente em que o carregamento distribuído será substituído por forças nodais equivalentes ao carregamento da barra localizadas na extremidade da mesma, mais precisamente nos nós 3 (três) e 5 (cinco). A representação da treliça ideal equivalente é mostrada na figura (2), nela é possível visualizar o ajuste localizado da barra com carregamento, para uma barra com forças nodais localizadas nas extremidades da mesma, o procedimento de cálculo para este caso deu-se da seguinte forma: multiplicou-se o carregamento distribuído pelo comprimento da barra que está presente o carregamento e em seguida dividiu-se pela quantidade de nós, que nesse caso foram dois. Com a resolução ideal equivalente da treliça obtêm-se assim os esforços normais constituindo assim a resolução final. Também não será considerado o peso próprio da estrutura. Por último o esforço cortante e carregamento concentrado serão representados em quilo-newton e quilo-newton metro respectivamente.

Figura 2 – Treliça ideal equivalente



Fonte: Cascão (2009).

2.2.2 Procedimento do cálculo analítico

O primeiro passo para realizar os procedimentos analíticos é determinar as reações nos apoios da treliça. Se a estrutura estiver submetida a um sistema de forças que atuem no mesmo plano, ou seja, forças coplanares, então cada força poderá ser decomposta em suas componentes i e j . Para o equilíbrio essas forças precisam ser somadas para produzir uma força resultante igual a zero, (HIBBELER, 2009).

Após a determinação das reações dos apoios que configuram os esforços externos, parte-se para a análise interna da treliça, ou seja, a determinação dos esforços internos de cada membro da treliça que configuram esforços axiais de tração ou compressão ao longo da barra. Para isso é utilizado o Método dos Nós ou o Método das Seções já descritos na seção 2.1.4.

Após a determinação dos esforços internos de cada membro da treliça, parte-se para a análise gráfica, em que é preparado gráficos de esforço axial de tração e compressão, bem como a determinação de gráficos de tensão axial. Por último foi analisado separadamente um elemento da treliça em que atua sobre a mesma um carregamento concentrado gerando uma deflexão na peça. Depois de realizado os procedimentos mencionados

acima, foram determinados à deflexão máxima no membro da treliça, por meio dos métodos mencionados na seção 2.1.5.

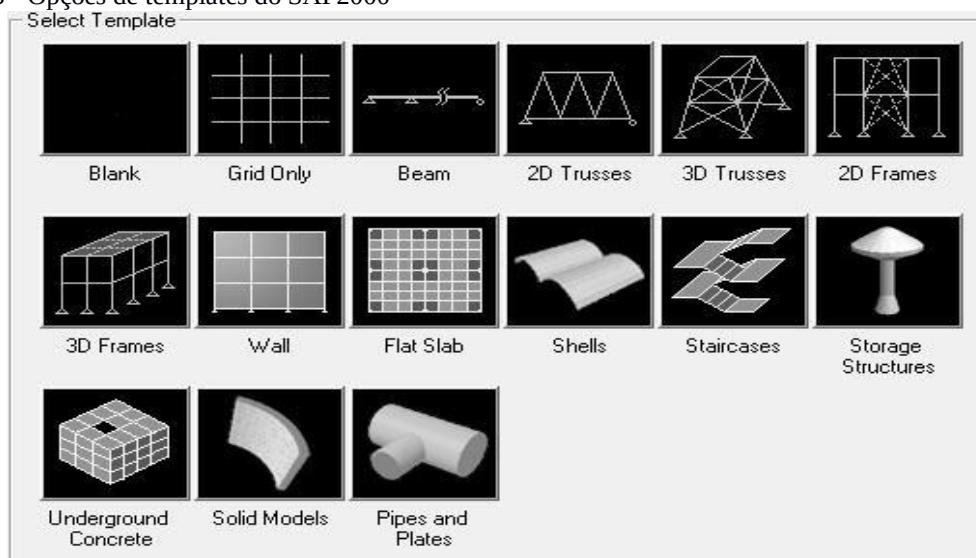
2.2.3 Desenvolvimento do modelo numérico

Nesta etapa foram realizados os seguintes procedimentos.

- Caracterização do elemento;
- Determinação da seção transversal do material;
- Determinação das propriedades do material;
- Elaboração da geometria da estrutura;
- Criação da malha de elementos finitos;

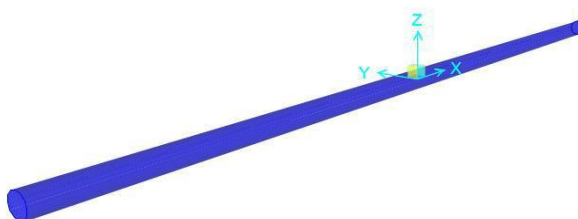
Para a análise numérica foi utilizado o software de modelagem SAP2000. Após a escolha do software foi determinado a escolha do template como sendo o 2D TRESSES (Figura 3) para . Após a escolha do template foi determinado à escolha do elemento DRAW FRAME (Figura 4) atua como uma barra de treliça. O elemento DRAW FRAME é bidimensional e pode ser submetido a esforços de tração e compressão ao longo do seu eixo longitudinal. O elemento possui dois graus de liberdade por nó. A determinação do elemento para o trabalho é fundamental para a confecção do modelo.

Figura 3 - Opções de templates do SAP2000



Fonte: SAP2000.

Figura 4 – Elemento do tipo DRAW FRAME utilizado como elemento de ligação



Fonte: Autoria própria.

Após a escolha do elemento partiu-se para a discretização; ou seja, foi determinada a malha que melhor representa o modelo real. O modelo numérico elaborado possui 7 (sete) elementos e 5 (cinco) nós.

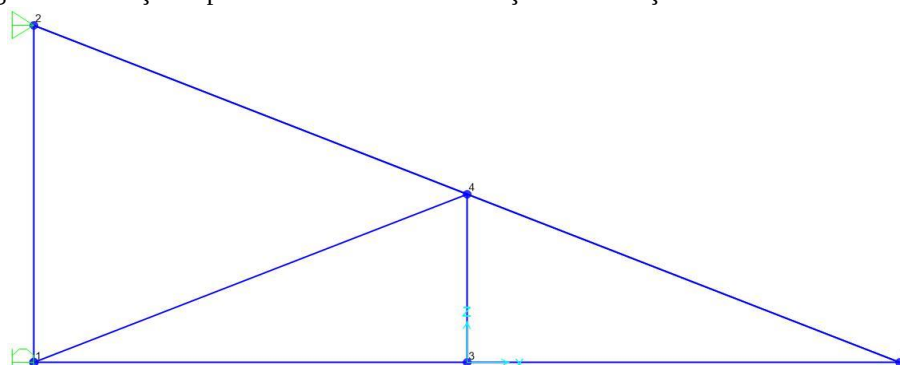
3.3 Resultados e discussões

3.3.1 Apresentação dos resultados analíticos

Utilizando o método dos nós foi possível determinar os esforços em cada membro da treliça. Foram analisados todos os nós que formam a mesma e através das equações de equilíbrio pôde-se determinar os esforços atuantes em cada barra e classificá-los como tração ou compressão. Para o melhor entendimento da

posição de cada barra e a numeração e visualização dos nós, adotou-se o esboço apresentado da treliça adaptada na Figura 5.

Figura 5 – Treliça adaptada utilizada na determinação dos esforços internos nas barras.



Fonte: Autoria própria (2020).

O primeiro passo no estudo analítico foi à determinação das reações nos apoios da estrutura. Esta é composta por um apoio do primeiro gênero que apresenta reações em um só sentido e um apoio do segundo gênero que apresenta reações no eixo vertical e horizontal. Na Tabela 1 são apresentadas as reações nos apoios, obtidos através das equações de equilíbrio.

Tabela 1 – Reações nos apoios da treliça obtidas analiticamente

REAÇÕES	APOIO DO PRIMEIRO GÊNERO	APOIO DO SEGUNDO GÊNERO
HORIZONTAL	21,25 kN	21,25 kN
VERTICAL	-	12,00 kN

Fonte: Autoria própria (2020).

Logo após, foram analisados cada nó da treliça obtendo os esforços atuantes em cada barra e destacando na sequência como esforços de tração ou compressão como mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Esforços internos nos membros da treliça.

BARRA	ESFORÇO (KN)	COMPORTAMENTO DA BARRA
1/2	3,50	tração
1/3	12,50	compressão
1/4	9,40	compressão
2/4	22,90	tração
4/3	5,00	tração
3/5	12,50	compressão
4/5	12,50	tração

Fonte: Autoria própria (2020).

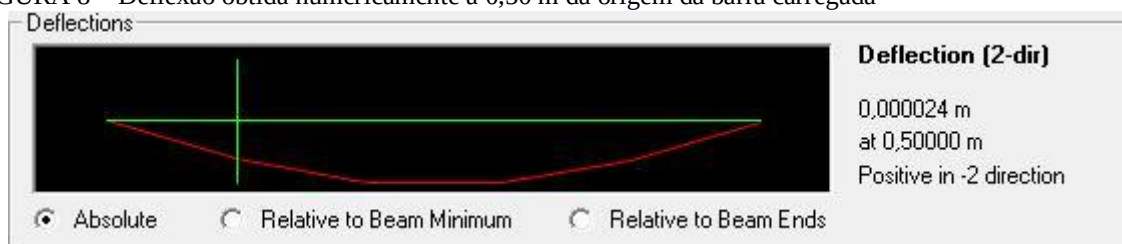
Prosseguindo com o estudo analítico voltado para a análise do membro da treliça que sofre influência do carregamento distribuído, foi determinada a deflexão por meios analíticos em quatro pontos pré-determinados do membro, e então se obteve os seguintes valores listados na Tabela 3. Ao comparar esses valores com os resultados obtidos com a modelagem numérica, pode-se observar uma semelhança entre eles, demonstrando assim a eficiência do software e do método dos elementos finitos (MEF) em representar o comportamento real da estrutura analisada.

Tabela 3 – Deflexão analítica em pontos pré-determinados do membro da treliça

POSIÇÃO AO LONGO DO EIXO LONGITUDINAL DA BARRA (m)	DEFLEXÃO (m)
0,50	2,404E-05
1,00	3,854E-05
1,50	3,854E-05
2,00	2,403E-05

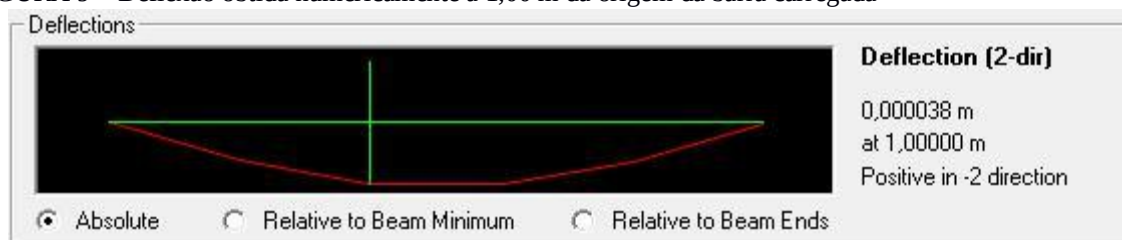
Fonte: Autoria própria (2020).

FIGURA 8 – Deflexão obtida numericamente a 0,50 m da origem da barra carregada



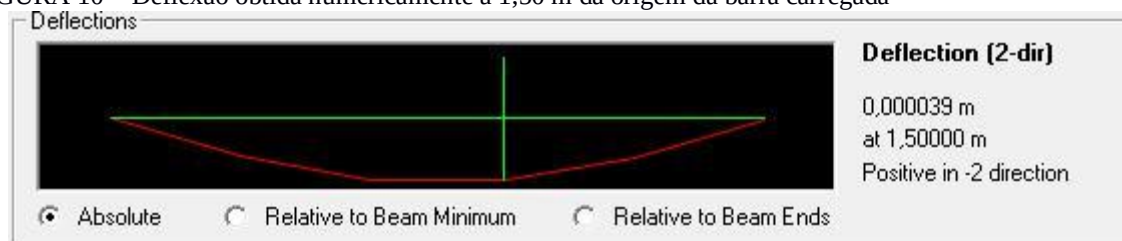
Fonte: Autoria própria (2020).

FIGURA 9 – Deflexão obtida numericamente a 1,00 m da origem da barra carregada



Fonte: Autoria própria (2020).

FIGURA 10 – Deflexão obtida numericamente a 1,50 m da origem da barra carregada



Fonte: Autoria própria (2020).

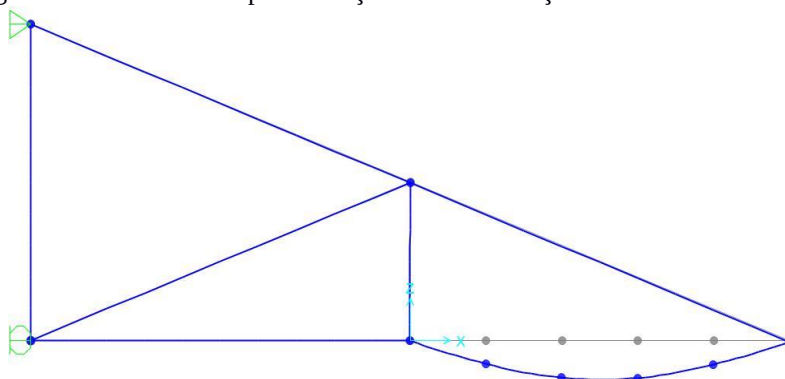
FIGURA 11 – Deflexão obtida numericamente a 2,00 m da origem da barra carregada



Fonte: Autoria própria (2020).

O SAP2000 também possibilita visualizar o comportamento da deformada da estrutura em decorrência dos esforços nas barras. Com a Figura 12 é possível visualizar com detalhes o estado final treliça após sofrer deformação.

Figura 12 – Estado final após a treliça sofrer deformação.



Fonte: Autoria própria (2020).

3.3.3 – Comparação numérica e analítica

- Comparação entre os resultados obtidos analiticamente e numericamente das reações dos membros da treliça;

MEMBROS DA TRELIÇA	RESULTADO ANALÍTICO (kN)	RESULTADO NUMÉRICO (kN)	ERRO(%)
1/2	3,50	3,50	0,00
1/3	12,50	12,50	0,00
1/4	9,40	9,42	2,123E-03
2/4	22,90	22,89	4,368E-04
4/3	5,00	5,00	0,00
3/5	12,50	12,50	0,00
4/5	12,50	13,46	0,071

Fonte: Autoria própria (2020).

- Comparação entre os valores da deflexão calculados analiticamente e numericamente;

POSIÇÃO AO LONGO DO EIXO LONGITUDINAL DA BARRA (m)	DEFLEXÃO OBTIDA NUMERICAMENTE (m)	DEFLEXÃO OBTIDA ANALITICAMENTE (m)	ERRO(%)
0,50	2,40E-05	2,404E-05	1,66E-03
1,00	3,80E-05	3,854E-05	0,014
1,50	3,90E-05	3,854E-05	0,0119
2,00	2,50E-05	2,403E-05	0,0403

Fonte: Autoria própria (2020).

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizada uma análise de estruturas de uma treliça através de meios numéricos através do software SAP2000 que trabalha a base do método dos elementos finitos. Após a obtenção dos resultados pôde-se verificar a confiabilidade dos resultados analíticos como o método dos nós, as equações de equilíbrio e deformação e condições de contorno e continuidade. Partindo dessa premissa e dos resultados obtidos com a modelagem conclui-se que:

- O modelo numérico da treliça apresentou confiabilidade ao se comparar seus resultados com os resultados analíticos;
- As reações nos apoios obtidos analiticamente foram compatíveis aos resultados obtidos numericamente;
- Os esforços normais nos membros do modelo numérico também foram semelhantes aos calculados analiticamente;
- Os deslocamentos obtidos analiticamente nos pontos nodais pré-determinados do membro que sofre atuação do carregamento distribuído também foram semelhantes aos resultados do modelo numérico nesses mesmos pontos.
- Em suma, conclui-se que o estudo numérico é uma ferramenta bastante eficiente quando se trata de validar e atestar com os resultados analíticos.

4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SORIANO, L. S. **Elementos finitos: Formulação e aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. 1^a ed. São Paulo: Ciência moderna Ltda, 2009.411 p.

MARTHA, Luiz Fernando. **ANÁLISE DE ESTRUTURAS**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. 560 p

HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**. 7^a ed. São Paulo: Pearson Education, 2010. 637 p.

LEET, Kenneth M.; UANG, Chia-ming; GILBERT, Anne M.. **FUNDAMENTOS DA ANÁLISE DE ESTRUTURAS**. 3. ed. Porto Alegre: Ltda, 2010. 790 p.

ALMEIDA, Maria Cascão Ferreira de. **ESTRUTURAS isostáticas**. São Paulo: Oficina de Textos, 2009. 168 p.

R.C.HIBBELER. **ESTÁTICA: Mecânica para engenharia**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2011. 511 p.

BEER, Ferdinand P. et al. **MECÂNICA DOS MATERIAIS**. 5. ed. Porto Alegre: Amgh Editora Ltda, 2008. 799 p.

AZEVEDO, A. F. M.. **Método dos elementos finitos**. Porto: [s.n.], 2003. 248 p. Notas de aulas.