



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS
BACHARELADO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

LUAN LEITE DOS SANTOS

A CICLOIDE: BREVE HISTÓRICO E ESTUDO DA BRAQUISTÓCRONA

PAU DOS FERROS - RN

2022

LUAN LEITE DOS SANTOS

A CICLOIDE: BREVE HISTÓRICO E ESTUDO DA BRAQUISTÓCRONA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros – CMPF, como requisito para a obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Sharon Dantas da Cunha

PAU DOS FERROS-RN

2022

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S237c Santos, Luan Leite dos.
A Cicloide: Breve Histórico e Estudo da
Braquistócrona / Luan Leite dos Santos. - 2022.
56 f. : il.

Orientador: Sharon Dantas da Cunha.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2022.

1. Cicloide. 2. Velocidade e Posição. 3.
Braquistócrona. I. Cunha, Sharon Dantas da ,
orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Pau dos Ferros
Bibliotecária: Erlanda Maria Lopes da Silva
CRB: 1115

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

LUAN LEITE DOS SANTOS

A CICLOIDE: BREVE HISTÓRICO E ESTUDO DA BRAQUISTÓCRONA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros – CMPF, como requisito para a obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

DATA DA APROVAÇÃO: 13 DE JUNHO DE 2022.

BANCA EXAMINADORA

SHARON DANTAS DA
CUNHA:01085089436

Assinado de forma digital por SHARON
DANTAS DA CUNHA:01085089436
Dados: 2022.06.24 08:46:23 -03'00'

Prof. Dr. Sharon Dantas da Cunha (UFERSA)
Presidente

THATYARA FREIRE DE
SOUZA:04603726457

Digitally signed by THATYARA
FREIRE DE SOUZA:04603726457
Date: 2022.06.22 06:40:07
-03'00'

Prof.^a. Dr.^a Thatyara Freire de Souza (UFERSA)
Examinadora

Glaydson
Francisco Barros
de Oliveira

Assinado de forma digital
por Glaydson Francisco
Barros de Oliveira
Dados: 2022.06.17 16:35:23
-03'00'

Prof. Dr. Glaydson Francisco Barros de Oliveira (UFERSA)
Examinador

Mozar Leite de Araújo Lima (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, Maria das Graças Leite de Araújo por ter me criado e incentivado a estudar e buscar na educação a mudança para nossas vidas.

A minha avó Ana Bertini Leite de Araújo e minhas tias, Maria Telma Leite de Araújo, Margarida Leite de Araújo e Suzana Leite de Araújo, que ajudaram na minha formação como pessoa.

A minha sogra Maria Zildene Santana Oliveira Cardozo e a minha namorada Khelly Beatriz Oliveira Cardozo, por estar comigo nos momentos bons e ruins e por sempre me dar força para seguir melhorando.

Ao meu orientador Dr. Sharon Dantas da Cunha, por ter me motivado a fazer esse projeto e se disposto a me orientar e fazer parte dessa etapa importante da minha formação.

RESUMO

A reta é o menor caminho entre dois pontos, porém causa estranheza que um caminho mais longo apresenta um tempo menor no deslocamento de uma partícula entre estes dois pontos. Apesar de ser um problema do final do XV, a Braquistócrona é bem conhecido no meio acadêmico, e consiste em determinar a trajetória, denominada de cicloide, que uma partícula sob ação da gravidade que se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo. Neste trabalho a curva cicloide foi obtida de cinco maneiras, e foi confeccionado um experimento de baixo custo contendo três curvas, uma reta, uma hipérbole e uma cicloide, utilizando uma imagem disponível na internet. Para que as curvas fossem construídas com papelão, a imagem foi projetada em uma folha A4. Após a construção foi feito um lançamento de bolinhas de gude nas curvas criadas, e foi confirmado, através da técnica de vídeo-análise, que a bolinha atinge o nível mais baixo no menor tempo na curva cicloide.

Palavras-chave: Experimento de baixo custo, Vídeo-análise, Experimentos de Física.

ABSTRACT

The line is the shortest path between two points, but it is strange that a longer one presents a shorter time in the displacement of a particle between these two points. Despite the problem at the end of the 15th century, Braquis is known as an interval medium, and consists of determining a trajectory called a cycloid, which has a point under the action of gravity that moves between two points in the shortest amount of time. This curve work was carried out in five ways, and it was a curve experiment developed in a low cost attempt containing three, a straight line, a hyperbola and a cycloid, using an image available on the internet. In order for the curves to be made with cardboard, the constructed image was built on an A4 sheet. After the construction, guide bubbles were launched in the created curves, and it was confirmed, through the video-analysis technique, that the ball reached the lowest level in the shortest time in the cycloid curve.

Keywords: Low cost experiment, Video analysis, Physics experiments.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Definição cinemática da cicloide.	15
Figura 2: Projeção vertical do movimento da partícula sobre a superfície cicloidal lisa.	16
Figura 3: Raio de Luz	18
Figura 4: Desvio angular sofrido por um raio de luz.....	19
Figura 5: Sistema de coordenadas.	19
Figura 6: Sistema de coordenadas para o problema.	22
Figura 7: Parâmetros no problema.	25
Figura 8: Feixe de cicloides.....	25
Figura 9: Cicloide.	26
Figura 10: Curva Braquistócrona.	27
Figura 11: Braquistócrona.	27
Figura 12: Movimento da Cicloide.....	29
Figura 13: Curva Cicloide criada pela roda de uma charrete que gira ao longo de uma reta..	30
Figura 14: Trajetórias até a vítima.....	30
Figura 15: Curvas.	31
Figura 16: Experimento pronto.....	32
Figura 17: Experimento pronto.....	33
Figura 18: Análise do software tracker para a hipérbole.....	35
Figura 19: Movimento 2D da bolinha de gude na hipérbole.	36
Figura 20: Análise do software tracker para a cicloide.	37
Figura 21: Movimento 2D da bolinha de gude na cicloide	37
Figura 22: Análise do software tracker para a reta.	38
Figura 23: Movimento 2D da bolinha de gude na reta.	39
Figura 24: Dados obtidos com a régua para a cicloide x teoria.....	40
Figura 25: Dados obtidos com a régua para a reta x teoria.	41
Figura 26: Dados obtidos com a régua para a hipérbole x teoria.	41

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Materiais utilizados para a experimentação.	31
Quadro 2: Tempo de descida das esferas.....	34
Quadro 3: Dados obtidos com o tracker para a hipérbole.	35
Quadro 4: Dados obtidos com o tracker para a cicloide.....	36
Quadro 5: Dados obtidos com o tracker para a reta.	38
Quadro 6: Valores obtidos com a régua	39
Quadro 7: Erro médio para as três curvas.....	41

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
2. OBJETIVOS	13
2.1 OBJETIVO GERAL	13
2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	13
3. REVISÃO TEÓRICA	14
3.1 A CICLOIDE: UM POUCO DA HISTÓRIA.....	14
3.2 FORMAS DE OBTENÇÃO DA CICLOIDE	15
3.2.1 O pêndulo isócrono de Huygens (1650).....	15
3.2.2 A solução de Johann Bernoulli (1696).....	17
3.2.3 A braquistócrona e o cálculo variacional	22
3.2.4 Solução de Lagrange	25
3.2.5 A braquistócrona é uma cicloide invertida.....	27
3.3 A CICLOIDE NO NOSSO DIA A DIA	29
4. MATERIAIS E MÉTODOS.....	31
4.1 CONSTRUÇÃO DO EXPERIMENTO.....	31
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	34
5.1 ANÁLISE DOS SISTEMAS ATRAVÉS DA VÍDEO ANÁLISE.....	34
5.2 CONFERÊNCIA DO PROTÓTIPO CRIADO.....	39
6. CONCLUSÃO	43
REFERÊNCIAS	44

1. INTRODUÇÃO

Ao questionarmos alguém sobre qual a trajetória de menor tempo, para ir de um ponto de maior altura para outro localizado numa altura menor, provavelmente irá responder que é a trajetória que reproduz uma reta, pois este é o caminho mais curto. Descobrir que existe um caminho mais longo que, no entanto, o tempo de percurso seja menor, pode causar estranheza. A braquistócrona é um problema bem antigo, do final do século XV, mas é bastante conhecido no meio acadêmico, e a constatação experimental acaba por surpreender pessoas que a veem pela primeira vez. O desafio da braquistócrona é descobrir a curva que une dois pontos diferentes, com distâncias na horizontal, e não na mesma linha vertical, por onde uma partícula móvel se movimenta o mais rápido possível durante sua trajetória para o ponto mais baixo, enquanto suporta seu peso e começa o movimento no ponto mais alto.

Este trabalho tem como objetivo estudar a curva braquistócrona e mostrar que ela apresenta o menor tempo em suas respectivas trajetórias, quando comparamos outras duas curvas, Hipérbole e Reta. A solução deste problema é de suma importância para otimização de diversas áreas da ciência. Desta forma, a matemática pode colaborar para o desenvolvimento de novas tecnologias, conhecimentos, competências e linguagem que o mundo exige das pessoas.

Além disso, foi construído um experimento de baixo custo contendo três curvas no formato de hipérbole, cicloide e reta através de uma imagem disponível na internet. No experimento três bolinhas de gude foram lançadas nas três curvas do experimento, e as trajetórias das partículas foram analisadas através da técnica da vídeo-análise, utilizando o software livre Tracker. Foram gravados 5 vídeos para cada curva, e foram obtidos tempo médio de descida das esferas, e suas trajetórias. Foi observado a cicloide é a trajetória que a bolinha gude foi mais rápida, a reta, foi a segunda mais rápidas, e a hipérbole, a mais lenta. Como o experimento foi construído a partir de uma imagem da internet, as medidas foram conferidas para confirmar se as curvas estavam compatíveis com a teoria.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem como objetivo estudar o problema da curva braquistócrona e mostrar qual das três curvas criadas (Hipérbole, Cicloide e Reta) tem o menor tempo em suas respectivas trajetórias.

2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar formas de obter a cicloide
- Provar que a braquistócrona é uma cicloide.
- Usar o Tracker e Excel
- Construir um protótipo contendo as três curvas

3. REVISÃO TEÓRICA

3.1 A CICLOIDE: UM POUCO DA HISTÓRIA

A primeira pessoa a observar a cicloide foi um francês chamado Charles Bovelles (1479-1566), que a menciona em um trabalho de geometria publicado em Paris em 1501, e a relaciona ao problema da quadratura circular. Galileu Galilei (1564-1642), também estudou esta curvatura, cunhando o termo "ciclóide" para descrevê-la e referindo-se a ela de maneira graciosa, recomendando-a ao perfil dos arcos arquitetônicos. Giles Person de Roberval (1602 - 1675), que cunhou o termo "trochóide", e Evangelista Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileu Galilei, são responsáveis pelos primeiros estudos rigorosos (1564 - 1642) (FARINA, 2013).

Como resultado, as curvas cicloidais rapidamente se tornaram populares entre os matemáticos, e foram amplamente estudadas por vários estudiosos da época como Mersenne, Christopher Wren, Pascal, Huygens, Bernoulli, Newton e Leibniz, entre outros.

No ano de 1696, a revista *Acta Eruditorum* publicou o trabalho do matemático suíço Jean Bernoulli que tratou do problema braquistócrona, e chamou a atenção de alguns dos maiores matemáticos do mundo. O problema chamado "a braquistócrona", que é uma palavra grega formada por dois radicais gregos *brakhisto* e *chronus*, que significam respectivamente o "menor" e "tempo", compreende descobrir a trajetória sobre a qual uma partícula deslizaria, sob ação apenas da gravidade, partindo unicamente do repouso, no menor tempo possível (STRUİK, 1992).

Segundo Struik, "Ela é a curva de descida mais rápida para um ponto material que se move entre dois pontos dados, num campo de gravidade. Foi estudada por Leibniz e pelos irmãos Bernoulli em 1697 e nos anos seguintes" (STRUİK, 1992). Nas palavras de Bernoulli: "Dados dois pontos *A* e *B*, desnivelados e não sobre a mesma vertical, estabelecer qual a trajetória geométrica em que uma partícula móvel vai de um ponto *A* até um ponto *B* em um intervalo de tempo mínimo, atribuindo-se que sua aceleração é apenas devida à gravidade" (STRUİK, 1992).

Embora o segmento *AB* fosse, de fato, o caminho mais curto entre os pontos *A* e *B*, segundo Bernoulli, não foi o que acabou percorrendo o menor tempo. Ele convidou os matemáticos da época para resolver esse dilema. Afirmou ainda que a curva era bem conhecida dos geômetras e desta forma expõe que já tinha encontrado a solução (LANCZOS, 1986).

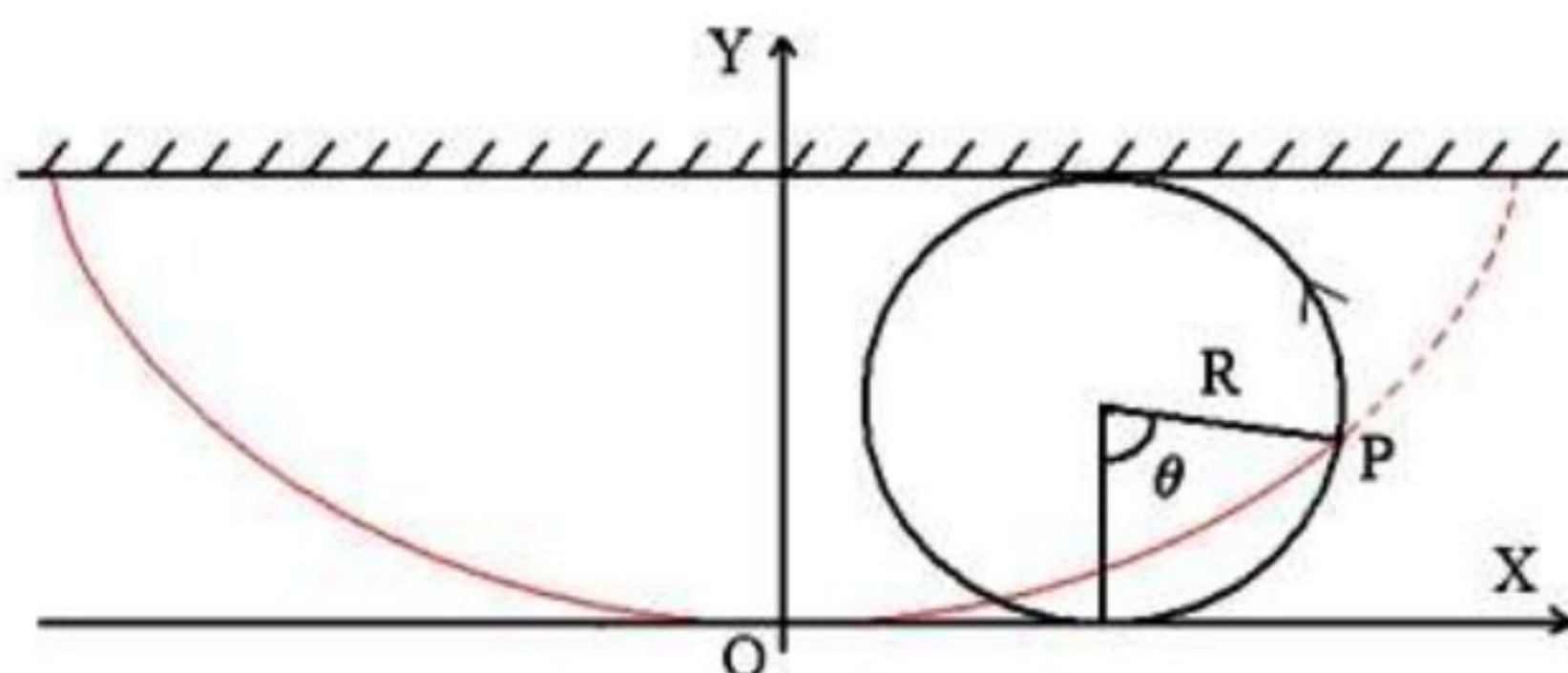
Alguns dos pesquisadores, incluindo o próprio Leibniz, os irmãos Bernoulli Jacques e Jean, e Isaac Newton, descobriram a solução em um curto período de tempo. Todos concordaram que a curva mais rápida era a cicloide, também conhecida como braquistócrona. Johann Bernoulli é considerado o primeiro a resolver o problema: ele demonstrou que a solução é a cicloide (STRUIK, 1992).

3.2 FORMAS DE OBTENÇÃO DA CICLOIDE

3.2.1 O pêndulo isócrona de Huygens (1650)

Huygens construiu um pêndulo em 1650 que tinha um período de oscilação independente da amplitude do movimento. Esse pêndulo, conhecido como isócrona, consiste em fazer uma partícula seguir um determinado caminho, um arco de cicloide, como mostra a Figura 1.

Figura 1: Definição cinemática da cicloide.



Fonte: Burrones e Farina (2005).

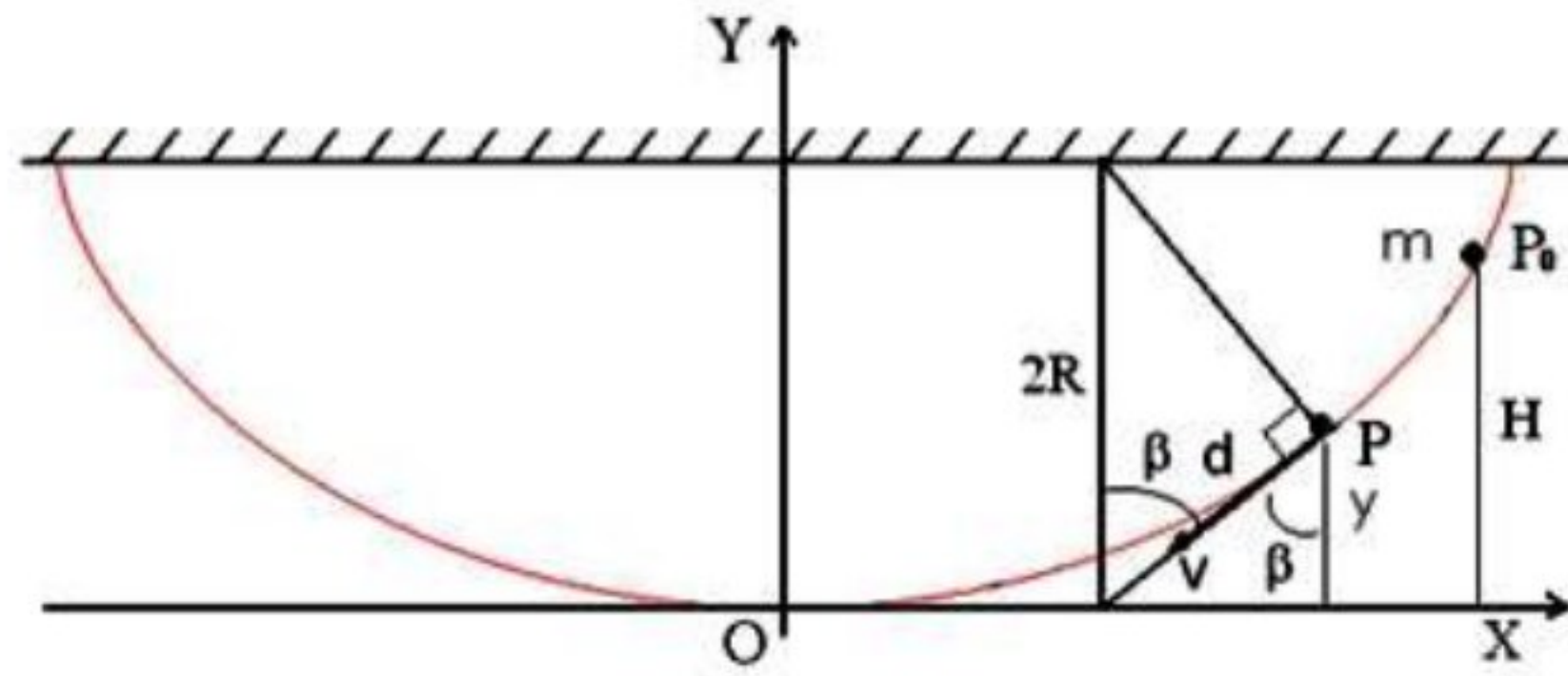
À princípio, Huygens fez construções empíricas, colocando obstáculos de ambos os lados de um pêndulo simples pois, dessa forma, à medida que o fio encostava no obstáculo, o comprimento efetivo do pêndulo se tornava menor e isso acarretaria a diminuição do período. Huygens só obteve sucesso quando utilizou como obstáculos arcos de cicloide. Isso foi possível, devido a propriedade de que o lugar geométrico descrito pelos centros de curvatura de uma cicloide é também uma cicloide chamada de “evoluta”. (BURRONES E FARINA, 2005)

Para mostrar o período neste pêndulo não depende da amplitude, uma partícula é abandonada, ou seja, a partir do repouso, de um ponto P_0 a uma altura H em relação ao ponto mais baixo da trajetória, como indica a figura 2. Usando a lei da conservação da energia pode-

se calcular o módulo da velocidade da partícula, equação 1, em sua descida quando ela se encontra em um ponto arbitrário P, cuja altura é y:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(H - y) \Rightarrow v = \sqrt{2g(H - y)}. \quad (1)$$

Figura 2: Projeção vertical do movimento da partícula sobre a superfície cicloidal lisa.



Fonte: Burrones e Farina (2005).

Como a velocidade da partícula é sempre tangente à trajetória, como observado na figura 2, a componente vertical de sua velocidade é dada pela equação 2:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\sqrt{2g(H - y)}\cos\beta \quad (2)$$

Analisando a figura 2, $\cos\beta = \frac{d}{2R}$ e $y = d \cos\beta$, e relacionando os dois obtém-se $\cos\beta = \sqrt{\frac{y}{2R}}$. Substituindo esta relação na equação 2, obtém-se a equação 3:

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{(H - y)y} \quad (3)$$

O intervalo de tempo transcorrido desde o instante inicial até o instante em que a partícula atinge o ponto mais baixo da trajetória é igual a $\frac{T}{4}$, onde T é o período das oscilações. Integrando a equação 3, obtém-se a equação do período:

$$\int_H^0 \frac{dy}{\sqrt{(H - y)y}} = -\sqrt{\frac{g}{R}} \int_0^{\frac{T}{4}} dt \Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^H \frac{dy}{\sqrt{(H - y)y}}$$

Para resolver a integral é necessário fazer mudança de variável, $\xi = \frac{y}{H}$ onde $dy = Hd\xi$.

Após a substituição, obtém-se a equação 4:

$$T = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)\xi}} \quad (4)$$

Para resolver a integral, é necessário fazer uma outra mudança de variável $\xi - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta$, com $d\xi = \frac{1}{2} \cos \theta d\theta$, obtém-se:

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1}{4} - (\xi - \frac{1}{2})^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} d\theta = \pi$$

Substituindo o resultado anterior na equação 4, obtém-se o período do pêndulo isócrona (equação 5):

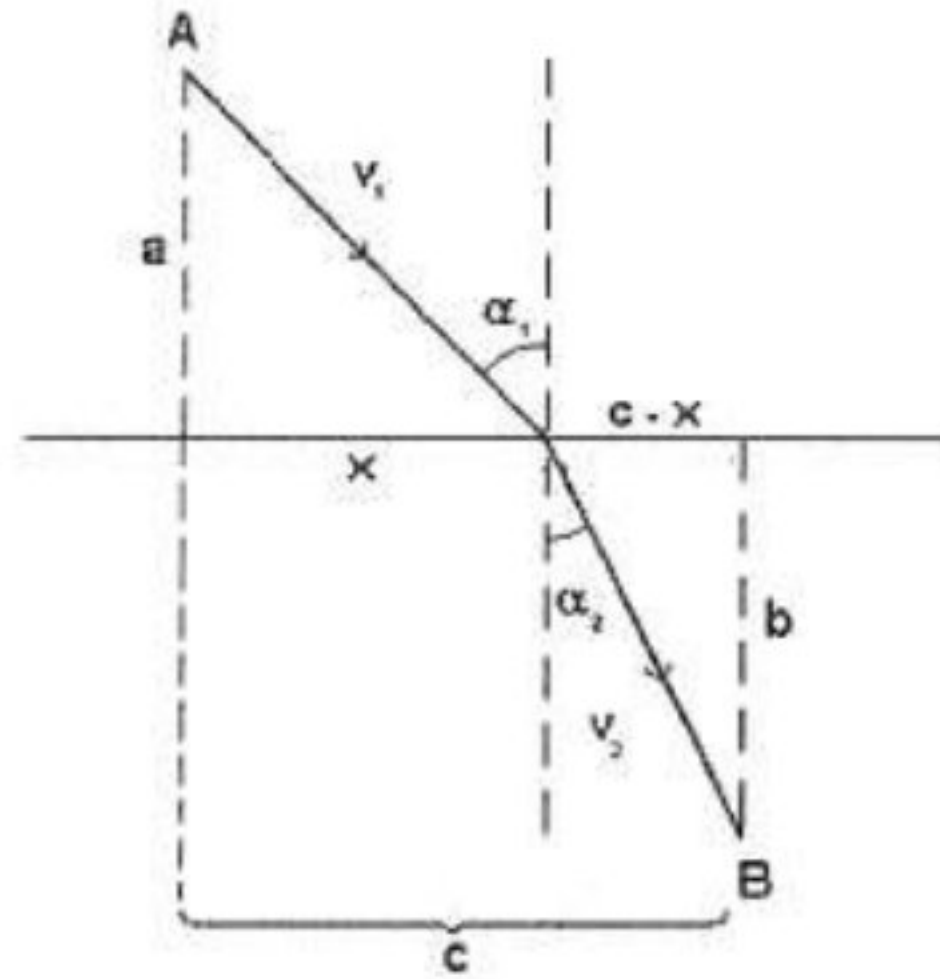
$$T = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}} \quad (5)$$

Ao analisar a equação 5, observa-se que o período não depende da altura H, ou seja, o período do movimento não depende da amplitude das oscilações. Portanto, qualquer que seja o ponto onde a partícula é abandonada, ela atingirá, no mesmo instante, o ponto mais baixo da trajetória cicloidal. Assim, Huygens alcançou seu objetivo, uma vez que seu relógio de pêndulo reduziu a margem de erro de cerca de quinze minutos por dia para dez ou quinze segundos. O relógio se tornou, enfim, um instrumento realmente confiável para medir o tempo (BURRONES E FARINA, 2005).

3.2.2 A solução de Johann Bernoulli (1696)

Johann Bernoulli começou sua pesquisa imaginando um raio de luz passando por diferentes densidades de matéria, porque à medida que a densidade da matéria aumenta, a velocidade da luz diminui e o raio de luz se aproxima do normal. A figura 3 mostra o desvio da luz ao mudar de meio.

Figura 3: Raio de Luz



Fonte: Cordeiro (2011).

O tempo para todo e qualquer percurso desejado é obtido pela razão entre distância e velocidade. Analisando a figura 2, o trajeto percorrido no meio superior (meio menos denso) é $d_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$. No trajeto percorrido no meio inferior (meio mais denso) é $d_2 = \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$. Assim, o tempo gasto viajando pelo raio de luz para fazer o trajeto AB é dado pela equação 6:

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_2} \quad (6)$$

onde v_1 e v_2 , as velocidades em que a luz viaja entre os dois meios.

Bernoulli descobriu que um raio de luz poderia escolher um caminho para reduzir o tempo T . Então, para encontrar o menor tempo é necessário encontrar o ponto crítico da função $T(x)$, ou seja, calcular a primeira derivada da função tempo em relação à x (equação 7), e depois igualar à zero (equação 8).

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-c}{v_2 \sqrt{(c-x)^2 + b^2}} \quad (7)$$

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_2 \sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = 0 \quad (8)$$

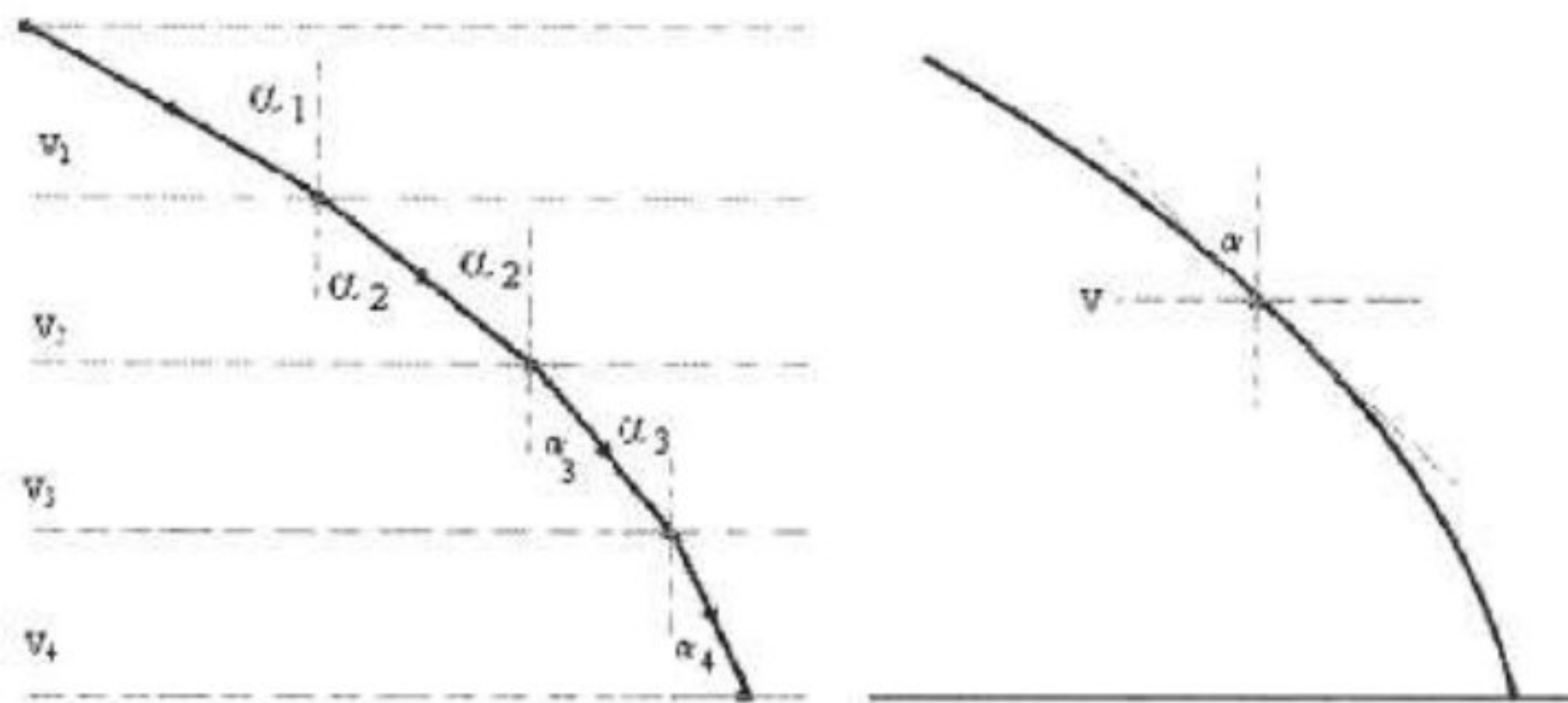
Na figura 2, $\text{sen } \alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ e $\text{sen } \alpha_2 = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}$, portanto ao minimizar o tempo obtém-se a lei de Snell (equação 9), que descreve o desvio angular causado por um raio de luz ao passar de um meio para outro com índice de refração diferente.

$$\frac{\text{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\alpha_2}{v_2} \quad (9)$$

Ao aplicar a equação 9 em mais de dois meios (figura 4), obtém-se:

$$\frac{\text{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\alpha_2}{v_2} = \frac{\text{sen}\alpha_3}{v_3} = \frac{\text{sen}\alpha_4}{v_4} = \dots = \frac{\text{sen}\alpha_n}{v_n}$$

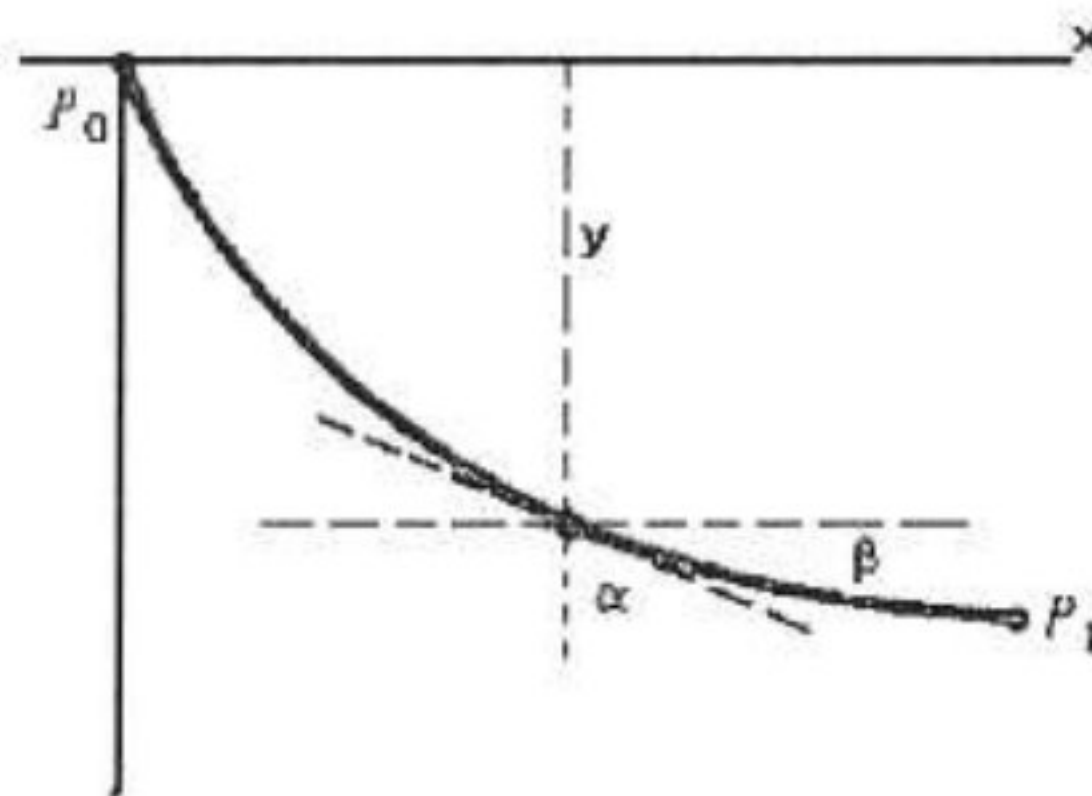
Figura 4: Desvio angular sofrido por um raio de luz.



Fonte: Cordeiro (2011).

Bernoulli introduziu um sistema de coordenadas, como mostrado na figura 5 com o objetivo de colocar P_0 na origem e permitir que a partícula (como um feixe de luz) escolha o melhor caminho para ir de P_0 a P_1 no menor tempo possível (CORDEIRO, 2011).

Figura 5: Sistema de coordenadas.



Fonte: Cordeiro (2011).

Se uma partícula de massa de m está sujeita a força da gravidade, mg , a velocidade da partícula é dada pela equação de Torricelli, análoga a equação 1. Adaptando a equação 1, ao sistema da figura 5, obtém-se a equação 10.

$$v = \sqrt{2gy} \quad (10)$$

Da análise geométrica, onde $y(x)$ é a função cujo gráfico representa a curva procurada, e β é o ângulo formado entre a tangente a curva e o eixo x , α é o ângulo formado entre a tangente a curva e o eixo y , com α e β complementos angulares, então com $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Logo: $\text{sen}\alpha = \cos\beta$. Usando $\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta}$ e $\sec\beta = \sqrt{1 + \text{tg}^2\beta}$, obtém-se:

$$\text{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\beta}}$$

No entanto, a derivada de y no ponto, é o coeficiente angular da reta tangente a curva, portanto:

$$\begin{aligned} \text{sen}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\beta}} \\ \text{sen}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \end{aligned} \quad (11)$$

Combinando as equações (9), (10) e (11), obtém-se a equação 12.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\text{sen}\alpha}{v}\right)^2 &= \frac{1}{(1 + (y')^2)2gy} = k^2 \\ \frac{1}{k^2 2g} &= (1 + (y')^2)y \end{aligned} \quad (12)$$

Como a aceleração da gravidade é aproximadamente constante na superfície da terra, o primeiro termo da equação 12 é uma constante.

$$\frac{1}{k^2 2g} = c$$

Portanto, dessa forma Bernoulli chegou à equação diferencial (equação 13) que descreve o fenômeno da difração.

$$y(1 + (y')^2) = c \quad (13)$$

Para resolver a equação 13, isola a derivada, para depois integrar (equação 14):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{c-y}}{\sqrt{y}} \\ x &= \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy \end{aligned} \quad (14)$$

Para resolver a integral, utiliza-se a substituição algébrica (equação 15) na equação 14:

$$u^2 = \frac{y}{(c-y)} \quad (15)$$

Após algumas manipulações se obtém a integral em função de u :

$$x = \int \frac{2u^2 c}{(1+u^2)^2} du \quad (16)$$

A equação 16 é resolvida por substituição trigonométrica, onde $u = tg(\phi)$. Após manipulações e usando algumas relações trigonométricas na equação 16, obtém-se:

$$x = 2c \int \sen^2 \phi \, d\phi$$

Como $\sen^2 \phi = \frac{1-\cos(2\phi)}{2}$, obtém-se:

$$x = c(\phi - \int \cos(2\phi) \, d\phi)$$

Resolvendo a integral, obtém-se x :

$$x = \frac{1}{2}c(2\phi - \sen 2\phi) \quad (17)$$

Analisando a figura 5, percebe-se que P_0 está na origem, então a constante de integração da equação 17 é zero, pois $y = 0$ quando $\phi = 0$.

Também é necessário $x = 0$ quando $\phi = 0$. Isolando y na equação 15, $y = \frac{u^2 c}{1+u^2}$ e fazendo $u = tg\phi$, obtém-se a equação 18:

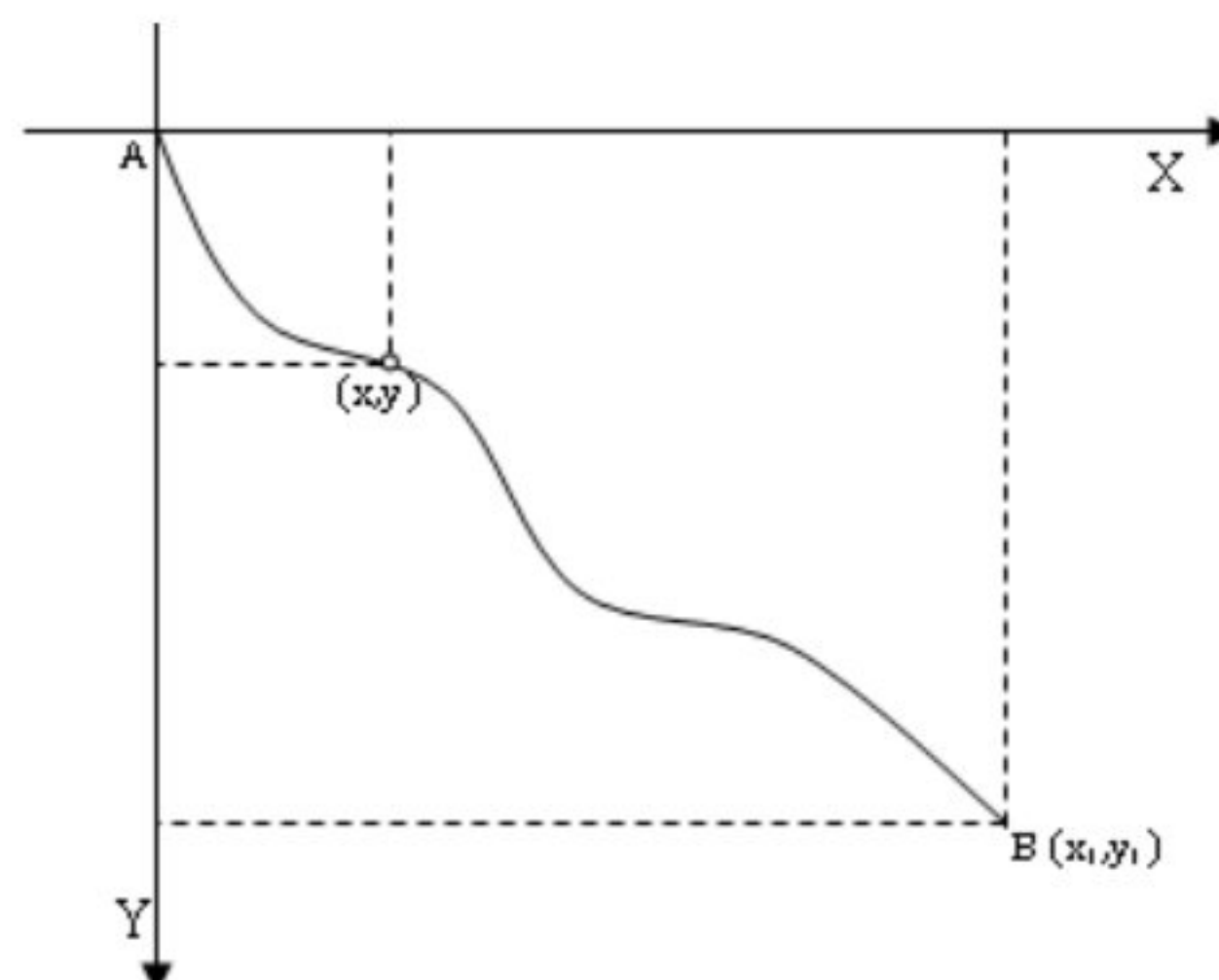
$$y = \frac{1}{2}c(1 - \cos 2\phi) \quad (18)$$

As equações 17 e 18 são as equações paramétricas da cicloide, com ponto no qual a cicloide toca o eixo x . Dessa maneira, Bernoulli percebeu que a cicloide, muito conhecida pelos matemáticos, é também a solução para o problema da Braquistócrona.

3.2.3 A Braquistócrona e o Cálculo Variacional

Através do problema da Braquistócrona surgiu uma nova área na matemática: o cálculo variacional. De acordo com o princípio geral da conservação de energia, a energia total, denominada de energia mecânica ($Emec$), de um sistema isolado se conserva, ou seja, quando nenhuma força dissipativa atua sobre um corpo, a sua energia mecânica que é a soma das energias cinética, K , e potencial, U , se mantém constante. Sendo assim, dados quaisquer pontos A e B , $Emec = K_A + U_A = K_B + U_B = \text{constante}$. Considere uma partícula de massa m que tem um deslocamento vertical y e v é o módulo da velocidade em um determinado instante. Como pode ser observado na figura 6, o eixo Y foi orientado no sentido oposto ao usual, pois nesse caso a força gravitacional fica orientada no sentido positivo. Além disso, o sistema de coordenadas foi escolhido de modo que o ponto inicial fique localizado na origem (ZANI, 2000).

Figura 6: Sistema de coordenadas para o problema.



Fonte: Zani (2000).

A variação da energia potencial não depende da escolha do ponto de referência, mas apenas da variação de altura. Assim, no ponto A, a esfera possui energia potencial dada por $U_{gravitacional} = mgy$ e energia cinética nula, pois parte do repouso. Já no ponto B, a energia potencial é nula e a energia cinética é dada por $\frac{mv^2}{2}$. Novamente, a velocidade no eixo y de uma partícula é dada pela equação de Torricelli, equação 10. Considerando a trajetória $s(x,y,t)$ que a partícula descreve na figura 2 é função de x e t, e a velocidade é a derivada de s em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{v} \frac{ds}{dx}$$

Substituindo a velocidade dada pela equação 10, e $\frac{ds}{dx}$ por $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$, obtém-se a expressão para a derivada do tempo em relação ao deslocamento horizontal

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \sqrt{1 + y'^2}$$

Assim, resolvendo a equação 19, determina-se o tempo total para se deslocar de A para B.

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx \quad (19)$$

Para encontrar $y = f(x)$ tal que t seja mínimo, usa-se as condições de contorno, $y(0) = 0$ e $y(x_1) = y_1$. A natureza dos respectivos objetos a serem maximizados ou minimizados é a diferença entre os cálculos variáveis e diferenciais: O cálculo variacional é uma ferramenta utilizada para resolver problemas de otimização, em especial, o problema da Braquistócrona (THAGLIOLATTO, 2015). Supondo que existe uma função escalar no cálculo variacional, $y(x)$ de classe C^1 , satisfazendo as condições de fronteira $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, e que seja um extremo para o funcional $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$ onde F é uma função de classe C^2 . Esta função extrema deve satisfazer a equação diferencial de segunda ordem, conhecida como equação de Euler-Lagrange, dada pela equação 20:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (20)$$

A função F , em particular, é dependente apenas de y e y' , portanto, é possível reduzir a equação de Euler à identidade da Beltrami (equação 21), após manipulações da equação 20.

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C \quad (21)$$

Esta identidade será utilizada para resolver o problema braquistócrona. Seja $F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$, e $u = 1 + y'^2$, a derivada de F em relação y' é dada pela equação 22:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{d\sqrt{u}}{du} \frac{du}{dy'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{u}} 2y' = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \quad (22)$$

Substituindo F e a equação 22 na equação 21, após algumas manipulações obtém-se:

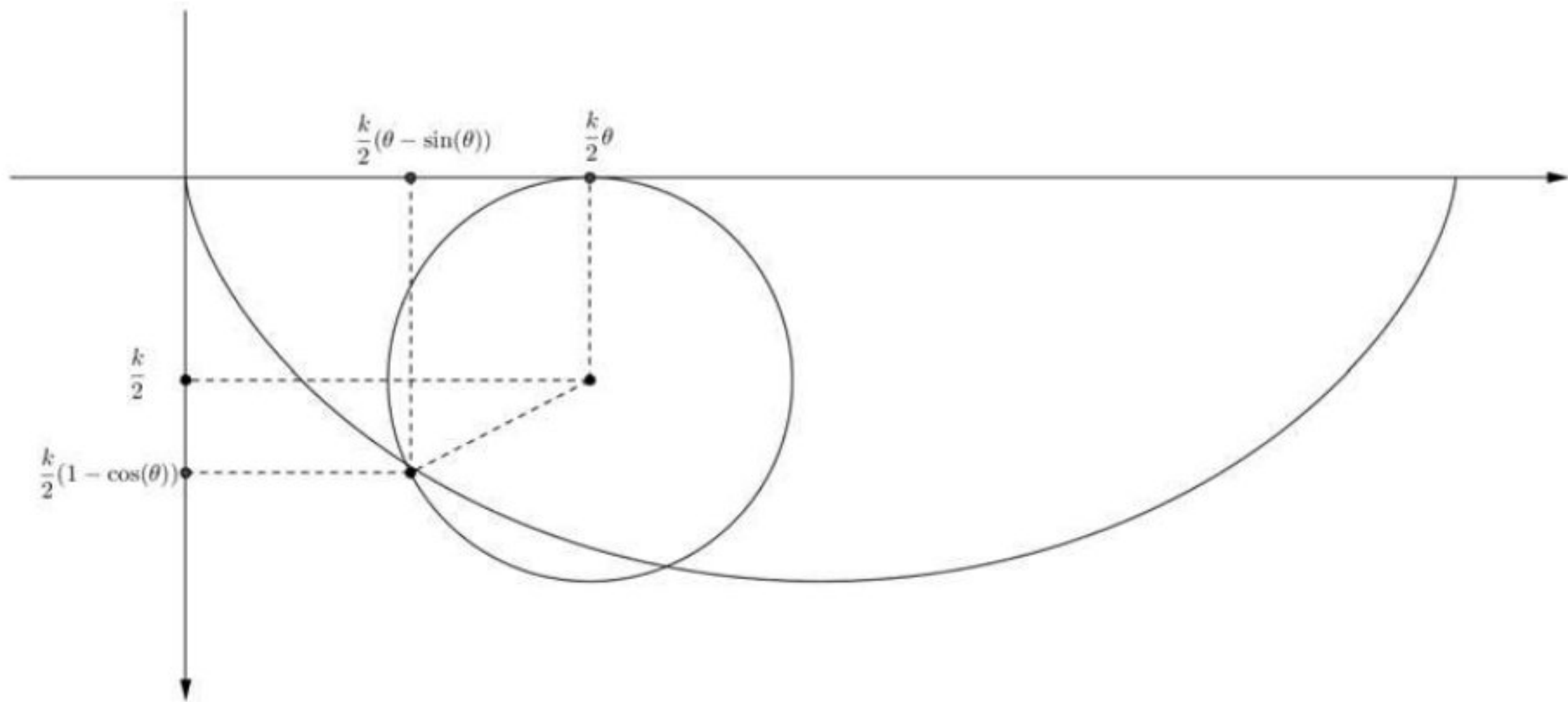
$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \quad (23)$$

A equação 23 pode ser reescrita de uma maneira mais simples, análoga à equação 13:

$$y(1+y'^2) = K, \text{ com } K > 0 \quad (24)$$

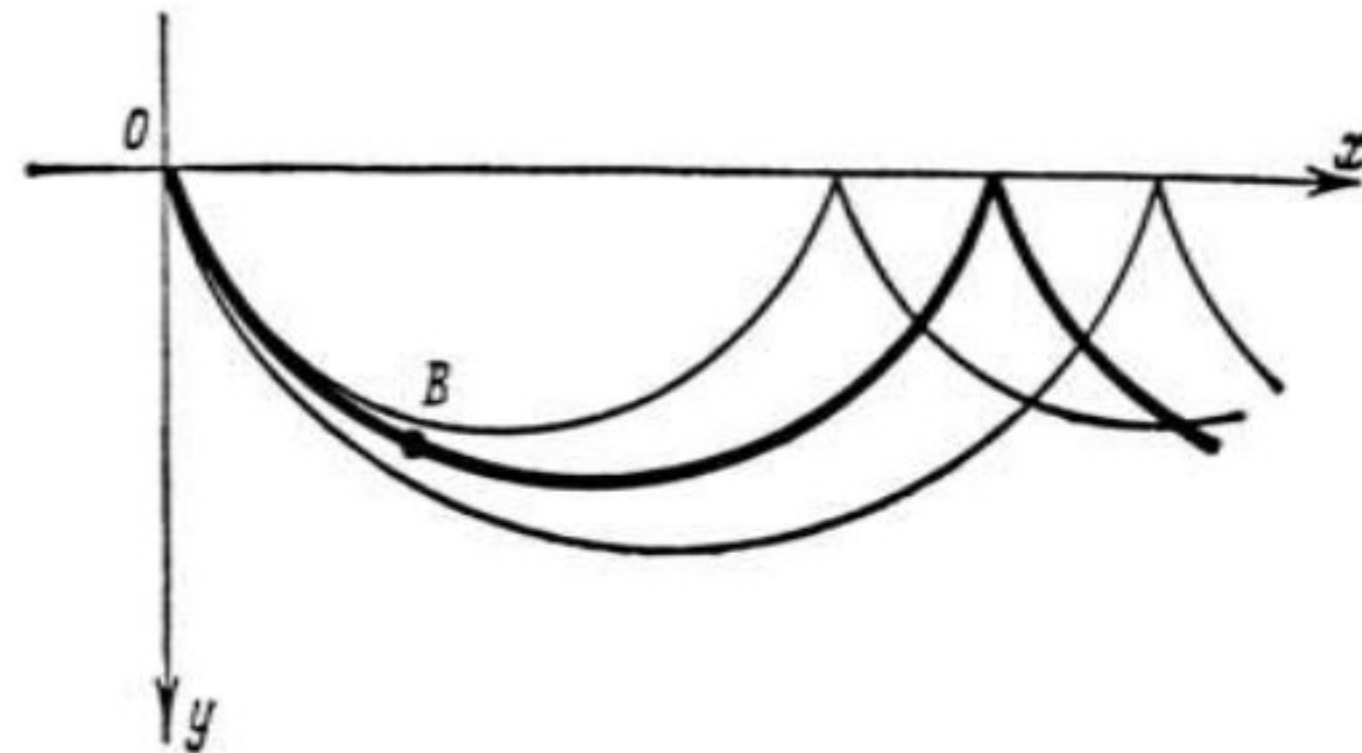
A solução da equação 24 foi apresentada na subseção anterior, e a solução são as equações paramétrica da cicloide, equações 17 e 18. A figura 7 mostra o gráfico dessas equações, e na figura 8, feixes de cicloide.

Figura 7: Gráfico de uma cicloide.



Fonte: Thagliolatto (2015)

Figura 8: Feixe de cicloides.



Fonte: Elsgoltz (1969).

3.2.4 Solução de Lagrange

Outra solução foi proposta por Lagrange: “Se a posição de uma partícula é determinada pelo arco tangente de $s(t)$ a partir do ponto mínimo, a energia cinética é proporcional a s^2 ”. A energia potencial é proporcional à altura $y(s)$, e para ser considerado uma curva isocrônica, a Lagrangeana deve atuar como um oscilador harmônico simples. A altura da curvatura deve ser proporcional ao comprimento de arco ao quadrado, dada pela equação 25 (CASTRO, 2014).

$$y(s) = ks^2 \quad (25)$$

Sendo k uma constante de proporcionalidade, Lagrange, considerou o seu valor igual a um. Então, a forma diferencial desta relação é $dy = 2sds$ e s é função de x e y , $dy^2 = 4s^2ds^2 = 4y(dx^2 + dy^2)$. Então, é possível eliminar a variável s , e obter uma equação diferencial em termos de dx e dy . Fazendo a divisão da equação por dy^2 , obtém-se a equação 26:

$$1 = 4y \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + 4y \quad (26)$$

Isolando a derivada na equação 26, fazendo a mudança de variável, $u = \sqrt{y}$, obtém-se a equação 27:

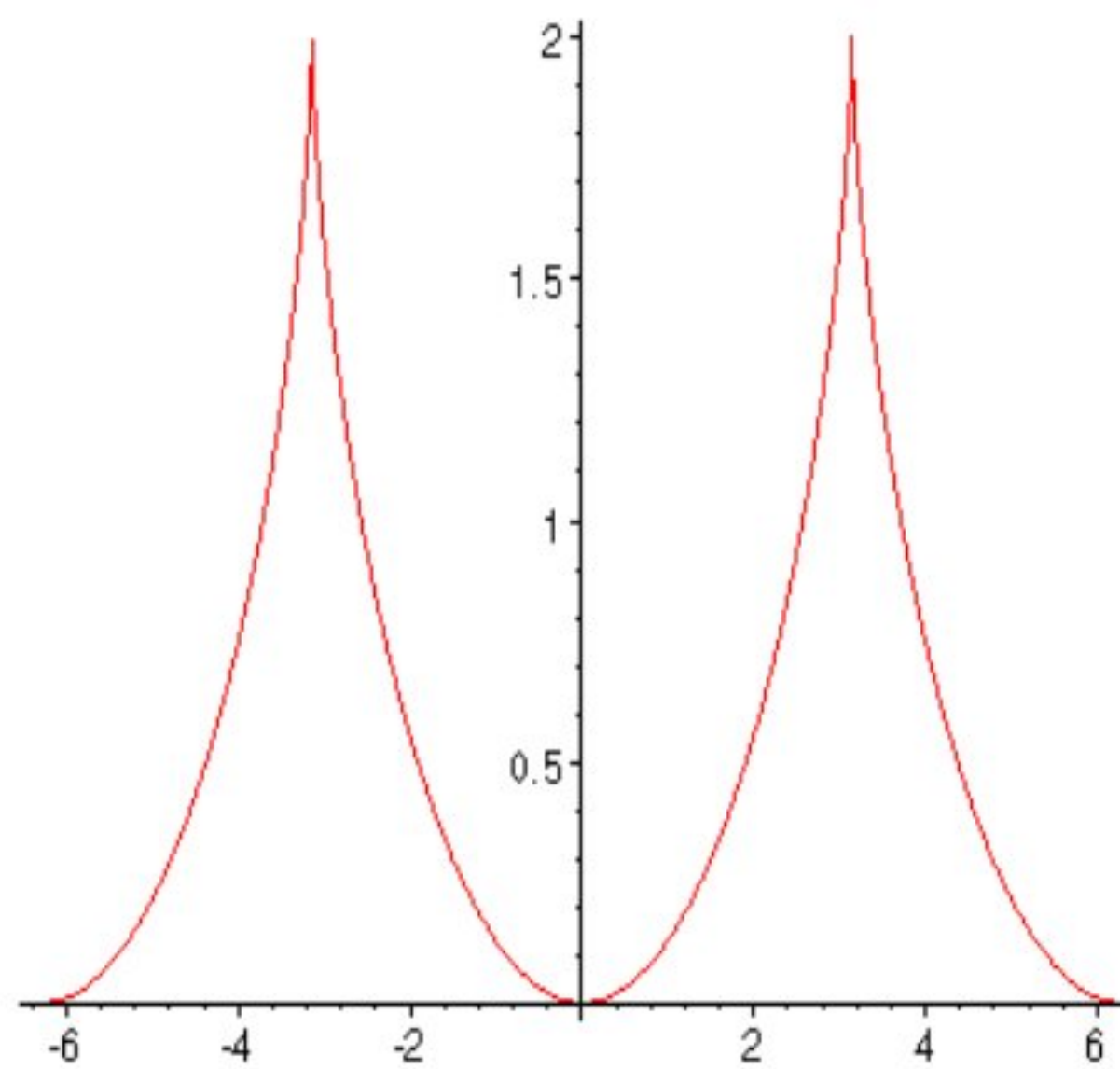
$$x = \int \sqrt{1 - 4u^2} du \quad (27)$$

Fazendo $u = \frac{1}{2} \sin(\theta)$, obtém-se a equação 28:

$$x = \frac{1}{8} (2\theta + \sin(2\theta)) + C \quad (28)$$

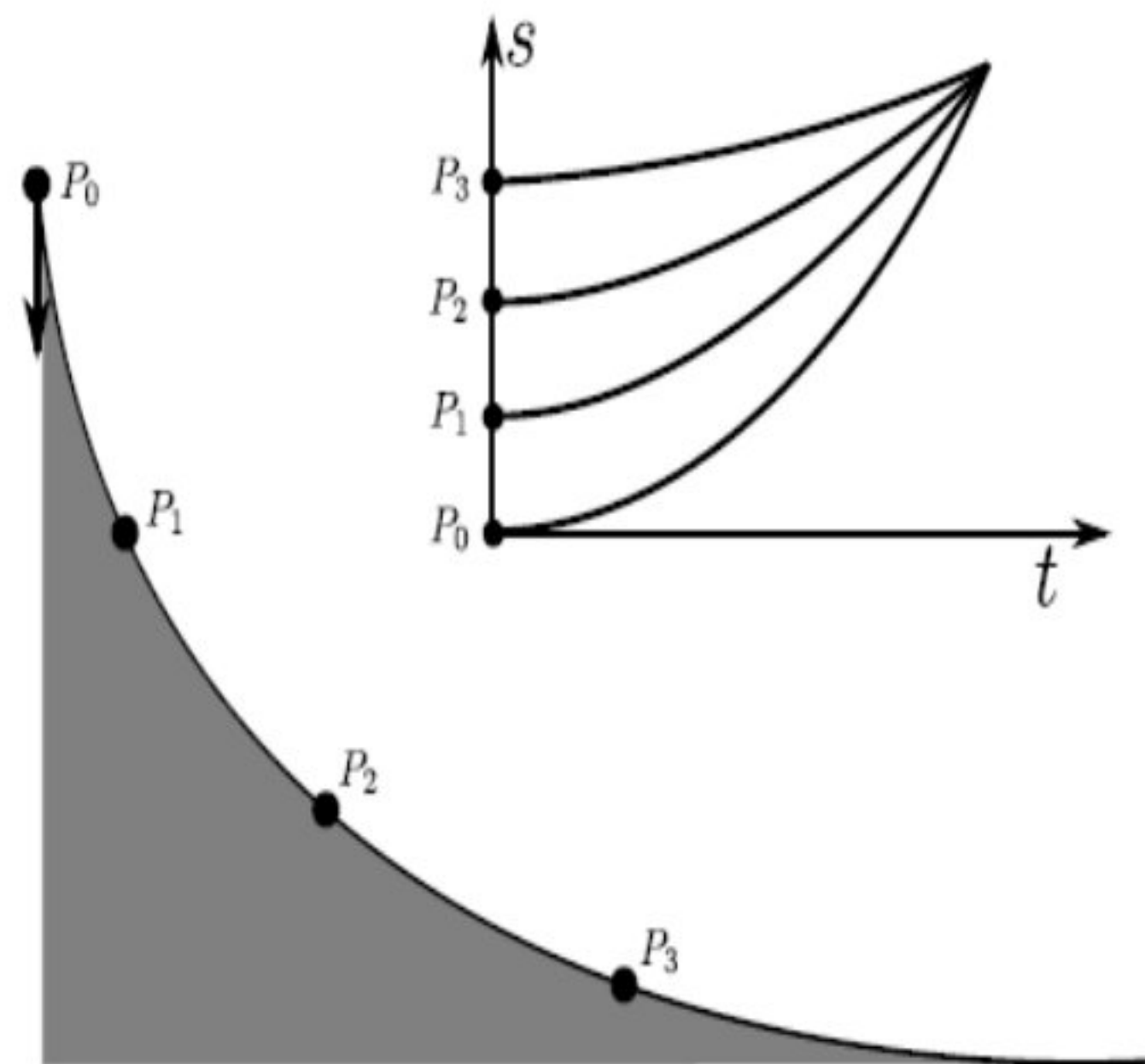
Considerando $\varphi = 2\theta$ e $C = 0$, obtém-se as equações paramétricas da cicloide. A figura 9 mostra um gráfico da cicloide, e a figura 10, mostra a evolução de uma partícula para diferentes pontos de partida, e que chegam ao mesmo tempo, o problema da Tautócrona.

Figura 9: Cicloide.



Fonte: Castro (2014)

Figura 10: Evolução temporal de uma partícula para diferentes posições

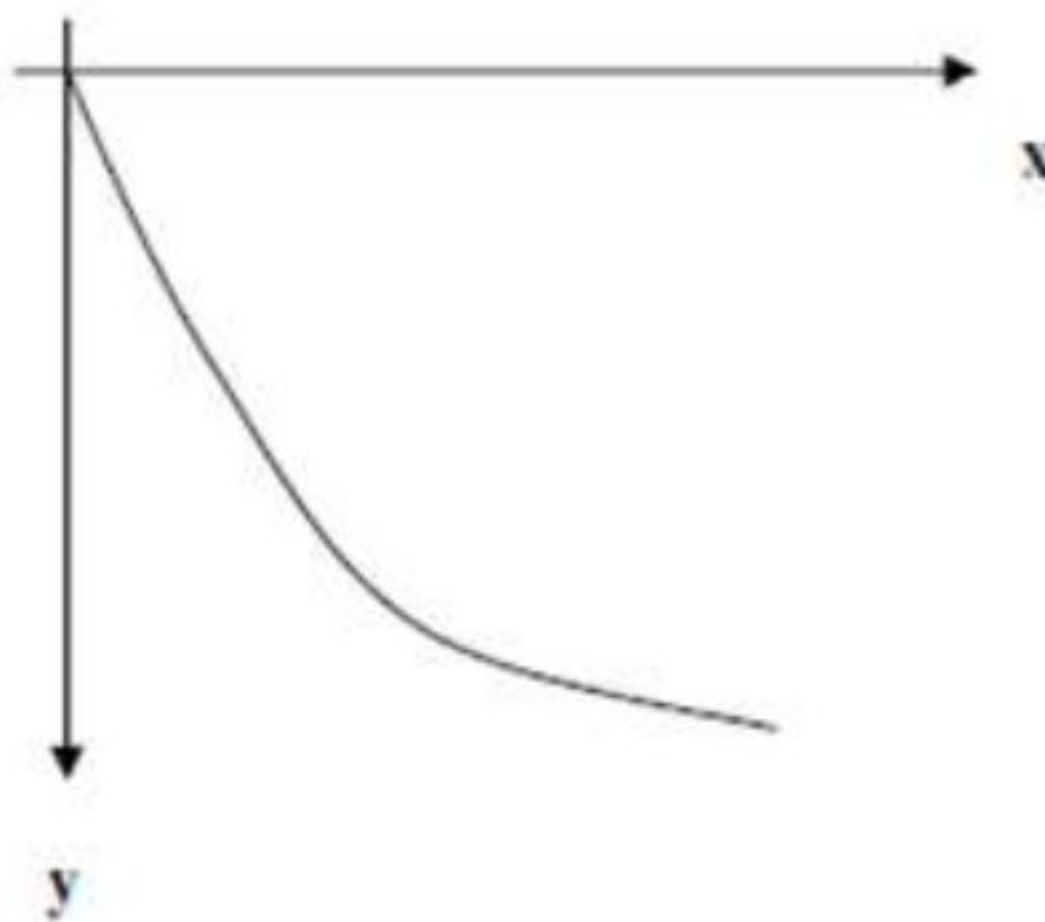


Fonte: Castro (2014).

3.2.5 A Braquistócrona é uma cicloide invertida

A braquistócrona é uma cicloide invertida, pois é nessa curva que o corpo vai de um ponto mais alto ao ponto mais baixo no menor tempo possível. Para prova isso, um corpo que esteja na origem, posição $(0,0)$ de uma curva vertical que aponta para baixo mostrada na figura 11, após um certo tempo, estará na posição (x_1, y_1) .

Figura 11: Curva cicloide.



Fonte: Caetano (2008).

O tempo necessário, para o corpo percorrer uma distância s é:

$$t = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \frac{ds}{v} = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \sqrt{\frac{(dx^2 + dy^2)}{2gy}}$$

$$t = \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \sqrt{\frac{(1 + x'^2)}{2gy}} dy \quad (29)$$

Como o termo $2g$ da equação 29 é constante em relação à nossa variável de integração, ele pode ser removido da integral. Como resultado, a função pode ser minimizada, e usando a equação 20 para a variável y :

$$f = \left(\frac{1 + x'^2}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

Observando a equação 30, percebe-se que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, logo então: $\frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial x'}$, o que indica que a derivada de f em relação à x' é uma constante, como ser observado na equação 31.

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = K = \left(\frac{1}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

Fazendo $u = \frac{1+x'^2}{y}$, e derivando em relação a x e usando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + x'^2}{y} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2x'}{y} = \left(\frac{y}{1 + x'^2} \frac{x'^2}{y^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2a} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{x'^2}{y(1 + x'^2)} \right) = \frac{1}{2a} \quad (32)$$

Isolando a derivada da equação 32, obtém-se a mesma equação 14, cuja solução é dada pelas equações 17 e 18.

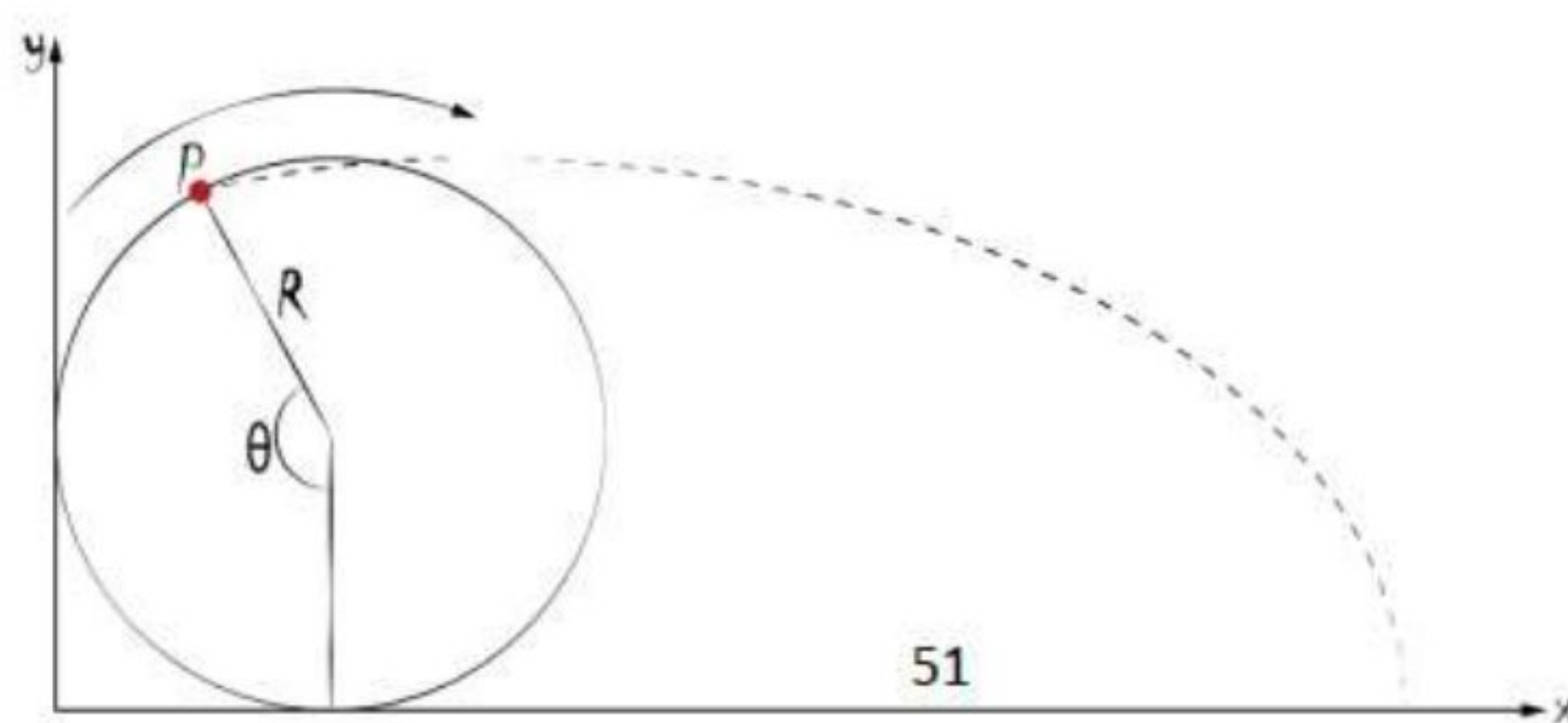
$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2ax - y}} dy$$

Assim, foi obtido as equações paramétricas da cicloide invertida (com os eixos orientados para baixo), mostrando que ela é Braquistócrona, ou seja, é uma curva que reduz o tempo que o corpo passa de um ponto A até um determinado ponto B (CAETANO, 2008).

3.3 A CICLOIDE NO NOSSO DIA A DIA

Uma curva cicloide é um caminho definido por um ponto P em um círculo que, quando desenhado em um plano, é transladado paralelamente a um ponto de referência fixo, conforme mostra a Figura 12.

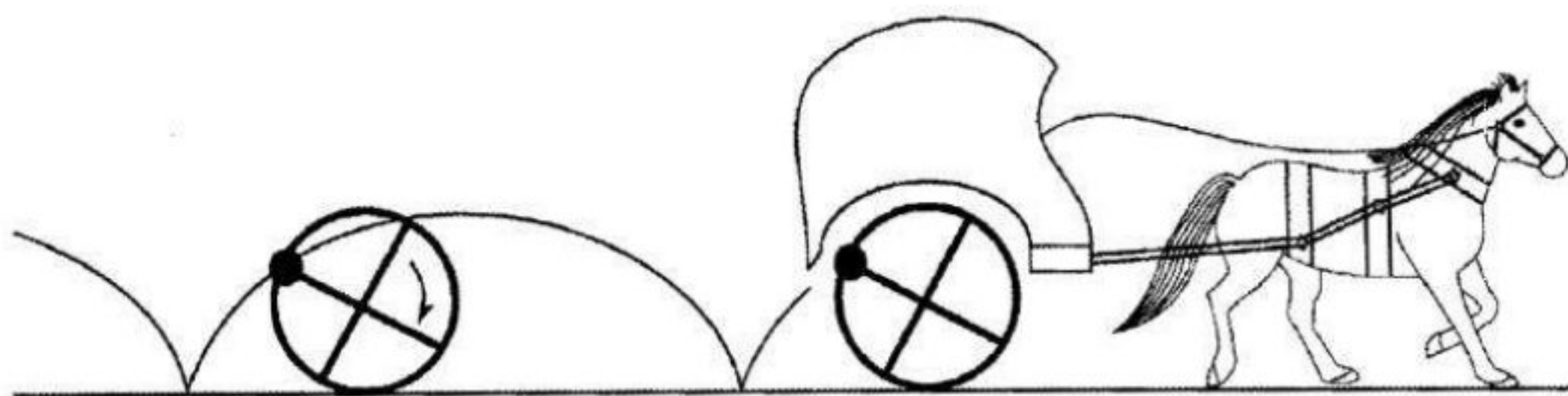
Figura 12: Movimento da Cicloide.



Fonte: Bustillos e Sassine (2011).

Galileu acabou percebendo essa curva quando olhou pela janela para uma charrete que passava na rua. Ao notar uma curva no movimento da charrete, ficou intrigado e resolveu pesquisar dando-lhe o nome de cicloide. Na figura 13 a curva Cicloide foi obtida a partir do movimento das rodas sobre uma reta sem se deslizar, e é um exemplo diário do surgimento dessa curvatura (BUSTILLOS E SASSINE, 2011).

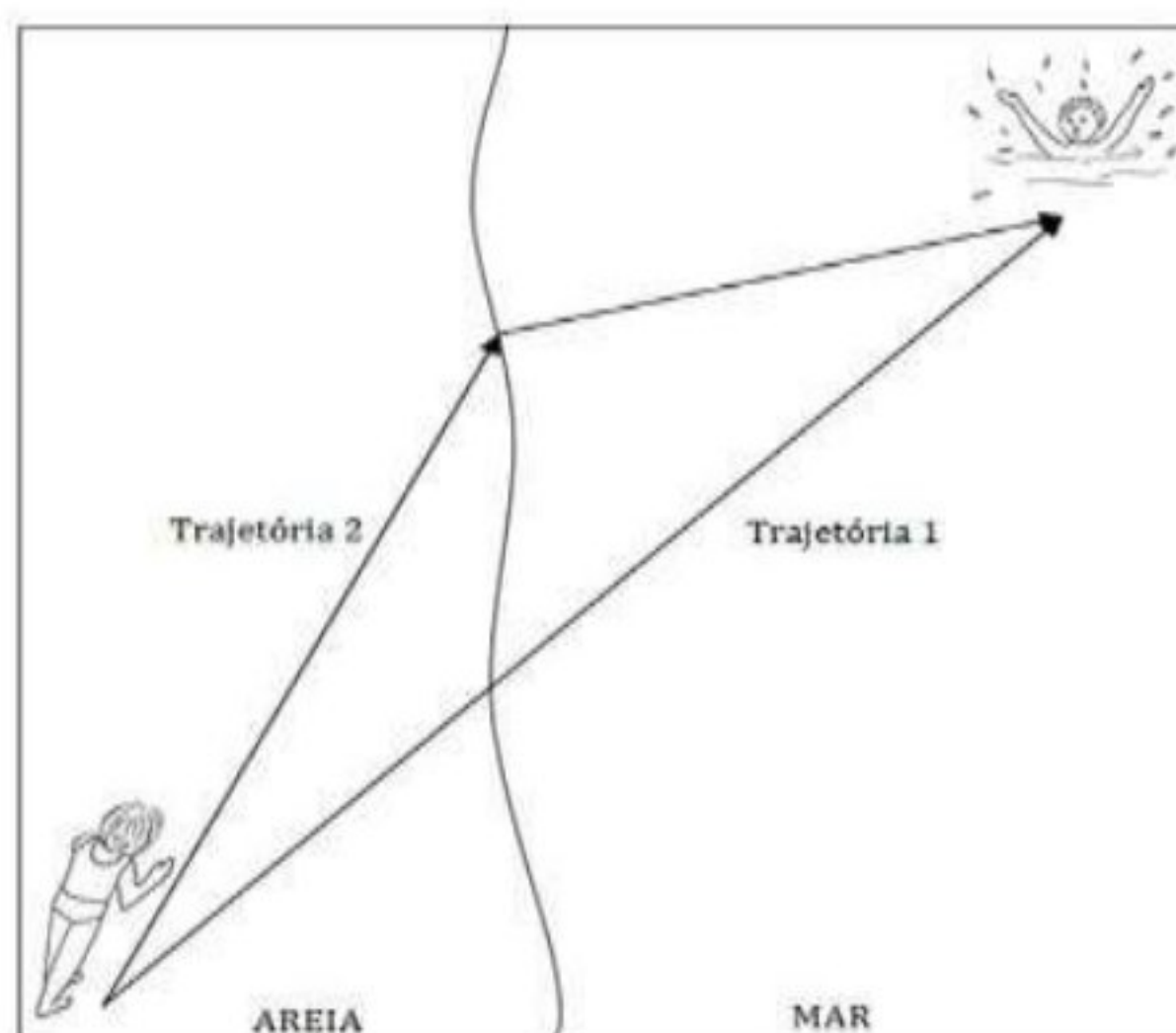
Figura 13: A Curva Cicloide criada pela roda de uma charrete que gira ao longo de uma reta.



Fonte: Bustillos e Sassine (2011, p. 22).

Outro uso para a cicloide é a construção de rampas de skate. Outro exemplo fascinante é uma operação de resgate na praia, onde um socorrista precisa alcançar a pessoa que está se afogando e tentar salvá-la no menor tempo possível. Qual rota seria escolhida para chegar à vítima o mais rápido possível? Sabendo que a maioria das pessoas pensariam na reta, como sendo a menor distância entre dois pontos, a figura 14 mostra o motivo da cicloide se a trajetória mais rápida.

Figura 14: Trajetórias até a vítima.



Fonte: Tagliolatto (2015)

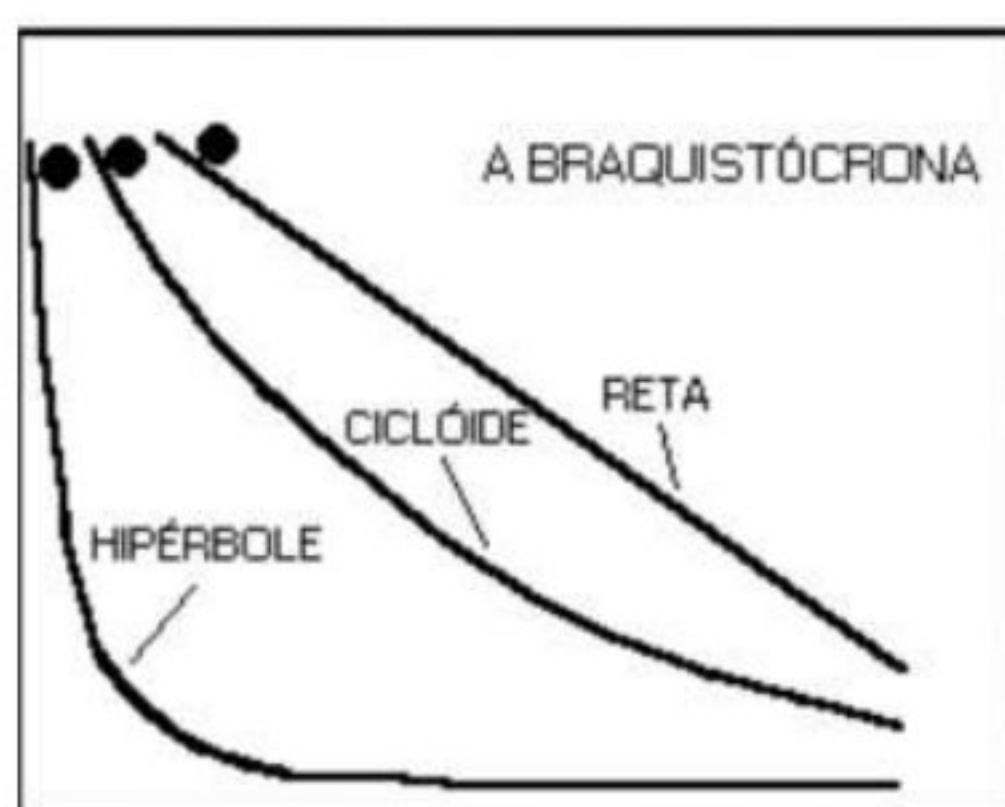
A trajetória 1, não seria a melhor opção para o salvamento desta vítima, pois uma das explicações é que, na areia, você tem uma velocidade maior do que dentro d'água, portanto a trajetória 2 seria mais adequada (TAGLIOLATTO, 2015).

4. MATERIAIS E MÉTODOS

4.1 CONSTRUÇÃO DO EXPERIMENTO

Para construir o experimento foi copiada uma imagem da internet, figura 15, que continha as três curvas (Hipérbole, Cicloide e Reta). A imagem foi ampliada para uma folha A4, de modo que todas as curvas iniciaram com altura 17 cm (valor máximo de y), e percorrem a distância de 24 cm (valor máximo de x) que corresponde ao ponto final de descida, onde a origem do sistema está no canto inferior esquerdo.

Figura 15: Trajetórias do experimento.



Fonte: Seara da ciência.

Para criar o experimento foi utilizado materiais de baixo custo (papelão), e as curvas criadas são de dimensões médias. O objetivo do experimento é demonstrar que três esferas idênticas liberadas ao mesmo tempo, é na curva Braquistócrona que a descida acontece no menor tempo possível. No quadro 1 é apresentado a lista de materiais utilizados no experimento.

Quadro 1: Materiais utilizados para a experimentação.

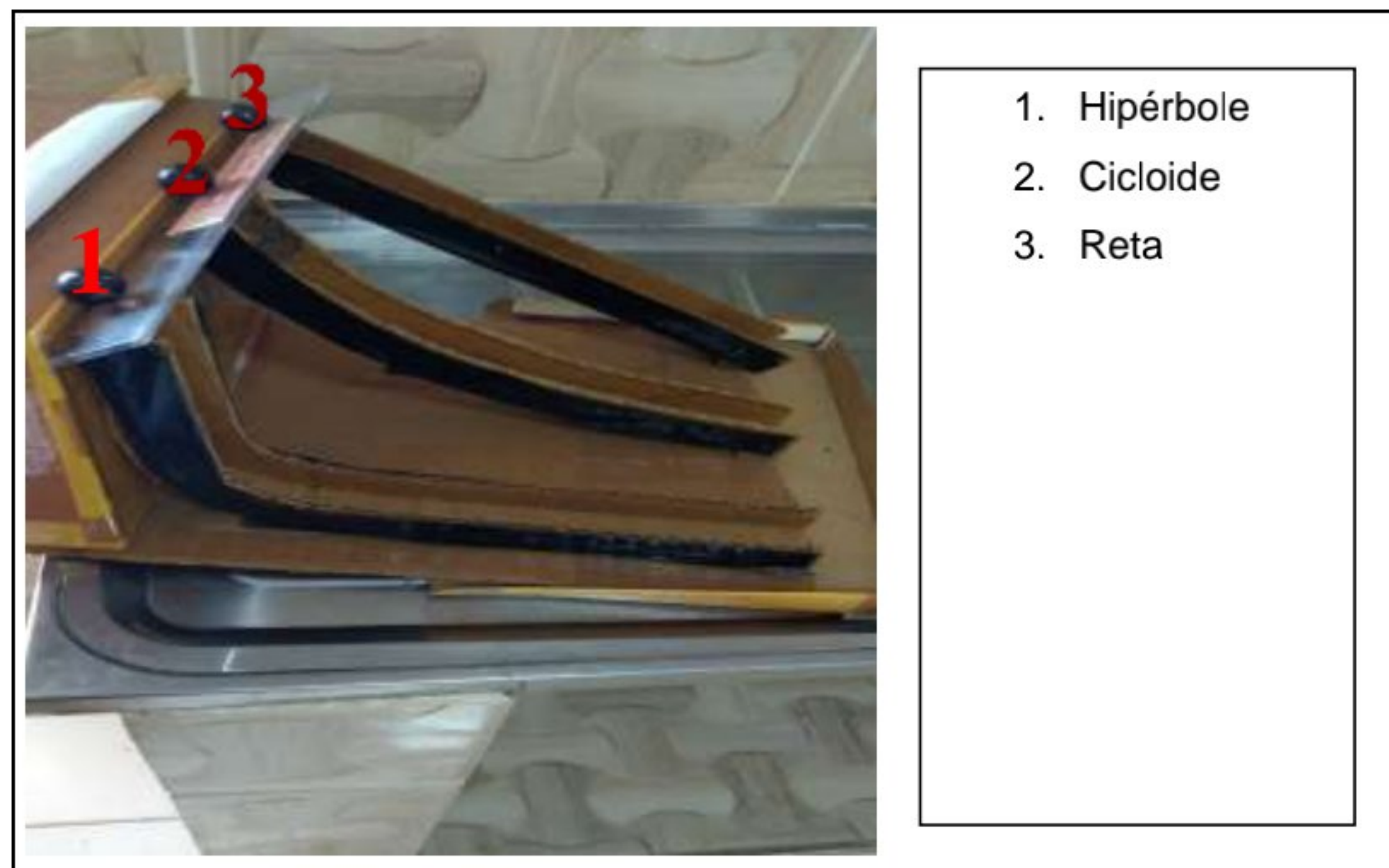
Materiais de baixo custo utilizados
Caixas de papelão
Tesoura
Régua
Cola
Três esferas de vidro

Fonte: Autor (2022).

A produção do experimento seguiu os seguintes passos:

1. As três curvas foram impressas em uma folha A4, no formato vertical, de dimensões, 21 cm por 29,7cm;
 2. Após a impressão, elas foram desenhadas no papelão para ser uma alternativa de baixo custo, e cada trajetória teve um molde distinto;
 3. Foi definido as dimensões das esferas utilizadas para melhor ajuste do experimento;
- A figura 16 mostra o experimento pronto.

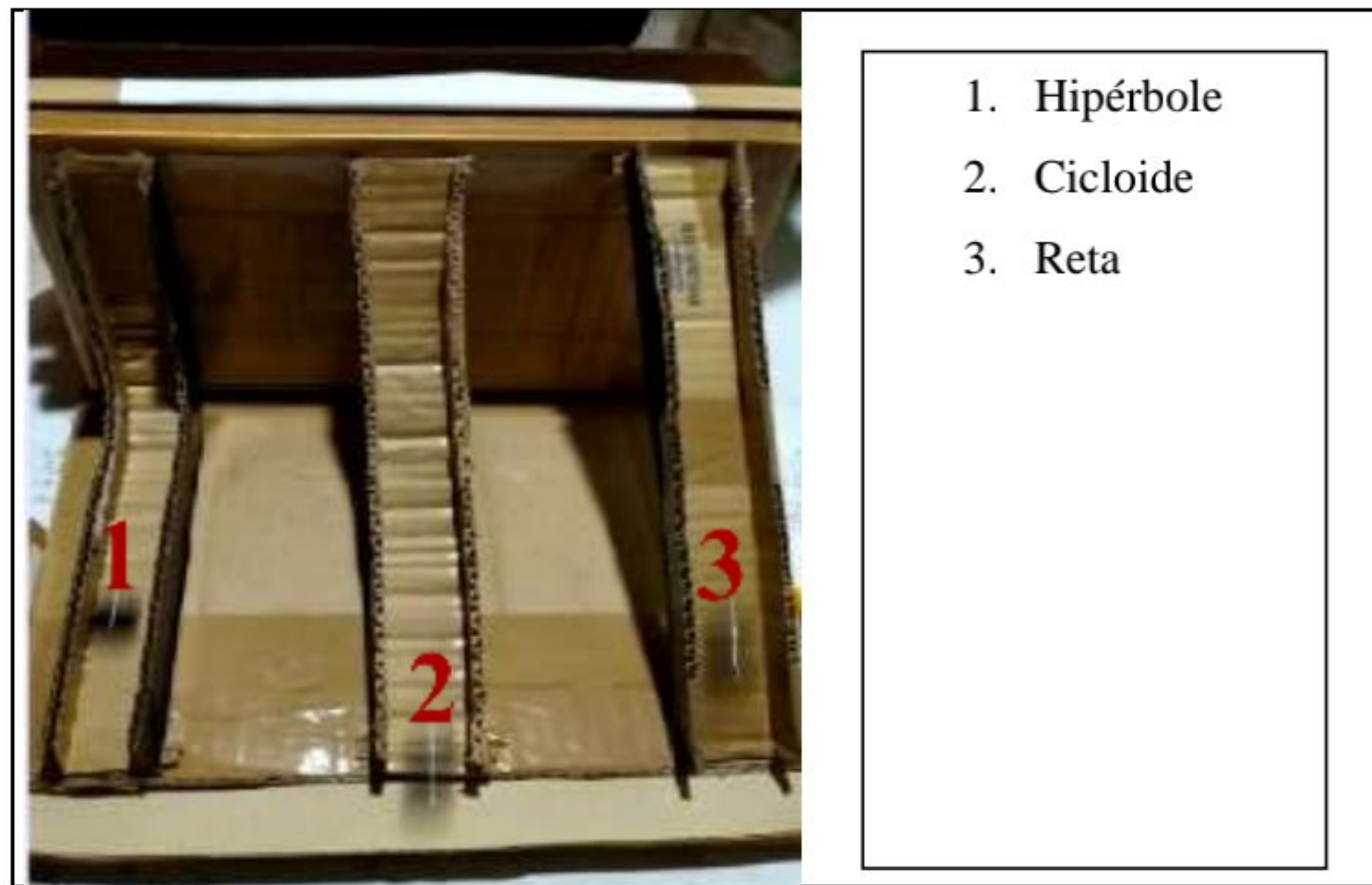
Figura 16: Experimento com as três curvas.



Fonte: Autor (2022).

Na figura 17 percebe-se a imagem pausada no momento que a esfera chegou no ponto de menor nível.

Figura 17: Experimento pronto.



Fonte: Autor (2022).

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 ANÁLISE DOS SISTEMAS ATRAVÉS DA VÍDEO-ANÁLISE.

Para analisar a execução do experimento foi escolhida a técnica da vídeo-análise, através do software livre Tracker. Esta técnica consiste em determinar grandezas físicas através de vídeos digitais, que neste trabalho foi obtido com um celular. Para o software faça as medidas na escala correta é necessária uma medida conhecida, por exemplo, uma régua, um pedaço de cerâmica, etc. Outra característica é o rastreamento dos objetos a serem analisados, usando uma referência definida pelo usuário, facilitando a aquisição de dados.

As esferas foram colocadas em uma base de mesma altura, nas três curvas produzidas, sendo liberadas do repouso. soltas em um determinado momento, cujo valor da velocidade é nulo. Foram produzidos cinco vídeos do momento de partida de cada esfera e cada curva para verificar o tempo de descida de cada esfera em sua respectiva curva. O quadro 2 mostra o tempo médio do ponto mais alto até o mais baixo, e o desvio padrão dos cinco vídeos analisado para cada curva

Quadro 2: Tempo de descida das esferas.

CURVA	TEMPO MÉDIO(s)	DESV. PADRÃO
Hipérbole	0,46	0,019
Reta	0,41	0,009
Cicloide	0,36	0,015

Fonte: Autor (2022).

Através da análise de dados foi observado que a esfera chegou primeiro no ponto mais baixo na cicloide (Braquistócrona), com tempo médio de 0,36 s. Logo após, foi a Reta, com 0,41 s, e por último, a hipérbole com 0,46 s.

No quadro 3 é apresentado a posição da bolinha de gude (x,y) versus tempo para a hipérbole para um dos vídeos analisados.

Quadro 3: Dados obtidos com o Tracker para a hipérbole.

t(s)	x(cm)	y(cm)
0	0,447	17
0,033	0,526	14,9
0,1	0,74	12,7
0,1	1,3	9,719
0,166	1,931	6,463
0,167	3,238	3,686
0,233	5,762	1,8
0,233	9,228	1,346
0,3	12,42	1,161
0,3	15,21	0,974
0,366	18,53	0,79
0,366	22,2	0,812
0,433	24,78	0,796

Fonte: Autor (2022).

Na figura 18 é apresentado a marcação de pontos obtidos com o Tracker, representados por pontos vermelhos, para a primeira curva analisada, e na figura 19, o comportamento de y versus x , confirmando que a partícula percorreu uma hipérbole.

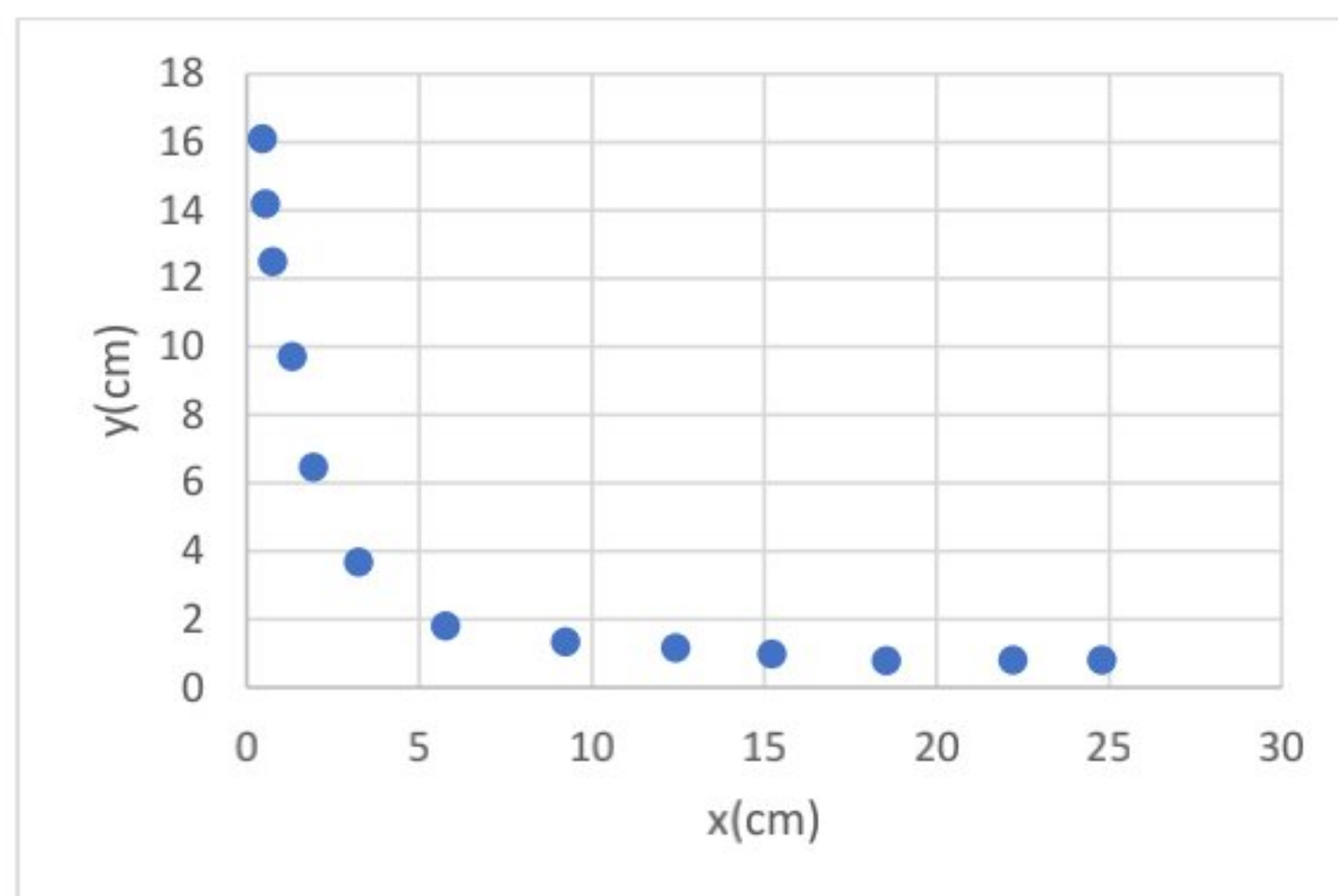
Figura 18: Análise do software Tracker para a hipérbole.



Fonte: Autor (2022).

Analisando os dados do quadro 3 foi observado que os valores de y diminui mais rapidamente devido à queda ser mais acentuada. No momento de partida da esfera o valor de y é 17cm e em apenas 0,23 segundos, em pouco mais da metade do tempo total de descida (0,433 s) ela atinge o valor de y igual a 1,3 cm aproximadamente.

Figura 19: Movimento 2D da bolinha de gude na hipérbole.



Fonte: Autor (2022).

No quadro 4 é apresentado a posição da bolinha de gude (x,y) versus tempo para a cicloide para um dos vídeos analisados.

Quadro 4: Dados obtidos com o Tracker para a cicloide.

t(s)	x(cm)	y(cm)
0	0	17
0,033	1,057	15,47
0,1	2,595	13,17
0,1	4,325	11,15
0,166	6,535	9,13
0,167	9,322	7,304
0,233	12,11	5,959
0,233	14,99	4,421
0,3	18,93	3,171
0,3	22	2,21
0,366	24	1,826

Fonte: Autor (2022).

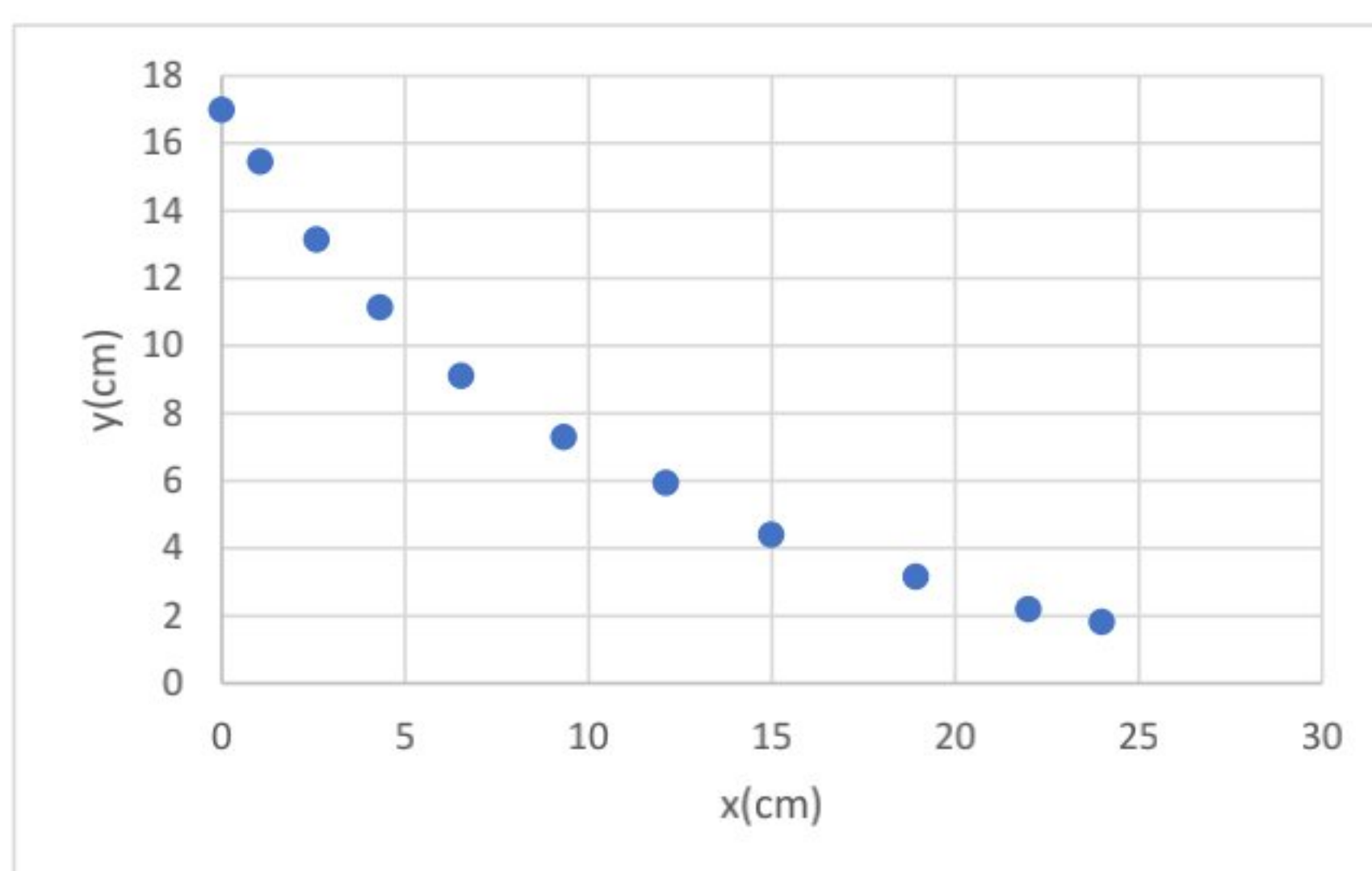
Na figura 20 é apresentado a marcação de pontos obtidos com o Tracker, representados por pontos vermelhos, para a segunda curva analisada, e na figura 21, o comportamento de y versus x, confirmando que a partícula percorreu uma cicloide.

Figura 20: Análise do software Tracker para a cicloide.



Fonte: Autor (2022).

Figura 21: Movimento 2D da bolinha de gude na cicloide



Fonte: Autor (2022).

Analisando os dados do quadro 4 foi observado que em 3,66 segundos atinge o ponto de mínimo, e os valores de y tem uma queda bem distribuída. Isso também é observado na figura 21 que mostra o comportamento de y versus x .

No quadro 5 é apresentado a posição da bolinha de gude (x,y) versus tempo para a cicloide para um dos vídeos analisados .

Quadro 5: Dados obtidos com o Tracker para a reta.

t(s)	x(cm)	y(cm)
0	0	17
0,033	1,516	15,59
0,1	3,897	14,07
0,1	6,171	12,56
0,166	8,444	11,04
0,167	10,39	9,743
0,233	12,99	8,336
0,233	15,26	6,82
0,3	17,54	5,521
0,3	19,81	4,114
0,366	22,08	2,598
0,42	24	1,083

Fonte: Autor (2022).

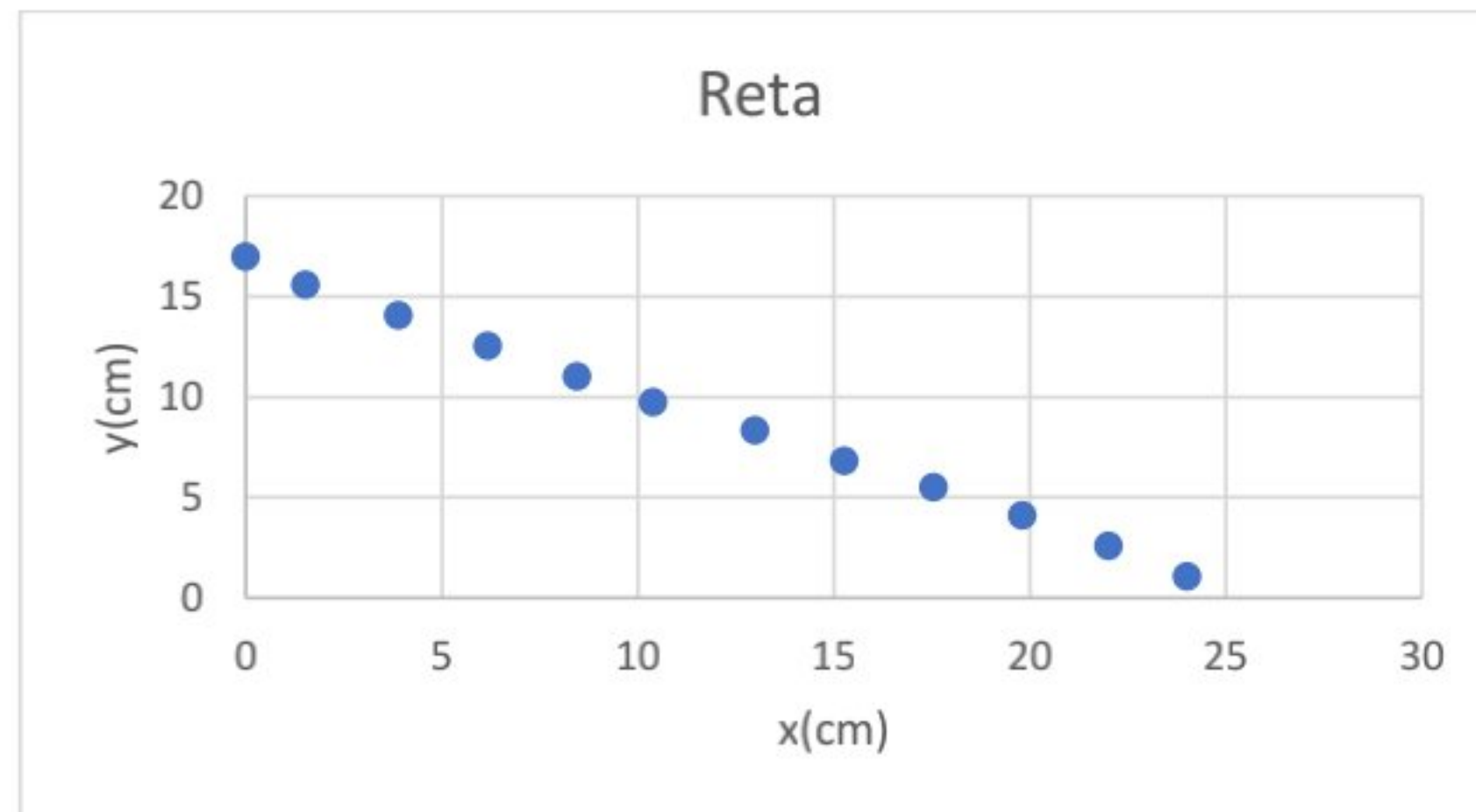
No caso da reta, foi observado na Tabela 5 que, os valores de y vão diminuindo gradativamente, o que a torna a segunda trajetória mais eficiente em relação ao tempo. Na figura 22 é apresentado a marcação de pontos obtidos com o Tracker, representados por pontos vermelhos, para a terceira curva analisada, e na figura 21, o comportamento de y versus x , confirmando que a partícula percorreu uma reta. Pode-se observar o movimento 2D da bolinha de gude na reta, no momento de partida da esfera o valor de y é 17cm e em 0,42 segundos ela atinge o tempo total de descida.

Figura 22: Análise do software Tracker para a reta.



Fonte: Autor (2022).

Figura 23: Movimento 2D da bolinha de gude na reta.



Fonte: Autor (2022).

5.2 CONFERÊNCIA DO PROTÓTIPO CRIADO.

Como o experimento foi criado a partir de uma imagem disponível na internet, os dados foram conferidos para saber se as curvas correspondem à teoria. Os dados foram obtidos com a utilização de uma régua, e medidos a cada 1 cm. O quadro 6 mostra os dados obtidos.

Quadro 6: Valores obtidos com a régua

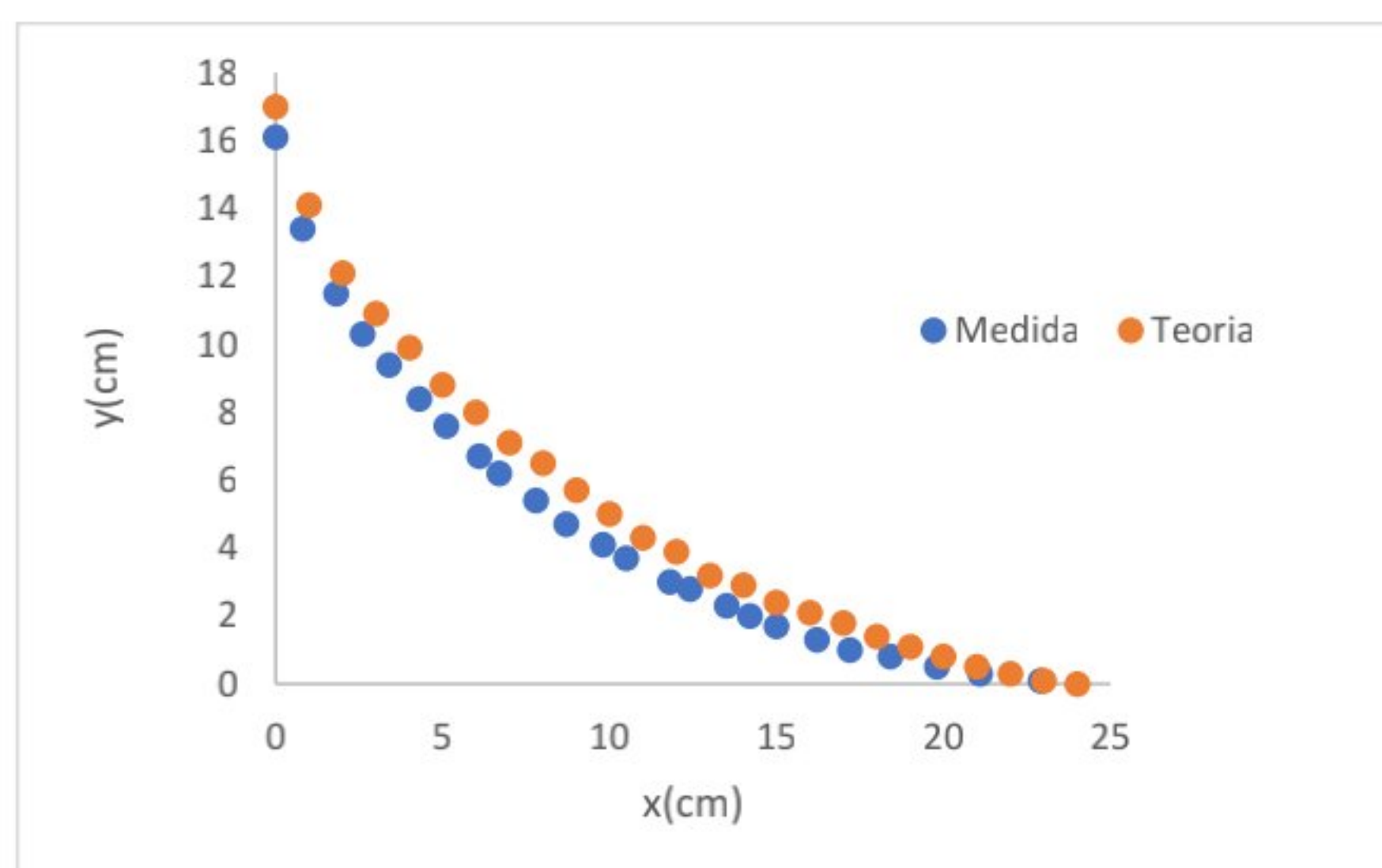
CICLOIDE		RETA		HIPÉRBOLE	
X(cm)	Y(cm)	X(cm)	Y(cm)	X(cm)	Y(cm)
0,0	17	0,0	17	0,0	17
1	14,1	1	16,1	1	10,5
2	12,1	2	15,4	2	6
3	10,9	3	14,8	3	3,9
4	9,9	4	14,1	4	2,8
5	8,8	5	13,3	5	1,9
6	8	6	12,7	6	1,6
7	7,1	7	11,9	7	1,2
8	6,5	8	11,1	8	1
9	5,7	9	10,5	9	0,7
10	5	10	9,8	10	0,4
11	4,3	11	9,1	11	0,3
12	3,9	12	8,4	12	0,1
13	3,2	13	7,8	13	0
14	2,9	14	7	14	0
15	2,4	15	6,3	15	0
16	2,1	16	5,6	16	0
17	1,8	17	4,9	17	0

18	1,4	18	4,2	18	0
19	1,1	19	3,5	19	0
20	0,8	20	2,8	20	0
21	0,5	21	2,1	21	0
22	0,3	22	1,5	22	0
23	0,1	23	0,8	23	0
24	0	24	0	24	0

Fonte: Autor (2022).

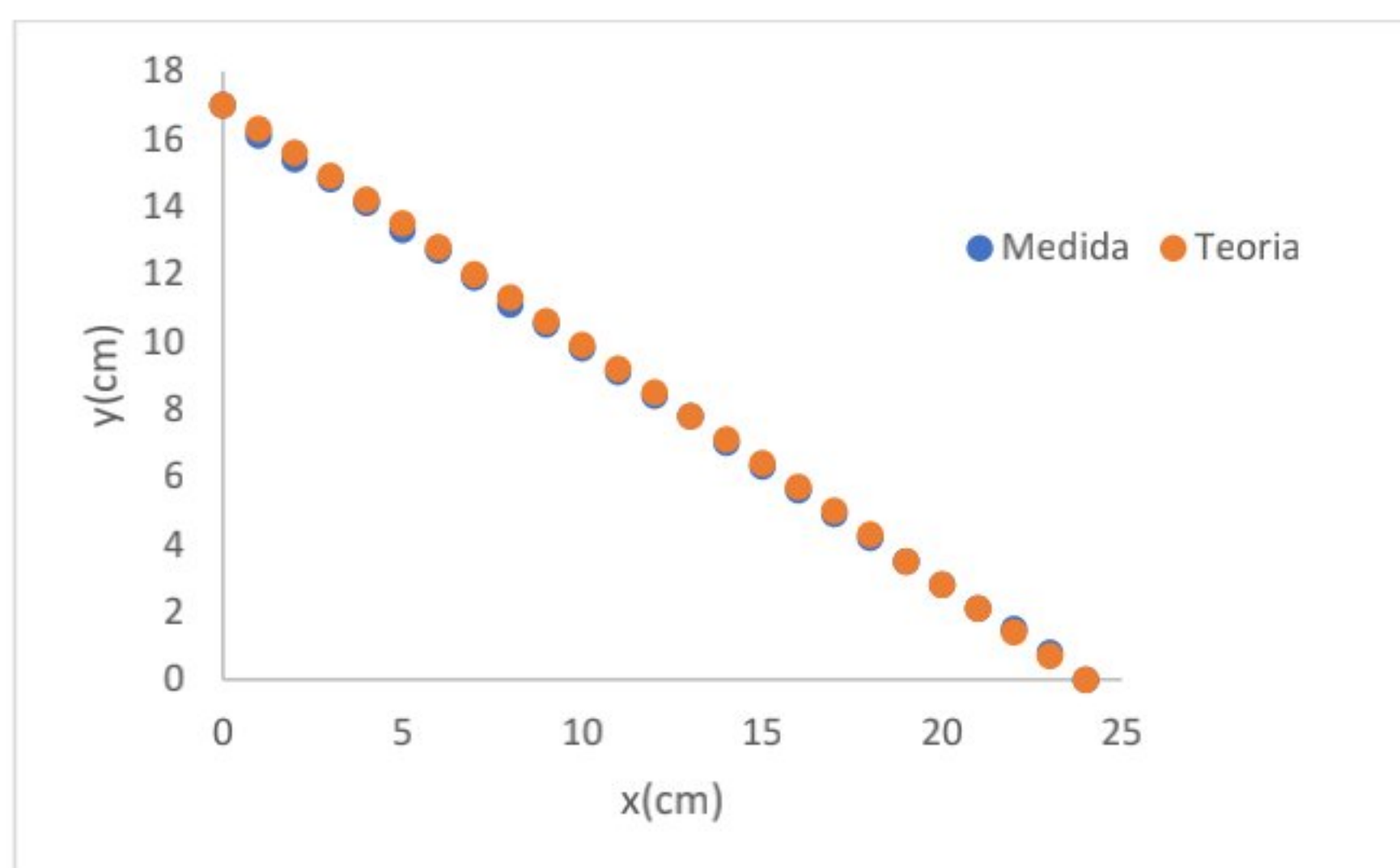
Pode-se observar que a trajetória percorrida pelas esferas condiz com a realidade, e acabam formando as imagens da Cicloide, Hipérbole e Reta, como mostram os gráficos das Figuras 24, 25 e 26.

Figura 24: Dados obtidos com a régua para a cicloide x teoria.



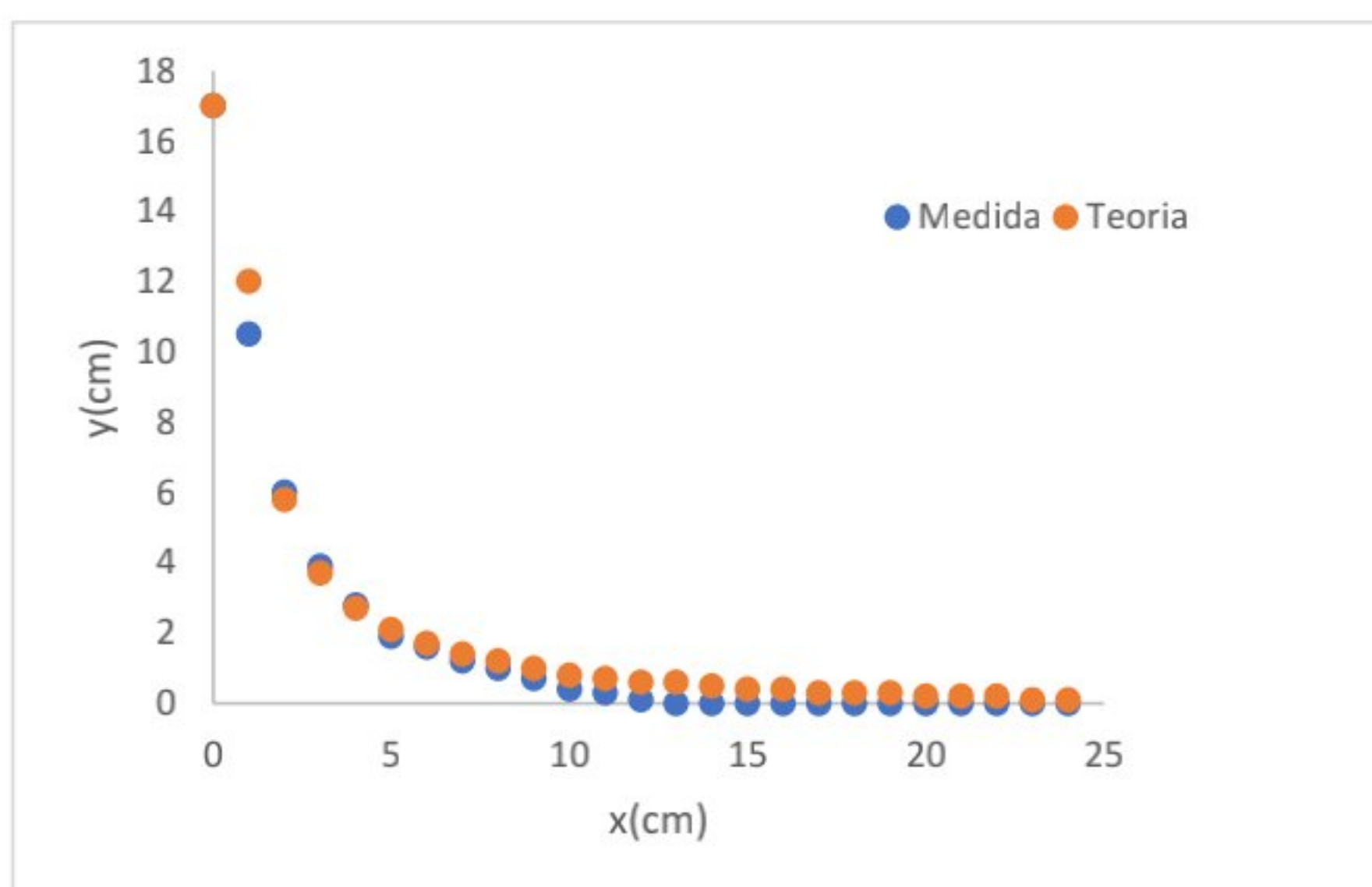
Fonte: Autor (2022).

Figura 25: Dados obtidos com a régua para a reta x teoria



Fonte: Autor (2022).

Figura 26: Dados obtidos com a régua para a hipérbole x teoria



Fonte: Autor (2022).

Quadro 7: Erro médio para as três curvas

CURVA	ERRO MÉDIO
Hipérbole	8,93
Reta	1,81
Cicloide	7,71

Fonte: Autor (2022).

No quadro 7 foi obtido os valores para o erro médio de cada curva e a partir das imagens 24, 25 e 26, pode-se perceber que, as curvas se aproximam da teoria.

6. CONCLUSÃO

O problema da braquistócrona é um problema fascinante, pois mostra que a curva cicloide é a curva que uma partícula percorre em menor tempo. Isso ocorre devido ao efeito da força da gravidade, e faz com que a reta, a menor distância entre dois pontos, não seja a de menor tempo.

Este trabalho teve como objetivo provar, meio de um experimento que, na curva cicloide a partícula percorre em menor tempo. O estudo iniciou com aspectos históricos da cicloide, através de alguns estudiosos acerca do tema, bem como um ponto de vista dinâmico.

O experimento foi planejado através de uma imagem disponível na internet, onde ela foi ampliada para caber numa folha A4, e depois confeccionado num papelão para diminuir o custo de confecção. Para comprovar que a curva cicloide é a de menor tempo, três bolinhas de gude foram liberadas ao mesmo instante nas três curvas, a hipérbole, cicloide e reta, onde através da técnica vídeo análise foi medido o tempo que uma bolinha leva para atingir o ponto mais baixo.

Em todas as etapas envolvidas, desde a criação do experimento usado, até a análise e obtenção de resultados, o Tracker e o Excel foram bastante utilizados na análise dos dados e confecção de gráficos. Através dos dados obtidos foi confirmado experimentalmente que a curva cicloide realmente é a que faz a partícula percorrer em menor tempo, em relação a reta (segunda mais rápida) e a hipérbole (a mais lenta).

REFERÊNCIAS

BATISTA, G. d., FREIRE, C., & MOREIRA, J.E. Experiências com a Braquistócrona. **Física na escola**, v. 7, n.2 p.58-60, 2006.

CAETANO, Wellington de Lima Caetano. **Queda em curvas de menor tempo e tempo independente da altura- Braquistócrona e Tautócrona**. Tópicos de ensino de física 1. Universidade estadual de campinas, 07 de junho de 2008.

FARINA, Carlos. **Huygens, a Helena da Geometria**. Tópicos de física geral 1. Rio de Janeiro, 2013.

JÚNIOR, José Ribamar Alves de Sousa. **O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro- SP: Unesp.

LANCZOS, C. **Os Princípios Variacionais da Mecânica**. Mineola New York: Dover Publications, 1986.

LEMONS, Nivaldo Augusto. **Mecânica Analítica**. 2.ed. Rio de Janeiro.2007.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de pesquisa**. São Paulo: Editora Atlas S.A, 2002.

NETO, J. B. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana**. 1.ed. São Paulo: Livraria da física. 2004

OLIVEIRA, Renato Soares de Oliveira. **Cálculo Variacional com Aplicação ao Problema de Sturm-Liouville**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco- UFPE, Recife-PE, 2016.

Seara da Ciência. **Cicloide e Braquistócrona**. Universidade Federal do Ceará. Disponível em:<<https://seara.ufc.br/pt/sugestoes-para-feira-de-ciencias/sugestoes-de-fisica/mecanica-2/cicloide-e-braquistocrona/>>. Acesso em: 23 Agosto de 2021.

SMITH, D. E. **A source book in mathematics**.1.ed. NewYork: Dover Publications, 1959.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. 2.ed.Lisboa. Gradiva, 2006.

ZANI, Sérgio Luís. **O problema da Braquistócrona**. 2000. Disponível em: <<https://www.dm.ufscar.br/hp/hp523/hp523001/hp523001.html#inicio>> Acesso em: 21 Ago. 2021.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de pesquisa**. São Paulo: Editora Atlas S.A, 2002.

TORRES, Vanessa; DA SILVA, M. Gomes. **experimento: confeccionando e verificando que a curva cicloide apresenta o menor tempo entre dois pontos desnivelados**. Manaus: Experiências em Ensino de Ciências, 2020.

THAGLIOLATTO, Ana Luisa Sader Thagliolatto. **Braquistócrona**. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista “julho de Mesquita Fialho”, 2015.