



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS - DECEN
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

ANDRÉ SOUZA DE CARVALHO

**ESTUDO AVANÇADO DO MOVIMENTO DE ROLAMENTO: A INFLUÊNCIA DA
GEOMETRIA DA RAMPA E A DETERMINAÇÃO DE PERDAS ENERGÉTICAS EM
UM APARATO DE BAIXO CUSTO**

PAU DOS FERROS

2025

ANDRÉ SOUZA DE CARVALHO

**ESTUDO AVANÇADO DO MOVIMENTO DE ROLAMENTO: A INFLUÊNCIA DA
GEOMETRIA DA RAMPA E A DETERMINAÇÃO DE PERDAS ENERGÉTICAS EM
UM APARATO DE BAIXO CUSTO**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Sharon Dantas da Cunha, Prof. Dr.

PAU DOS FERROS

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

C331e Carvalho, Andre Souza de.
Estudo avançado do movimento de rolamento: a influência da geometria da rampa e a determinação de perdas energéticas em um aparato de baixo custo / Andre Souza de Carvalho. - 2025.
40 f. : il.

Orientador: Sharon Dantas da Cunha.
Monografia (graduação) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e Tecnologia, 2025.

1. Lançamento oblíquo. 2. Fator de perda. 3. Vídeo análise. 4. Rolamento. 5. Rampas artesanais.
I. Cunha, Sharon Dantas da , orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Pau dos Ferros
Bibliotecária: Erlanda Maria Lopes da Silva
CRB: 15/966

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

ANDRÉ SOUZA DE CARVALHO

**ESTUDO AVANÇADO DO MOVIMENTO DE ROLAMENTO: A INFLUÊNCIA
DA GEOMETRIA DA RAMPA E A DETERMINAÇÃO DE PERDAS ENERGÉTICAS
EM UM APARATO DE BAIXO CUSTO**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Sharon Dantas da Cunha, Prof. Dr.

Defendida em: 17/12/2025

BANCA EXAMINADORA

Sharon Dantas da Cunha, Prof. Dr.
Orientador

Aline Mara Maia Bessa, Profa. Dr.
Membro Examinador

Francisco Ernandes Matos, Prof. Dr.
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus, pois sem Ele nada disso seria possível.

Agradeço à minha família, que sempre me apoiou nesta jornada de graduação — especialmente ao meu pai, à minha mãe, aos meus dois irmãos e ao meu tio Jackson, que sempre esteve ao meu lado e me ajudou em tudo.

Expresso minha gratidão também ao meu orientador, Prof. Sharon Dantas da Cunha, pela paciência, dedicação e pelos ensinamentos proporcionados ao longo de toda a graduação, acompanhando meu desenvolvimento desde o início do curso.

À minha namorada, Ana Vitória, agradeço imensamente, pois foi outro pilar fundamental durante esta trajetória. Esteve ao meu lado em todos os momentos, guiando-me e ouvindo minhas dúvidas. Mesmo sem ser da área, ela estava sempre presente, tentando me mostrar soluções e me apoiando incondicionalmente.

RESUMO

Um experimento clássico presente nos laboratórios de Física é o estudo do rolamento de esferas em uma rampa, onde se analisa o seu alcance ao cair no chão. Geralmente, a curva utilizada é uma cicloide e o ângulo de saída é bem pequeno. Inspirado neste experimento, este trabalho apresenta um estudo experimental e teórico do movimento de uma esfera em rampas de quatro geometrias distintas: reta, parábola, hipérbole e cicloide, as quais induziram a esfera a um movimento de lançamento oblíquo (ângulo de saída não nulo). É importante destacar que todas as rampas foram construídas de maneira artesanal, utilizando materiais de baixo custo, conferindo alta reprodutibilidade ao aparato experimental. A metodologia experimental empregou a técnica de vídeo análise (Tracker), a qual foi fundamental para o rastreamento da trajetória, permitindo a determinação precisa da velocidade e do ângulo de saída das esferas. O alcance horizontal foi medido por dois métodos: pela vídeo análise e por um método tradicional de registro (papel e carbono). A análise teórica confrontou o modelo de rolamento com a conservação de energia e a cinemática do lançamento oblíquo. Observou-se uma discrepância sistemática entre os dados experimentais e o modelo teórico ideal e, para corrigir esta divergência, introduziu-se um Fator de Perda na conservação de energia, definido como a razão entre a energia mecânica ao sair da rampa e a energia potencial gravitacional inicial. Este fator, determinado empiricamente através dos dados da vídeo análise, foi incorporado ao modelo teórico. Os resultados demonstraram que a inclusão do Fator de Perda no cálculo do alcance obteve uma concordância notavelmente alta com os dados medidos em todas as geometrias de rampa. Conclui-se que a inclusão deste fator é essencial para a descrição precisa do movimento de rolamento e lançamento, especialmente em sistemas que envolvem múltiplas transformações energéticas e atrito. Este estudo valida a aplicação combinada da vídeo análise e do modelo de rolamento corrigido como uma ferramenta eficaz para o ensino e a pesquisa em física experimental.

Palavras-chave: rolamento, lançamento oblíquo, fator de perda, vídeo análise, rampas artesanais.

ABSTRACT

A classic experiment in physics laboratories is the study of spheres rolling down a ramp, analyzing their range upon impact. Generally, the curve used is a cycloid, and the launch angle is quite small. Inspired by this experiment, this work presents an experimental and theoretical study of the motion of a sphere on ramps with four distinct geometries: straight line, parabola, hyperbola, and cycloid, which induced the sphere to an oblique launch motion (non-zero launch angle). It is important to highlight that all ramps were handcrafted using low-cost materials, ensuring high reproducibility of the experimental apparatus. The experimental methodology employed the video analysis technique (Tracker), which was fundamental for tracking the trajectory, allowing for the precise determination of the spheres' velocity and launch angle. The horizontal range was measured by two methods: video analysis and a traditional recording method (paper and carbon). The theoretical analysis compared the rolling model with the conservation of energy and the kinematics of oblique launch. A systematic discrepancy was observed between the experimental data and the ideal theoretical model. To correct this divergence, a Loss Factor was introduced into the energy conservation, defined as the ratio between the mechanical energy upon exiting the ramp and the initial gravitational potential energy. This factor, empirically determined through video analysis data, was incorporated into the theoretical model. The results demonstrated that the inclusion of the Loss Factor in the range calculation achieved a remarkably high agreement with the measured data for all ramp geometries. It is concluded that the inclusion of this factor is essential for the accurate description of rolling and launching motion, especially in systems involving multiple energy transformations and friction. This study validates the combined application of video analysis and the corrected rolling model as an effective tool for teaching and research in experimental physics.

Keywords: rolling; oblique launch; loss factor; video analysis; ramp crafts.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Formação da cicloide a partir da rolagem de um círculo	15
Figura 2 - Rolagem do círculo gerador da cicloide	15
Figura 3 - Trajetória da esfera na rampa evidenciando os pontos que serão calculados a energia mecânica.....	17
Figura 4 - Consideração do ângulo θ	18
Figura 5 - Dimensões das Rampas: a) Cicloide; b) Reta; c) Parábola; d) Hipérbole	22
Figura 6 - Ilustração dos materiais utilizados.....	23
Figura 7 - Ilustração das etapas de construção das rampas	24
Figura 8 - Ilustração das etapas de construção das rampas	24
Figura 9 - Vista lateral do aparato experimental finalizado com os quatro tipos de rampas.....	25
Figura 10 - Vista frontal do mesmo aparato da figura anterior	25
Figura 11 - Ilustração da área de trabalho do Tracker.....	27
Figura 12 - Janela “Trajetória automática” da função ponto de massa	28
Figura 13 - Janela lateral direita onde o usuário pode visualizar as coordenadas obtidas, bem como os gráficos dessas coordenadas em função do tempo....	29
Figura 14 - Janela auxiliares com os passos para copiar os dados.....	29
Figura 15 - Deslocamento horizontal (x) em função do tempo para as quatro rampas.....	30
Figura 16 - Deslocamento vertical (y) em função do tempo para os quatro tipos rampas.....	30
Figura 17 - Deslocamento vertical (y) em função do deslocamento horizontal (x).....	32
Figura 18 - Trajetória da Cicloide em que não aparece a esfera tocando o solo	34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados obtidos a partir da regressão dos dados das figuras 15, 16 e 17..	33
Tabela 2 - Lançamentos para os quatro tipos de rampas utilizando a esfera de vidro	35
Tabela 3 - Estatística do alcance dos dados da Tabela 2 e o alcance obtido com o <i>Tracker</i> , apresentado na seção anterior.....	36
Tabela 4 - Altura máxima (h), altura da rampa (h_r) e altura da mesa (h_m).....	36
Tabela 5 - Alcances obtidos através da teoria (A_{SF}), com o <i>Tracker</i> (A_{TR}), e experimental (A_E).	37
Tabela 6 - Fator de perda obtidos com auxílio dos dados da Tabela 1.....	37
Tabela 7 - Resumo os alcances obtidos para o alcance teórico (A_{SF}), com o <i>Tracker</i> (A_{TR}), e experimental (A_E).....	37

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	13
2.1	Rampa cicloide	13
2.1.1	História da Braquistócrona.....	13
2.1.2	História da Cicloide	14
2.1.3	Formas de obtenção da cicloide	15
2.2	Dinâmica na rampa e lançamento oblíquo	16
2.3	Vídeo Análise e o <i>Tracker</i>	20
2.3.1	Uso da Vídeo-análise no Ensino da Física	20
2.3.2	Software <i>Tracker</i>	21
3	MATERIAIS E MÉTODOS	22
3.1	Construção das rampas.....	22
3.2	Obtenção de dados com o tracker	26
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	30
4.1	Parâmetros cinéticos do movimento oblíquo	30
4.2	Alcance usando papel e carbono.....	34
4.3	Fator de perda.....	36
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
	REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

Ao perguntarmos qual seria o caminho mais rápido entre dois pontos situados em níveis diferentes, a resposta intuitiva costuma ser a reta, sustentada pela ideia de que o trajeto mais curto implica o menor tempo. Entretanto, há situações em que um caminho mais longo resulta em um tempo de descida menor, como ocorre no clássico problema da braquistócrona, proposto por Johann Bernoulli em 1696 (Tagliolatto, 2015). Esse problema evidencia que a geometria da trajetória pode alterar significativamente o comportamento de um corpo sob ação exclusiva da gravidade.

Considerando essa discussão, surge uma questão motivadora para este trabalho: de que maneira diferentes geometrias de rampa influenciam o ângulo de saída da esfera e, por consequência, seu alcance horizontal? Embora a cicloide seja teoricamente o caminho de menor tempo, ela costuma produzir um ângulo de saída pequeno, enquanto trajetórias mais simples, como a reta, apresentam ângulos maiores — mas nem sempre maior alcance, já que a velocidade de saída também depende do perfil da trajetória.

Inspirado em experimentos clássicos em laboratório de física que investigam o rolamento de esferas em rampas (Jesus e Barros, 2015), nos quais se observa que as esferas normalmente deixam a superfície com um ângulo reduzido, este trabalho propõe a construção de quatro rampas com perfis distintos, cicloidal, reta, parabólica e hiperbólica, todas confeccionadas com materiais de baixo custo. A intenção é analisar, na prática, como cada geometria afeta a dinâmica da esfera, especialmente no que diz respeito ao ângulo de saída e ao alcance horizontal após o desprendimento.

O tema apresenta significativa relevância acadêmica, tanto pela complexidade conceitual quanto pela dificuldade de assimilação no ensino tradicional. A partir da construção e análise experimental de quatro tipos de trajetórias — cicloide, reta, parábola e hipérbole — este estudo busca aproximar teoria e prática, favorecendo uma aprendizagem significativa por meio da experimentação (Almeida; Passos; Silva, 2010).

Além da relevância científica, o estudo também possui um caráter social e educacional importante: ao empregar materiais simples e recursos acessíveis, como vídeo análise e materiais recicláveis, demonstra-se que experimentos significativos podem ser realizados mesmo em instituições com infraestrutura limitada (Vaz e Pinto,

2006). Tal abordagem contribui para um ensino mais inclusivo e democrático, favorecendo a vivência prática e o desenvolvimento da curiosidade científica no ambiente escolar.

Dessa forma, o objetivo geral deste trabalho é investigar como a geometria da rampa influencia o ângulo de saída e o alcance horizontal de uma esfera em movimento. Para isso, apresenta-se inicialmente uma breve contextualização histórica e conceitual do problema da braquistócrona, destacando a relevância da cicloide como trajetória de tempo mínimo. Em seguida, realiza-se um experimento de baixo custo empregando quatro perfis distintos de rampa, permitindo comparar, de maneira quantitativa, como diferentes geometrias afetam o movimento de um corpo em rolamento.

E como objetivo específico os seguintes pontos: Contextualizar historicamente e conceitualmente o problema da braquistócrona e sua relevância para a física e a matemática, por meio de pesquisa bibliográfica em fontes acadêmicas; Construir quatro rampas (cicloide, hipérbole, parábola e reta) com materiais de baixo custo, que possibilitem a realização de experimentos escolares acessíveis; Interpretar e comparar os dados experimentais obtidos com os modelos teóricos, analisando o tempo de descida e o alcance horizontal em cada trajetória; Promover a aprendizagem significativa por meio da experimentação, articulando teoria e prática no contexto do ensino de física.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Rampa cicloide

2.1.1 História da Braquistócrona

A braquistócrona, apesar de se tratar de um problema antigo, do final do século XVII, ainda mantém uma grande relevância em diversas áreas da ciência e engenharia. Este problema foi proposto em 1696, por Johann Bernoulli (1667 – 1748), aos matemáticos mais marcantes da história que viveram na mesma época de Bernoulli, como Isaac Newton (1643 – 1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), Guillaume de l'Hôpital (1661 – 1704) dentre outros (Bustillos e Sassine, 2009).

O desafio proposto por Johann Bernoulli foi publicado pela revista *Acta Eruditorum* de Leipzig, e apresenta-se traduzido do latim por Tagliolatto (2015), como podemos acompanhar na citação a seguir:

Dados dois pontos A e B em um plano vertical, fazer corresponder a uma partícula móvel M a trajetória AMB pela qual a partícula, descendo sobre o seu próprio peso, passa do ponto A para o ponto B no espaço de tempo mais curto (Tagliolatto, 2015, p.19).

Portanto, esse é o problema da braquistócrona, palavra de origem Grega, *brachisto* = mais curto e *chronos* = tempo, ou seja, o tempo mais curto. Porém, é sabido que esse problema já foi citado anteriormente, antes mesmo de ser proposto por Johann Bernoulli (Bustillos e Sassine, 2009).

Este problema já era cogitado pelos geômetras anteriormente, um exemplo deste fato é que em 1630, isto é, data anterior à proposta de Johan Bernoulli, Galileu Galilei deu a resposta errada, supondo que a resposta era um arco de círculo, demonstrando que até os gênios erram (Bustillos e Sassine, 2009, p. 18).

Bustillos e Sassine (2009) nos mostra que o problema da braquistócrona é tão significativo que está presente na matemática desde séculos atrás e até os dias atuais, e é de suma importância para áreas das ciências exatas.

Os autores anteriormente citados afirmam que diante o desafio de Johann, tiveram-se várias respostas diferentes, vários geômetras chegaram ao mesmo resultado por diferentes caminhos matematicamente válidos, mostrando a universalidade das leis naturais. Entre estas soluções destacam-se as dos seguintes geômetras: Isaac Newton, Gottfried W. Leibniz, G.F.A. L'Hospital, E.W. von Tschirnhaus e pelo próprio irmão, Jakob Bernoulli (1655 – 1705).

Cada geômetra que se propôs a resolução do problema da braquistócrona contribuiu com uma resposta única. Mas, vale destacar que a resposta de Newton teve uma peculiaridade. Sua sobrinha relatou que o mesmo recebeu o desafio no final da tarde e entrou no seu quarto, saindo apenas quando conseguiu a resposta correta, às 4:00 da manhã. O mais curioso é quando Newton envia sua resposta assinada como “Autor Anônimo”, mas quando Johann Bernoulli leu a solução, descobriu rapidamente o autor e cita a famosa frase: - “pelas pegadas se reconhece a fera” (Bustillos e Sassine, 2009).

Todavia, por mais que tenham tomado caminhos diferentes, ambos chegaram à mesma resposta: que o caminho mais rápido entre dois pontos em um plano vertical, onde atua apenas a força da gravidade, é a curva cicloide.

2.1.2 História da Cicloide

De acordo com Bustillos e Sassine (2009), os primeiros matemáticos a estudarem a cicloide foram Nicholas Cusa (1401-1464) e o teólogo e matemático francês Charles Bouvelles (1471 – 1553), o primeiro era padre e se interessava muito por geometria, lógica, filosofia e astronomia. Ainda segundo os autores supracitados, Cusa, era filho de um pescador pobre, mas rapidamente subiu na hierarquia da igreja, chegando ao cargo de governador de Roma em 1448.

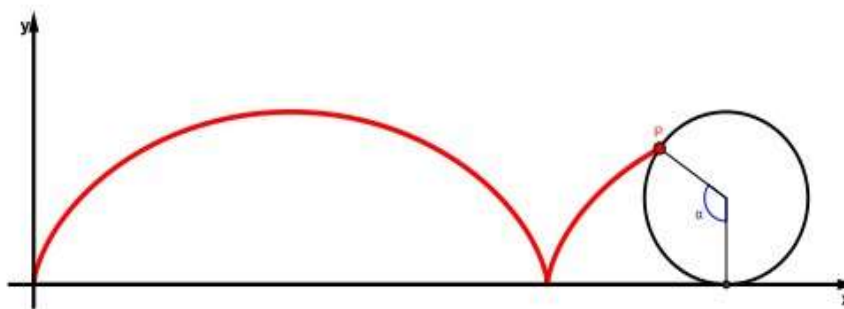
Apesar dos mesmos serem considerados os pioneiros do estudo da cicloide, pode-se dizer que os estudos de Cusa e Bouvelles não se tratava da cicloide em si, tendo em vista que, Bouvelles referêcia a cicloide em seu estudo publicado em Paris de 1501, mas de forma indireta, pois o verdadeiro foco do estudo era o problema da quadratura do círculo (Hermes e Pereira, 2013).

Apenas posteriormente, com outras mentes brilhantes da história da matemática, é que tivemos estudos mais detalhados sobre essa curva, dentre estes temos: Giles Person de Roberval (1602-1675), Blaise Pascal (1623-1662), Evangelista Torricelli (1608-1647), um discípulo de Galileu Galilei (1564-1642), e o próprio Galileu também estudou, sendo inclusive o primeiro a denominá-la de cicloide em 1599 (Barros, 2016).

A curva cicloide pode ser formada fixando-se um ponto P na borda de um círculo com raio r . Considerando inicialmente que o ponto P esteja na origem dos eixos do plano cartesiano xy , e que o círculo role, sem deslizar, no sentido positivo do eixo

x, a curva descrita pelo ponto P durante a rolagem é denominada cicloide, como pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 - Formação da cicloide a partir da rolagem de um círculo

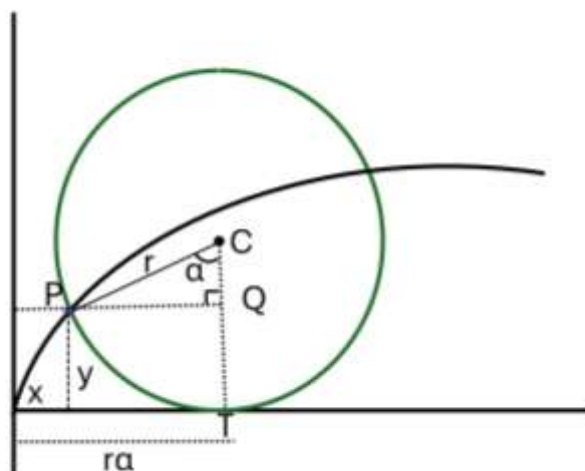


Fonte: Barros (2016, p. 34)

2.1.3 Formas de obtenção da cicloide

Para a dedução das equações paramétricas da cicloide, consideremos um círculo rolando sobre o eixo positivo de x. Considere também que o círculo inicie sua rolagem na origem no plano cartesiano. E por fim, considere um ponto P fixo denominado $P(x,y)$, posicionado na origem dos eixos. Como pode ser visto na Figura 2:

Figura 2 - Rolagem do círculo gerador da cicloide



Fonte: Barros (2016, p. 34)

Chamemos o arco de circunferência PT de S, logo temos que S pode ser expresso como:

$$\alpha = \frac{S}{r}$$

$$S = \alpha r \quad (1)$$

Logo, pela imagem também percebe-se que podemos escrever as coordenadas do ponto P até a origem, podem ser escritas como:

$$QC = r \cos \alpha \quad (2)$$

$$PQ = r \sin \alpha \quad (3)$$

Portanto, as equações paramétricas da cicloide são:

$$P(x) = S - PQ \quad (4)$$

$$P(y) = r - QC \quad (5)$$

Substituindo as equações 2 e 3 nas equações 4 e 5 respectivamente, teremos:

$$P(x) = r(\alpha - \sin \alpha) \quad (6)$$

$$P(y) = r(1 - \cos \alpha) \quad (7)$$

Ou seja, as equações paramétricas da cicloide são dadas por:

$$\begin{cases} x = r(\alpha - \sin \alpha) \\ y = r(1 - \cos \alpha) \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

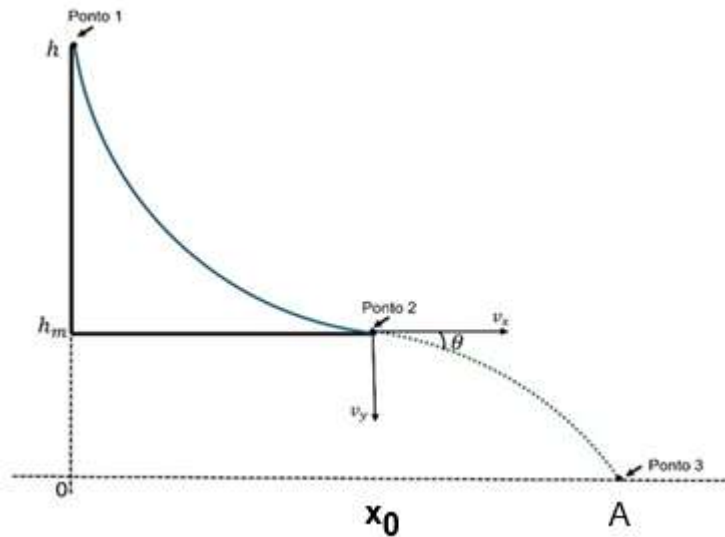
Com isso, quando temos uma variação em α de 0 a 2π , forma-se o primeiro arco da cicloide.

2.2 Dinâmica na rampa e lançamento oblíquo

O lançamento oblíquo está intrinsecamente presente no cotidiano, desde o simples ato de arremessar uma bolinha de papel em um cesto até a observação de uma partida de basquete, em que a trajetória da bola é essencial para a dinâmica do jogo. Além disso, compreender esse fenômeno é de grande importância para áreas da engenharia, pois o movimento oblíquo está diretamente relacionado à balística, ao lançamento de mísseis, ao envio de foguetes e a diversas aplicações tecnológicas fundamentais para a sociedade (Freire et al., 2016).

Diante disso, nesta seção será analisada a trajetória oblíqua da esfera, considerando as variáveis relevantes desde sua saída da rampa (ponto 1 da Figura 3) até o instante em que atinge o solo (ponto 3 da Figura 3). Essa abordagem permite compreender de forma mais completa como o ângulo e a velocidade de saída influenciam o movimento subsequente e, especialmente, o alcance horizontal.

Figura 3 - Trajetória da esfera na rampa evidenciando os pontos que serão calculados a energia mecânica



Fonte: Autoria própria (2025)

A energia mecânica do ponto 1 é dada pela equação 8:

$$E_1 = mgh \quad (8)$$

Porém, na descida da esfera devemos considerar tanto o movimento de translação do centro de massa como o movimento de rotação do resto do corpo. Sabemos que a energia cinética de uma roda que está rolando suavemente é dada pela equação 9:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (9)$$

Em que 'I' é o momento de inércia da esfera em relação ao centro de massa e 'm' é a massa. O momento de inércia de uma esfera é $I = \frac{2}{5}mr^2$, e a velocidade angular é $\omega = v/r$. Substituindo na equação 9, obtém-se a equação 10:

$$K = \frac{7}{10}mv^2 \quad (10)$$

A energia mecânica no ponto 2 é expressa como:

$$E_2 = mgh_m + \frac{7}{10}mv^2 \quad (11)$$

Experimentalmente, a energia mecânica no ponto 2 pode ser menor que do que no ponto 1 em decorrência da dissipação de energia por conta do atrito, deslizamento e da resistência do ar. Dessa forma, vamos definir uma variável f_p , tal que;

$$f_p = \frac{E_2}{E_1} \quad (12)$$

Note que quando f_p é 1, significa que as energias do ponto 1 e 2 são as mesmas. Substituindo as equações 8 e 11 na equação 12, e isolando v , obtém-se a equação 13:

$$v^2 = \frac{10}{7} g (f_p h - h_m) \quad (13)$$

Ao sair da rampa, a esfera realiza um movimento em 2-D sem dissipação de energia. Além disso, ela não alcançará a velocidade terminal com as dimensões e massa utilizada neste trabalho. A esfera irá sair com um ângulo θ , e o alcance da componente horizontal da esfera ao sair da rampa é fornecido pela seguinte equação 15.

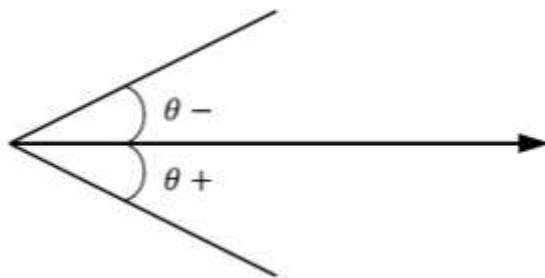
$$A = x_0 + v \cos \theta t_q \quad (14)$$

Em que v é o módulo da velocidade, dada pela equação 13 e t_q é o tempo de queda da esfera. Para obter t_q , usa-se a equação da coordenada vertical da posição versus t considerando a aceleração constante e $y=0$. Assim,

$$0 = h_m - v \sin \theta t_q - \frac{1}{2} g t_q^2 \quad (15)$$

É importante destacar o sinal negativo da velocidade, e que será considerado θ positivo para baixo, como pode ser observado na Figura 4.

Figura 4 - Consideração do ângulo θ



Fonte: Autoria própria (2025)

Resolvendo a equação do 2º grau (equação 15), considerando a parte positiva, obtém-se a equação 16, que corresponde ao tempo de queda.

$$t_q = \frac{-v \sin \theta + \sqrt{v^2 \sin^2 \theta + 2gh_m}}{g} \quad (16)$$

Agora, Substituindo a equação 16 na equação 14, e considerando $x_0 = 0$, obtém-se

$$A = \frac{-v^2 \sin \theta \cos \theta + v \cos \theta \sqrt{v^2 \sin^2 \theta + 2gh_m}}{g} \quad (17)$$

Substituindo a equação 13 na 17, fazendo algumas manipulações obtém-se o alcance com dependência da variável f_p , isto é,

$$A_{CF} = \frac{10}{7}(hf_p - h_m)\cos \theta \left(-\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{2h_m}{\frac{10}{7}(hf_p - h_m)}} \right) \quad (18)$$

Note que quando $f_p = 1$, obtém-se o alcance sem dissipação de energia, neste caso, a equação (18) se reduz para

$$A_{SF} = \frac{10}{7}(h - h_m)\cos \theta \left(-\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{2h_m}{\frac{10}{7}(h - h_m)}} \right) \quad (19)$$

Para a equação da trajetória, considera-se que a partícula no instante t está na posição x e y . O tempo t da partícula, neste caso, $t = x/(v \cos \theta)$, e substituindo na função horária de y , obtém-se:

$$y = h_m - \tan \theta x - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \theta} \quad (20)$$

Substituindo 13 em 20, obtém-se

$$y = h_m - \tan \theta x - \frac{7x^2}{20(f_ph - h_m)\cos^2 \theta} \quad (21)$$

Que é a equação da trajetória dependente de f_p .

2.3 Vídeo Análise e o *Tracker*

2.3.1 Uso da Vídeo-análise no Ensino da Física

Normalmente, os conteúdos vistos nas aulas de física são abordados de forma abstrata, resultando em um alto grau de desinteresse dos estudantes. No sentido de melhorar essa realidade a tecnologia pode ser utilizada como ferramenta para facilitar a compreensão desses conteúdos por meio de simulações, animações e experimentações, tornando-se uma excelente ferramenta no ensino da física (Leitão; Teixeira; Rocha, 2015).

Vale destacar que o uso de tecnologias nestas aulas não garante um bom aprendizado dos alunos, tão pouco, de que haja interesse dos mesmos pela temática, por isto, é importante o uso consciente e didático, para que se consiga tirar o melhor proveito destas ferramentas, como citou D'Ambrosio (2003) *apud* Leitão; Teixeira; Rocha, (2015).

Um importante instrumento tecnológico usado para o ensino da física é a vídeo análise, que consiste no rastreamento de um objeto em movimento. Através de uma sequência de imagens obtidas em tempos sucessivos, pode-se coletar dados numéricos ou gráficos (Bordin; França; Junior, 2022).

Para maior compreensão, trazemos a seguinte citação:

A vídeo-análise para fins educacionais consiste em fazer uma tomada de vídeo de um fenômeno ou experimento e depois executar uma análise minuciosa sobre este vídeo através de ferramentas que relacionem o fenômeno que se quer estudar com grandezas (observáveis) da Física e suas quantificações. Através da análise do vídeo é possível estudar grandezas da Mecânica como posição, velocidade, aceleração e energia de um corpo. (Leitão; Texeira; Rocha, 2015, p. 21)

Assim, vemos o quão importante e relevante é a vídeo análise, pois permite ao docente aproximar conceitos teóricos trabalhados em sala de aula em algo mais concreto, permitindo ao aluno visualizar na prática aquilo que antes era apenas abstrato. Ademais, por se tratar de uma técnica de baixo custo e de fácil manuseio, pode ser empregada em diferentes ambientes educacionais sem necessitar de grandes investimentos.

Por isso, escolhemos trabalhar com a técnica de vídeo análise no presente estudo. Para tanto, utilizamos o aplicativo *Tracker* para estudar e analisar o problema da braquistócrona, com quatro de trajetórias: reta, cicloide parábola e hipérbole.

2.3.2 Software Tracker

O *Tracker* é um importante software gratuito de vídeo análise, sendo mencionado pela primeira vez em 2008, por Doug Brown, no trabalho intitulado “*Vídeo Analysis and Modeling in Physics Education*”. No Brasil o Tracker é tido como referência quando se trata de análise de vídeo, como mostrado por Bordin; França; Junior, (2022):

No contexto brasileiro, em uma pesquisa realizada em dezembro de 2021, no sítio desta RBEF, utilizando os termos de busca “Tracker”, “vídeo-análise”, “videoanálise” e “vídeo análise”, obtém-se 27 artigos, o que evidencia a importância deste programa (o Tracker).

Este software analisa vídeos, quadro a quadro, permitindo o estudo de diversos tipos de movimentos e possibilitando aos alunos acompanharem a evolução das grandezas físicas em tempo real, com a captura, manipulação de dados e a construção de gráficos, fundamental para consolidar o entendimento dos alunos nas aulas práticas. (Bezerra Jr et al., 2012)

Ainda segundo os autores acima citados, uma grande vantagem na utilização deste, é a sua simplificação nos procedimentos em comparação a outros softwares, pois o mesmo elimina automaticamente vários passos intermediários que o usuário é obrigado a realizar nos demais software, por exemplo, o *Tracker* fornece os valores de distância automaticamente a partir de um padrão conhecido, que pode ser uma escala graduada colocada no plano de fundo da filmagem, como também identifica automaticamente a quantidade de FPS (fotos por segundo) do vídeo, permitindo a filmagem em câmeras digitais diversas.

Portanto, é evidente que o uso do *Tracker* é muito promissor. Sua versatilidade possibilita aos professores tornarem as aulas de física mais dinâmicas, despertando um maior interesse dos alunos pelos conteúdos abordados.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Os conteúdos da física e da matemática detêm um certo grau de abstração, dessa forma, a experimentação é tida como uma preciosa ferramenta para facilitar a compreensão Manacorda (2001) *apud* (Batista; Fusinato; Blini, 2009).

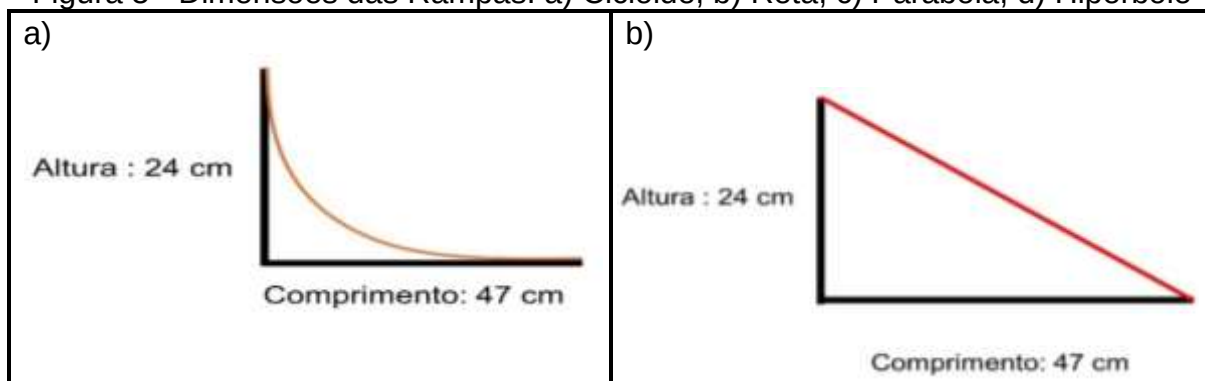
Este trabalho utiliza quatro rampas de geometrias variáveis para analisar o alcance de uma esfera medido de maneira tradicional, com um carbono e papel, e obtido com o Tracker através da técnica de vídeo análise. A partir da evolução temporal das coordenadas x e y, obtém-se algumas variáveis relevantes para análise das trajetórias que a esfera faz ao sair da rampa.

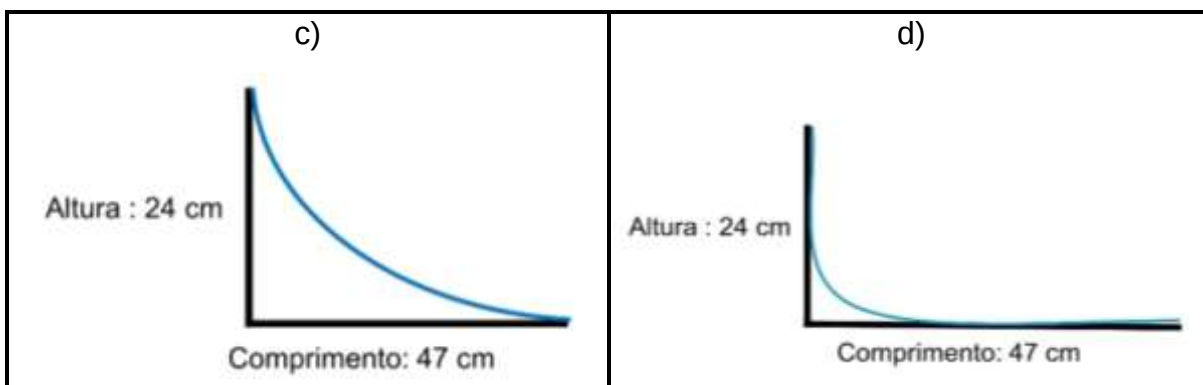
Na próxima subseção será apresentada a metodologia de construção da rampa, e na seguinte, um pequeno tutorial para a gravação e obtenção dos dados com o *Tracker*.

3.1 Construção das rampas

Este trabalho se utiliza de quatro rampas de geometrias distintas, cicloide, reta, parábola e hipérbole. Para a construção das rampas foi escolhido a altura máxima da rampa medida a partir da mesa, e a partir das equações da cicloide (equações 6 e 7), obteve-se o comprimento horizontal. Essas dimensões foram utilizadas nas outras três rampas. Com o auxílio de uma planilha eletrônica foram obtidas as coordenadas da rampa de acordo com a geometria desejada. A altura máxima foi de 24 cm, e o comprimento, 47 cm. As figuras 5, 6, 7 e 8 mostram para cada tipo de rampas utilizadas as curvas na etapa de planejamento.

Figura 5 - Dimensões das Rampas: a) Cicloide; b) Reta; c) Parábola; d) Hipérbole





Fonte: Autoria própria (2025)

Para a montagem das rampas, foram utilizados materiais de baixo custo ou provenientes de reciclagem. A estrutura base do experimento foi composta por uma placa de madeira com dimensões de 74×63 cm, acompanhada de um suporte adicional também em madeira, medindo 24×41 cm, destinado a sustentar os diferentes perfis de rampa. A construção das rampas propriamente ditas foi realizada utilizando MDF.

Na etapa de fabricação, empregaram-se ferramentas simples e acessíveis, tais como régua, lápis, serra, martelo, pregos, cola instantânea e lixa para acabamento. Esses materiais permitiram a confecção de rampas mantendo o custo total reduzido e reforçando o caráter acessível da proposta.

Figura 6 - Ilustração dos materiais utilizados



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

Figura 7 - Ilustração das etapas de construção das rampas



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

Figura 8 - Ilustração das etapas de construção das rampas



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

Figura 9 - Vista lateral do aparato experimental finalizado com os quatro tipos de rampas



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

Figura 10 - Vista frontal do mesmo aparato da figura anterior



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

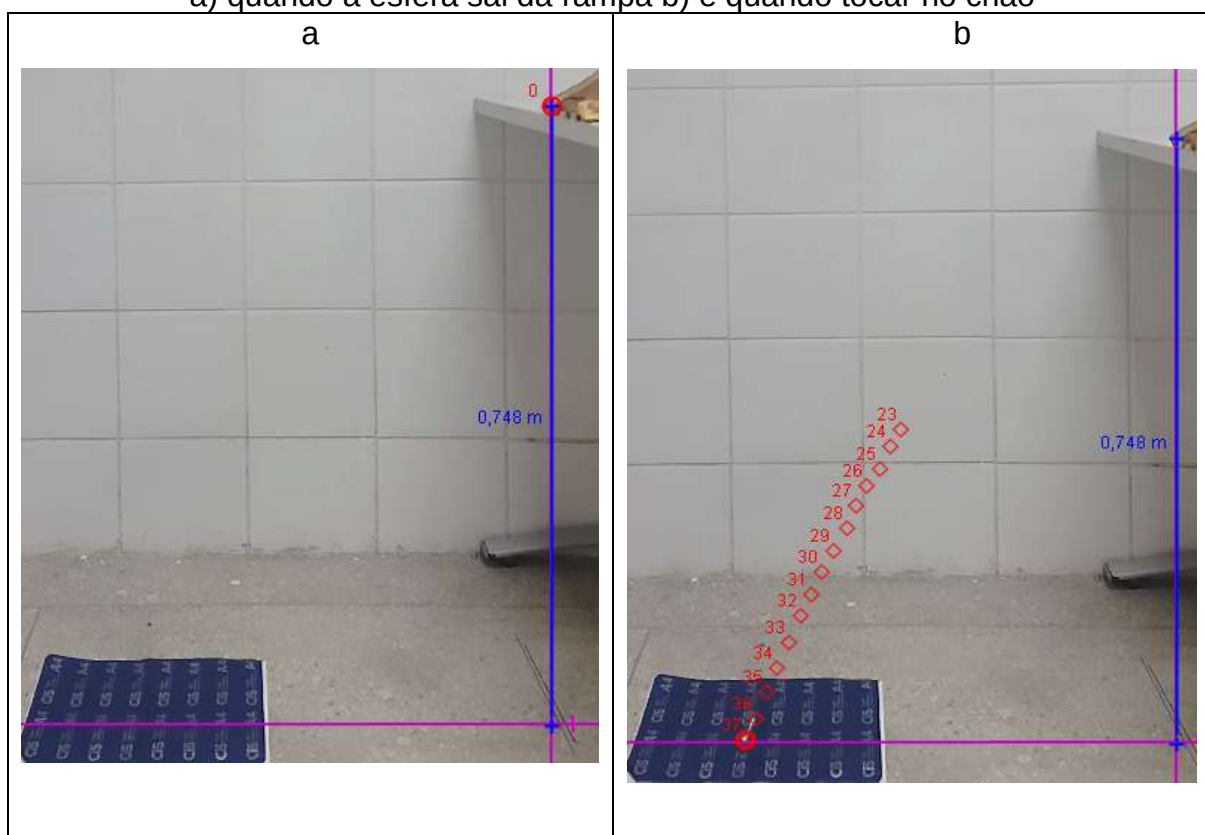
cada rampa foi construída com 47 cm entre os pontos de lançamento e de chegada das esferas.

3.2 Obtenção de dados com o tracker

Neste trabalho, utilizamos o software *Tracker* para obter as coordenadas x e y da esfera no instante em que ela deixa a rampa. Como o movimento ocorre de forma muito rápida em vídeos gravados em velocidade normal, os experimentos foram registrados em câmera lenta, permitindo uma análise mais precisa quadro a quadro e, conseqüentemente, uma melhor extração dos dados experimentais. Para a obtenção do tempo real, o tempo fornecido pelo *Tracker* foi dividido por 4. Além disso, foi necessária a utilização de uma medida conhecida para a calibração espacial do vídeo, sendo adotada a altura da mesa na região onde a esfera deixa a rampa.

Para iniciar a obtenção de dados com o software é necessário primeiro importar o vídeo, após o carregamento escolhe-se a origem do eixo. No experimento deste trabalho, foi escolhido o primeiro ponto como sendo a altura que a esfera sai da rampa como pode ser visto na figura 14 a) e b). O eixo está na cor rosa e o “bastão de calibração”, na cor azul. Já as coordenadas obtidas quando o usuário digita o valor da medida na unidade física correta. Essa função está disponível nos botões de acesso rápido, ou na aba Trajetória → Novo → Ferramentas de Calibração → Bastão de Calibração.

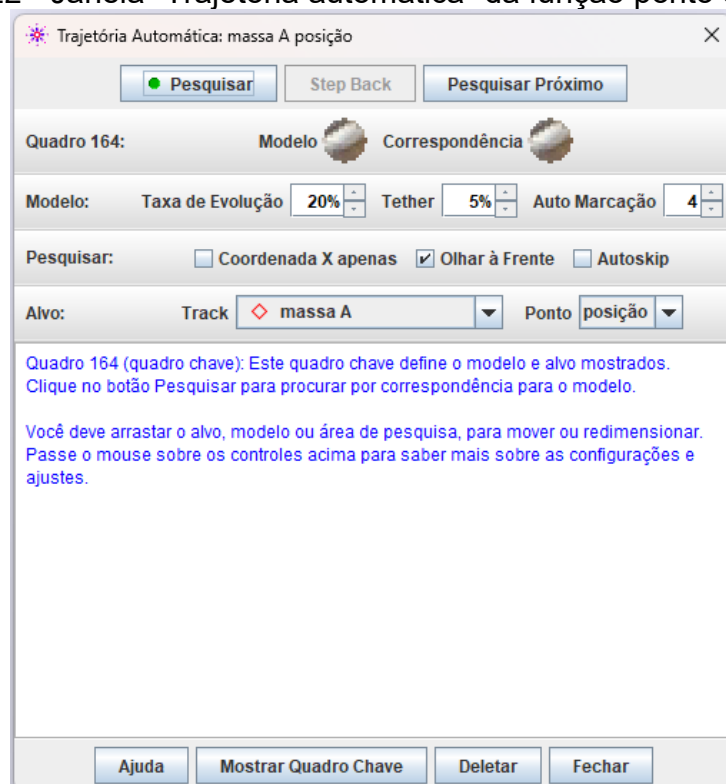
Figura 11 - Ilustração da área de trabalho do Tracker
a) quando a esfera sai da rampa b) e quando tocar no chão



Fonte: Autoria própria (2025)

As coordenadas da esfera são obtidas com a função “ponto de massa”. Essa função está disponível nos botões de acesso rápido, ou na aba Trajetória → Novo → Ponto de Massa. Com a janela “Trajetória Automática”, conforme mostrado na figura 15, o usuário clica em cima da trajetória da esfera com os botões: “SHIFT+CTRL+CLIQUE”. Após esse passo, aparecerá um modelo, e dependendo da resolução, os pontos podem ser obtidos de maneira automática. Quando o modelo não ficar bom, recomenda-se obter os dados de maneira manual, ou fazer um novo modelo para obter de maneira automática.

Figura 12 - Janela “Trajetória automática” da função ponto de massa

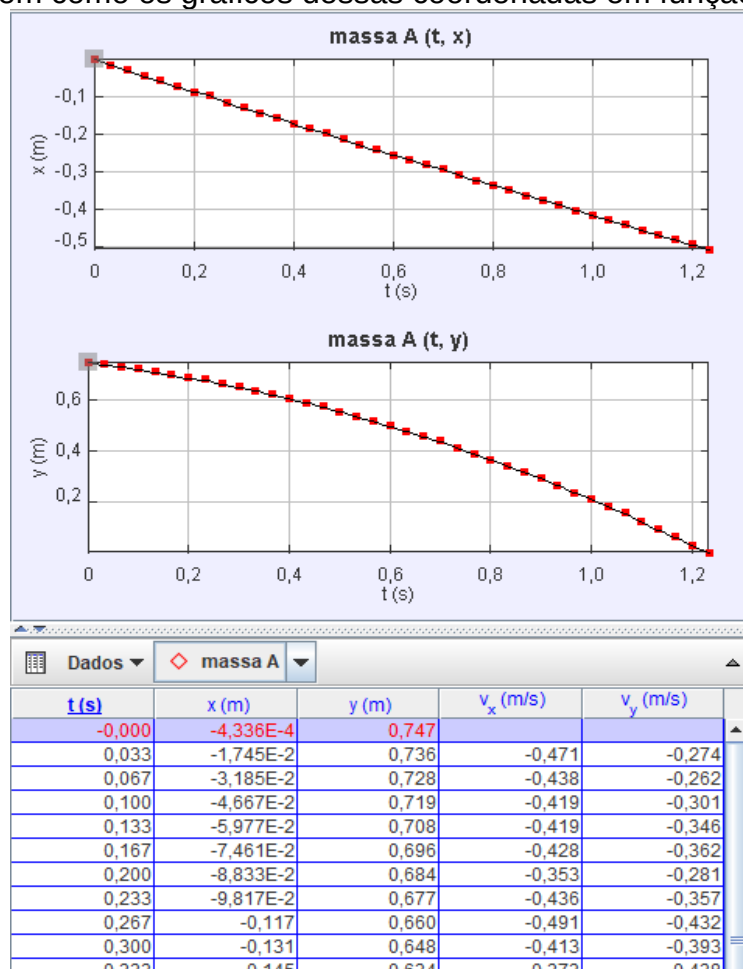


Fonte: Autoria própria (2025)

Na lateral direita, aparece uma janela onde é possível ver as coordenadas e as variáveis obtidas, como pode ser visto na figura 16. Além disso, pode visualizado gráficos entre outras variáveis relevantes para uma análise rápida.

O *Tracker* tem uma ferramenta de análise disponível na aba “Janela” “Ferramentas de Dados”. Caso o usuário queira fazer a análise de dados em outro software, por exemplo, numa planilha eletrônica, na parte referente aos dados, escolhe-se o separador dos dados, recomenda-se, “ESPAÇO” (figura 17 a)), e depois seleciona todos os dados e copia os dados com “PRECISÃO TOTAL” (figura 17 b)). Em particular no Excel da Microsoft, em colar, escolha “Usar assistente de importação de texto”, é a melhor forma de obter os dados formatado. Outra opção é procurar a aba Arquivo → Exportar → Arquivo de dados, para obter o arquivo com os dados.

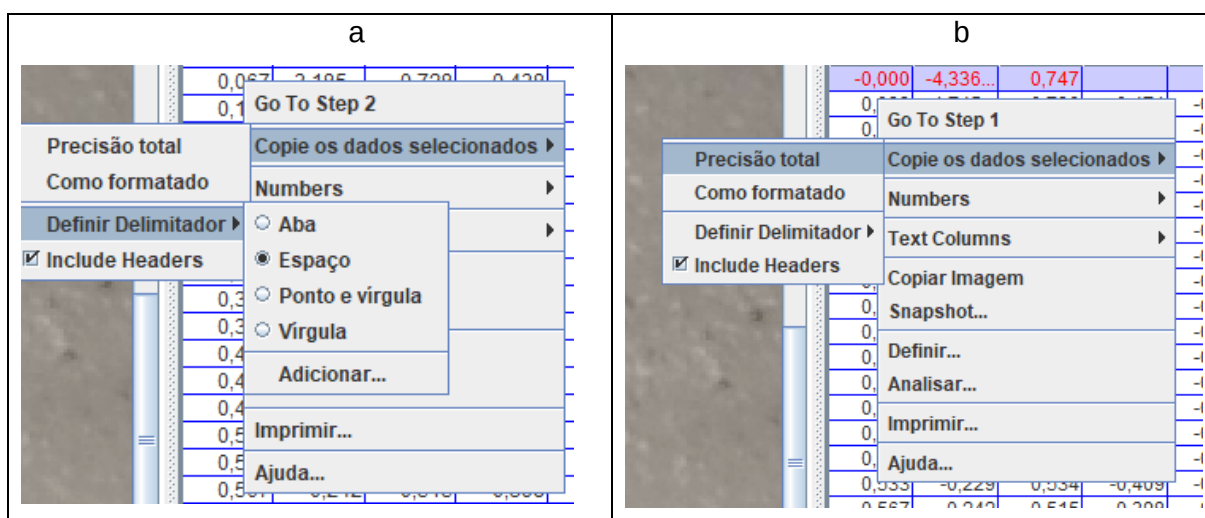
Figura 13 - Janela lateral direita onde o usuário pode visualizar as coordenadas obtidas, bem como os gráficos dessas coordenadas em função do tempo.



Fonte: Autoria própria (2025)

Figura 14 - Janela auxiliares com os passos para copiar os dados.

a) Definir delimitador, e b) Copiar os dados com precisão total.



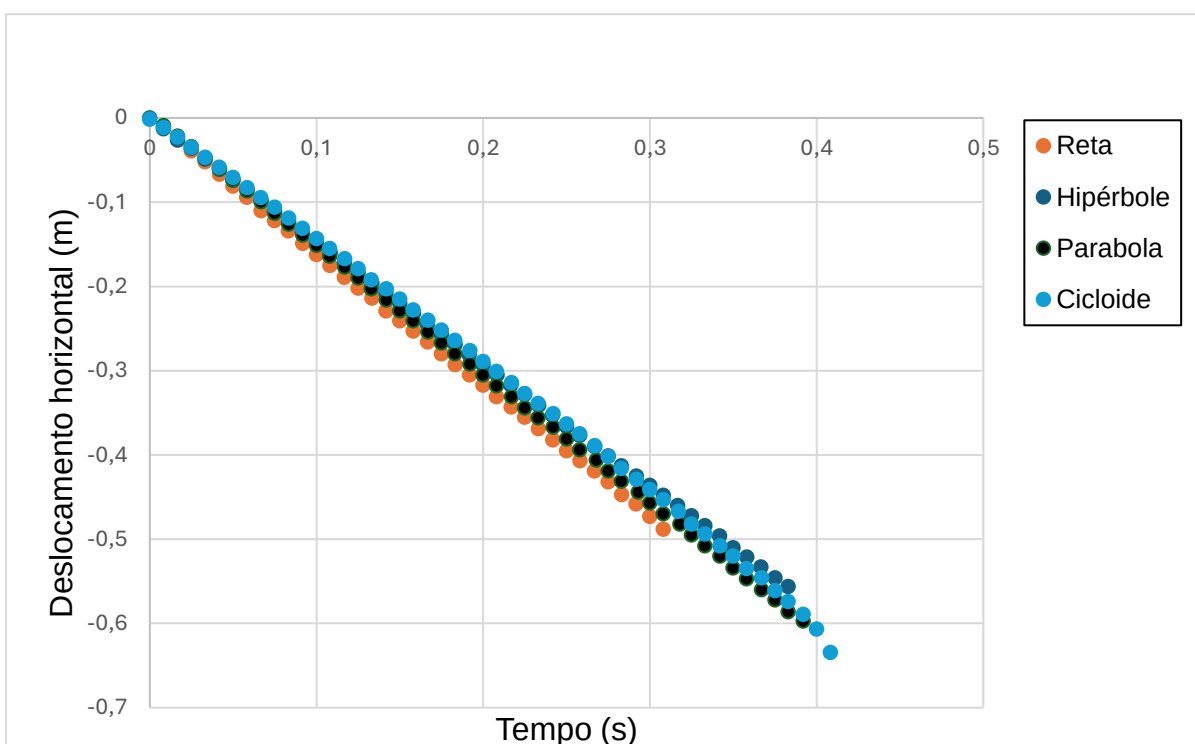
Fonte: Autoria própria (2025)

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Parâmetros cinéticos do movimento oblíquo

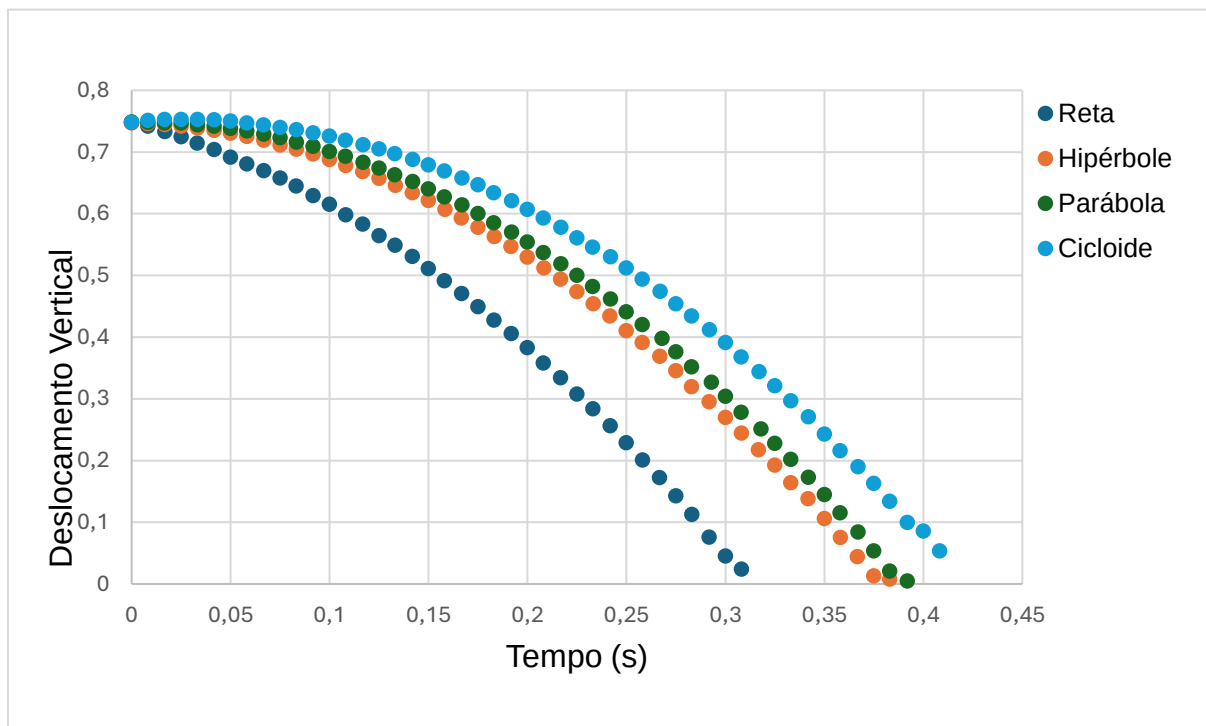
Nesta seção serão apresentados o alcance e os parâmetros cinéticos obtidos através da trajetória e da evolução temporal das coordenadas x e y com os dados obtidos com o *Tracker*. A figura 18 mostra a evolução temporal de x , e na figura 19, a evolução temporal de y . Para a construção dos dados foram feitas médias das coordenadas no mesmo instante de tempo t das quatro curvas analisadas

Figura 15 - Deslocamento horizontal (x) em função do tempo para as quatro rampas



Fonte: Autoria própria (2025)

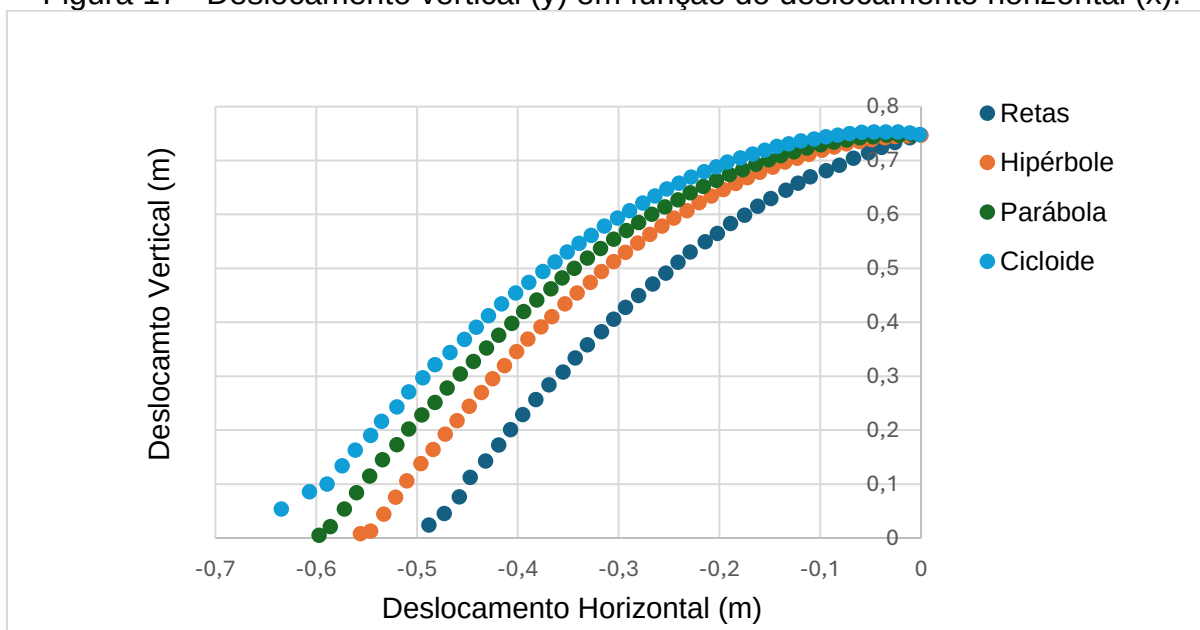
Figura 16 - Deslocamento vertical (y) em função do tempo para os quatro tipos rampas



Fonte: Autoria própria (2025)

Comparando os dados com a previsão teórica, equação 14, e fazendo uma regressão linear de x versus t , obtém-se o valor da componente da velocidade horizontal ao sair da rampa, v_{0x} , e seu respectivo erro padrão. De maneira similar comparando os dados com a previsão teórica, equação 15, e fazendo uma regressão quadrática de y versus t , obtém-se y_0 , v_{0y} e g , e seus respectivos erros padrões. Além disso, ao resolver a equação obtida com a regressão, obtém-se o tempo de queda, t_q . Usando o valor de t_q e v_{0x} , obtém-se a estimativa do alcance A_{TR} obtido com o *Tracker*.

Figura 17 - Deslocamento vertical (y) em função do deslocamento horizontal (x).



Fonte: Autoria própria (2025)

A Figura 20 mostra as trajetórias que a esfera faz ao sair dos diferentes tipos de rampas. Comparando os dados da equação 20, e fazendo uma regressão quadrática, obtém-se a $\tan\theta$ e seu respectivo erro padrão. A partir do valor da tangente, obtém-se o ângulo de saída θ e seu respectivo erro padrão.

A Tabela 1 resume os dados obtidos com a regressão a partir dos dados das figuras 15, 16 e 17.

Tabela 1 - Dados obtidos a partir da regressão dos dados das figuras 15, 16 e 17

	Reta	Hipérbole	Parábola	Cicloide
$\bar{t}_q(s)$	0,312	0,378	0,416	0,3891
$\Delta\bar{t}_q(s)$	0,004	0,002	0,005	0,0006
$\overline{A_{TR}}(cm)$	-49	-55,1	-59,4	-62
$\Delta\overline{A_{TR}}(cm)$	1	0,4	0,4	2
$\overline{y_0}(cm)$	74,8	74,8	74,9	74,8
$\Delta\overline{y_0}(cm)$	0,2	0,1	0,3	0,2
$\overline{v_{0x}}(cm)$	-1,58	-1,452	1,533	1,49
$\Delta\overline{v_{0x}}(cm)$	0,01	0,002	0,001	0,01
$\overline{v_{0y}}(cm)$	-0,81	-0,1	0,02	0,28
$\Delta\overline{v_{0y}}(cm)$	0,04	0,01	0,03	0,03
$\overline{v_0}(cm)$	1,78	1,455	1,533	1,52
$\Delta\overline{v_0}(cm)$	0,02	0,002	0,001	0,01
$\bar{\theta}(graus)$	24	3	-1	-4
$\Delta\bar{\theta}(graus)$	2	1	1	1
$\bar{g}(m/s^2)$	10,2	9,89	10	9,8
$\Delta\bar{g}(m/s^2)$	0,3	0,06	0,2	0,1

Fonte: Autoria própria (2025)

Como pode ser visto na tabela 1 a diferença do alcance horizontal observado na Figura 16, está diretamente ligado a variação da velocidade de saída (v_0) do ângulo de saída (θ) de cada rampa, e consequentemente do t_q . O ângulo θ influencia define a direção do vetor velocidade no ponto de transição entre a rampa e o movimento oblíquo, sendo, portanto, fundamental para a análise do alcance da esfera.

Note que a reta, geometria associada ao maior ângulo de saída, apresentou o menor alcance, indicando uma relação inversamente proporcional entre o ângulo de lançamento e a distância percorrida. Outra observação é que os valores de y_0 nos quatro ajustes coincidiram com o valor medido. Era esperado que o alcance da cicloide fosse mais longa, porém ao gravar os lançamentos foi observado que vídeo não pegou a esfera batendo no carbono, como pode ser visto na Figura 18, influenciando nos resultados.

Figura 18 - Trajetória da Cicloide em que não aparece a esfera tocando o solo



Fonte: Autoria própria (2025)

4.2 Alcance usando papel e carbono

O experimento foi realizado de maneira tradicional usando carbono e papel. O conjunto de medições visa não apenas a determinação precisa das posições finais da esfera, mas, fundamentalmente, o estabelecimento de uma base estatística robusta que viabilize a comparação quantitativa entre os resultados teóricos e os valores obtidos. Esse tratamento experimental é essencial para determinar de que forma a geometria e a inclinação de cada rampa influenciam diretamente o alcance máximo horizontal e o tempo de descida da esfera até tocar o solo. A Tabela 2 - Lançamentos para os quatro tipos de rampas utilizando a esfera de vidro reúne os valores registrados das coordenadas que a esfera tocou no chão para os quatro tipos de rampas analisadas: reta, hipérbole, parábola e cicloide. Para cada geometria de rampa foram feitos 15 lançamentos, e os cinco primeiros lançamentos foram especificamente gravados e submetidos à vídeo-análise utilizando o software *Tracker*. Para cada lançamento, foram obtidas as posições da componente X e da componente Y ao longo da trajetória, permitindo comparar o comportamento da esfera em diferentes perfis geométricos e avaliar como cada curva influencia a dinâmica do movimento da esfera.

Tabela 2 - Lançamentos para os quatro tipos de rampas utilizando a esfera de vidro

Lançamentos	Reta		Hipérbole		Parábola		Cicloide	
	x(cm)	y(cm)	x(cm)	y(cm)	x(cm)	y(cm)	x(cm)	y(cm)
1	47	2	58	1	58,5	1,7	66,3	2,1
2	47,9	1,3	57,7	1,9	60,8	1,6	66,7	1,9
3	51,5	2	56,3	1	61,1	2,3	63,9	1,9
4	48,5	1,1	57	2,5	61,3	2,9	65,1	1,5
5	50	1	57,8	1	62,5	1,5	68,4	2,8
6	51,9	1,5	54	1,6	60,3	1,3	65,7	1,9
7	52,3	1,8	58,6	3	59,4	1	59	1
8	52,7	0,7	56,2	0,7	60	1	61,1	0,9
9	52,5	2,2	56,4	2,3	61,1	2,3	66,7	2,2
10	53,7	2,5	55,9	2	61,5	2,1	66,8	2,8
11	54,3	2	54,9	1,7	61,6	1,9	67,4	2,6
12	54,8	4,5	56,7	3,1	61,8	2	68,3	2,6
13	56	2	58,7	1,3	61,8	1,1	65,6	1,5
14	52,5	1,8	59,3	1,4	62,1	1,3	69,3	1,8
15	52,9	1	56,5	1,9	61	2,6		

Fonte: Autoria própria (2025)

Os resultados experimentais, descritos na Tabela 2, detalham as coordenadas de impacto X (horizontal) e Y (vertical) obtidas a partir de 15 lançamentos para cada uma das quatro geometrias de rampas analisadas.

Este conjunto de medições visa não apenas a determinação precisa das posições finais da esfera, mas, fundamentalmente, o estabelecimento de uma base estatística robusta que viabilize a comparação quantitativa entre os resultados teóricos e os valores práticos obtidos. Esse tratamento é essencial para determinar de que forma a geometria e a inclinação de cada rampa influenciam diretamente o alcance máximo horizontal e o tempo de descida da esfera até tocar o solo.

A Tabela 3 apresenta a média dos alcances experimentais, A_E , o erro padrão e o alcance obtido com o Tracker mostrado na seção anterior, para efeito de comparação.

Tabela 3 - Estatística do alcance dos dados da Tabela 2 e o alcance obtido com o *Tracker*, apresentado na seção anterior.

	Reta	Hipérbole	Parábola	Cicloide
$\overline{A_E}(\text{cm})$	51,9	56,9	61	65,7
$\Delta\overline{A_E}(\text{cm})$	0,7	0,4	0,3	0,8
Intervalo de confiança (95%)	1,5	0,9	0,6	1,7
$\overline{A_{TR}}(\text{cm})$	49	55,1	59,4	62
$\Delta\overline{A_{TR}}(\text{cm})$	1	0,4	0,4	2

Fonte: Autoria própria (2025)

A partir dos dados da Tabela 3, verifica-se que apesar de A_{TR} não estarem no intervalo de confiança dos A_E , os dados estão próximos, com exceção da Cicloide, como já explicado anteriormente.

4.3 Fator de perda

Durante os lançamentos observou-se uma grande discrepância entre o alcance teórico e o alcance experimental. Essa diferença foi esclarecida por meio da análise realizada no *Tracker*, que evidenciou a existência de um fator de perda de energia ao longo da descida da esfera. Usando parte dos dados da Tabela 1 e Tabela 4 na equação 19, obtém-se os valores da Tabela 5.

Tabela 4 - Altura máxima (h), altura da rampa (h_r) e altura da mesa (h_m).

Parâmetros da rampa	
$h(\text{cm})$	98,8
$h_r(\text{cm})$	24
$h_m(\text{cm})$	74,8

Fonte: Autoria própria (2025)

Tabela 5 - Alcances obtidos através da teoria (A_{SF}), com o *Tracker* (A_{TR}), e experimental (A_E).

	Reta	Hipérbole	Parábola	Cicloide
$A_{SF}(s)$	53,9	69,7	72,2	73,9
$\overline{A_{TR}}(cm)$	49	55,1	59,4	62
$\overline{A_E}(cm)$	51,9	56,9	61	65,7

Fonte: Autoria própria (2025)

Na Tabela 5, nota-se uma discrepância entre os valores da hipérbole, parábola e cicloide. Uma explicação é que as curvas podem possuir um ângulo maior que o crítico, e a esfera pode ter sofrido um deslizamento, fazendo com que a energia fosse dissipada.

Analisando as energias no início da rampa e no final com os dados da velocidade obtidas através da regressão e dos dados obtidos com o Tracker, obtém-se o f_p , como pode ser visto na Tabela 6.

Tabela 6 - Fator de perda obtidos com auxílio dos dados da Tabela 1

	Reta	Hipérbole	Parábola	Cicloide
$\overline{f_p}$	0,988	0,913	0,93	0,927
$\Delta \overline{f_p}$	0,005	0,004	0,002	0,005

Fonte: Autoria própria (2025)

Esse fator explica a redução do alcance real em comparação ao previsto teoricamente, e a identificação desse fator é de grande importância para a compreensão dos resultados obtidos neste trabalho, como pode ser visto na tabela 7.

Tabela 7 - Resumo os alcances obtidos para o alcance teórico (A_{SF}), com o *Tracker* (A_{TR}), e experimental (A_E)

	Reta	Hipérbole	Parábola	Cicloide
$A_{SF}(s)$	53,9	69,7	72,2	73,9
$A_{CF}(s)$	52,8	56,2	60,8	61,4
$\overline{A_{TR}}(cm)$	49	55,1	59,4	62
$\overline{A_E}(cm)$	51,9	56,9	61	65,7

Fonte: Autoria própria (2025)

A partir dos dados apresentados na Tabela 3, observa-se que ao adicionar o fator de perda ao alcance teórico dado pela equação 19, ocorreu uma melhora significativa na correspondência entre os valores obtidos, principalmente na hipérbole e parábola. Entretanto, para a cicloide, mesmo após a inclusão desse fator, os valores ainda se mantiveram distantes em relação aos demais, que já era esperado, como foi comentado antes.

Sem o conhecimento dessa perda de energia, a comparação direta entre valores teóricos e experimentais poderia levar a interpretações equivocadas ou até mesmo à suspeita de erros de montagem. Ao quantificar essa perda, torna-se possível ajustar os modelos teóricos, corrigir previsões e avaliar de maneira mais realista o comportamento da esfera. Além disso, esse resultado reforça a necessidade de considerar efeitos não ideais nos experimentos, aproximando a análise teórica do que efetivamente ocorre no mundo físico.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo desenvolvido permitiu analisar, de forma quantitativa e comparativa, o comportamento dinâmico de uma esfera lançada a partir de quatro geometrias distintas de rampa. Inspirado no experimento que mede o alcance de uma esfera que sai de uma rampa, com ângulo muito pequeno, e analisa os efeitos do rolamento, a pergunta que este trabalho buscou responder é como a forma da rampa e o ângulo de saída influenciam o alcance da esfera.

Usando a abordagem tradicional de medir o alcance medido com carbono e papel, e as tecnologias, através da técnica de vídeo análise foram obtidos parâmetros relevantes que auxiliou a discussão desse trabalho.

Os resultados mostraram que rampas com menores ângulos de lançamento, como a cicloide e a hipérbole, geraram maiores alcances horizontais, enquanto rampas com ângulos mais elevados, como a reta, resultam nos menores deslocamentos e tempo de quedas. Assim, ficou evidente que o ângulo de saída exerce papel decisivo no alcance final, complementando a influência direta da geometria na distribuição da energia cinética da esfera.

Outro ponto essencial evidenciado pelo experimento foi a presença de um fator de perda de energia ao longo da trajetória da esfera. A incorporação desse fator, obtido com o auxílio dos dados da regressão, nos cálculos teóricos permitiu corrigir de maneira satisfatória a discrepância inicialmente observada entre os valores previstos e os resultados experimentais. Esse ajuste mostrou-se particularmente eficaz principalmente as rampas hipérbole e parábola, cujos valores corrigidos apresentaram forte concordância com o comportamento real da esfera.

No caso específico da cicloide, as diferenças entre o alcance experimental e o alcance teórico corrigido permaneceram mais acentuadas. Contudo, essa discrepância não decorre do modelo aplicado, mas sim de limitações no registro do experimento: a câmera não captou o instante exato em que a esfera tocou o solo, o que comprometeu a precisão da vídeo-análise. Dessa forma, os valores apresentados para a cicloide devem ser interpretados como aproximações consistentes, considerando as restrições instrumentais identificadas.

De modo geral, os resultados mostraram que tanto a geometria da rampa quanto o ângulo de saída influenciam de forma decisiva a trajetória, a velocidade e o alcance horizontal da esfera. Apesar dos avanços alcançados, o estudo apresenta

como principal lacuna a limitação na captura dos registros experimentais, sobretudo nas situações em que o instante de impacto da esfera com o solo não pôde ser registrado com a precisão necessária, como ocorreu na rampa cicloidal. Diante disso, trabalhos futuros podem empregar sistemas de captura de movimento com maior taxa de quadros, sensores embarcados na própria esfera para medir aceleração em tempo real e modelos que considerem efeitos adicionais, como atrito variável, rugosidade da superfície.

Por fim, conclui-se que os objetivos propostos foram plenamente alcançados. O trabalho permitiu compreender, com clareza, o efeito da forma da rampa sobre o movimento da esfera, validar experimentalmente os modelos teóricos, após a devida correção pelas perdas energéticas, e reconhecer as limitações inerentes ao processo de coleta de dados. Os resultados apresentados servem como base sólida para investigações futuras envolvendo movimentos em pistas curvas, análise energética e modelagem avançada de sistemas dinâmicos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, José R. de; PASSOS, Célia M. C.; SILVA, Flávio A. da. A utilização da experimentação no ensino de Física: contribuições para uma aprendizagem significativa. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 32, n. 2, p. 1–10, 2010.

BARROS, Fernando Antônio. **Introdução ao estudo do cálculo variacional e da curva cicloide**. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, 2016. Tese de especialização em Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/33331/1/Monografia_FernandoABarros.pdf. Acesso em: 11 jul. 2025.

BUSTILLOS, Oscar Vega; SASSINE, André. **A magia da curva cicloide: braquistócrona e tautócrona**. São Paulo: Scortecci, 2009. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/341218708>. Acesso em: 11 jul. 2025.

DEMO, P. **Educar pela pesquisa**. 17. ed. Campinas: Autores Associados, 2011.

FILGUEIRAS, Luiz; VIEIRA, Carlos. A cicloide na engenharia e no cotidiano. **Revista Ciência & Ensino**, v. 14, n. 1, p. 85–90, 2018.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física - Mecânica** - Volume 1 . 12. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2023. *E-book*. pág.66. ISBN 9788521638551. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788521638551/>. Acesso em: 02 dez. 2025.

LEITAO, Lúcia Irala; TEIXEIRA, Pedro Fernando Dorneles; ROCHA, Fábio Saraiva da. A vídeo-análise como recurso voltado ao ensino de física experimental: um exemplo de aplicação na mecânica. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, v. 6, n. 1, p. 19–32, 26 out. 2015.

MAIA, C. H. G. **O problema da braquistócrona e o surgimento do cálculo variacional**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

PEDROSO, Hermes Antônio; PEREIRA, Juliana C. Precioso. **Um pouco da história da cicloide: a curva que desafia a intuição**. SEMANA DA MATEMÁTICA – XXV SEMAT, 2013, São José do Rio Preto: IBILCE-UNESP. Disponível em: <https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/xxvsemat-semanadamatematica/hermes.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2025.

RESNICK, Robert; HALLIDAY, David; KRANE, Kenneth. **Física**. 4. ed. São Paulo: LTC, 1996. v. 1.

RAMALHO, Fernando G.; FERRARO, José; PINTO COELHO, Suely. **Física: conceito e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2000.

SANTOS, Valnei Batista. **Explorando a curva braquistócrona como instrumento didático na resolução de problemas com funções matemáticas**. Tese de Mestrado. Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, Juazeiro - BA, 2023. Disponível em: https://portais.univasf.edu.br/profmat/valnei_batista_dos_santos.pdf. Acesso em: 11 jul. 2025.

TAGLIOLATTO, A. L. S. **Braquistócrona**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2015.

VAZ, Silvio F.; PINTO, Márcia S. Ensino de física com experimentos de baixo custo: uma alternativa para escolas sem laboratórios. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 23, n. 2, p. 239–257, 2006