



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE ANGICOS
CURSO BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

MÁRCIO DOS SANTOS DANTAS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E CIRCUITOS ELÉTRICOS RLC EM SÉRIE

ANGICOS-RN

2021

MÁRCIO DOS SANTOS DANTAS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E CIRCUITOS ELÉTRICOS RLC EM SÉRIE

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Tony Kleverson Nogueira

ANGICOS-RN

2021

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

D192e Dantas, Márcio dos Santos.
Equações diferenciais e circuitos eletrônicos
RLC em série / Márcio dos Santos Dantas. – 2021.
58 f. : il.

Orientador: Tony Kleverison Nogueira .
Monografia (graduação) – Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2021.

1. Equações diferenciais lineares de segunda
ordem. 2. Transformada de Laplace. 3. Circuito
elétrico RLC em série. I. , Tony Kleverison
Nogueira , orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Angicos
Bibliotecário: Helder Romero Maia Duarte
CRB: 15/673

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

MÁRCIO DOS SANTOS DANTAS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E CIRCUITOS ELÉTRICOS RLC EM SÉRIE

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 01/06/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr Tony Kleverson Nogueira (UFERSA)
Orientador

Prof. Dra Mariana de Brito Maia (UFERSA)

Prof. Me Jackney Luan de Sousa Azevedo (UFERSA)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, nosso Pai Celestial, por ter me dado a obstinação necessária para que eu pudesse chegar até aqui, por ser onipresente em toda a minha caminhada e por sempre ter ouvido minhas preces.

Agradeço a meus pais Francisco de Assis (*in memoriam*) e Maria de Lourdes por todo o apoio e suporte e por terem sido meus baluartes primordiais da minha vida. Por terem me ensinado os exemplos de retidão, moral e ética, que são até hoje minhas guias pela busca da fraternidade humana e amor ao próximo. Obrigado por tudo, amarei vocês eternamente.

Agradeço aos meus familiares especialmente a minha avó Maria José e minha tia Julita Dantas por toda ajuda me dado, paciência e conselhos em toda a minha trajetória. Obrigado, eu amo vocês.

Agradeço a minha namorada Jackeline Nascimento que sempre me apoia e me incentiva em todos os momentos, para mim, você é uma referência de determinação e da busca incessante pelos seus sonhos. Obrigado, eu amo você, você estará sempre presente em meu coração, amo você.

Agradeço a todos os meus amigos que fiz no decorrer da minha vida acadêmica, até aqui, e a todos os meus outros amigos que sempre estiveram comigo em todos os meus momentos me incentivando, apoiando e me ajudando quando eu precisava. Espero ter todos pertos de mim até o fim. Amo todos vocês de coração

Agradeço a Augusta e Benfeitora Universidade Federal Rural do Semi-Árido por todas as oportunidades a mim concedidas e pela sua contribuição à minha vida acadêmica através do ensino. E por fim, quero agradecer ao meu orientador prof. Tony Nogueira por ter aceitado me orientar para que fosse possível a realização deste trabalho, pela paciência dedicada e pelo conhecimento repassado através da arte sagrada de lecionar.

“Eu aprendi muito mais com os meus erros do que com meus acertos.”

Thomas Edison

Resumo

O presente trabalho tem como o principal objetivo a aplicação e comparação dos métodos de resolução de equações diferenciais de segunda ordem, em problemas de circuitos elétricos RLC em série. O trabalho a seguir é de caráter bibliográfico. Foram utilizados como fonte de pesquisa as bibliografias usadas no curso de Equações Diferenciais e alguns trabalhos de conclusões de curso de alguns autores, como complementação. Antes da abordagem do tema principal foi feito uma revisão dos conceitos introdutórios e pré-requisitos sobre o tema do estudo. Este trabalho tem como motivação a criação de conteúdo sobre o tema de muita importância na área da Engenharia e que sirva de material para estudos.

Palavras-Chave: Equações diferenciais lineares de segunda ordem. Transformada de Laplace. Circuitos elétrico RLC em série.

Abstract

The main objective of the present work is the application and comparison of methods for solving second order differential equations in series RLC electrical circuit problems. The work below is bibliographical in nature. Bibliographies used in the Differential Equations course and some course works by some authors were used as a source of research, as a complement. Before approaching the main topic, a review of the introductory concepts and prerequisites on the study topic is carried out. This work is motivated by the creation of content on the topic of great importance in the field of Engineering and which serves as material for studies.

Keywords: Second order linear differential equations. Laplace transforms. Serial RLC electrical circuits.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Algumas soluções particulares.....	28
Tabela 2: Transformadas de algumas funções básicas	40
Tabela 3: Algumas transformadas inversas	43

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Circuito RLC.	45
-------------------------------------	----

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
2. TEOREMAS E MÉTODOS MATEMÁTICOS	16
2.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	16
2.1.1. Classificação de equações diferenciais.....	16
2.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM	18
2.2.1. Equações lineares.....	18
2.2.2. Equações homogêneas.....	20
2.3. EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES	23
2.3.1. Equação auxiliar (ou característica)	23
2.2.2 Caso i: raízes reais distintas	24
2.2.3 Caso ii: raízes reais iguais	24
2.2.4 Caso iii: raízes complexas conjugadas	25
2.4. COEFICIENTES INDETERMINADOS – ABORDAGEM POR SUPERPOSIÇÃO.....	27
2.5. VARIAÇÃO DE PARÂMETROS.....	30
2.6. A TRANSFORMADA DE LAPLACE	34
2.6.1. Definição básica.....	35
2.6.2. Propriedades da transformada de laplace.....	36
2.6.3. Transformada de laplace inversa	40
2.6.4. Propriedades das transformadas inversas de laplace.....	41
3. MODELAGEM DE CIRCUITOS RLC	45
3.1. EXEMPLOS DOS MÉTODOS DE EDO DE SEGUNDA ORDEM NA APLICAÇÃO DE CIRCUITOS RLC	46
Exemplo 3.1:	46
Exemplo 3.2:	48

Exemplo 3.3:	51
Exemplo 3.4:	54
4. CONCLUSÃO.....	57
5. BIBLIOGRAFIA.....	58

1. INTRODUÇÃO

O surgimento dos estudos das equações diferenciais e suas técnicas datam do período do aparecimento do Cálculo Diferencial e Integral, por volta do século XVII, envolvendo grandes personalidades históricas e científicas como Issac Newton, Gottfried Leibniz, dentre outros. Embora as primeiras aplicações tenham sido no campo da física, com o passar do tempo, as equações diferenciais vêm sendo aplicadas em inúmeros problemas nas mais variadas áreas da ciência. Em particular, as equações diferenciais de 2º ordem são usadas para resolver inúmeros fenômenos matemáticos, físicos e de engenharia. Na engenharia elétrica, essas equações têm importância significativa para resolver problemas de circuitos RLC em série.

A modelagem matemática do circuito RLC além de importante para os estudos matemáticos, voltam aparecer nos estudos de circuitos elétricos sendo base para toda a graduação na área elétrica.

As aplicações de equações diferenciais lineares são extremamente importantes para a resolução de circuitos elétricos, que tenham armazenadores de energia (como um capacitor “C” ou um indutor “L”) e um elemento dissipador de energia (resistor “R”).

Os circuitos lineares com elementos armazenadores de energia, as equações representativas que relacionam a saída à entrada podem ser expressas como equações diferenciais lineares, porque a relação entre os elementos é tal que os termos em equações de laço e de nós são derivados, integrais ou múltiplos de incógnitas e fontes variáveis. Os circuitos de segunda ordem contêm dois elementos armazenadores de energia e têm equações representativas que são equações diferenciais de segunda ordem. (Johnson, Hilburn e Johnson, 1994, p. 202).

Boyce e DiPrima (2010) falam que um exemplo de ocorrência de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes é sua utilização como modelo do fluxo de corrente elétrica no circuito simples (modelados por circuitos com 1 capacitor, 1 indutor e 1 resistor). A corrente i , medida em ampères, é uma função do tempo t . A tensão aplicada $E(t)$ (em volts) é uma função do tempo dada. Uma outra quantidade física é a carga do capacitor que é a carga total q (em coulombs) no instante t . A relação entre a carga q e a corrente i é

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (1.1)$$

O fluxo de tensão no circuito é enunciado pela segunda lei de Kirchhoff, a saber: Que em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual à soma dos decaimentos de tensão no resto do circuito. Então, a tensão aplicada ao circuito RLC em série será a soma da tensão do resistor, do capacitor e do indutor, que são:

- I. A queda de tensão no resistor é $v_i = Ri$.
- II. A queda de tensão no capacitor é $v_c = \frac{1}{C}q$.
- III. A queda de tensão no indutor é $v_l = L \frac{di}{dt}$.

$$v_l + v_i + v_c = E(t)$$

Sendo a equação do circuito elétrico RLC em série demonstrada da seguinte maneira:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t) \quad (1.2)$$

Assim, o objetivo desse trabalho é experimentar os diversos métodos de resolução de EDO's de segunda ordem em problemas envolvendo os circuitos RLC em série. Para isso, no Capítulo 2, apresentaremos diversos métodos de resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem homogênea e não-homogênea, as equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, o método de coeficientes a determinar, as variações de parâmetros, o método de Euler-Cauchy, a transformada de Laplace e sua inversa. No Capítulo 3, foi explicado do funcionamento dos circuitos RLC em série e onde, também, testamos a aplicabilidade desses métodos nas resoluções de problemas envolvendo circuitos elétricos RLC. Por fim, no Capítulo 4, concluímos tentando identificar quais os métodos que são mais facilmente aplicados, obtendo as soluções mais rapidamente.

2. TEOREMAS E MÉTODOS MATEMÁTICOS

Nesta seção, apresentaremos os conceitos básicos para o entendimento dos resultados subsequentes deste texto. Como nossas principais referências, consideramos os livros de Zill-Cullen (2001), Boyce-DiPrima (2010), Cavalcante (2011) e o trabalho de Santos (2019)

2.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Definição: Uma Equação Diferencial é uma equação que contém derivada ou diferencial de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

2.1.1. CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As Equações Diferenciais são classificadas de acordo com o *tipo*, a *ordem* e a *linearidade*. Elas serão definidas no decorrer deste capítulo.

Classificação pelo Tipo

Quanto ao seu tipo as ED's podem ser classificadas de duas maneiras, são elas: Equação Diferencial Ordinária (EDO) e Equação Diferencial Parcial (EDP).

- **Equação Diferencial Ordinária (EDO):** se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente, ela é chamada de EDO. De modo geral, escrevemos uma equação diferencial ordinária de ordem n da seguinte forma

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = g(x).$$

A seguir temos EDO's de 1ª e 2ª ordens, respectivamente.

$$y' - y = 1$$

$$y'' + y' + y = 0$$

- **Equação Diferencial Parcial (EDP):** uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de EDP.

A seguir temos EDP's de 1ª e 2ª ordens, respectivamente.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

Classificação da Ordem

A *ordem* de uma equação diferencial é determinada pela ordem da maior derivada encontrada na equação.

Exemplo: As equações diferenciais

$$y' - y = 1$$

$$y'' - y' + y = 0$$

$$y''' - y' + y = 0$$

são, respectivamente, EDO de 1ª ordem, EDO de 2ª ordem e EDO de 3ª ordem.

Classificação da Linearidade

Quanto à linearidade, as Equações Diferenciais podem ser classificadas em linear e não linear. Uma equação diferencial é chamada de *linear* quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Observe que as equações diferenciais são caracterizadas por duas propriedades:

- i. A variável dependente y e todas as suas derivadas são monômios do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.
- ii. Cada função coeficiente depende apenas da variável independente x .

Assim, se algum desses requisitos não for satisfeito, a EDO é dita *não-linear*.

Note que as equações

$$x dy + y dx = 0$$

$$yy' + 2y' - 1 - x^2 = 0$$

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + y = 0$$

são equações diferenciais ordinárias de primeira, segunda e terceira ordens, respectivamente. No entanto,

$$yy'' + 2y' - 1 - x^2 = 0 \quad e \quad x \frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + y = 0$$

são equações diferenciais ordinárias *não-lineares* de segunda e terceira ordens, respectivamente.

2.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Começamos apresentando o conceito de equações diferenciais de 2º ordem, que serão o ponto de partida das nossas aplicações. Como podemos ver na literatura, uma única equação desse tipo pode servir como modelo matemático para inúmeros fenômenos.

2.2.1. EQUAÇÕES LINEARES

Definição: Chama-se de Equação Diferencial Linear de 2ª ordem uma equação com a forma

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = l(x) \quad (2.1)$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são chamados de coeficientes da EDO de 2ª ordem.

DENDÊNCIA LINEAR E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Definição: Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é **linearmente dependente** em um intervalo I se existem constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ não todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x no intervalo.

Definição: Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é linearmente independente em um intervalo I se ele não é linearmente dependente no intervalo.

Em outras palavras, um conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo se as únicas constantes para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

Para todo x no intervalo, são $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$.

WRONSKIANO

O seguinte teorema proporciona condição suficiente para a independência linear de n funções em um intervalo. Supomos que cada função seja diferenciável pelo menos $n - 1$ vezes.

Teorema: Critério para Independência Linear de Funções

Suponha que $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sejam diferenciáveis pelo menos $n - 1$ vezes. Se o determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_n \\ f'_1 & f'_2 & f'_n \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

For diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I , então as funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ serão linearmente independentes no intervalo.

O determinante do teorema precedente é denotado por

$$W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

E é chamado o **Wronskiano** das funções.

2.2.2. EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Uma equação diferencial de 2ª ordem da forma,

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (2.2)$$

ou, simplesmente

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

é chamada de **homogênea**, enquanto,

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = l(x) \quad (2.3)$$

ou

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = l(x)$$

com $l(x)$ não identicamente zero, é chamada de **não-homogênea**.

2.1.3 SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 2ª ORDEM

Definição: Uma função de $y = s(x)$ é assim identificada de solução da equação diferencial linear de 2ª ordem se em um intervalo aberto I de existência, a função $s(x)$ for definida e for duas vezes derivável ao longo do intervalo e que satisfaçam a EDO.

A seguir, apresentamos o primeiro método de resolução desse texto.

(PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO – EQUAÇÃO LINEAR HOMOGÊNEA DE 2ª ORDEM):

No teorema a seguir, mostramos que a combinação, ou **superposição**, de duas ou mais soluções para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução.

Teorema: Sejam $y_1, y_2, \dots, y_k$ soluções para a equação diferencial linear de n -ésima ordem homogênea (2.2) em um intervalo I . Então, a combinação linear

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_k y_k(x), \quad (2.4)$$

em que os $C_i, i = 1, 2, \dots, k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

Demonstração: Provaremos o caso $n = k = 2$. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções para,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Se definirmos $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, então,

$$\begin{aligned} & a_2(x)[C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + a_1(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + a_0(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 [a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1] + C_2 [a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' \\ &\quad + a_0(x)y_2] \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

(PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO – EQUAÇÃO LINEAR NÃO-HOMOGÊNEA DE 2ª ORDEM):

Para a definição de solução geral para uma equação linear não-homogênea, qualquer função y_p , independente de parâmetros, que satisfaça (2.3) é chamada de **solução particular** para a equação.

Teorema: Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluções para a equação diferencial linear homogênea de n -ésima (2.2) em um intervalo I e seja y_p qualquer solução para a equação não-homogênea (2.3) no mesmo intervalo. Então,

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_k y_k(x) + y_p(x)$$

é também uma solução para a equação não-homogênea no intervalo, para quaisquer constantes $C_1, C_2, \dots, C_k$.

Teorema: Sejam y_p uma dada solução para a equação diferencial linear não-homogênea de n -ésima ordem (2.3) em um intervalo I e sejam $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea associada (2.2) no

intervalo I . Então, para qualquer solução $Y(x)$ de (2.3) em I , podemos encontrar constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ tais que

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_p(x).$$

Demonstração: Provamos o caso $n = 2$. Suponha que Y e y_p , sejam ambas soluções para,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Se definirmos uma função u por $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, então,

$$\begin{aligned} a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u &= a_2(x)[Y'' - y_p''] + a_1(x)[Y' - y_p'] + a_0(x)[Y - y_p] \\ &= a_2(x)Y'' + a_1(x)Y' + a_0(x)Y - [a_2(x)y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p] \\ &= g(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

portanto, pode-se escrever,

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ Y(x) - y_p(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ Y(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x). \end{aligned}$$

Chegamos à última definição desta seção.

Definição (Solução Geral - Equações não-homogêneas): Seja y_p uma dada solução para a equação diferencial linear não-homogênea de n -ésima ordem (2.3) em um intervalo I e seja

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

a solução geral para a equação homogênea associada (2.2) no intervalo. A **solução geral** para a equação não-homogênea no interior no intervalo é definida por

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

2.3. EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

A equação linear de primeira ordem $\frac{dy}{dx} + ay = 0$, em que a é uma constante, possui a solução exponencial $y = C_1 e^{-ax}$ em $(-\infty, \infty)$. Portanto, é natural procurar determinar se soluções exponenciais existem em $(-\infty, \infty)$ para equações de ordem maior como

$$a_n y + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (2.5)$$

em que os $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ são constantes. O fator surpreendente é que todas as soluções para (2.5) são funções exponenciais, ou constituídas a partir de funções exponenciais.

Para melhor entendimento, consideraremos o caso especial da equação de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (2.6)$$

A seguir, faremos uma breve apresentação dos métodos de solução para as equações com em (2.6). Para maiores detalhes, consultar as referências citadas no início deste capítulo.

2.3.1. EQUAÇÃO AUXILIAR (OU CARACTERÍSTICA)

Se tentarmos uma solução da forma $y = e^{mx}$, então $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$, assim a equação (2.6) torna-se,

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

ou

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como e^{mx} nunca se anula para valores reais de x , então a única maneira de fazer essa função exponencial satisfazer a equação diferencial é escolher m de tal forma que ele seja raiz da equação quadrática

$$am^2 + bm + c = 0. \quad (2.7)$$

Essa última equação é chamada de **equação auxiliar** ou **equação característica** da equação diferencial (2.6). Considerando três casos, a saber: as soluções para a equação auxiliar correspondem a raízes reais distintas, raízes reais iguais e raízes complexas conjugadas.

2.2.2 CASO I: RAÍZES REAIS DISTINTAS

Com a hipótese de que a equação auxiliar (2.7) possui raízes reais distintas m_1 e m_2 , encontra-se duas soluções

$$y_1 = e^{m_1 x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{m_2 x}.$$

Para $f_1(x) = e^{m_1 x}, f_2(x) = e^{m_2 x}, m_1 \neq m_2$,

$$W(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix} = (m_1 - m_2)e^{(m_1 + m_2)x} \neq 0$$

para todo valor real de x . Logo f_1 e f_2 são linearmente independentes em qualquer intervalo do eixo x .

Essas funções são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$ e, portanto, formam um conjunto fundamental. Segue-se que a solução geral para (2.6) nesse intervalo é

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}. \quad (2.8)$$

2.2.3 CASO II: RAÍZES REAIS IGUAIS

Quando $m_1 = m_2$, obtemos somente uma solução exponencial $y_1 = e^{m_1 x}$. Porém, segue-se que uma segunda solução é

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{-\left(\frac{b}{a}\right)x}}{e^{2m_1 x}} dx. \quad (2.9)$$

Da forma quadrática, temos $m_1 = -b/2a$, pois a única maneira de ter $m_1 = m_2$ é ter $b^2 - 4ac = 0$. Em vista do fato de que $2m_1 = -b/a$. Assim, (2.9) torna-se

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x}.$$

A solução geral para (2.6) é, então,

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}. \quad (2.10)$$

2.2.4 CASO III: RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS

Se m_1 e m_2 são complexas conjugadas, então podemos escrever

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad m_2 = \alpha - i\beta$$

em que α e $\beta > 0$ são reais e $i^2 = -1$. Formalmente, não há diferença entre este caso e o Caso 1, em que

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Porém, na prática, é mais fácil trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas. Por isso, pode ser usada a fórmula de Euler:¹

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

em que θ é qualquer número real. Segue-se desta fórmula que

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x \quad \text{e} \quad e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x, \quad (2.11)$$

¹Leonhard Euler (1707-1783) Um homem com uma memória prodigiosa e um poder de concentração fenomenal, Euler teve interesses universais; foi teólogo, físico, astrônomo, linguista, psicólogo, conhecedor dos clássicos e, principalmente matemático. Euler foi considerado um verdadeiro gênio do século. Em matemática, fez contribuições permanentes para a álgebra, trigonometria, geometria analítica, cálculo, cálculo das variações, equações diferenciais, variável complexa, teoria dos números e topologia. Sua produção matemática parece não ter sido afetada pelos 13 filhos ou pela cegueira que o acometeu em seus 17 últimos anos de vida. Euler escreveu mais de 700 trabalhos e 32 livros sobre matemática e foi responsável pela introdução de muitos símbolos, (tais como e , π e $i = \sqrt{-1}$) e notações que ainda são usadas (como $f(x)$, Σ , $\sin x$ e $\cos x$). Euler nasceu em Basileia, Suíça, em 15 de abril de 1707 e morreu de derrame cerebral em São Petersburgo em 18 de setembro de 1783, quando trabalhava na corte da imperatriz russa Catarina, a Grande.

em que usamos $\cos(-\beta x) = \cos \beta x$ e $\sin(-\beta x) = -\sin \beta x$. Nota-se que somando depois subtraindo as duas equações em (2.11), obtemos, respectivamente,

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad \text{e} \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2\sin\beta x.$$

Como $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ é uma solução para (2.6) para qualquer escolha das constantes C_1 e C_2 , fazendo $C_1 = C_2 = 1$ e $C_1 = 1, C_2 = -1$, tem-se, nesta ordem, duas soluções:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Mas,

$$y_1 = e^{\alpha x} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x} \cos \beta x$$

e

$$y_2 = e^{\alpha x} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Os dois últimos resultados mostram que as funções $e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $e^{\alpha x} \sin \beta x$ são soluções pra (2.6), daí pode-se concluir que as duas funções formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial em $(-\infty, \infty)$. Pelo princípio de superposição, a solução geral é

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \\ &= e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Exemplo: A seguir, um exemplo de equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes.

$$y'' + y' + 2y = 0$$

$$m^2 + m + 2 = 0$$

Com as raízes de $m_1 = 2$ e $m_2 = -1$.

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

2.4. COEFICIENTES INDETERMINADOS – ABORDAGEM POR SUPERPOSIÇÃO

Para obter uma solução geral para uma equação diferencial linear não-homogênea tem que fazer duas coisas:

- I. Encontrar a função complementar y_c .
- II. Encontrar qualquer solução particular y_p da equação não-homogênea.

Uma solução complementar é a solução da EDO homogênea associada a EDO não-homogênea. Uma solução particular é qualquer função, independente de parâmetros, que satisfaz a equação diferencial identicamente. A solução geral para uma equação não-homogênea em um intervalo é, então, $y = y_c + y_p$.

Assim como feito na seção anterior, nos fixaremos em EDO's de segunda ordem, ou seja, equações não-homogêneas da forma

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (2.13)$$

em que a, b e c são constantes. Embora o **método dos coeficientes indeterminados** não se limite a equações de segunda ordem, ele se limita a equações lineares não-homogêneas:

- que tem coeficientes constantes, e
- em que $g(x)$ é uma constante k , uma função polinomial, uma função exponencial e^{ax} , $\sin \beta x$, $\cos \beta x$, ou somas e produtos dessas funções.

Nota: Para ser preciso, $g(x) = k$ (constante) é uma função polinomial. Vamos enfatizar, usando a redundância, “função constante, polinomial, ...”

O que segue são exemplos de tipos de funções aplicadas $g(x)$ que são apropriadas para essa discussão:

$$g(x) = 25$$

$$g(x) = x^2 - 10x$$

$$g(x) = 13x - 6 + 14e^{-4x}$$

$$g(x) = \operatorname{sen} 6x - 7x \cos 9x$$

$$g(x) = e^x \cos x - (2x^2 - 1)e^{-1},$$

ou seja, $g(x)$ é uma combinação linear de funções do tipo:

$$k \text{ (constante)}, x^n, x^n e^{ax}, x^n e^{ax} \cos \beta x \text{ e } x^n e^{ax} \operatorname{sen} \beta x,$$

em que n é um inteiro não negativo e a e β são números reais. O método dos coeficientes indeterminados não se aplica a equações diferenciais da forma (2.13) em que, por exemplo,

$$g(x) = \ln x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x.$$

O conjunto de funções que consiste em constantes, polinômios, exponenciais e^{ax} , senos, cossenos, tem a seguinte propriedade: derivadas de suas somas e produtos são ainda somas e produtos de constantes, polinômios, exponenciais e^{ax} , senos e cossenos. Como a combinação linear das derivadas $ay_p'' + by_p' + cy_p$ tem de ser idêntico a $g(x)$, então supõem que y_p tem a mesma forma que $g(x)$.

Na tabela abaixo, apresentaremos alguns exemplos específicos de $g(x)$ em (2.13) juntamente com a forma correspondente da solução particular. Evidentemente, tomando por garantia que nenhuma função da suposta solução particular y_p faça parte da função complementar y_c .

Tabela 1: Algumas soluções particulares.

$g(x)$	Forma de y_p
(qualquer constante)	A
$3x + 6$	$Ax + B$
$2x^2 - 4$	$Ax^2 + Bx + c$
$x^3 - x + 2$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
$\operatorname{sen} 5x$	$A \cos 5x + B \operatorname{sen} 5x$

$\cos 5x$	$A \cos 5x + B \sin 5x$
e^{6x}	Ae^{6x}
$(8x - 3)e^{4x}$	$(Ax + B)e^{4x}$
$x^2 e^{3x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$
$e^{2x} \sin 3x$	$Ae^{2x} \cos 3x + Be^{2x} \sin 3x$
$4x^2 \sin 3x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 3x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 3x$
$xe^{4x} \cos 3x$	$(Ax + B)e^{4x} \cos 3x + (Cx + D)e^{4x} \sin 3x$

Fonte: Zill e Cullen (2001), adaptado.

Se $g(x)$ consiste na soma de m termos listados na tabela, então a suposição para uma solução particular y_p consiste na soma das formas escolhidas $y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_m}$, ou seja,

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \dots + y_{p_m}.$$

- **Caso II:** Uma função na solução particular escolhida é também uma solução para a equação diferencial homogênea associada.

Supondo novamente que $g(x)$ consiste de m termos do tipo dado na tabela e supondo que a suposição usual para uma solução particular seja,

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \dots + y_{p_m},$$

em que os $y_{p_i}, i = 1, 2, \dots, m$, são as formas de soluções particulares tentadas correspondentes a esses termos. Sob circunstâncias apresentadas no Caso II, formulando a seguinte **regra geral**:

Se algumas y_{p_i} contém termos que duplicam termos em y_c , então, y_{p_i} tem de ser multiplicada por x^n , em que n é o menor inteiro positivo que elimina essa duplicação.

Exemplo: Uma equação linear de segunda ordem por coeficientes a determinar

$$y'' - y' - 2y = 3x + 4$$

$$m^2 - m - 2 = 0$$

As raízes da equação característica homogênea são $m_1 = 2$ e $m_2 = -1$

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

$$y_p = Ax + B$$

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

$$-A - 2(Ax + B) = 3x + 4$$

$$-2Ax - A - 2B = 3x + 4$$

Igualando os coeficientes semelhantes encontramos os valores de $A = -\frac{3}{2}$ e $B = -\frac{5}{4}$

$$y_p = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$$

$$y_g = y_h + y_p$$

$$y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$$

2.5. VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Nesta seção, revisaremos um método de solução de EDO's lineares de segunda ordem em que os coeficientes não necessariamente são constantes. Aqui, escreveremos a solução geral como $y = y_c + y_p$, onde y_p é uma solução particular, procedimento semelhante ao que estudamos na seção anterior. Nesse método, as funções $g(x)$ de (2.13) assumem formas mais abrangentes do que as vistas na seção anterior. Esse método pode ser aplicado a EDO's de ordem maior que dois.

Retomemos uma equação diferencial linear de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (2.14)$$

cuja forma padrão é

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \quad (2.15)$$

ao dividirmos (2.14) por $a_2(x)$. Aqui, vamos supor que $P(x)$, $Q(x)$ e $f(x)$ são contínuas em algum intervalo I . Como sabemos, quando $P(x)$ e $Q(x)$ são constantes, não temos nenhuma dificuldade em escrever y_c .

Suponhamos que y_1 e y_2 formem um conjunto fundamental de soluções em I da forma homogênea associada (2.15), isto é, que

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0.$$

Agora, pode-se encontrar duas funções u_1 e u_2 tais que,

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

seja uma solução particular para (2.15). Nota-se que a suposição para y_p é a mesma que $y_c = C_1y_1 + C_2y_2$, mas substituindo por C_1 e C_2 pelos “parâmetros variáveis” u_1 e u_2 . Como se quer determinar duas funções desconhecidas, a razão diz que se precisa de duas equações. Uma dessas equações resulta da substituição $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ na equação diferencial dada (2.15). A outra equação que impõe é

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \quad (2.16)$$

essa equação é uma suposição que se fez para simplificar a primeira derivada e, conseqüentemente, a segunda derivada de y_p . Usando a regra do produto para derivar y_p , obtemos

$$y_p' = u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2' = u_1y_1' + u_2y_2' + y_1u_1' + y_2u_2' \quad (2.17)$$

assim

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'.$$

Continuando, encontra-se

$$y_p'' = u_1 y_1'' + y_1' u_1' + u_2 y_2'' + y_2' u_2'$$

substituindo esses resultados em (2.15), tem

$$\begin{aligned} y_p'' + P y_p' + Q y_p + u_1 y_1'' + y_1' u_1' + u_2 y_2'' + y_2' u_2' + P u_1 y_1' + P u_2 y_2' + Q u_1 y_1 + Q u_2 y_2 \\ = u_1 [y_1'' + P y_1' + Q y_1] + u_2 [y_2'' + P y_2' + Q y_2] + y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x). \end{aligned}$$

Em outras palavras, u_1 e u_2 têm de ser funções que também satisfaçam a condição

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x). \quad (2.18)$$

As equações (2.16) e (2.18) constituem um sistema linear de equações para determinar as derivadas u_1' e u_2' . Pela regra de Cramer, a solução para

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) \end{cases}$$

pode ser expressa em termos de determinantes, a saber,

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \quad \text{e} \quad u_2' = \frac{W_2}{W}, \quad (2.19)$$

em que

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad \text{e} \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

o determinante W é o de y_1 e y_2 . Pela independência linear de y_1 e y_2 em I , sabemos de $W(x) \neq 0$ para todo x no intervalo.

Quando Calculados as integrais indefinidas u'_1 e u'_2 não necessita inserir constantes, pois

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + (u_1 + a_1) y_1 + (u_2 + b_1) y_2 \\ &= (C_1 + a_1) y_1 + (C_2 + b_1) y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2. \end{aligned}$$

Exemplo: Uma equação linear de segunda ordem por variação de parâmetro

$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y &= e^{3x} \\ m^2 - m - 2 &= 0 \end{aligned}$$

As raízes da equação característica homogênea são $m_1 = 2$ e $m_2 = -1$

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \\ y_p &= v_1 e^{2x} + v_2 e^{-x} \\ \begin{cases} v_1' e^{2x} + v_2' e^{-x} &= 0 \\ v_1' 2e^{2x} - v_2' e^{-x} &= e^{3x} \end{cases} \end{aligned}$$

Usando substituição do sistema achamos

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{e^x}{3} \\ v_2' &= -\frac{e^{4x}}{3} \end{aligned}$$

Integrando v_1' e v_2'

$$\begin{aligned} v_1 &= \int v_1' dx \\ v_1 &= \int \frac{e^x}{3} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{e^x}{3} \\
 v_2 &= \int v_2' dx \\
 v_2 &= \int -\frac{e^{4x}}{3} dx \\
 v_2 &= -\frac{e^{4x}}{12} \\
 y_p &= \frac{e^x}{3} e^{2x} - \frac{e^{4x}}{12} e^{-x} \\
 y_p &= \frac{e^{3x}}{4} \\
 y_g &= y_h + y_p \\
 y_g &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{e^{3x}}{4}
 \end{aligned}$$

2.6. A TRANSFORMADA DE LAPLACE

O método da Transformada de Laplace é muito conveniente para encontrarmos a solução para certos tipos de problemas de valor inicial, além de aplicações em sistemas físicos tais como um sistema massa-mola ou um circuito elétrico em série. Em cálculo, aprendemos que a derivação e integração de uma determinada função, transforma uma função em outra. Por exemplo, a função $f(x) = x^4$ é transformada em uma função cúbica, em uma família de polinômios de grau 5 e em uma constante por meio das operações de derivação, integração indefinida e integração definida:

$$\frac{d}{dx} x^4 = 4x^3, \quad \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c, \quad \int_0^5 x^4 dx = 625.$$

Essas três operações possuem a **propriedade de linearidade**, isso quer dizer que para quaisquer constantes α e β , temos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x) \\
 \int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx &= \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx
 \end{aligned}$$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad (2.25)$$

desde que existam as derivadas e integrais.

No caso em que $f(x, y)$ é uma função de duas variáveis, então uma integral definida de f em relação a uma das variáveis, define uma função na outra variável. Na integral $\int_1^2 2xy^2 dx = 3y^2$, y foi considerada como constante durante o processo de integração. De maneira análoga, uma integral definida por $\int_a^b K(s, t)f(t) dt$, transforma uma função $f(t)$ em uma função de variável s .

2.6.1. DEFINIÇÃO BÁSICA

Se $f(t)$ estiver definida para $t \geq 0$, então a integral imprópria

$$\int_0^\infty K(s, t)f(t) dt$$

é definida por um limite de integrais em intervalos finitos, assim sendo,

$$\int_0^\infty K(s, t)f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s, t)f(t) dt.$$

Se esse limite existe, dizemos que a integral existe ou é convergente; se o limite não existe, fala-se que a integral não existe ou é divergente. O limite em questão existirá somente para certos valores da variável s . A escolha $k(s, t) = e^{-st}$ fornece uma transformada integral especialmente importante.

Definição: Seja f uma função definida para $t \geq 0$. A integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (2.26)$$

é chamada de a **Transformada de Laplace**² de f , desde que a integral acima convirja.

Quando a integral imprópria (2.26) converge, o resultado é uma função de s . E, portanto, é utilizadas letras minúsculas para denotar a função a ser transformada e a letra maiúscula correspondente serve para denotar sua transformada de Laplace. Por exemplo,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s), \quad \mathcal{L}\{h(t)\} = H(s).$$

2.6.2. PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para que possa ter alguma sustentação no embasamento teórico, é necessário sempre estudar algumas propriedades básicas das Transformada de Laplace.

- **LINEARIDADE**

Teorema: Sejam c_1 e c_2 constantes quaisquer e $F_1(s)$ e $F_2(s)$ as transformadas de Laplace de $f_1(t)$ e $f_2(t)$, respectivamente, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \\ &= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s). \end{aligned}$$

Demonstração: Feita em (2.27).

- **PRIMEIRA PROPRIEDADE DE TRANSLAÇÃO OU DE DESLOCAMENTO**

Teorema: Se a é um número real e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a).$$

²O Desenvolvimento da Transformada de Laplace deve-se a muitos nomes além do próprio Laplace. Embora Laplace tenha usado a transformada da integral (2.26) em seu trabalho sobre a teoria das probabilidades, é mais provável que a integral tenha sido descoberta por Euler (1707-1783), um matemático mais prolífico da história. Historicamente, o desenvolvimento dos métodos de transformação começa com a busca por soluções de certos modelos de equações diferenciais na forma de integrais reais definidas, e esta busca começa com Euler (Zill e Cullen, 2001).

- **SEGUNDA PROPRIEDADE DE TRANSLAÇÃO OU DE DESLOCAMENTO**

Teorema: Se a for uma constante positiva, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

então $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$.

- **PROPRIEDADE DE MUDANÇA DE ESCALA**

Teorema: Se a é um número real e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

- **DERIVADA DE TRANSFORMADAS (MULTIPLICAÇÃO POR t^n)**

Teorema: Seja n um número inteiro positivo não nulo e $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

- **TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UMA DERIVADA DE ORDEM n**

Teorema: Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Suponha que $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{n-1}(t)$ são todas contínuas em $[0, +\infty]$ e de ordem exponencial e que $f^n(t)$ seja contínua por partes em $[0, +\infty]$, então

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{n-1}(0).$$

- **TRANSFORMADA DE INTEGRAIS**

Teorema: Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

• INTEGRAL DA TRANSFORMADA DE LAPLACE (DIVISÃO POR T)

Teorema: Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du$$

caso $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ exista.

Prova: Temos que a demonstração desse teorema decorre da definição e da possibilidade de inversão das ordens de integração, assim

$$\begin{aligned} \int_s^\infty F(u)du &= \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right] du = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-ut} f(t) du \right] dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left[\int_s^\infty e^{-ut} du \right] dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left[\frac{e^{-st}}{t} \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\frac{f(t)}{t} \right] dt \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}. \end{aligned}$$

• FUNÇÕES PERIÓDICAS

Definição: Dizemos que uma função real f é periódica se vier a existir um número real T maior que 0 de forma que $f(t + T) = f(t)$ para todo ou qualquer que seja x pertencente ao domínio de f .

- i. Chamamos T de período da função $f(t)$;
- ii. Os gráficos das funções periódicas se repetem a cada intervalo de comprimento $|T|$.

Teorema: Seja $f(t)$ uma função periódica de período T maior que 0 tal que $f(t + T) = f(t)$, contínua por partes e de ordem exponencial, então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

• CONVOLUÇÃO

Antes de enunciarmos o teorema da transformada de Laplace de um Convolução de funções iremos definir e citar suas propriedades.

Definição: Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções contínuas por partes. Então, a *Convolução* das funções $f(t)$ e $g(t)$ é denotada e definida para todo t maior ou igual 0 como sendo

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Propriedades da convolução:

- I. $(f * g)(t) = (g * f)(t)$ (Propriedade Comutativa)
- II. $(f * (g_1 + g_2))(t) = (f * g_1)(t) + (f * g_2)(t)$ (Propriedade Distributiva)
- III. $((f * g) * v)(t) = (f * (g * v))(t)$ (Propriedade Associativa)
- IV. $(f * 0)(t) = (0 * f)(t)$ (Propriedade do Elemento Neutro)

Teorema: Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções contínuas por partes e de ordem exponencial em $[0, \infty]$, então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

Prova: Decorre da definição de transformada de Laplace e do produto de Convolução que

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt = \int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty e^{-st} g(t - \tau) dt d\tau.$$

Realizando a mudança de variável com $u = t - \tau$, temos

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty f(\tau) \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} g(u) du d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-su} g(u) du$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} \\
 &= F(s)G(s).
 \end{aligned}$$

Tabela 2: Transformadas de algumas funções básicas

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\text{sen } kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
$\text{cos } kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
$\text{senh } kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
$\text{cosh } kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$

Fonte: Zill e Cullen (2001), adaptado.

2.6.3. TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

Aqui, trabalharemos com o caminho inverso da Transformada de Laplace, ou seja, dada uma função $F(s)$, tentaremos encontrar uma função $f(t)$ cuja transformada de Laplace seja $F(s)$. Dizemos então que $f(t)$ é a **Transformada de Laplace inversa** de $F(s)$ e escrevemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

- $\mathcal{L}^{-1}$, UMA TRANSFORMADA LINEAR

A transformada de Laplace inversa é uma transformada linear; isto é, para constantes α e β ,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\},$$

em que F e G são as transformadas de algumas funções f e g .

A transformada de Laplace inversa de uma função $F(s)$ pode não ser única. Isso não é tão ruim quanto parece. Se f_1 e f_2 são contínuas por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, então, se $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$, pode-se mostrar que f_1 e f_2 são essencialmente iguais; isto é, elas podem ser diferentes somente nos pontos de descontinuidade.

- FRAÇÕES PARCIAIS

O uso de frações parciais é muito importante para encontrar a transformada de Laplace inversa. Por exemplo os casos básicos dessa teoria, os denominadores de

$$(i) F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} \quad (ii) F(s) = \frac{s+1}{s^2(s+2)^2} \quad (iii) F(s) = \frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}$$

contêm, respectivamente, somente fatores lineares distintos, fatores lineares repetidos e um fator quadrático irredutível.³

Teorema (Comportamento de $F(s)$ quando $s \rightarrow \infty$): Seja $f(t)$ contínua por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$; então

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} = 0.$$

2.6.4. PROPRIEDADES DAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

³*Irredutível* significa que o fator quadrático não possui raízes reais.

Em seguida será apresentado algumas propriedades das transformadas inversas de Laplace.

Teorema (Primeira propriedade de translação ou deslocamento): Seja a um número real e $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}f(t).$$

Teorema (Segunda propriedade de translação ou deslocamento): Seja a um número real e $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \begin{cases} f(t - a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

Teorema (Propriedade de mudança de escala): Seja a um número real e $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right).$$

Teorema (Propriedade da transformada inversa de Laplace de derivadas): Seja n um número real não nulo e $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^n(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t).$$

Teorema (Propriedade da transformada inversa de Laplace de integrais): Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t}.$$

Teorema (Multiplicação por s^n): Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $f(0) = 0$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t).$$

Teorema (Divisão por s): Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $f(0) = 0$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du.$$

Teorema (Convolução): Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = f(t) * g(t).$$

Tabela 3: Algumas transformadas inversas

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{k}{s^2 + k^2}$	$\text{sen } kt$
$\frac{s}{s^2 + k^2}$	$\text{cos } kt$
$\frac{k}{s^2 - k^2}$	$\text{senh } kt$
$\frac{s}{s^2 - k^2}$	$\text{cosh } kt$

Fonte: ZILL e CULLEN (2001), adaptado.

Exemplo: Uma equação linear de segunda ordem por transformada de Laplace

$$f''(t) - f'(t) - 2f(t) = 0$$

$$f''(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''(t)\} - \mathcal{L}\{f'(t)\} - 2\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{0\} \\
s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) - [sF(s) - f(0)] - 2F(s) &= 0 \\
[s^2 - s - 2]F(s) &= s - 1 \\
F(s) &= \frac{s - 1}{s^2 - s - 2} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 1}{s^2 - s - 2}\right\} \\
\frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)} &= \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1} \\
F(s) &= \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 1}
\end{aligned}$$

Usando produtos notáveis e frações parciais encontramos que $A = \frac{1}{3}$ e $B = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s - 2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s + 1}\right) \\
f(t) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 2}\right\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\} \\
f(t) &= \frac{e^{2t}}{3} + \frac{2e^{-t}}{3}
\end{aligned}$$

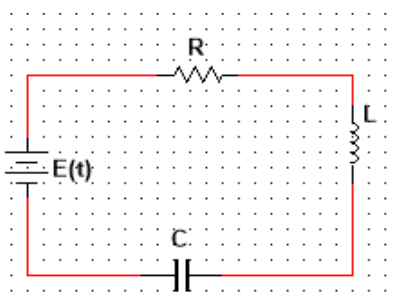
3. MODELAGEM DE CIRCUITOS RLC

A seção a seguir terá como base de sustentação sendo retirados dos livros de Matos e Zill e Cullen (2001) e Segundo Johnson, Hilburn e Johnson (1994) os conceitos, proposições e teoremas abordados. E usando o livro Boyce, DiPrima (2010) como livro auxiliar e o trabalho de BEZERRA (2017).

O circuito *RLC*, apresentado pela figura logo abaixo, possui dois elementos armazenadores de energia como o indutor (L) e o capacitor (C), um elemento de dissipação resistor (R) e uma fonte de energia (E) em volts, a qual pode ser um gerador ou uma bateria, onde todos esses elementos estão conectados em série.

O resistor tem a função de impedir o fluxo de corrente ou, melhor dizendo, o fluxo de carga elétrica e é dada em Ohms Ω . Já o indutor tem a função de armazenar energia em forma de um campo magnéticos e medido em Henrys H . E, por fim, o capacitor terá a função de armazenar energia em forma de campo elétrico e é medido em Farads F .

Figura 1: Circuito RLC.



Fonte: Autoria própria.

Pela segunda lei de Kirchoff (lei das malhas), a somatória das quedas de voltagem em uma malha de um circuito elétrico, qualquer que seja, é igual a voltagem fornecida pela fonte no circuito apresentado,

$$v_L + v_R + v_C = E(t)$$

que é dado por uma EDO de primeira ordem. As quedas de tensões (voltagem) ocasionadas pelo capacitor, o indutor e o resistor são, respectivamente $v_C = \frac{q}{C}$, $v_L =$

$L \frac{di}{dt}$ e $v_R = Ri$. Substituindo os valores das tensões, temos

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \quad (3.1)$$

No entanto, a carga elétrica $q(t)$ (dado em Coulomb) e armazenada no capacitor está relacionada com a corrente elétrica da malha $i(t)$ (dado em Ampères) da forma que a corrente é dada pela variação da carga elétrica pela variação do tempo $i = dq/dt$, então, se derivar a corrente teremos $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$. Daí, a equação (3.1) se transforma na equação diferencial linear de segunda ordem

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \quad (3.2)$$

Caso a corrente inicial da malha i_0 e a carga inicial contida no capacitor q_0 sejam dados, temos o seguinte PVI

$$\begin{cases} Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t) \\ q(0) = q_0 \quad \text{e} \quad q'(0) = i_0 \end{cases}$$

O PVI obtida acima modela, assim, a forma de obtermos a corrente do circuito RLC em série em função do tempo ao derivá-la, ficando assim.

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = E(t).$$

3.1. EXEMPLOS DOS MÉTODOS DE EDO DE SEGUNDA ORDEM NA APLICAÇÃO DE CIRCUITOS RLC

Agora, apresentaremos os exemplos de vários métodos das equações diferenciais de segunda ordem na aplicação dos circuitos elétricos de RLC.

O primeiro exemplo a seguir será uma questão que usará o método de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes.

EXEMPLO 3.1: Considere um circuito elétrico em série apresentando as seguintes características: uma indutância de $L = 1 \text{ H}$ (henrys), uma resistência de $R = 1 \Omega$ (ohms), uma capacitância de $C = 0,4 \text{ F}$ (farads) e que a tensão (voltagem) no

instante t seja nula $E(t) = 0$. Sabendo que a carga seja $q = 1 \text{ C}$ (coulombs) e a corrente elétrica i seja nula, durante o instante $t = 0$. Então, pede-se: a) A carga elétrica geral para o circuito no instante t ; b) A corrente elétrica geral para o circuito no instante t .

a) Solução: Pela equação modelo, temos

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

pelos valores dados na questão para o resistor, indutor e o capacitor e as condições iniciais para a carga e a corrente formando então, o seguinte PVI:

$$\begin{cases} 1 \frac{d^2 q}{dt^2} + 1 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{0,4} q = 0 \\ q(0) = 1 \text{ e } i = \frac{dq}{dt} \therefore i = q'(0) = 0 \end{cases}$$

A EDO homogênea de 2ª ordem acima, possui a seguinte equação característica $m^2 + m + 2,5 = 0$, cujas raízes são complexas e conjugadas, a saber, $m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ e $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. Pelo que vimos no Capítulo 2, a solução geral para a carga elétrica no instante t é

$$q_g(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[B_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + B_2 \text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) \right].$$

Como nos foram fornecidas as condições iniciais da carga da corrente, podemos encontrar os valores de B_1 e B_2 respondendo a um sistema linear. Inicialmente, encontremos a expressão da corrente no instante t . Note que

$$\begin{cases} q_g(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[B_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + B_2 \text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) \right] \\ q_g'(t) = i_g(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\frac{3}{2}B_1 \text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{3}{2}B_2 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \right] - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \left[B_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + B_2 \text{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) \right] \end{cases}$$

Das condições iniciais

$$\begin{cases} q(0) = 1 \\ q'(0) = i(0) = 0 \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{cases} B_1 = 1 \\ -\frac{1}{2}B_1 + \frac{3}{2}B_2 = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é $B_1 = 1$ e $B_2 = \frac{1}{3}$. Portanto, a carga para o instante t dessa questão é

$$q_g(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) \right] C.$$

b) Solução: Já encontramos a expressão da corrente elétrica geral, $i_g(t)$, quando calculamos a derivada primeira da carga elétrica geral $q_g(t)$, logo,

$$i_g(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\frac{3}{2}B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{3}{2}B_2 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \right] - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \left[B_1 \cos\left(\frac{3}{2}t\right) + B_2 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) \right].$$

Dos valores de B_1 e B_2 obtidos no item anterior, temos que a solução geral da corrente no instante t é dada por

$$i_g(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[-\frac{3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \right] - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right) \right] A.$$

No exemplo a seguir, será usado o método dos coeficientes indeterminados.

EXEMPLO 3.2: Um determinado circuito elétrico simples em série apresenta os valores do resistor $R = 3 \, \Omega$ (ohms), do indutor $L = 1 \, H$ (henrys), do capacitor $C = 0,5 \, F$ (farads) e a tensão fornecida ao circuito durante o instante t seja de $E(t) = \operatorname{sen}(5t)$. Então, calcule: a) As expressões da carga elétrica geral e da corrente elétrica geral do circuito no instante t ; b) A solução da carga geral e da corrente geral sabendo que inicialmente que a carga é de $q = 2 \, C$ (coulombs) e a corrente é de $i = 1 \, A$ (amperes).

a) Solução: Pela modelagem geral da EDO de 2ª ordem e pelos valores dados para o resistor, indutor, de tensão e do capacitor, temos a seguinte EDO de 2ª ordem linear não-homogênea

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 3\frac{dq}{dt} + \frac{1}{0,5}q = \operatorname{sen}(5t).$$

Note que a EDO homogênea de segunda ordem associada possui a seguinte equação característica $m^2 + 3m + 2 = 0$, cujas raízes serão, respectivamente, $m_1 = -1$ e $m_2 = -2$. Daí, a solução complementar para a carga elétrica da função no instante t é

$$q_c(t) = D_1 e^{-t} + D_2 e^{-2t}.$$

Tendo a solução homogênea associada da carga elétrica, calculemos agora a solução particular para a EDO não-homogênea usando o método dos coeficientes indeterminados. Como a função de entrada de $E(t)$ da EDO é trigonométrica, sabemos que sua solução particular q_p é da forma

$$q_p = A \cos(5t) + B \operatorname{sen}(5t),$$

cuja derivada primeira é

$$q'_p = -5A \operatorname{sen}(5t) + 5B \cos(5t)$$

e a derivada segunda é

$$q''_p = -25A \cos(5t) - 25B \operatorname{sen}(5t).$$

Em seguida, substituindo as derivadas primeira e segunda de q_p na EDO, encontramos

$$\begin{aligned} & -25A \cos(5t) - 25B \operatorname{sen}(5t) + 3[-5A \operatorname{sen}(5t) + 5B \cos(5t)] \\ & + 2[A \cos(5t) + B \operatorname{sen}(5t)] = \operatorname{sen}(5t). \end{aligned}$$

Manipulando, encontramos a seguinte equação

$$(-23A + 15B) \cos(5t) + (-15A - 23B) \operatorname{sen}(5t) = \operatorname{sen}(5t)$$

que nos fornece o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} -15A - 23B = 1 \\ -23A + 15B = 0 \end{cases}$$

Donde obtemos $A = -\frac{15}{754}$ e $B = -\frac{23}{754}$. Sendo assim, a solução particular equação será

$$q_p = -\frac{15}{754} \cos(5t) - \frac{23}{754} \operatorname{sen}(5t).$$

Em posse das soluções complementar e particular para a carga elétrica do circuito, achamos a expressão geral da carga no instante t , dada por

$$q_g(t) = q_c + q_p = D_1 e^{-t} + D_2 e^{-2t} - \frac{15}{754} \cos(5t) - \frac{23}{754} \operatorname{sen}(5t) \text{ C}.$$

A expressão para a corrente elétrica geral $i_g(t)$ é obtida ao derivarmos a carga elétrica geral $q_g(t)$, isto é, $i_g(t) = \frac{dq}{dt}$ e, então,

$$i_g(t) = -D_1 e^{-t} - 2D_2 e^{-2t} + \frac{75}{754} \operatorname{sen}(5t) - \frac{115}{754} \cos(5t) \text{ A}.$$

b) Solução: Sabendo dos valores iniciais da carga elétrica e da corrente, podemos achar a solução da carga elétrica geral e da corrente elétrica geral através do PVI, achando os valores de D_1 e D_2 . Sabemos que

$$\begin{cases} q(0) = 2 \\ i(0) = 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

e que

$$\begin{cases} q_g(t) = D_1 e^{-t} + D_2 e^{-2t} - \frac{15}{754} \cos(5t) - \frac{23}{754} \operatorname{sen}(5t) \\ i_g(t) = -D_1 e^{-t} - 2D_2 e^{-2t} + \frac{75}{754} \operatorname{sen}(5t) - \frac{115}{754} \cos(5t) \end{cases}. \quad (3.4)$$

Aplicando (3.3) em (3.4), obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} D_1 + D_2 = \frac{1523}{754} \\ D_1 + 2D_2 = -\frac{869}{754} \end{cases}$$

Cuja solução é $D_1 = \frac{135}{26}$ e $D_2 = -\frac{46}{13}$. Substituindo os valores de D_1 e D_2 nas equações gerais da carga elétrica e da corrente elétrica, as suas soluções gerais, no instante t , são dadas, respectivamente, por

$$q_g(t) = \frac{135}{26} e^{-t} - \frac{46}{13} e^{-2t} - \frac{15}{754} \cos(5t) - \frac{23}{754} \operatorname{sen}(5t) \text{ C}$$

e

$$i_g(t) = -\frac{135}{26} e^{-t} + \frac{92}{13} e^{-2t} + \frac{75}{754} \operatorname{sen}(5t) - \frac{115}{754} \cos(5t) \text{ A}.$$

O exemplo a seguir será resolvido por o método de variações de parâmetros.

EXEMPLO 3.3: Um circuito elétrico RLC simples em série com um resistor de $R = 2 \Omega$ um capacitor de $C = 1 \text{ F}$ e indutor de $L = 1 \text{ H}$ e uma tensão elétrica no instante t de $E(t) = e^t$. Utilizando o método de variação de parâmetros, calcule: a) As expressões da carga elétrica geral e da corrente elétrica geral do circuito no instante t . b) A solução da carga geral e da corrente geral sabendo que inicialmente que a carga é de $q = 3 \text{ C}$ e a corrente é de $i = 1 \text{ A}$.

a) Solução: Moldando a equação do circuito RLC

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t),$$

temos

$$q'' + 2q' + q = e^t.$$

Primeiramente, solucionemos a EDO homogênea de segunda ordem associada, cuja equação característica é $m^2 + 2m + 1 = 0$. Veja que as raízes são, respectivamente,

$m_1 = -1$ e $m_2 = -1$. Logo, a solução complementar para a carga elétrica da função no instante t é

$$q_c = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t}.$$

Se q_1 e q_2 são soluções LI da equação homogênea associada, segue que $q_1 = e^{-t}$ e $q_2 = t e^{-t}$. O nosso objetivo é encontrar uma solução geral para a EDO analisando as funções q_1 e q_2 . Para isso, usaremos o método da variação de parâmetros. Basicamente, esse método nos ajuda a encontrar uma solução particular usando a combinação $q_p = u_1 q_1 + u_2 q_2$. Para que as duas soluções q_1 e q_2 dessa EDO seja linearmente independente, é necessário que a determinante entre q_1 e q_2 e suas respectivas derivadas

$$W = \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ q'_1 & q'_2 \end{vmatrix}$$

seja diferente de zero. Como sabemos, esse determinante recebe o nome de wronskiano. Nesse exemplo, temos

$$W = \begin{vmatrix} e^{-t} & t e^{-t} \\ -e^{-t} & -t e^{-t} + e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-2t}.$$

Como $W \neq 0$, para todo t , as soluções q_1 e q_2 são linearmente independentes. Sendo assim, resolvamos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u'_1 e^{-t} + u'_2 t e^{-t} = 0 \\ -u'_1 e^{-t} + u'_2 (-t e^{-t} + e^{-t}) = e^t \end{cases}$$

Usando a regra de Cramer, encontramos $u'_1 = -t e^{2t}$ e $u'_2 = e^{2t}$. Agora, aplicando a integral, encontramos

$$\begin{aligned} u_1 &= \int -t e^{2t} dt \\ &= -\left[\frac{2t e^{2t} - e^{2t}}{4} \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_2 &= \int e^{2t} dt \\ &= \frac{e^{2t}}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a solução particular é dada por

$$\begin{aligned} q_p &= \left[\frac{-2te^{2t} + e^{2t}}{4} \right] e^{-t} + \frac{e^{2t}}{2} te^{-t} \\ &= \frac{(-2te^t + e^t)}{4} + \frac{te^t}{2} \\ &= \frac{-2te^t + e^t + 2te^t}{4} \\ &= \frac{e^t}{4} \end{aligned}$$

com as soluções complementar e particular podemos, então, encontrar a solução geral da carga elétrica

$$q_g(t) = q_c + q_p = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t} + \frac{e^t}{4} C.$$

A corrente elétrica pode ser encontrada derivando a solução geral acima, já que $i = \frac{dq}{dt}$. Portanto,

$$i_g(t) = -A_1 e^{-t} + A_2 e^{-t}(1 - t) + \frac{e^t}{4} A.$$

b) Solução: Com os valores iniciais da carga e da corrente dadas inicialmente pela questão e com as equações gerais da carga e da corrente no instante t encontradas anteriormente, podem ser encontrados os valores de A_1 e A_2 , ao usarmos

$$\begin{cases} q_0 = 3 \\ i_0 = 1 \end{cases}.$$

Se

$$\begin{cases} q_g(t) = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t} + \frac{e^t}{4} \\ i_g(t) = -A_1 e^{-t} + A_2 e^{-t}(1-t) + \frac{e^t}{4} \end{cases}$$

segue que

$$\begin{cases} A_1 = \frac{11}{4} \\ -A_1 + A_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Donde encontramos $A_1 = \frac{11}{4}$ e $A_2 = \frac{7}{2}$. Substituindo as constantes A_1 e A_2 nas equações da carga elétrica e da corrente elétrica no instante t , obtemos

$$q_g(t) = \frac{11}{4} e^{-t} + \frac{7}{2} t e^{-t} + \frac{e^t}{4} \text{ C}$$

e

$$i_g(t) = -\frac{11}{4} e^{-t} + \frac{7}{2} e^{-t}(1-t) + \frac{e^t}{4} \text{ A}$$

O último exemplo será resolvido usando a Transformada de Laplace.

EXEMPLO 3.4: Seja um circuito elétrico RLC em série com um resistor de $R = 10 \Omega$, um capacitor de $C = 0,04 \text{ F}$, um indutor de $L = 1 \text{ H}$ e uma tensão elétrica no instante t de $E(t) = 50$. Sabendo que, inicialmente, a carga q e a corrente i são nulas, calcule carga elétrica e a corrente elétrica do circuito no instante t .

Solução: Segundo o modelo do circuito RLC, obtemos

$$q'' + 10q' + 25q = 50.$$

Aplicando a Transformada de Laplace, segue que

$$\mathcal{L}\{q''\} + 10\mathcal{L}\{q'\} + 25\mathcal{L}\{q\} = 50\mathcal{L}\{1\}.$$

Sabendo que a Transformada de Laplace da derivada segunda de $q(t)$ é $s^2Q(s) - sq(0) - q'(0)$, e a derivada primeira é $sQ(s) - sq(0)$, podemos reescrever a equação acima como

$$s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + 10[sQ(s) - sq(0)] + 25Q(s) = 50\frac{1}{s}.$$

Uma vez que os valores da carga do capacitor e da corrente são nulos em $t = 0$, ou seja, $q(0) = 0$ e $q'(0) = 0$, segue que

$$\begin{aligned} s^2Q(s) + 10sQ(s) + 25Q(s) &= 50\frac{1}{s} \\ (s^2 + 10s + 25)Q(s) &= \frac{50}{s} \\ Q(s) &= \frac{50}{s(s^2 + 10s + 25)}. \end{aligned}$$

Decompondo a equação acima em frações parciais, e usando conhecimento de produtos notáveis, encontramos

$$\frac{50}{s(s+5)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+5)} + \frac{C}{(s+5)^2}$$

donde vemos que

$$50 = A(s+5)^2 + Bs(s+5) + Cs.$$

Agora, iremos atribuir valores a s convenientes para encontrar A, B e C :

- $s = 0$

$$25A = 50$$

$$A = 2$$

- $s = 1$

$$50 = A(1+5)^2 + B(1+5) + C$$

$$6B + C = -22$$

- $s = -1$

$$50 = A(-1 + 5)^2 - B(-1 + 5) - C$$

$$4B + C = -18.$$

Resolvendo o sistema linear das duas últimas equações encontradas,

$$\begin{cases} 6B + C = -22 \\ 4B + C = -18 \end{cases}$$

concluimos que $A = 2$, $B = -2$ e $C = -10$. A equação de $Q(s)$ com os valores descobertos ficará

$$Q(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{(s+5)} - \frac{10}{(s+5)^2}.$$

Aplicando a transformada inversa em cada uma dessas parcelas, passando o domínio do s para o domínio do tempo t , temos

$$q(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+5)}\right\} - 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+5)^2}\right\}.$$

Portanto, a solução da carga elétrica em relação ao tempo t é

$$q(t) = 2(1) - 2e^{-5t} - 10te^{-5t}$$

ou

$$q(t) = -2e^{-5t} - 10te^{-5t} + 2 C.$$

A corrente elétrica será a derivada da solução da carga elétrica em relação a t . Desse modo, o resultado da corrente é

$$i(t) = 10e^{-5t} - 10(e^{-5t} - 5te^{-5t}) A.$$

4. CONCLUSÃO

Ao analisar os métodos apresentados neste trabalho e aplicá-los aos exemplos de circuitos elétricos RLC em série, pudemos constatar que o método da Transformada de Laplace precisa de poucos passos para encontrar os resultados. Apesar de o método de variação de parâmetros servir basicamente para encontrar uma solução particular e ter vantagens em relação ao método dos coeficientes a determinar, ela se mostrou extremamente longa para a sua resolução em relação aos outros métodos, principalmente, comparada com a Transformada de Laplace.

O método dos coeficientes indeterminados não apresentou muita dificuldade na resolução da EDO, mas dependendo da equação poderá se tornar extremamente longa e complexa para a obtenção de suas soluções particulares, sendo recomendado o uso de outros métodos como Laplace. Além de possuir limitações quanto às funções $E(t)$, o que não acontece com a Transformada de Laplace.

O método de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes é a forma mais simples de se resolver algumas EDO's provenientes de circuitos RLC, mas não deve ser comparado com os outros métodos, já que esse método de aplica apenas quando $E(t) = 0$ em todo t .

Portanto, diante dessa pequena amostragem, somada a experiência obtida durante a disciplina de Equações Diferenciais, concluímos que o método mais eficiente para resolver EDO's que surgem a partir da modelagem de circuitos RLC em série é a Transformada de Laplace, por isso, Boyce e DiPrima (2010) falam exatamente isso.

Muitos problemas práticos de engenharia envolvem sistemas mecânicos ou elétricos sob ação de forças descontínuas ou de impulsos. Os métodos de equações lineares de segunda ordem são, muitas vezes, complicados de se usar tais problemas. Um outro método que é particularmente adequado para esses problemas, embora possa ser usado mais geralmente, baseia-se na transformada de Laplace. (Boyce e DiPrima, 2010, p. 165).

Além de fazer uma breve comparação dos métodos esse trabalho cumpre com a principal função de um trabalho bibliográfico, criar material sobre os temas abordados, trazendo mais material de suporte para estudo na área.

5. BIBLIOGRAFIA

BEZERRA, João Paulo Andrade; SOUSA, Jakcney Luan Azevedo de. O ESTUDO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE E SEU USO NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 2ª ORDEM. 2017. 87 f. TCC (Graduação) - Curso de Bacharel em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Angicos/RN, 2017.

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. Tradução e revisão Valéria de Magalhães Lório.

CAVALCANTE, Luciano Moura. Equações Diferenciais Ordinárias. Fortaleza: Secretaria de Educação a Distância (sead/uece), 2011.

JOHNSON, David E.; HILBURN, John L.; JOHNSON, Johnny R. FUNDAMENTOS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS. 4 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 1994. 556 p.

NILSSON, James W.; RIEDEL, Susan A. CIRCUITOS ELÉTRICOS. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009. 564 p.

SANTOS, Erika Oliveira dos; NOGUEIRA, Tony Kleverson. A TRANSFORMADA DE LAPLACE EM SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES. 2019. 95 f. TCC (Graduação) - Curso de Bacharel em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Angicos/RN, 2019.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R.; Equações Diferenciais. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001, v.1.