

# MÉTODO NUMÉRICO DE EULER APLICADO A ANÁLISE DE CORRENTE EM CIRCUITOS ELÉTRICOS DE SEGUNDA ORDEM

Wallace V. de Medeiros<sup>1</sup>, Matheus da S. Menezes<sup>2</sup>, Samanta M. de Holanda<sup>3</sup>

**Resumo:** Variados problemas da engenharia podem ter seus comportamentos descritos por equações diferenciais ordinárias, todavia nem sempre estas são fáceis de resolver de maneira analítica, assim, os métodos numéricos são caminhos alternativos para encontrar soluções aproximadas do problema em algumas situações. Dentre os métodos numéricos para resolução de equações diferenciais, os métodos de Euler e Heun são simples e acessíveis, cuja implementação computacional pode ser realizada via programação de alto nível em softwares de álgebra computacional. Além disso, existem softwares que contemplam estes métodos em sua base de aplicações e que podem ser usados a partir apenas da informação dos dados iniciais do problema. Este artigo faz uso destes métodos numéricos adaptados a uma EDO de segunda ordem de um circuito RLC em série natural e de um software específico para este problema, com o objetivo de validar a eficiência de cada método estudado, considerando a qualidade da solução obtida pelo algoritmo e software, por meio da eficiência com base na média dos erros absolutos. Através da análise comparativa, foi possível verificar que os métodos estudados obtiveram resultados competitivos em relação ao software e também em relação à solução analítica da equação diferencial.

**Palavras-chave:** Circuito RLC; Equação Diferencial Ordinária; Métodos Numéricos.

## 1. INTRODUÇÃO

Na engenharia há, pelo menos, três maneiras de se solucionar problemas, sendo estas: método numérico, experimental e analítico. O método numérico é uma das formas de solucionar problemas complexos por meio de estratégias numérico-computacionais, utilizando-se de estruturas de simples entendimento e ainda com a possibilidade de implementação computacional, através do desenvolvimento de algoritmos adaptados ao problema [4]. Já o método experimental, consiste em determinar um objeto de estudo realizando experimentos, laboratoriais, por exemplo, a fim de observar como as variáveis do problema influenciam no objeto de estudo.

Há ainda o cálculo integral e diferencial que introduziu um grande avanço tecnológico em problemas matemáticos, onde o uso de equações diferenciais em problemas e modelos de engenharia elétrica é fundamental para descrevê-los, dentre estes, encontra-se o circuito elétrico RLC. Em um circuito elétrico do tipo RLC temos os componentes elétricos: Resistor (R), Indutor (L) e Capacitor (C), este tipo de circuito também conhecido como circuitos elétricos de 2º ordem. As aplicações deste tipo de circuito, são na área de telecomunicações, podem ser aplicados para: filtros passivos e ativos, amplificador de frequência, receptores de rádio, aparelho de televisão e sistema de comunicação no geral [5].

Porém os métodos analíticos para resolução de problemas desta tipologia nem sempre são de fácil aplicação, já que podem ter resolução muito complexa em casos específicos. Dessa forma, o cálculo numérico pode contornar o problema encontrando uma solução de forma mais fluida e rápida. Para a resolução de equações diferenciais via métodos numéricos podemos citar os de Euler, Heun e Runge-Kutta [3].

Este trabalho tem como objetivo analisar a eficiência do método numérico de Euler na solução de equações diferenciais de circuitos RLC quando comparado ao método numérico de Heun, solução analítica da Equação diferencial ordinária (EDO) do circuito RLC série e solução de EDO obtida através de software específico [11].

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, serão apresentados conceitos teóricos que fundamentam o objetivo deste trabalho, sendo eles: Equações Diferenciais Ordinárias, Problema de Valor Inicial (PVI), circuitos RLC série e os métodos numéricos derivados da expansão em série de Taylor, que são os métodos Euler e Heun.

### 2.1. Equações Diferenciais

Para um melhor entendimento deste trabalho, o leitor deve estar familiarizado com os conceitos de cálculo diferencial e integral e também de equações diferenciais, cujo escopo foge do conteúdo deste estudo. Para

---

visualizar estes temas, sugerimos [1,2].

Contudo, para melhorar o entendimento do assunto que será abordado neste trabalho, iremos apresentar alguns conceitos que irão embasar certos aspectos relacionados às equações diferenciais.

**Definição 2.1:** *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial (ED).*

As equações diferenciais possuem três maneiras de serem classificadas: Primeiramente, pelo tipo: ordinária e parcial. A ordinária possui apenas uma variável independente, onde há derivadas em relação a esta. Já a parcial apresenta derivadas para duas ou mais variáveis independentes. Em segundo lugar, as equações diferenciais pode ser classificada pela sua linearidade, com relação a esta a equação diferencial ordinária (EDO) tem formato geral:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (01)$$

Uma EDO linear é quando satisfaz duas características: cada coeficiente e o  $g(x)$  só dependem da variável independente  $x$ . Já a variável dependente  $y$ , e suas derivadas são de primeiro grau. Importante salientar que os valores de  $g(x)$  da Equação (1) pode qualificar a equação como homogênea no caso do valor de  $g(x)$  ser igual zero é conhecida como heterogênea no caso de  $g(x)$  ser diferente de zero.

E por fim a classificação por ordem, onde há dois casos bastantes utilizados que são as equações diferenciais de primeira e segunda ordem, porém visando a finalidade deste trabalho a de segunda ordem é bastante especial, onde esta pode ser visualizada a partir da Equação (2). E não tão menos importante a de primeira ordem na Equação (3)

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (02)$$

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (03)$$

Onde:  $a_2, a_1, a_0$  são termos cujos são valores constante ou não e  $g(x)$  é o resultado, onde este pode ser igual ou diferente de zero.

Neste trabalho terá como abordagem principal equações diferenciais homogênea de segunda ordem e linear.

### 2.1.1. Problema de Valor Inicial (PVI)

Para solucionar uma ED, há diversas maneiras, porém para os casos de EDO especialmente o Problema de Valor Inicial é um dos mais utilizados para encontrar uma função característica da família de soluções, onde irá determinar uma função  $y(x)$  que irá satisfazer as soluções determinadas e as derivadas impostas dada por uma certa condição inicial  $x_0$  que representará o caso específico analisado. O problema de valor inicial de uma equação de enésima ordem apresentará condições iniciais conforma a Equação (4).

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \quad (04)$$

Para  $x_0, y_0, y_0', \dots, y^{n-1}$ , estes possuem valores conhecidos. Contudo, o PVI só irá ter uma única solução quando respeitar o seguinte teorema [1]:

**Definição 2.2:** *Sejam  $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$  e  $g(x)$  contínuas no intervalo  $I$  e seja  $a_2(x) \neq 0$  para todo  $x$  nesse intervalo. Se  $x = x_0$  for um ponto qualquer desse intervalo, então existe uma única solução  $y(x)$  do problema de valor inicial nesse intervalo.*

Onde  $x_0, y_0$ , são valores reais conhecidos.

### 2.1.2. Problema de Valor de Contorno (PVC)

Assim como o PVI, o Problema de Valor de Contorno (PVC), consiste em uma formulação para solucionar problemas de equações diferenciais que possuem condições iniciais. O PVC, pode conter solução única, infinitas ou nenhuma solução [1]. Um exemplo de um caso em que se pode utilizar este método é em EDO de segunda ordem.

Dessa maneira, em uma EDO de segunda de ordem tem as seguintes condições iniciais:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \quad (05)$$

## 2.2. Métodos Numéricos

### 2.2.1. Expansão em Série de Taylor

Os métodos numéricos aqui abordados para resolução de equações diferenciais fazem uso da Expansão em Série de Taylor, desenvolvidas pelo matemático Brook Taylor, que podem ser descritas, de acordo com [3] como:

**Definição 2.3:** A série de Taylor fornece um meio para prever o valor da função em um ponto em termos do valor da função e suas derivadas em um outro ponto. Em particular, o teorema afirma que qualquer função suave pode ser aproximada por um polinômio.

O termo de uma função constante (Aproximação de ordem zero) será perfeitamente definido por meio da série de Taylor como:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) \quad (06)$$

No caso de funções que não sejam constantes, a Equação (06) não é a melhor forma de aproximação, sendo assim, o polinômio de Taylor para uma análise numérica com melhor acurácia e representação de funções em termos de potência pode ser visualizado pela Equação (07). Por meio desta expansão, será possível estudar os métodos de Euler e Heun que são oriundos da série de Taylor.

$$y(x + h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2!}y''(x)h^2 + \dots + \frac{1}{m!}y^m(x)h^m + p(h^m) \quad (07)$$

Onde:  $h$  o tamanho de passo;  
 $m$  a ordem da expressão;  
 $p(h^m)$  representa o resto da expressão de ordem  $m+1$ .

### 2.2.2. Método Numérico de Euler

O método numérico de Euler, também conhecido como Euler-Cauchy ou ponto de inclinação [3]. Este método foi desenvolvido pelo matemático Leonhard Euler, e tem como objetivo encontrar uma solução para uma equação diferencial de forma simplificada, onde a solução aproximada é obtida a partir de um valor inicial ou condição inicial para um dado intervalo  $[a, b]$ . Esse método ainda pode ser nomeado como método da tangente, já que utiliza a equação da tangente como artifício de cálculo.

A partir de uma EDO como a da Equação (03), o método irá retornar aproximações de pontos em  $x$  e não valores de função de  $y$ , estes pontos  $x$  deverão estar igualmente espaçados onde o conjunto pode ser chamado de pontos de malha. De acordo com [3], a primeira derivada ( $y = f(x)$  em  $x_i$ ) fornece uma estimativa direta da inclinação em  $x_i$ . Assim, a determinada projeção aproximada de um ponto  $x_{i+1}$  em  $y$  é feita advindo desta inclinação como é mostrado na Figura (1).

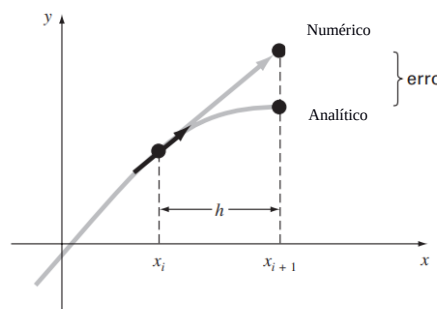


Figura 1. Gráfico destacando o valor previsto pelo método de Euler e o valor real da função analítica. [3]

Para se obter a aproximação de um ponto qualquer  $x_i$  e um valor desconhecido da função  $y(x_i)$ , é utilizada a equação da reta tangente representada, de forma geral, pela Equação (6) considerando um tamanho de passo  $h = \frac{b-a}{n}$  onde  $n$  é um número inteiro positivo. Desta forma, a função de iteração do método de Euler é descrita na Equação (08):

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (08)$$

### 2.2.3. Método Numérico de Heun

O método numérico de Heun, também conhecido como por método de Euler melhorado, apresenta uma diferente forma de solucionar os problemas com o objetivo de ser mais preciso. Para que este método venha obter uma melhor precisão este utiliza o artifício de não utilizar apenas uma derivada, mas sim duas derivações, sendo uma no ponto inicial e outra no ponto final do intervalo, desse modo, a nova curva de inclinação será representada pela média das duas derivações, consequentemente a nova adaptação da estratégia de resolução do método numérico Heun será descrita conforme a equação (09).

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h \quad (09)$$

Este método numérico, é do tipo preditor-corretor, ou seja, ele depende da variável final do método de Euler e com isso a partir da estratégia do mecanismo formulado, corrige a resposta final para um valor com maior precisão. A Figura (2) ilustra graficamente um passo do método de Heun.

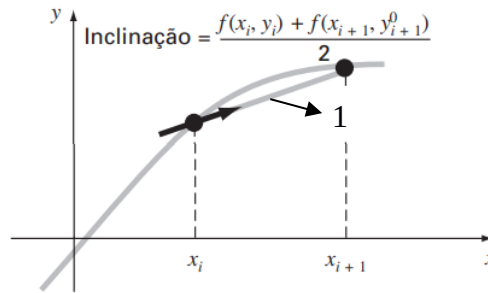


Figura 2. Gráfico das funções do método de Heun (1) e a função real da função analítica (2). [3]

### 2.3. Circuitos RLC

Os circuitos RLC são circuitos elétricos de segunda ordem, também conhecidos como circuitos ressonantes, compostos por elementos passivos como resistor (R), indutor (L) e capacitor (C), podem ser conectados em série ou em paralelo, como demonstra na Figura (3) e (4). O resistor limita a passagem da corrente no circuito quando associado com uma fonte de tensão presente no circuito, ou seja, pode controlar a intensidade máxima da corrente dependendo do valor da resistência, assim como dissipar energia em forma de calor pelo processo chamado Efeito Joule, e tem como unidade o Ohm ( $\Omega$ ). O indutor é um elemento cujo princípio de funcionamento é advindo dos campos magnéticos onde armazena energia e a corrente varia de acordo com o tempo de forma exponencial, o mesmo possui unidade de medida o Henry (H). O capacitor irá armazenar a energia que é fornecida pelo sistema em forma de campo elétrico e, posteriormente, irá retornar, esta energia armazenada tem como unidade a Farad (F).

Esse tipo de circuito além de ser classificado pela associação dos elementos, série e paralelo, ainda pode ter dois tipos básicos de sinais de entrada (natural, 0 V; e ao degrau, fonte CC constante). A classificação de um circuito RLC natural ocorre quando não há a presença de uma ou mais fontes de tensão e/ou corrente, já a um degrau é quando há a presença de alguma fonte.

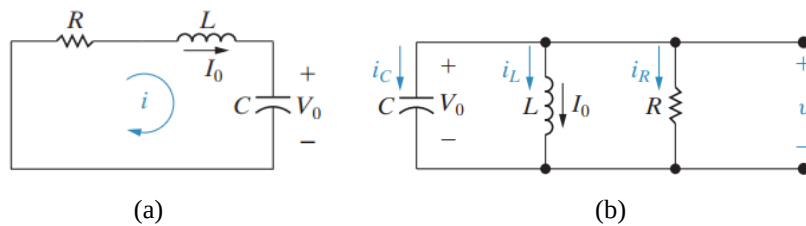


Figura 3. Configuração de Resposta Natural para um circuito RLC: (a) Série e (b) Paralelo. [5]

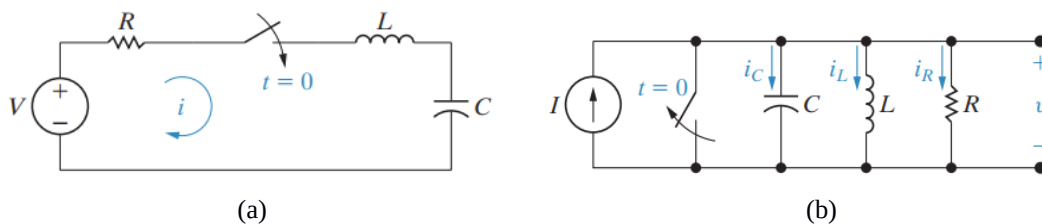


Figura 4. Configuração de Resposta a um Degrau para um circuito RLC: (a) Série e (b) Paralelo. [5]

Para uma fonte de corrente alternada o resultado que o circuito RLC guia a corrente e tensão no sistema é que esses parâmetros irão oscilar de forma dependente da frequência que está ligada fundamentalmente com os elementos indutivos e capacitivos, pois a impedância desses componentes irá mudar de acordo com a variação da frequência. Como qualquer outro tipo de sistema elétrico existem perdas por dissipação de energia e a amplitude irá diminuir até que desapareça em circuitos do tipo natural, para o circuito do tipo a um degrau a amplitude do sinal irá estabilizar até o valor de tensão da fonte, a forma como isso ocorre é chamado de tipo de resposta do circuito. Existem basicamente 3 formas distintas de respostas: Superamortecida, criticamente amortecida e sub-amortecida. Os tipos de amortecimento podem ser melhor visualizados na Figura (7) na seção 2.3.1. onde estes serão melhor abordados.

Devido a classificação natural e a um degrau para os circuitos e de acordo o amortecimento esses sistemas terão equações de respostas distintas e consequentemente, coeficientes das equações como demonstra a Tabela 1. O coeficiente  $X_f$  para um circuito do tipo natural não existe nas equações e coeficientes.

Tabela 1. Equações e coeficientes de acordo o tipo de amortecimento do circuito RLC, adaptado. [5]

| Amortecimento           | Equações de resposta                                             | Coeficientes das Equações                                              |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Superamortecido         | $X(t) = X_f + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t}$                   | $X(0) = X_f + A'_1 + A'_2$<br>$\frac{dx}{dt}(0) = A'_1 S_1 + A'_2 S_2$ |
| Subamortecido           | $X(t) = X_f + (B'_1 \cos w_d t + B'_2 \sin w_d t) e^{-\alpha t}$ | $X(0) = X_f + B'_1$<br>$\frac{dx}{dt}(0) = -\alpha B'_1 + w_d B'_2$    |
| Criticamente Amortecido | $X(t) = X_f + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t}$         | $X(0) = X_f + D'_2$<br>$\frac{dx}{dt}(0) = D'_1 - \alpha D'_2$         |

Entre as aplicações mais comuns deste tipo de circuito estão: amplificadores, antenas e filtros como pode ser visualizado na Figura (5) e (6). Outras aplicações e esquemas de seus respectivos circuitos são mencionados em [8].

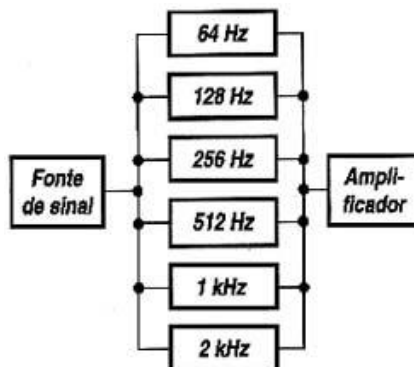


Figura 5. Esquemático de um amplificador [8]

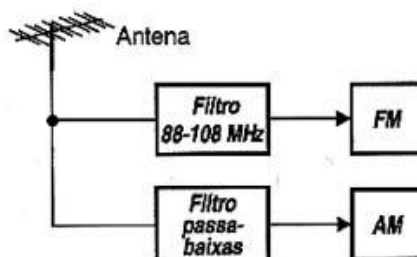


Figura 6. Esquemático de um filtro passa-baixa [8]

### 2.3.1. Tipos de Resposta de um Circuito RLC

Segundo [5], há três tipos de respostas (oscilações). Inicialmente, antes de definir qual o tipo de resposta, há a relação entre o circuito RLC e equação diferencial ordinária homogênea (homogênea, já que o é do tipo natural) dada pela Equação 10, todo o raciocínio para encontrar esta relação pode ser visualizada em [1] e [5].

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \quad (10)$$

Nestes circuitos, há dois parâmetros de frequências a serem analisadas: a de Neper e a de ressonância. As duas podem ser calculadas por meio das Equações (11) e (12), respectivamente, já a equação auxiliar é definida pela Equação (13).

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (11)$$

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (12)$$

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0 \quad (13)$$

Por meio da Equação (13), pode-se concluir que as suas raízes são:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w_0^2} \quad (14)$$

Através da Equação 13 (Equação auxiliar), é possível analisar por meio do valor do resistor (R) qual o será o valor de  $\sqrt{\alpha^2 - w_0^2}$  (Este será chamado de  $\delta$  para facilitar a análise), analisando as probabilidades, temos que:

- superamortecido, se  $\delta > 0$ ;
- criticamente amortecido, se  $\delta = 0$ ;
- subamortecido,  $\delta < 0$

E quando  $R = 0$ , temos que o circuito não há nenhuma forma de amortecimento e a resposta será uma harmônica simples, os tipos de amortecimento podem ser visualizados através da Figura (7).

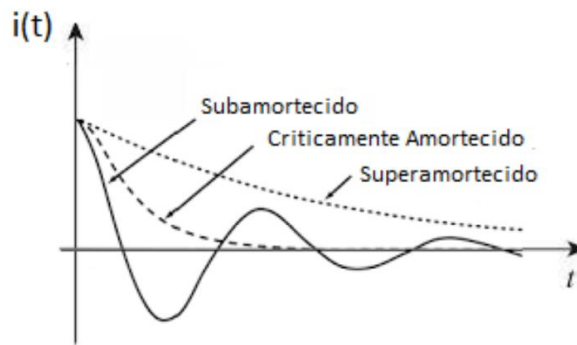


Figura 7. Tipos de amortecimento para um circuito RLC. [6]

## 3. METODOLOGIA

Com o objetivo de verificar a eficiência do método numérico de Euler na solução de equações diferenciais de circuitos RLC, quando comparado ao método numérico de Heun, solução analítica da Equação diferencial ordinária (EDO) do circuito RLC série e solução de EDO obtida através de software específico [11], por meio de três problemas distintos, sendo que, cada problema é um tipo de amortecimento diferente. As simulações dos métodos numéricos foram realizadas em um notebook com o sistema operacional Windows 11 edição Home Single Language em sua versão 21H2, as especificações de hardware são: Processador AMD Ryzen 5 – 3500U com gráfico integrado VEGA 8, 12 GB de memória RAM e armazenamento (Memória ROM) de 128 GB via SSD

NVME da marca Kingspec e 1TB de HDD da marca Western Digital Blue, já o software de simulação dos métodos numéricos é GNU Octave em sua versão 7.2.0 instalado no SSD.

Nas simulações dos problemas utilizou-se do intervalo de tempo em segundos  $[0,1]$  e comparados com a solução analítica, foi realizada a análise da influência do passo ( $h$ ) quanto a aproximação da solução numérica e ainda como critério avaliativo da eficácia dos métodos foram utilizadas a média de erro absoluto descrita na Equação (15), e o absoluto máximo, assim como uma análise gráfica, o resultado da solução analítica é representado por  $SA$  e do método a ser analisado por  $I$ . Já o para o software específico [11], para cada respectivo problema, foi simulada a resolução de cada respectiva EDO do problema e extraído os dados da tabela de erro, cujo erro global seria o equivalente do erro absoluto.

$$\text{Erro Absoluto (Eabs)} = |SA - I| \quad (15)$$

O erro absoluto foi calculado ponto a ponto do respectivo intervalo, por exemplo, para o tamanho de passo igual a 0,1, ou seja, 10 subintervalos, assim será calculado 10 erros absolutos e assim sucessivamente para os outros tamanhos de passo.

A seguir, estão representados os algoritmos que foram utilizados na simulação numérica.

Método de Euler

**Entrada**

|     |                                                         |
|-----|---------------------------------------------------------|
| a   | (variável com o início do intervalo em $x$ )            |
| b   | (variável com o fim do intervalo em $x$ )               |
| io  | (variável com o valor inicial de $i$ )                  |
| dio | (variável com o valor inicial de $u$ )                  |
| h   | (variável com o tamanho do passo)                       |
| x   | (vetor com os valores de $x$ )                          |
| dU  | (vetor duplo com os valores da solução de $i$ e $u$ )   |
| f   | (função na variável $x$ e $y$ , da equação diferencial) |
| SA  | (solução analítica do problema)                         |
| iy  | (vetor com as variáveis de $i$ )                        |
| uy  | (vetor com as variáveis de $u$ )                        |
| n   | (número de subintervalos)                               |

```
n ← (b-a)/h;  
x ← vetor[a: h: b]  
iy ← zeros (1,n);  
iy ← io;  
uy ← zeros (1,n);  
uy ← dio;
```

**Para  $i$  de 2: 1 até  $(b-a)/h$  faça**

```
iy(i) ← iy(i-1)+h*uy(i-1)  
uy(i) ← uy(i-1) + h * dU(uy(i-1),iy(i-1));
```

**Fim para**

**GeraGraficoAnalitico**  $y \leftarrow SA(X)$

**GeraGraficoNumerico**  $x, iy$

---

Para o método de Heun são mantidas as variáveis citadas pelo de Euler e são adicionadas as seguintes variáveis.

Método de Heun

**Entrada**

|     |                                                         |
|-----|---------------------------------------------------------|
| a   | (variável com o início do intervalo em $x$ )            |
| b   | (variável com o fim do intervalo em $x$ )               |
| io  | (variável com o valor inicial de $i$ )                  |
| di0 | (variável com o valor inicial de $u$ )                  |
| h   | (variável com o tamanho do passo)                       |
| x   | (vetor com os valores de $x$ )                          |
| dU  | (vetor duplo com os valores da solução de $i$ e $u$ )   |
| f   | (função na variável $x$ e $y$ , da equação diferencial) |
| SA  | (solução analítica do problema)                         |
| iy  | (vetor com as variáveis de $i$ )                        |
| uy  | (vetor com as variáveis de $u$ )                        |
| n   | (número de subintervalos)                               |
| k1  | (valor da primeira inclinação de cada iteração)         |
| k2  | (valor da segunda inclinação de cada iteração)          |

$n \leftarrow (b-a)/h;$

$x \leftarrow \text{vetor}[a: h: b]$

$uy \leftarrow \text{zeros}(2, n+1);$

$uy(:,1) \leftarrow [i0, di0];$

**Para  $i$  de 2: 1 até  $n+1$  faça**

$k1 = f(x(i-1), uy(:,i-1));$

$k2 = f(x(i-1)+h, uy(:,i-1)+h*k1);$

$uy(:,i) = uy(:,i-1) + h/2 * (k1+k2);$

**Fim para**

**GeraGraficoAnalitico**  $y \leftarrow SA(X)$

**GeraGraficoNumerico**  $x, uy(1,:)$

Cada problema irá abordar um caso de oscilação amortecida que foram demonstradas neste trabalho.

Para solucionar os problemas, é necessário realizar uma redução de ordem, ou seja, reescrever a EDO de segunda ordem em função de outra EDO de primeira ordem, para isto, considera-se o seguinte PVI para uma EDO de segunda ordem homogênea:

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1\end{aligned}\tag{16}$$

Para  $a$  e  $b$  constantes quaisquer, é possível fazer a redução de ordem:

$$u = y' \text{ e } u' = y''\tag{17}$$

Assim, reescrevendo a Equação 16 juntamente com seu respectivo PVI, temos que:

$$\begin{aligned}u' + au + by &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \\ u(x_0) &= y_1\end{aligned}\tag{18}$$

Baseando-se na Equação (10) e definindo o valor da indutância sendo 25 Henry (H) foi calculado uma capacitância de  $625 \mu F$  e com isso variando apenas o valor da resistência (R) para obter diferentes tipos de oscilações nos circuitos.

**Problema 01:** Circuito superamortecido. A equação diferencial e seu respectivo PVI são dados por:

$$\begin{aligned}I'' + 20I' + 64I &= 0; R = 80\Omega \\ I(0) &= 0 \\ I'(0) &= 1\end{aligned}\tag{19}$$



Reduzindo a ordem da equação, temos:

$$\begin{aligned}u' + 20u + 64I &= 0 \\ I(0) &= 0 \\ u(0) &= 1\end{aligned}\tag{20}$$

A solução analítica do respectivo problema é dada por:

$$I(t) = \frac{1}{12}e^{-4t} - \frac{1}{12}e^{-16t}\tag{21}$$

**Problema 02:** Circuito subamortecido. A equação diferencial e seu respectivo PVI são dados por:

$$\begin{aligned}I'' + 10I' + 64I &= 0 ; R = 160\Omega \\ I(0) &= 0 \\ I'(0) &= 1\end{aligned}\tag{22}$$

Reduzindo a ordem da equação, temos:

$$\begin{aligned}u' + 10u + 64I &= 0 \\ I(0) &= 0 \\ u(0) &= 1\end{aligned}\tag{23}$$

A solução analítica do respectivo problema é dada por:

$$I(t) = e^{-5t}(\frac{1}{\sqrt{39}}\text{sen}(\sqrt{39}t))\tag{24}$$

**Problema 03:** Circuito com amortecimento crítico. A equação diferencial e seu respectivo PVI são dados por:

$$\begin{aligned}I'' + 16I' + 64I &= 0 ; R = 100\Omega \\ I(0) &= 0 \\ I'(0) &= 1\end{aligned}\tag{25}$$

Reduzindo a ordem da equação, temos:

$$\begin{aligned}u' + 16u + 64I &= 0 \\ I(0) &= 0 \\ u(0) &= 1\end{aligned}\tag{26}$$

A solução analítica do respectivo problema é dada por:

$$I(t) = te^{-8t}\tag{27}$$

## 4. RESULTADOS

Nesta seção, serão abordados os comentários dos resultados obtidos dos métodos numéricos implementados computacionalmente e através do software [11] para cada problema. De modo geral, o método numérico de Heun computacional e o calculado pelo Wolfram obteve sempre erros absolutos menores que o de Euler, assim como esperado já que este método é uma melhoria do método de Euler. O Wolfram para os 3 problemas, no tamanho de passo  $h = 0,0001$  não se estimou valores dos erros, devido ao número de subintervalos (10000), seria necessário efetuar o pagamento de uma mensalidade para obter os devidos dados.

### 4.1. Problema 1

Resultados obtidos a partir da execução dos métodos numéricos nos algoritmos e via software Wolfram [11] estão apresentados na Tabela 2 e na Figura 8 na qual apresenta gráficos somente para o Wolfram [11] com  $h$  (passo) = 0.1, já que com os outros tamanhos de passo, graficamente, assemelham-se com os gráficos dos métodos numéricos obtidos pelo algoritmo representados pelos índices (a) e (b).

Tabela 2. Resultados por tamanho de passo para o problema 1. (Autoria própria)

| Erro Absoluto Médio |       |      |               |              |
|---------------------|-------|------|---------------|--------------|
| h                   | Euler | Heun | Wolfram Euler | Wolfram Heun |

|                      |                         |                         |                          |                          |
|----------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0,1                  | 0.012588                | 0.013205                | 0.0166862                | 0.01125                  |
| 0,01                 | $5.1642 \times 10^{-4}$ | $2.4181 \times 10^{-5}$ | $4.83715 \times 10^{-4}$ | $2.12318 \times 10^{-5}$ |
| 0,001                | $5.0262 \times 10^{-5}$ | $2.1886 \times 10^{-7}$ | $4.6913 \times 10^{-5}$  | $1.81661 \times 10^{-7}$ |
| 0,0001               | $5.0126 \times 10^{-6}$ | $2.1674 \times 10^{-9}$ | Não estima               | Não estima               |
| Erro Absoluto Máximo |                         |                         |                          |                          |
| h                    | Euler                   | Heun                    | Wolfram Euler            | Wolfram Heun             |
| 0,1                  | 0.060965                | 0.039035                | 0.0609647                | 0.0390353                |
| 0,01                 | $2.3132 \times 10^{-3}$ | $1.4339 \times 10^{-4}$ | $2.3132 \times 10^{-3}$  | $1.40645 \times 10^{-4}$ |
| 0,001                | $2.1566 \times 10^{-4}$ | $1.2808 \times 10^{-6}$ | $2.14089 \times 10^{-4}$ | $1.25705 \times 10^{-6}$ |
| 0,0001               | $2.1417 \times 10^{-5}$ | $1.2667 \times 10^{-8}$ | Não estima               | Não estima               |

Conforme observado na Tabela 2 e nos gráficos da Figura 8, todos os métodos utilizados foram eficazes na aproximação da solução analítica, já que o maior erro absoluto foi 0,016%, importante salientar que, os menores erros absolutos de modo geral, foram dos métodos numéricos aplicados pelos algoritmos, todavia, o software [11] deixou de apresentar dados consistentes, apenas para um tamanho de passo ( $h = 0.0001$ ) como já mencionado anteriormente. Um ponto importante, é o gráfico método de Heun computacional no  $h = 0,1$ , onde o gráfico se apresentou com um valor constante em relação ao eixo da corrente, isso ocorreu devido ao método de Heun estimar a inclinação por meio da derivada no ponto inicial e outra no ponto final onde o resultado dessas foi zero, já o Wolfram estimou um gráfico, porém este não é o comportamento esperado, acredita-se que o Wolfram estima graficamente de maneira distinta dos métodos computacionais.

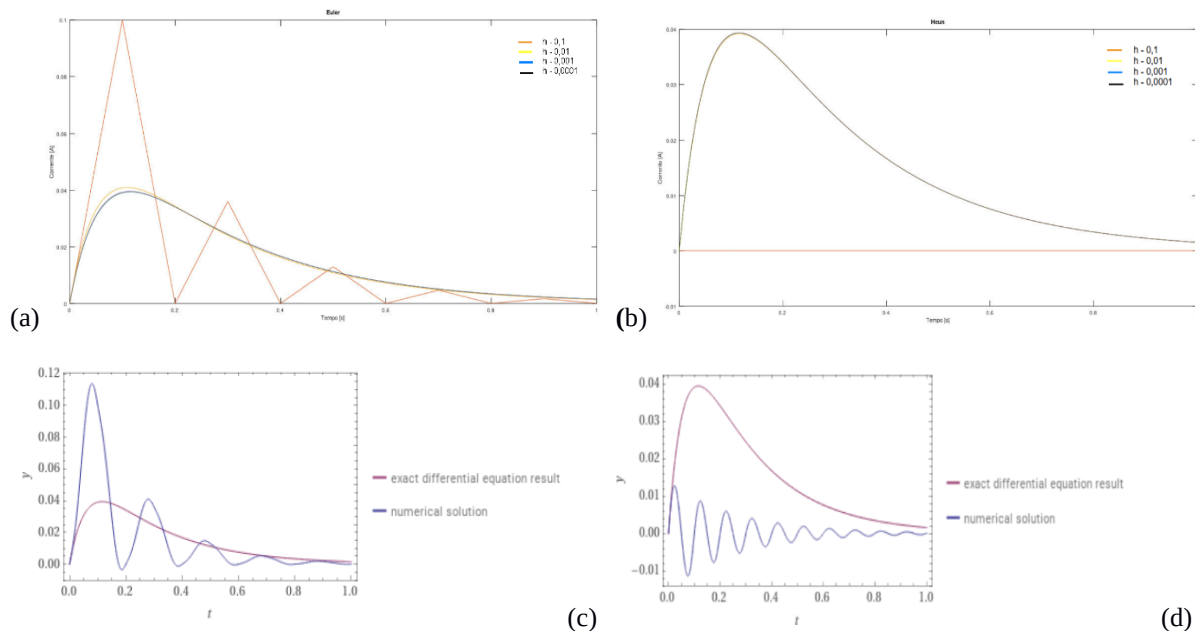


Figura 8. Gráficos para cada método numérico (a) Euler, (b) Heun) do Problema 01 com a curva solução analítica em azul. Gráficos do Wolfram Euler (c) e Heun (d) de cada método numérico.

#### 4.2. Problema 2

Resultados obtidos a partir da execução dos métodos numéricos nos algoritmos e via software Wolfram [11] estão apresentados na Tabela 3 e na Figura 9, na qual apresenta gráficos somente para o Wolfram [11] com  $h$  (passo) = 0.1, já que com os outros tamanhos de passo, graficamente, assemelham-se com os gráficos dos métodos numéricos obtidos pelo algoritmo representados pelos índices (a) e (b).

Tabela 3. Resultados por tamanho de passo para o problema 2. (Autoria própria)

|                      |                         |                         |                          |                          |
|----------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Erro Absoluto Médio  |                         |                         |                          |                          |
| h                    | Euler                   | Heun                    | Wolfram Euler            | Wolfram Heun             |
| 0,1                  | 0.024335                | $4.0423 \times 10^{-3}$ | 0.0235581                | $5.48779 \times 10^{-3}$ |
| 0,01                 | $1.2620 \times 10^{-3}$ | $3.7438 \times 10^{-5}$ | $1.29418 \times 10^{-3}$ | $3.64115 \times 10^{-5}$ |
| 0,001                | $1.2088 \times 10^{-4}$ | $3.6477 \times 10^{-7}$ | $1.20684 \times 10^{-4}$ | $3.68779 \times 10^{-7}$ |
| 0,0001               | $1.2038 \times 10^{-5}$ | $3.6377 \times 10^{-9}$ | Não estima               | Não estima               |
| Erro Absoluto Máximo |                         |                         |                          |                          |
| h                    | Euler                   | Heun                    | Wolfram Euler            | Wolfram Heun             |
| 0,1                  | 0.051291                | 0.012884                | 0.051291                 | 0.012884                 |

|        |                         |                         |                          |                          |
|--------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0,01   | $3.0683 \times 10^{-3}$ | $1.0414 \times 10^{-4}$ | $2.99954 \times 10^{-3}$ | $1.03913 \times 10^{-4}$ |
| 0,001  | $2.9295 \times 10^{-4}$ | $1.0058 \times 10^{-6}$ | $2.87152 \times 10^{-4}$ | $1.00086 \times 10^{-6}$ |
| 0,0001 | $2.9162 \times 10^{-5}$ | $1.0022 \times 10^{-8}$ | Não estima               | Não estima               |

A partir dos dados obtidos, os métodos de Euler e Heun apresentaram dificuldade em estimar uma representação gráfica com o passo de 0,1 já que a curva obtida demonstra um erro absoluto alto (0,024% aproximadamente) em relação a solução analítica e quando comparados ao restante dos erros. Quando todos os métodos são comparados, os aplicados via software específico possui uma certa equivalência, já que os dados de erro demonstrados são aproximados, entretanto, os métodos aplicados pelos algoritmos, possuem uma vantagem estimar os valores de erros do menor tamanho de passo, porém os métodos implementados computacionalmente e o software [11] alternaram os resultados, em certos passos os métodos obtiveram menor erro comparado ao software e vice-versa. Dessa forma, conclui-se que, quanto menor o tamanho de  $h$ , menor os erros, assim, haverá uma maior precisão da curva aproximada em relação a curva analítica, com exceção para o Wolfram, pois este não irá estimar os valores como já citado no início desta seção.

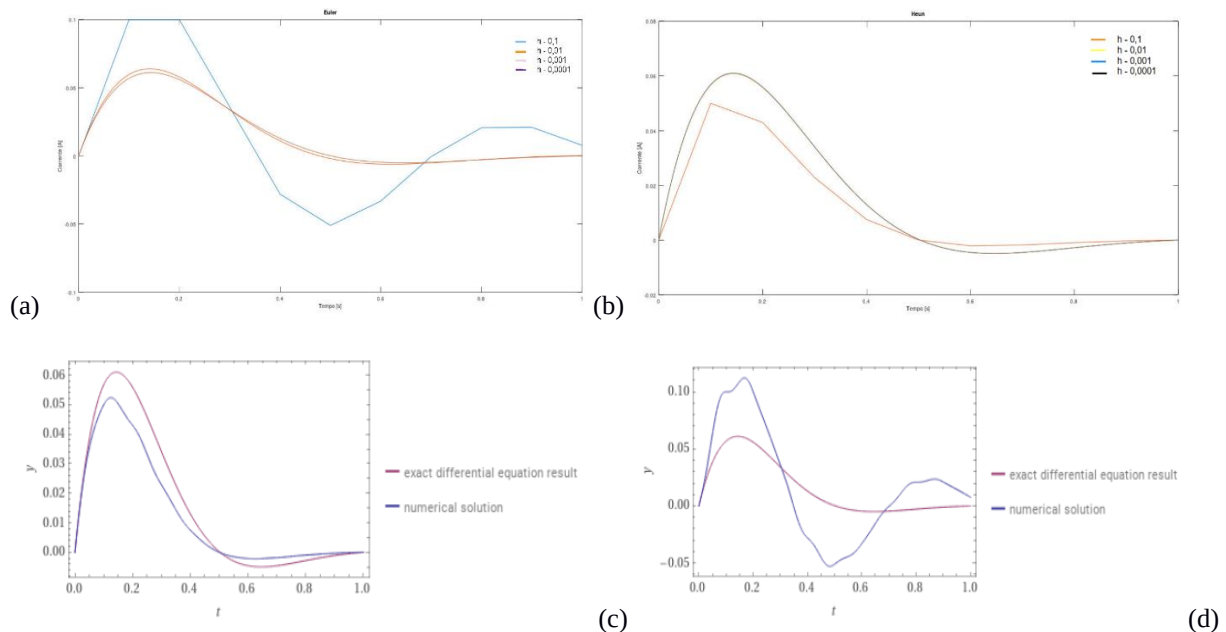


Figura 9. Gráficos para cada método numérico (a) Euler, (b) Heun) do Problema 02 com a curva solução analítica em azul. Gráficos do Wolfram Euler (c) e Heun (d) de cada método numérico.

#### 4.3. Problema 3

Resultados obtidos a partir da execução dos métodos numéricos nos algoritmos e via software Wolfram [11] estão apresentados na Tabela 4 e na Figura 10, na qual apresenta gráficos somente para o Wolfram [11] com  $h$  (passo) = 0.1, já que com os outros tamanhos de passo, graficamente, assemelham-se com os gráficos dos métodos numéricos obtidos pelo algoritmo representados pelos índices (a) e (b).

Tabela 4. Resultados por tamanho de passo para o problema 3. (Autoria própria)

| Erro Absoluto Médio  |                         |                         |                          |                          |
|----------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| h                    | Euler                   | Heun                    | Wolfram Euler            | Wolfram Heun             |
| 0,1                  | $9.2489 \times 10^{-3}$ | $5.7988 \times 10^{-3}$ | $8.35782 \times 10^{-3}$ | $5.05624 \times 10^{-3}$ |
| 0,01                 | $6.8286 \times 10^{-4}$ | $2.6589 \times 10^{-5}$ | $6.58496 \times 10^{-4}$ | $2.05051 \times 10^{-5}$ |
| 0,001                | $6.6517 \times 10^{-5}$ | $2.4842 \times 10^{-7}$ | $6.49306 \times 10^{-5}$ | $1.76993 \times 10^{-7}$ |
| 0,0001               | $6.6345 \times 10^{-6}$ | $2.4675 \times 10^{-9}$ | Não estima               | Não estima               |
| Erro Absoluto Máximo |                         |                         |                          |                          |
| h                    | Euler                   | Heun                    | Wolfram Euler            | Wolfram Heun             |
| 0,1                  | 0.055067                | 0.024933                | 0.055067                 | 0.0249329                |
| 0,01                 | $2.4602 \times 10^{-3}$ | $1.1623 \times 10^{-4}$ | $2.30365 \times 10^{-3}$ | $1.15153 \times 10^{-4}$ |
| 0,001                | $2.3204 \times 10^{-4}$ | $1.0752 \times 10^{-6}$ | $2.16874 \times 10^{-4}$ | $1.06368 \times 10^{-6}$ |
| 0,0001               | $2.3072 \times 10^{-5}$ | $1.0669 \times 10^{-8}$ | Não estima               | Não estima               |

Neste problema, o software específico [11] obteve resultados de erro iguais ou mais precisos do que os métodos

numéricos aplicados pelos algoritmos, com exceção o tamanho de passo igual a 0,0001, os valores não convergiram para esse tamanho de passo devido ao número de subintervalos, dessa forma, o software [11] pode ser utilizado para valor de tamanho de passo de 0,001 ou maior, porém o tamanho de passo 0,1 não é adequado em todos os problemas, já que os erros absolutos serão maiores. Assim como nos outros problemas, quanto menor o valor de  $h$  menor será o erro absoluto médio, destacando-se o método de Heun que convergiu os menores erros, principalmente pelo Wolfram.

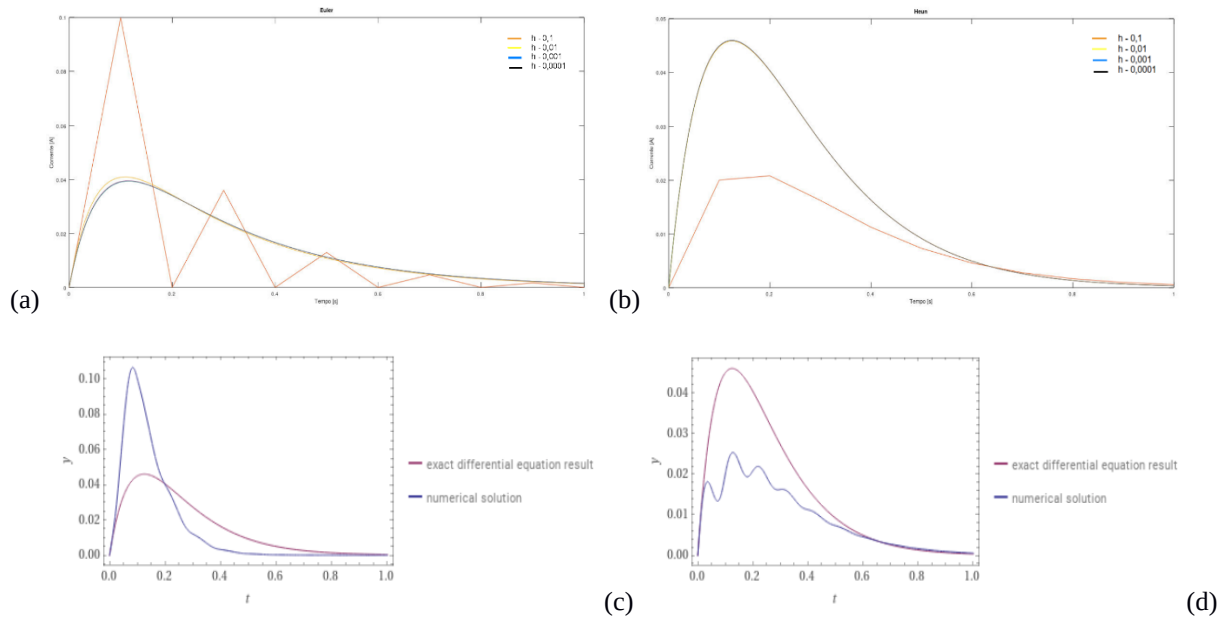


Figura 10. Gráficos para cada método numérico (a) Euler, (b) Heun) do Problema 03 com a curva solução analítica em azul. Gráficos do Wolfram Euler (c) e Heun (d) de cada método numérico.

## 5. CONCLUSÃO

Por meio do estudo das equações diferenciais ordinárias homogêneas e dos métodos numéricos de Euler, Heun e software Wolfram, é possível solucionar equações diferenciais de segunda ordem aplicadas a circuitos RLC descritos neste trabalho, obtendo resultados eficazes, por meio de programação no Octave GNU. Conclui-se que os métodos se mostraram, no geral, eficientes na estimativa da solução dos problemas apresentados para os diferentes tipos de amortecimento dependendo do tamanho de passo, quanto menor este, melhor será a eficácia. Assim, dentre todos os métodos estudados, o de Heun foi o melhor de todos, tanto quando aplicado em forma de algoritmo, como através do Wolfram, apresentando a curva estimada da aproximação igual à da solução analítica da equação diferencial abordada, contendo as menores taxas de erros.

Uma condição observada durante este estudo, foi a dependência do ajuste do passo, visto que quanto menor for o seu tamanho, maior será a eficácia dos resultados e das curvas obtidas pelos métodos, isso ocorre devido haver um maior número pontos (subintervalos) dentro do intervalo definido inicialmente.

Sendo assim, o trabalho conseguiu atingir os seus objetivos ao estudar a eficiência dos métodos numéricos via algoritmos e software Wolfram aplicados a equações homogêneas de segunda ordem de um circuito em série RLC com resposta natural.

Como sugestão para trabalhos futuros, destaca-se: aplicar o método numérico de Runge-Kutta, otimizar o algoritmo desenvolvido para melhorar sua eficiência, estudar a análise das soluções finais encontradas em cada caso, fazer uso de novos problemas de análise para cada tipo de amortecimento e buscar por novas fontes de trabalhos na literatura afim de auxiliar na pesquisa.

---

## REFERÊNCIAS

- [1] ZILL, D. G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem, tradução norte-americana. 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- [2] ZILL, D. G. Equações diferenciais. 3. ed. São Paulo: Always Learning, 2007.
- [3] CHAPRA, C. S. Métodos numéricos para engenharia. 5. Ed. São Paulo: Mc Graw Hill, 2011.
- [4] Ruggiero, Marcia. Cálculo Numérico - Aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2000.
- [5] Nilsson, James W. e Reidel, Susan A., Circuitos elétricos. 10. Ed. São Paulo: Pearson, 2016.
- [6] BARROSO, Leônidas Conceição et al. Cálculo Numérico: (com Aplicações). 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987. 384 p
- [7] Circuitos RLC. Determinação das Condições Iniciais. Disponível em: <[https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id\\_cpmenu/9731/Circuitos\\_RLC\\_v9\\_20\\_16004309885212\\_9731.pdf](https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/9731/Circuitos_RLC_v9_20_16004309885212_9731.pdf)>. Acesso em 19 de ago. 2022.
- [8] Instituto Newton Braga. Circuitos. Disponível em: <https://www.newtonbraga.com.br/index.php/banco-de-circuitos.html>. Acesso em 20 de ago. 2022.
- [9] Esquema de um Amplificador. Disponível em: [https://www.newtonbraga.com.br/images/stories/eletrica/el0001\\_11.jpg](https://www.newtonbraga.com.br/images/stories/eletrica/el0001_11.jpg). Acesso em 20 de ago. 2022.
- [10] Esquema de um Filtro Passa-Baixa. Disponível em: [https://www.newtonbraga.com.br/images/stories/eletrica/el0001\\_10.jpg](https://www.newtonbraga.com.br/images/stories/eletrica/el0001_10.jpg). Acesso em 20 de ago. 2022.
- [11] Wolfram Alpha. Computacional Intelligence. Disponível em: <https://www.wolframalpha.com>. Acesso em 20 de ago. 2022
- [12] GNU Octave. Disponível em: <https://octave.org/download>. Acesso em 20 de ago. 2022