



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIAS E TECNOLOGIAS
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

KAIO ALENCAR BARRETO

**PROJETO DE UM CONTROLADOR PID PARA UM SISTEMA BARRA-
BOLA UTILIZANDO MÉTODO ALGÉBRICO**

PAU DOS FERROS-RN

2023

KAIO ALENCAR BARRETO

**PROJETO DE UM CONTROLADOR PID PARA O SISTEMA BARRA-
BOLA UTILIZANDO MÉTODO ALGÉBRICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia de Computação da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), como parte dos requisitos para obtenção do Título de Engenheiro de Computação.

Orientador: Prof. Dr. Cecilio Martins de Sousa Neto

PAU DOS FERROS-RN

2023

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

B273p Barreto, Kaio Alencar.
Projeto de um controlador PID para um sistema
barra-bola utilizando método algébrico / Kaio
Alencar Barreto. - 2023.
39 f. : il.

Orientador: Cecilio Martins de Sousa Neto.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Engenharia de
Computação, 2023.

1. Automação. 2. Controlador PID. 3. Sistema
barra-bola. 4. Sensor. I. Sousa Neto, Cecilio
Martins de, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Pau dos Ferros
Bibliotecária: Erlanda Maria Lopes da Silva
CRB: 15/966

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

KAIO ALENCAR BARRETO

PROJETO DE UM CONTROLADOR PID PARA O SISTEMA BARRA-BOLA UTILIZANDO MÉTODO ALGÉBRICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia de Computação da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), como parte dos requisitos para obtenção do Título de Engenheiro de Computação.

Defendida em: 04 / 10 / 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cecilio Martins de Sousa Neto (UFERSA)
Presidente

Prof. Dr. Pedro Thiago Valério de Souza (UFERSA)
Membro Examinador

Prof. Dr. Adller de Oliveira Guimarães (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me guiar até este momento tão especial em minha jornada.

Aos meus pais, Maria Erisvoluzia e Francisco de Assis, por seu inabalável apoio, amor e incentivo ao longo dos meus estudos.

Agradeço sinceramente ao Prof. Dr. Cecilio Martins, meu orientador, por sua contribuição fundamental em todos os estágios deste projeto. Desde o início, o Prof. Cecilio não apenas me propôs o tema que foi a base deste trabalho, mas também forneceu orientações excepcionais sobre como desenvolvê-lo, sua mentoria pessoal foi inestimável.

À Banca Examinadora, por sua valiosa disponibilidade e contribuições significativas para o meu crescimento pessoal e acadêmico.

Aos meus irmãos, Mabely Alencar e Cássio Alencar, por estarem sempre ao meu lado, oferecendo apoio incondicional e assistência de todas as formas possíveis.

Aos meus amigos, Cássio Alencar, Ivan Gustavo, Danilo Lima, Girlandio Moura, por me incentivarem constantemente a buscar meu melhor em todos os momentos.

E, por último, mas não menos importante, expresso minha profunda gratidão à minha namorada, Ariani Abrantes, que foi meu pilar de apoio constante, ajudando-me a enfrentar cada desafio ao longo de minha jornada acadêmica. Seu amor e apoio foram fundamentais para o meu sucesso.

“Por mais difícil que a vida possa parecer,
existe sempre algo que você pode fazer e
alcançar.”

Stephen Hawking

RESUMO

O sistema barra-bola é um sistema que combina uma barra móvel e uma bola, permitindo a interação controlada entre os dois elementos. O mesmo é um campo de estudo interdisciplinar que abrange princípios de engenharia, controle, calibração de sensores e programação. Através da implementação de um sensor Sharp GP2Y0A21Y utilizado para medir a distância da bola, um Arduino Mega 2560 como plataforma de controle, e um servo motor MG995 para mover a barra, este estudo explora os desafios e soluções envolvidos na operação e controle desse sistema. A calibração do sensor desempenha um papel crucial na obtenção de medições precisas e confiáveis, com um processo detalhado envolvendo a coleta de dados de tensão e distância para estabelecer uma relação precisa entre eles. Os resultados experimentais apresentam dois cenários distintos: um com uma bola oca e outro com uma bola maciça. Em ambos os casos, diferentes controladores (P, PD e PID) foram aplicados para avaliar o desempenho do sistema. Os resultados revelaram a sensibilidade do sistema a mudanças na planta (tipo de bola). Este estudo demonstra a complexidade do controle de um sistema barra-bola, servindo como um campo fértil para o estudo de princípios fundamentais de controle, dinâmica e calibração de sensores, encontrando aplicações em diversos domínios, como automação industrial, robótica e otimização de processos.

Palavras-chave: automação; controlador PID; sistema barra-bola; sensor.

ABSTRACT

The Ball & Beam System is a configuration that combines a movable beam and a ball, enabling controlled interaction between the two elements. The same is an interdisciplinary field of study that encompasses engineering principles, control, sensor calibration, and programming. By implementing a Sharp GP2Y0A21Y sensor for measuring the ball's distance, an Arduino Mega 2560 as the control platform, and an MG995 servo motor for beam movement, this study explores the challenges and solutions involved in operating and controlling this system. Sensor calibration plays a crucial role in achieving precise and reliable measurements, with a detailed process involving data gathering of voltage and distance to establish an accurate relationship between them. Experimental results show two distinct scenarios: one with a hollow ball and the other with a solid ball. In both cases, different controllers (P, PD, and PID) were applied to evaluate the system's performance. The findings revealed the system's sensitivity to changes in the plant (ball type). This study demonstrates the complexity of controlling a Ball & Beam System, serving as a fertile ground for the study of fundamental principles in control, dynamics, and sensor calibration, with applications spanning various domains, including industrial automation, robotics, and process optimization.

Keywords: automation; PID controller; ball & beam system; sensor.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Diagrama de corpo livre do sistema	19
FIGURA 2 - Forças de reação do sistema	20
FIGURA 3 - Sistema barra-bola	26
FIGURA 4 - Calibragem do sensor	28
FIGURA 5 - Representação da curva característica	30
FIGURA 6 - Esquema de ligação do sistema	31
FIGURA 7 - Pesagem da bola oca.....	33
FIGURA 8 - Pesagem da bola maciça.....	34
FIGURA 9 - Resposta do sistema com um controlador proporcional com a bola oca	35
FIGURA 10 - Resposta do sistema com um controlador PD com a bola oca.....	35
FIGURA 11 - Resposta do sistema com um controlador PID com a bola oca	36
FIGURA 12 - Resposta do sistema com um controlador proporcional com a bola maciça.....	36
FIGURA 13 - Resposta do sistema com um controlador PD com a bola maciça.....	37
FIGURA 14 - Resposta do sistema com um controlador PID com a bola maciça	37

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Parâmetros do sistema.	22
TABELA 2 - Coleta de dados do sensor.....	29

LISTA DE SÍMBOLOS E SIGLAS

m	massa da bola
R	Raio da bola
δ	Deslocamento
L	Comprimento da rampa
x	Posição da bola
θ_1	Ângulo da rampa
θ_2	Ângulo da engrenagem

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
1.1 Objetivos.....	13
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	15
2.1 Trabalhos Relacionados.....	16
2.2 Controlador PID.....	17
2.2.1 Alocação de Polos	18
2.3 Modelagem do Sistema Barra e Bola	18
2.3.1 Projeto do Controlador PID	23
3. DESCRIÇÃO DO SISTEMA	26
3.1 Barra-Bola.....	26
3.2 Sensor.....	27
3.2.1 Calibração do Sensor	28
3.3 Arduino.....	30
3.4 Servo Motor MG995	32
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	33
4.1 Primeiro Cenário.....	34
4.2 Segundo Cenário	36
5. CONCLUSÃO.....	38
6. REFERÊNCIAS.....	39

1. INTRODUÇÃO

A área de controle de sistemas dinâmicos tem desempenhado um papel fundamental na otimização e aprimoramento de processos industriais, automação de sistemas e desenvolvimento de robótica avançada. De acordo com Bazanella (2005) o controlador proporcional integral derivativo (PID) mesmo com dispositivos mais avançados disponíveis, continua sendo o mais utilizado na indústria, dentre as técnicas de projeto, destaca-se o projeto por alocação de polos, uma abordagem poderosa que permite projetar um controlador personalizado para atender às especificações desejadas.

O projeto dos parâmetros por alocação de polos baseia-se na teoria de controle moderno, que busca projetar controladores capazes de colocar os polos do sistema em posições desejadas para alcançar um desempenho ótimo. Ao alocar os polos, estamos determinando as características de resposta transitória e estabilidade do sistema de controle. Segundo Nise (2012), o projeto de realimentação de variáveis de estado para alocação de polos em malha fechada visa alcançar a igualdade da equação característica do sistema quando este está operando sob controle em malha fechada.

Castrucci (2018) diz que essa metodologia de projeto busca determinar os valores adequados das variáveis de estado do sistema, de modo a posicionar os polos desejados na equação característica, resultando em um desempenho otimizado e estável do sistema, no entanto não permite a imposição dos zeros de malha fechada. No contexto do sistema barra-bola, o projeto dos parâmetros de um controlador PID por alocação de polos torna-se uma ferramenta valiosa para controlar e estabilizar esse sistema não linear e instável. O sistema barra-bola consiste em uma barra montada em um eixo horizontal, onde uma bola pode se mover livremente ao longo da barra, o objetivo é controlar a posição da bola na barra, mantendo-a estável em uma posição desejada através da posição angular do motor.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver e implementar um controlador PID para um sistema barra bola, utilizando a metodologia de projeto baseada na alocação de polos.

Os objetivos específicos são:

- Realizar uma revisão bibliográfica sobre os conceitos fundamentais de controle PID;
- Realizar a modelagem matemática do sistema barra bola;
- Implementar um controlador PID em uma plataforma de controle;
- Documentar o processo de desenvolvimento e os resultados obtidos.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A área de controle de sistemas dinâmicos desempenha um papel central na otimização e aprimoramento de uma variedade de processos industriais, sistemas de automação e desenvolvimento de tecnologias avançadas. Nesse contexto, o uso de técnicas de controle eficazes é essencial para garantir o funcionamento estável, preciso e seguro de sistemas complexos. Entre as várias abordagens de controle, o controlador PID se destaca como uma ferramenta robusta e amplamente empregada devido à sua simplicidade e eficácia.

O projeto e implementação de controladores PID são tópicos de grande relevância, pois esses controladores são a base para o controle de uma ampla gama de sistemas dinâmicos, desde processos industriais até veículos autônomos. Essa relevância é ainda mais evidente ao considerar sistemas não lineares e complexos, onde o desafio de manter a estabilidade e o desempenho desejado é aumentado significativamente. Nesse contexto, a técnica de alocação de polos se destaca como uma abordagem avançada para o projeto de controladores personalizados, permitindo a adaptação precisa do comportamento do sistema de acordo com requisitos específicos.

No entanto, a aplicação de controladores PID e, mais particularmente, a alocação de polos em sistemas não lineares apresenta desafios únicos que requerem compreensão aprofundada e expertise técnica. O sistema barra-bola, objeto deste estudo, é um exemplo ilustrativo desses desafios. A natureza não linear e instável desse sistema exige uma abordagem cuidadosa para o projeto do controlador, a fim de garantir seu desempenho e estabilidade sob diferentes condições de operação.

O presente trabalho assume importância ao abordar esses desafios por meio do projeto de um controlador PID por alocação de polos para o sistema barra-bola. A análise e solução de problemas enfrentados na implementação de controladores em sistemas não lineares, como o sistema barra-bola, não só contribuirão para o entendimento teórico mais profundo dessas técnicas, mas também oferecerão percepções práticas que podem ser aplicados em diversas áreas, como automação industrial, robótica avançada, controle de processos e sistemas de transporte inteligentes.

Além disso, este estudo contribuirá para a disseminação do conhecimento sobre técnicas de controle avançado entre estudantes, pesquisadores e profissionais da engenharia. Ao explorar a interseção entre controle PID, alocação de polos e sistemas não

lineares, este trabalho também pode inspirar a investigação de novas abordagens e estratégias para o controle de sistemas complexos e dinâmicos.

Em última análise, a importância deste tema reside na sua aplicabilidade prática e nas implicações que tem para a melhoria contínua da tecnologia, da automação e do controle de sistemas dinâmicos, desempenhando um papel fundamental no avanço de uma ampla gama de campos industriais e tecnológicos.

2.1 Trabalhos Relacionados

Nesta seção, são abordados trabalhos relacionados ao controle do sistema barra-bola, com ênfase em abordagens de controle PID. Os trabalhos discutem modelagem, implementação e estratégias de controle para esse sistema, bem como técnicas de estimativa de estado e controle Regulador Linear-Quadrático (LQR). O LQR é uma técnica de controle usada para projetar controladores que otimizam o desempenho de sistemas de controle lineares. Ele é amplamente aplicado em engenharia de controle para sistemas que podem ser modelados de maneira linear e sujeitos a equações diferenciais lineares.

O sistema barra-bola é uma plataforma amplamente estudada para testar diferentes técnicas de controle. Colón et al. (2013) abordaram o "Modeling, Control and Implementation of a Ball and Beam System", onde apresentaram um sistema de controle em malha fechada para o sistema barra-bola. O estudo incluiu modelagem matemática e comparação de diferentes modelos, considerando o movimento da bola com e sem deslizamento. Um controlador PID foi implementado no sistema real e analisado comparativamente. No entanto, a presença de não-linearidades, como fricção, trouxe desafios adicionais para o controle.

Pang et al. (2011) apresentaram uma abordagem de controle STF-LQR no artigo "Augmented State Estimation and LQR Control for a Ball and Beam System". O estudo propõe um sistema de controle que utiliza um filtro de rastreamento forte (STF) para estimar adaptativamente todos os estados do sistema. Um controlador LQR discreto é projetado com base nas estimativas dos estados e na modelagem do sistema. Esse método busca compensar as dinâmicas não modeladas, como fricção e não linearidade, contribuindo para o controle eficaz do sistema barra-bola.

Saad e Khalallah (2017) abordaram a implementação de um "Embedded Ball-beam Controller Using PID Algorithm". Neste estudo, um controlador PID foi

desenvolvido com base em um microcontrolador Arduino. O sistema utilizou um servo motor para controlar a posição da bola em uma viga. O controlador PID foi projetado para rastrear uma posição desejada da bola, e os parâmetros do controlador foram ajustados usando um método de "tentativa e erro". O sistema foi validado através de experimentos práticos.

Considerando os trabalhos relacionados, fica evidente que o controle PID é uma abordagem comumente usada para o sistema barra-bola. Diferentes estudos exploraram adaptações e variações dessa abordagem, como a incorporação de técnicas de estimativa de estado, controle LQR e implementação em sistemas embarcados. Enquanto alguns estudos focaram na modelagem detalhada do sistema, outros enfatizaram a eficácia de controladores em ambientes práticos.

2.2 Controlador PID

O controle proporcional integral derivativo (PID) é uma das técnicas de controle mais amplamente utilizadas devido à sua simplicidade e eficácia em uma variedade de aplicações. De acordo com Bazanella e Silva Jr., "o controlador PID é capaz de eliminar erros em regime permanente, através da ação integral, bem como antecipar o comportamento do processo, graças à ação derivativa. A ação proporcional, por sua vez, faz com que o sistema reaja ao erro presente conferindo ao sistema uma reação imediata e, portanto, rápida à ação de perturbações ou variações de referência de magnitudes significativas."

- **Componente Proporcional (P):** O termo proporcional responde ao erro atual multiplicado por uma constante proporcional (K_p). Ele ajusta a saída proporcionalmente ao erro, o que significa que quanto maior o erro, maior será a contribuição do termo proporcional para a ação de controle. Isso ajuda a corrigir a resposta do sistema mais rapidamente, mas pode resultar em oscilações e *overshoot* se usado em excesso.
- **Componente Integral (I):** O termo integral é proporcional à integral acumulada dos erros passados, multiplicada por uma constante integral (K_i). Ele age para eliminar o erro acumulado ao longo do tempo, o que é particularmente útil para eliminar o erro em estado estacionário. O termo integral também ajuda a reduzir o erro devido a perturbações constantes no sistema.

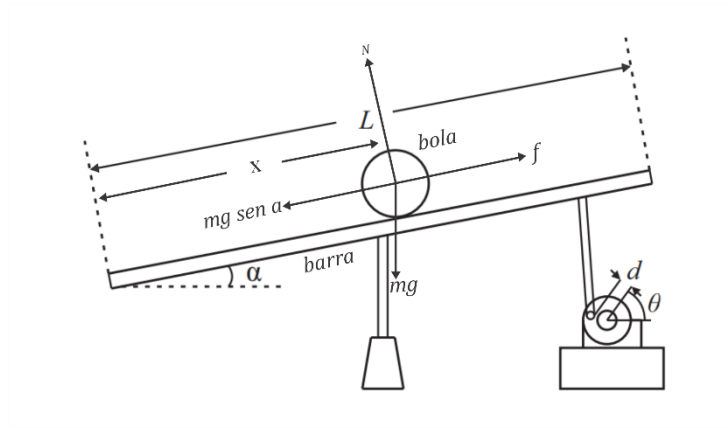
- **Componente Derivativo (D):** O termo derivativo é proporcional à taxa de mudança do erro, multiplicada por uma constante derivativa (K_d). Ele previne a resposta do sistema de reagir excessivamente a mudanças rápidas no erro, ajudando a reduzir as oscilações e *overshoots*. O termo derivativo melhora a estabilidade do sistema, mas seu uso excessivo pode tornar o sistema mais sensível ao ruído.

2.2.1 Alocação de Polos

A alocação de polos é uma técnica avançada de projeto de controladores que se concentra em colocar os polos do sistema em posições desejadas no plano complexo. Os polos são as raízes do denominador da função de transferência do sistema, que determinam suas características dinâmicas e o considerar sistemas não lineares, como o sistema barra-bola abordado neste trabalho, o desafio de controlar tais sistemas reside na natureza variável desse tipo de sistema, onde a resposta a diferentes entradas pode variar significativamente. A alocação de polos visa ajustar essas raízes para alcançar um desempenho desejado do sistema. Porém apesar da alocação de polos ser uma técnica poderosa, ela também por ser complexa de implementar, especialmente em sistemas não-lineares ou complexos, Bazanella e Jr. (2005) explicam que "nem sempre é possível alocar os polos de malha fechada em posições arbitrariamente escolhidas com um dado controlador", cada problema tem um conjunto único de alocações possíveis, as quais são exclusivamente determinadas pela estrutura do controlador.

2.3 Modelagem do Sistema Barra e Bola

O sistema em análise consiste em uma estrutura plana em formato de rampa, com bordas elevadas, que foi fabricada utilizando impressão 3D e pode ser inclinada por um servo motor fazendo com que uma bola role para frente e para trás sobre a rampa. Essa estrutura é ancorada no centro, com a extremidade oposta equipada com uma haste que se conecta ao servo motor. A Figura 1 ilustra o diagrama de corpo livre do sistema.

Figura 1 - Diagrama de corpo livre do sistema

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

No contexto desse diagrama de corpo livre, os parâmetros que definem o sistema são os seguintes:

m = massa da bola

R = raio da bola

δ = deslocamento

L = comprimento da rampa

x = posição da bola

θ_1 = ângulo da rampa

θ_2 = ângulo da engrenagem

No âmbito desse sistema, as equações que descrevem o movimento podem ser empregadas para estabelecer a relação entre o ângulo da rampa e o movimento da bola. As equações de movimentos podem ser vistas abaixo e foram adaptadas a partir do artigo 'Balancing a Ball and Beam with PID' de Bhounsule et al. (2016).

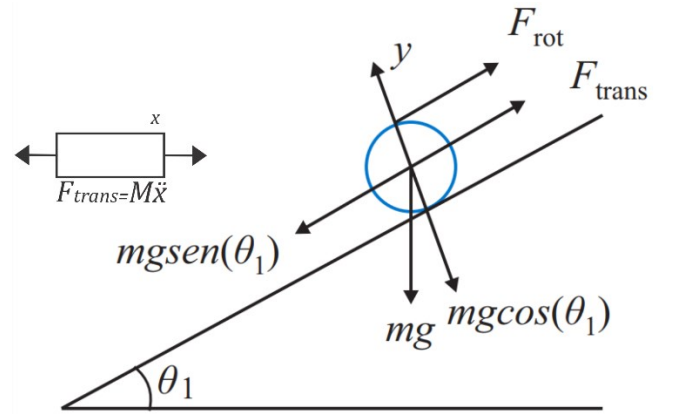
$$M \frac{\delta^2 x(t)}{\delta t^2} + C \frac{\delta x(t)}{\delta t} + kx(t) = F(t)$$

$$M \frac{\delta^2 X(t)}{\delta t^2} + C \frac{\delta X(t)}{\delta t} + kX(t) = F(t)$$

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + kX = 0$$

Uma manipulação da equação fornecida nos dá a possibilidade de calcular valores tanto para M quanto para θ . Essa abordagem é adotada para estabelecer uma conexão entre o movimento da bola e a inclinação da barra. Seguindo com a formulação do sistema, a próxima etapa envolve a resolução para M . A Figura 2 mostra a representação visual das forças atuantes.

Figura 2 - Forças de reação do sistema



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

$$F_{rot} = \frac{Tr}{R} = \frac{J}{R} \frac{\delta w_b}{\delta t} = \frac{J}{R} \frac{\delta \left(\frac{V_b}{R} \right)}{\delta t}$$

$$F_{rot} = \frac{\frac{J}{R} \delta^2 \left(\frac{x}{R} \right)}{\delta t^2} = \frac{J}{R^2} \ddot{x}$$

$$F_x = F_{trans} + F_{rot} = m\ddot{x} + \frac{J}{R^2} \ddot{x} = \left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{x}$$

$$M = m + \frac{J}{R^2}$$

Uma vez que a determinação de M tenha sido realizada, é requerido resolver pelo ângulo da barra. Essa tarefa pode ser executada ao equiparar o valor de M à força exercida pela bola e à influência da gravidade. Esse procedimento é exposto abaixo.

$$\left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{x} = -mgsen(\theta_1)$$

$$\left(m + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{x} + mgsen(\theta_1) = 0$$

$$mg\sin(\theta_1) = mg\theta_1$$

A equação do movimento:

$$\left(m + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{x} + mg\theta_1 = 0$$

$$J_{bola} = \frac{2}{5}mR^2$$

$$m + \frac{J}{R^2} = m + \frac{\frac{2}{5}mR^2}{R^2} = m + \frac{2}{5}m = \frac{7}{5}m$$

$$\left(\frac{7}{5}m\right)\ddot{x} = mg\theta_1$$

$$\frac{7}{5}\ddot{x} = g\theta_1$$

$$\ddot{x} = \frac{5}{7}g\theta_1$$

$$\text{Dado que } \theta_1 = \frac{d}{L}\theta_2$$

$$\left(m + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{x} + mg\frac{d}{L}\theta_2 = 0$$

$$\boxed{\left(m + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{x} = -mg\frac{d}{L}\theta_2}$$

Ao aplicar a transformada de Laplace e reorganizar a equação, obtemos:

$$\left(m + \frac{J}{R^2}\right)X(s)s^2 = \frac{-mgd}{L}\theta(s)$$

$$\boxed{P(s) = \frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{-mgd}{L\left(m + \frac{J}{R^2}\right)s^2} \left[\frac{m}{rad}\right]}$$

Para o caso em que a bola é oca, o momento de inércia é dado por:

$$J = \frac{2}{3}mR^2$$

Substituindo na equação obtida anteriormente, temos que:

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{-mgd}{L\left(m + \frac{J}{R^2}\right)} \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{-mgd}{L\left(m + \frac{\frac{2}{3}mR^2}{R^2}\right)} \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{-mgd}{L\left(m + \frac{2}{3}m\right)} \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{-mgd}{L\left(\frac{5m}{3}\right)} \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = -mgd \frac{3}{5Lm} \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{-3gd}{5L} \frac{1}{s^2}$$

Tabela 1 - Parâmetros do sistema

Abreviação	Propriedades	Valor	Unidade de Medida
g	Aceleração gravitacional	-9.8	m/s^2
R	Raio da bola	0.02	m
L	Comprimento da barra	0.40	m
m	Massa da bola	0.0026	Kg
d	Deslocamento da haste	0,02	m
J	Momento de inércia da bola	$\frac{2mR^2}{5}$	Kgm^2

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Substituindo os parâmetros do sistema, apresentados na Tabela I, na equação obtida para a bola oca, obtemos a seguinte função de transferência:

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{0,336}{s^2}$$

2.3.1 Projeto do Controlador PID

O controlador PID utilizado neste trabalho, foi projetado baseado no critério de desempenho requerido. Considerando a função de transferência do sistema e do controlador escrita em termos dos seguintes polinômios:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{R(s)}$$

$$Gc(s) = \frac{P(s)}{L(s)}$$

Sendo: $Z(s) = -3gd$, $R(s) = 5Ls^2$, $P(s) = kds^2 + kps + ki$ e $L(s) = s$

A função de transferência de malha aberta do sistema com controlador PID é dada por:

$$Gma(s) = G(s)Gc(s)$$

$$Gma(s) = \frac{Z(s)}{R(s)} \frac{P(s)}{L(s)}$$

$$Gma(s) = \frac{Z(s)P(s)}{R(s)L(s)}$$

A função de transferência de malha fechada do sistema com controlador PID é dada por:

$$T(s) = \frac{Gma(s)}{1 + Gma(s)}$$

$$T(s) = \frac{\frac{Z(s)P(s)}{R(s)L(s)}}{1 + \frac{Z(s)P(s)}{R(s)L(s)}}$$

$$T(s) = \frac{Z(s)P(s)}{R(s)L(s)} \frac{R(s)L(s)}{R(s)L(s) + Z(s)P(s)}$$

$$T(s) = \frac{Z(s)P(s)}{R(s)L(s) + Z(s)P(s)}$$

Baseado na equação acima o comportamento dinâmico do sistema pode ser dado por:

$$Z(s)P(s) + R(s)L(s) = A^*(s)$$

$$A^*(s) = Z(s)P(s) + R(s)L(s)$$

$P(s)$ e $L(s)$ são os polinômios do controlador PID que satisfazem a equação e $A^*(s)$ é o polinômio cujos polos são obtidos a partir do desempenho requerido, substituindo, temos:

$$-3gd(kds^2 + kps + ki) + 5Ls^2s = A^*(s)$$

$$A^*(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + 5\zeta\omega_n)$$

$$A^*(s) = s^3 + 10\zeta\omega_n^2 s^2 + 7$$

$$A^*(s) = s^3 + 5\zeta\omega_n s^2 + 2\zeta\omega_n s^2 + 2\zeta\omega_n 5\zeta\omega_n s + \omega_n^2 s + 5\zeta\omega_n^2 \omega_n$$

$$A^*(s) = s^3 + 7\zeta\omega_n s^2 + 10\zeta^2\omega_n^2 s + \omega_n^2 s + 5\zeta\omega_n^3$$

Os ganhos do controlador PID são obtidos conforme equação abaixo:

$$A^*(s) = s^3 + 7\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s(10\zeta^2 + 1) + 5\zeta\omega_n^3$$

Fazendo a igualdade de polinômios, temos que:

$$-3gd(kds^2 + kps + ki) + 5Ls^2s$$

$$5Ls^3 - 3gd kds^2 - 3gd kps - 3gd ki$$

$$s^3 - \frac{3gd}{5L} kds^2 - \frac{3gd}{5L} kps - \frac{3gd}{5L} ki$$

Comparando com a $A^*(s)$, e substituindo pelos valores do projeto, temos:

$$-\frac{3gd}{5L} kd = 7\zeta\omega_n ; -\frac{3gd}{5L} kp = 10\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2 ; \frac{3gd}{5L} ki = 5\zeta\omega_n^3$$

Resolvendo as equações para kp, ki e kd :

$$kp = \frac{5L(10\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2)}{-3gd}$$

$$ki = \frac{25L\zeta\omega_n^3}{-3gd}$$

$$kd = \frac{7\zeta\omega_n 5L}{-3gd}$$

Para estabilizar a bola, um sinal de controle deve ser aplicado ao servo motor de modo a ajustar o ângulo da barra, considerando os valores do projeto e substituindo temos que:

$$Z(s) = 0,33, R(s) = s^2 \text{ e } L(s) = s$$

Substituindo obtemos as equações finais de kp, kd e ki :

$$kp = \frac{(10\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2)}{0,336}$$

$$ki = \frac{5\zeta\omega_n^3}{0,336}$$

$$kd = \frac{7\zeta\omega_n}{0,336}$$

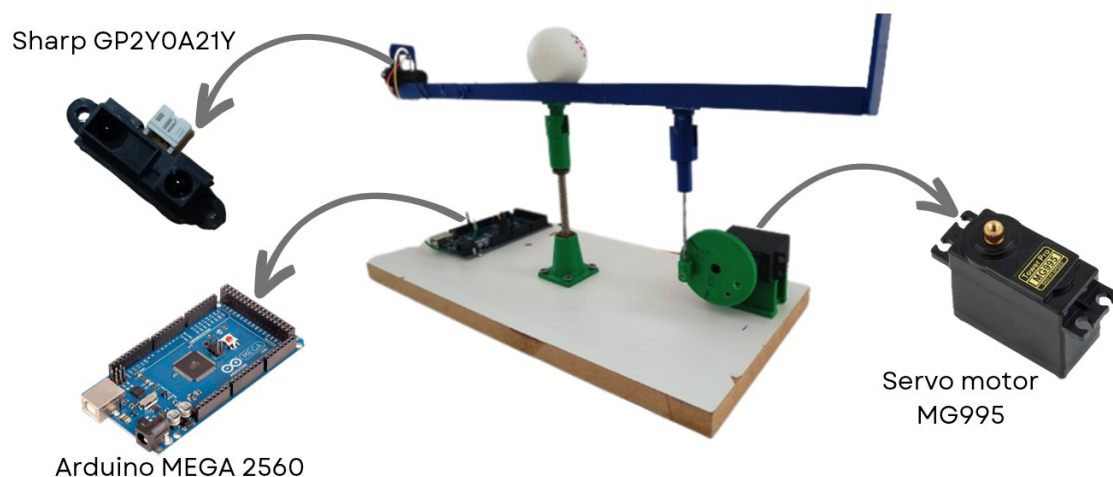
3. DESCRIÇÃO DO SISTEMA

3.1 Barra-Bola

Um sistema barra-bola, um conceito intrincado presente em diversas aplicações, revela uma convergência de equilíbrio e controle no campo da engenharia. Este sistema engloba uma barra móvel e uma bola, interagindo de maneira controlada. A configuração é composta por duas partes centrais: uma barra ou placa plana, uma extensão que possui mobilidade unidirecional, e uma bola, que pode deslizar ou rolar ao longo da superfície da barra. Essa interação entre a barra e a bola apresenta características singulares que proporcionam um campo fértil para o estudo de princípios fundamentais de controle e dinâmica.

Ao analisar a Figura 3, que ilustra de forma clara e concisa o sistema barra-bola abordado neste trabalho, observamos a disposição da barra, sensor e servo. A figura captura a essência da relação entre os elementos e oferece uma representação visual do funcionamento desse sistema complexo.

Figura 3 - Sistema barra-bola



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

O sistema barra-bola transcende o mero âmbito da engenharia, encontrando aplicações em domínios tão diversos quanto automação industrial, robótica avançada e até mesmo em estudos de otimização de processos. Sua capacidade de demonstrar princípios fundamentais de controle o torna um objeto de estudo valioso, incentivando a

busca por soluções inovadoras e aprofundando nosso entendimento das complexidades do equilíbrio dinâmico.

- **Controle da Barra:** O movimento da barra é gerenciado por um sistema de controle, frequentemente um motor, atuador ou dispositivo de movimentação. Variações, como motores elétricos ou servomotores, são aplicadas de acordo com a necessidade do sistema. O controle pode ser estabelecido por meio de algoritmos computacionais, entrada manual ou sensores, todos adaptados ao contexto específico.
- **Interação com a Bola:** A bola é posicionada sobre a superfície da barra e entra em interação conforme a barra é movida. A natureza dessa interação é governada por forças físicas fundamentais, incluindo gravidade, atrito e impulso. Dependendo das condições de controle, a bola pode percorrer a barra através de rolagem, deslizamento ou direcionamento determinado.
- **Sensores e Feedback:** Para alcançar controle com precisão, sensores são incorporados para rastrear a posição da bola e/ou da barra. Isso possibilita que o sistema receba informações em tempo real sobre o estado do sistema, permitindo ajustes dinâmicos de controle.

3.2 Sensor

O sensor Sharp GP2Y0A21Y foi escolhido para a realização das medições de distância neste estudo. Este sensor utiliza a tecnologia de reflexão de luz infravermelha para estimar a distância entre o sensor e um objeto refletor. Com uma faixa de medição entre 10 e 80 centímetros, o sensor apresenta uma aplicabilidade ampla em diversas áreas, desde sistemas de detecção em robótica até aplicações de automação industrial. O funcionamento do sensor se baseia na emissão de um pulso de luz infravermelha em direção ao objeto alvo. A luz refletida é captada pelo sensor, e a intensidade do sinal refletido é usada para determinar a distância. No entanto, devido a características ambientais e interferências, os valores de saída do sensor podem apresentar variações consideráveis mesmo para uma mesma distância.

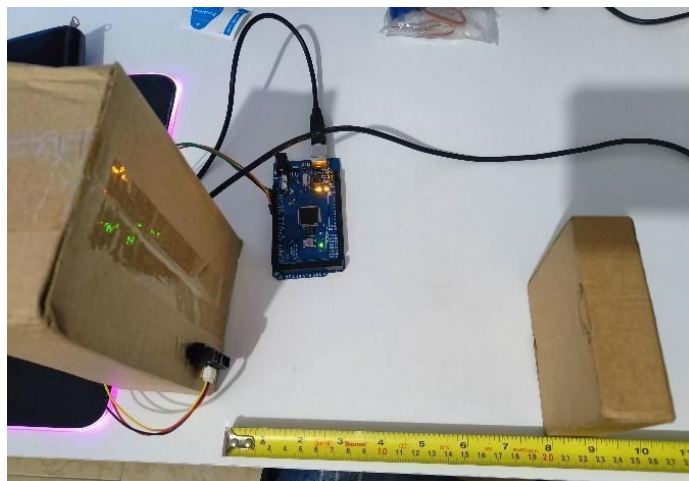
3.2.1 Calibração do Sensor

Para assegurar a precisão e confiabilidade das medições realizadas com o sensor Sharp GP2Y0A21Y, foi realizado um processo de calibração detalhado. A calibração buscou reduzir as variações inerentes do sensor e estabelecer uma relação confiável entre as leituras de tensão e as distâncias reais.

Inicialmente, um código foi desenvolvido no ambiente Arduino para coletar os valores de tensão de saída do sensor. Dada a natureza do sensor, que pode retornar diferentes valores para uma mesma distância, uma etapa de filtragem foi aplicada. O filtro consiste em coletar 200 amostras e realizar a média das mesmas, retornando assim apenas um valor. Esse processo de filtragem ajudou a minimizar flutuações indesejadas e a obter uma leitura mais estável e coerente para cada distância.

Um cenário experimental foi preparado, no qual o sensor foi posicionado a uma distância conhecida de um objeto de referência. Utilizando uma trena para medição precisa da distância, as leituras de tensão para distâncias específicas foram registradas, conforme mostrado na Figura 4.

Figura 4 - Calibragem do sensor



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Isso proporcionou um conjunto de dados experimentais que serviu de base para a calibração.

Na etapa inicial do experimento, as medições de tensão e as correspondentes distâncias foram registradas em uma planilha no software Excel. A próxima fase envolveu

a criação de uma curva de calibração, vital para estabelecer uma conexão precisa entre as tensões de saída do sensor e as distâncias reais que elas representam.

Para obter uma representação matematicamente sólida dessa relação, optou-se pela aplicação de uma linha de tendência por potência. Essa abordagem possibilitou a obtenção de uma equação polinomial que melhor se ajustava aos dados. A análise subsequente da curva de calibração revelou uma correlação consistente e confiável entre as tensões de saída e as distâncias reais. A equação polinomial derivada desempenhou um papel crucial ao permitir a conversão precisa das leituras de tensão em distâncias reais, fornecendo, assim, um método de medição robusto e confiável.

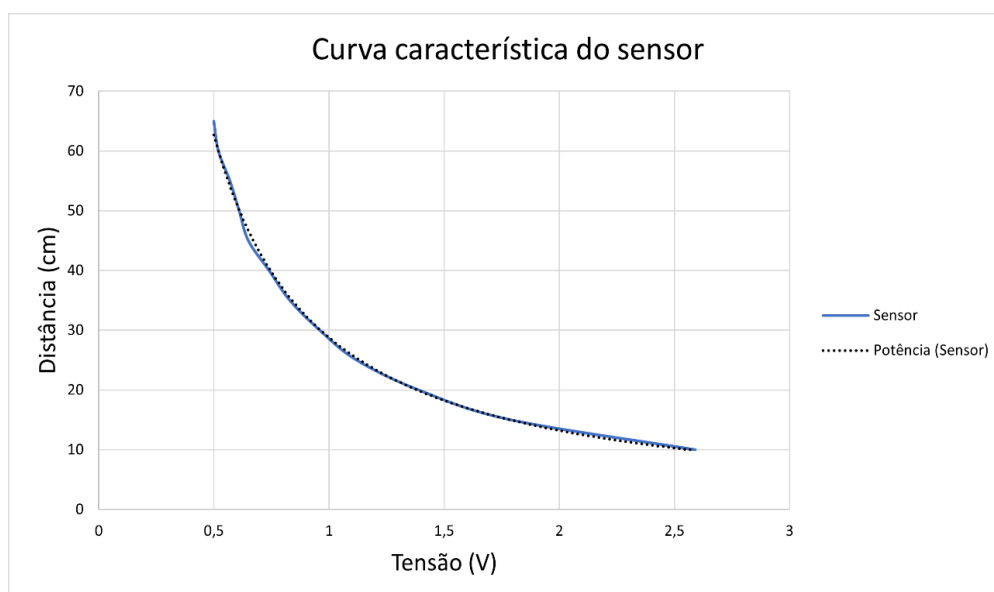
Na Tabela 2, apresentada abaixo, estão registrados os dados detalhados de distância e tensão coletados durante a fase inicial do experimento:

Tabela 2 - Coleta de dados do sensor

Distância (cm)	Tensão (V)
10	2,59
15	1,79
20	1,39
25	1,12
30	0,96
35	0,83
40	0,74
45	0,65
50	0,61
55	0,57
60	0,52
65	0,50

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A representação gráfica, ilustrada na Figura 5, oferece uma visualização tangível do processo. A curva gerada com base nos dados coletados do sensor é claramente discernível, demonstrando a solidez dos resultados experimentais. Além disso, destaca-se a presença de uma linha de tendência pontilhada, representativa da linha de ajuste por potência. É evidente como essa linha teórica se aproxima notavelmente da curva criada a partir dos dados reais, validando assim o método de ajuste escolhido.

Figura 5 - Representação da curva característica

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Um aspecto intrigante é a utilização da linha de tendência para derivar uma equação polinomial que modela de maneira precisa a relação entre distância e tensão. Esse processo não apenas proporcionou um entendimento aprofundado do comportamento dos dados coletados, mas também ofereceu uma ferramenta matemática que possibilita a previsão de valores futuros com base em medições de distância.

A equação polinomial que descreve a relação entre as tensões de saída do sensor (V) e as distâncias reais (cm) é:

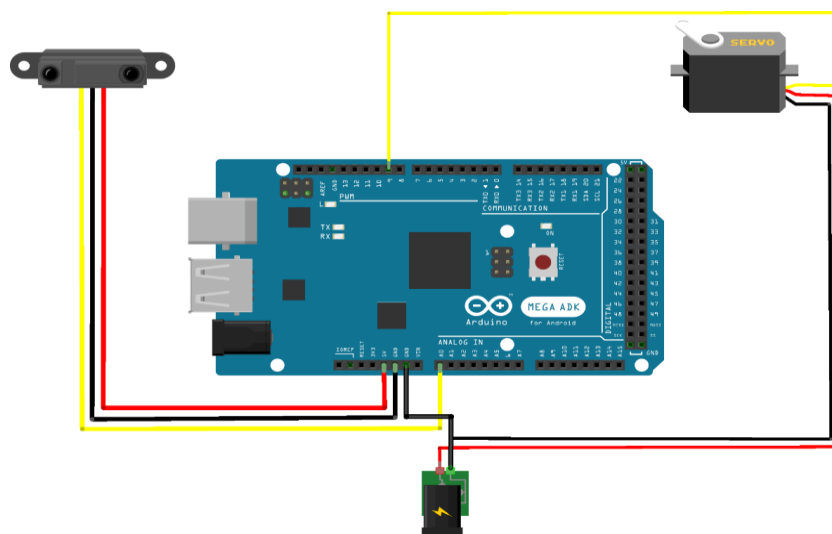
Eq. Polinomial

$$Y = 28,763x - 1,123$$

3.3 Arduino

No âmbito do sistema barra-bola abordado neste trabalho, a plataforma escolhida para controle e interação foi o Arduino Mega 2560. O Arduino Mega 2560 é uma placa microcontroladora renomada por suas robustas características, que o tornam uma escolha frequente em projetos que demandam controle preciso e comunicação eficiente. No âmbito deste projeto, é possível visualizar o esquema de conexões estabelecidas entre o Arduino e os componentes empregados por meio da Figura 6.

Figura 6 - Esquema de ligação do sistema



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para garantir a alimentação adequada do servo motor, optou-se por empregar uma fonte externa. Isto se deve ao fato de que a capacidade de fornecimento de tensão pelo Arduino é insuficiente para atender às necessidades do servo motor. Importante ressaltar que, para assegurar a integridade do sistema, é imprescindível que o terminal negativo da fonte externa seja conectado ao mesmo ponto de referência do solo (GND) do Arduino, estabelecendo assim um potencial de referência comum entre os componentes.

- **Ampla Capacidade de E/S:** O Mega 2560 é notável por suas 54 portas de entrada/saída digitais e analógicas. Isso permite a conexão de diversos sensores e atuadores em sistemas, facilitando o monitoramento e controle de ambientes de maneira abrangente.
- **Poder de Processamento:** Com um microcontrolador de 8 bits de alta performance, o Arduino Mega 2560 oferece a capacidade de executar algoritmos complexos em tempo real. Isso é particularmente importante para sistemas que requerem decisões rápidas e cálculos precisos, como a interação em tempo real com a bola e a barra do sistema.
- **Memória Adequada:** A placa possui memória flash suficiente para armazenar programas e códigos de controle avançados. Isso possibilita a implementação de lógicas complexas, como estratégias de movimentação da barra e resposta à trajetória da bola.

- **Comunicação Flexível:** O Arduino Mega 2560 oferece diversas opções de comunicação, incluindo portas seriais, USB e comunicação com outros dispositivos via protocolos como I2C e SPI. Essa flexibilidade é essencial para integrar o sistema barra-bola com outros componentes e sistemas.

3.4 Servo Motor MG995

O servo motor MG995 é um dispositivo de rotação contínua amplamente utilizado em aplicações de robótica, automação e modelismo. Sua popularidade deriva de sua notável capacidade de gerar alto torque, oferecendo uma combinação única de força e versatilidade.

- **Torque Significativo:** O MG995 é amplamente reconhecido por seu notável torque, que pode atingir até 10 kgf-cm com 6 V e 8,5 kgf-cm com 4,8 V. Isso se traduz em sua habilidade de movimentar cargas substanciais, tornando-o ideal para aplicações onde a força é essencial para o movimento suave e controlado.
- **Rotação Contínua:** Ao contrário de servo motores de rotação contínua, o MG995 possui uma amplitude de movimento limitada a 120°. Essa limitação é compensada pela alta precisão no controle da posição, tornando-o adequado para aplicações que requerem ajustes finos e repetíveis.
- **Construção Robusta:** Equipado com engrenagens de metal o MG995 demonstra uma durabilidade significativa, capaz de suportar cargas substanciais e minimizar o desgaste ao longo do tempo. Sua construção robusta contribui para a longevidade e confiabilidade do sistema barra-bola.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados experimentais foram obtidos por meio de um sistema que envolve uma barra e uma bola, conforme ilustrado na Figura 3. Esse sistema é composto por uma placa Arduino Mega 2560 conectada a um microcomputador. A implementação do algoritmo de medição e controle foi realizada em linguagem C, com um período de amostragem de 50ms. Os resultados experimentais foram conduzidos considerando dois cenários de operação distintos. O primeiro cenário teve como objetivo analisar o comportamento do sistema quando operando com uma bola oca. Já o segundo cenário envolveu a operação do sistema com uma bola maciça. A mudança no tipo de bola foi realizada com o propósito de avaliar a robustez do sistema de controle quando a planta do sistema sofre alterações.

No primeiro cenário a bola utilizada foi uma bola de tênis de mesa oca, com um raio $R = 0,02$ metros e uma massa $m = 0,0027$ quilogramas, conforme pode ser observada na Figura 7.

Figura 7 - Pesagem da bola oca



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

No segundo cenário, utilizamos uma bola maciça com um raio de $R = 0,0125$ metros e uma massa de $m = 0,0122$ quilogramas, conforme pode ser visto na Figura 8.

Figura 8 - Pesagem da bola maciça



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Nesse contexto, a função de transferência do sistema com uma bola maciça é representada da seguinte forma:

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{-3gd}{5L} \frac{1}{s^2}$$

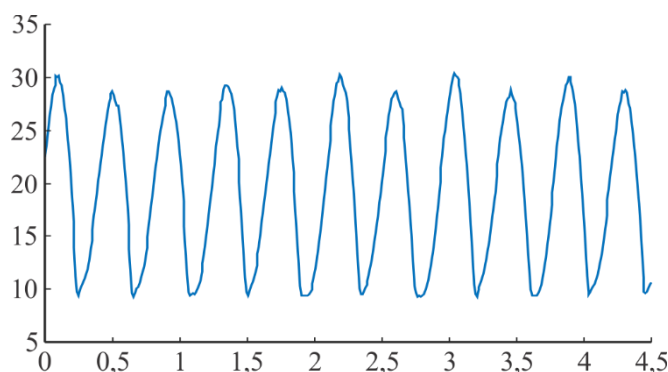
$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{0,4}{s^2}$$

4.1 Primeiro Cenário

No primeiro cenário de testes, direcionamos nossa atenção para a resposta do sistema barra e bola em malha fechada, utilizando a bola oca. Sob a influência de um controlador Proporcional e estabelecendo uma referência degrau de 20 centímetros como ponto de partida para cada experimento. Os resultados da análise da resposta do sistema com a utilização do controlador Proporcional são apresentados na Figura 9.

A análise da Figura 9 revela que a aplicação do controlador Proporcional resultou em uma resposta do sistema que se caracteriza por oscilações marcantes. Essas oscilações, quando observadas em um contexto de controle, indicam claramente uma condição de instabilidade no sistema em questão.

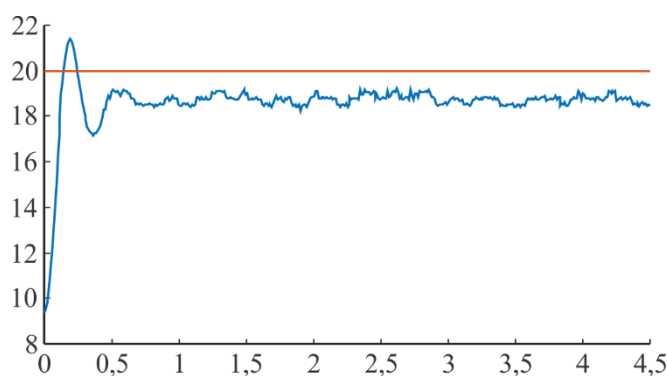
Figura 9 - Resposta do sistema com um controlador proporcional com a bola oca



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na Figura 10, é apresentada a resposta do sistema barra e bola, com a implementação de um controlador PD. A análise da Figura 10 revela que, ao empregar o controlador PD, o sistema manifesta uma resposta transitória caracterizada por um sobressinal de aproximadamente $Mp \cong 7,2\%$ e um tempo de acomodação de aproximadamente $t_s(2\%) = 0,65s$. No entanto, é importante observar que, em regime permanente, a resposta do sistema demonstra um erro residual de aproximadamente 6,5%.

Figura 10 - Resposta do sistema com um controlador PD com a bola oca

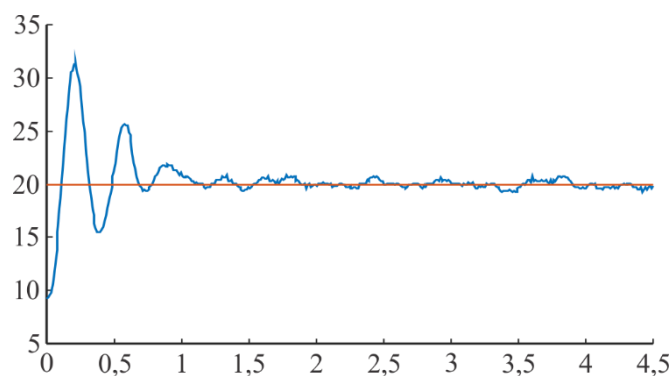


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na Figura 11, podemos observar a representação gráfica da resposta do sistema barra e bola, quando submetido ao controle de um controlador PID. Com base nos dados apresentados na Figura x, é possível concluir que a aplicação do controlador PID resultou em uma resposta transitória com um sobressinal de aproximadamente $Mp \cong 56,2\%$ e um tempo de acomodação de cerca de $t_s(2\%) = 1s$.

É importante destacar que, sob o controle do PID, o sistema demonstrou uma característica notável, erro nulo em regime permanente.

Figura 11 - Resposta do sistema com um controlador PID com a bola oca

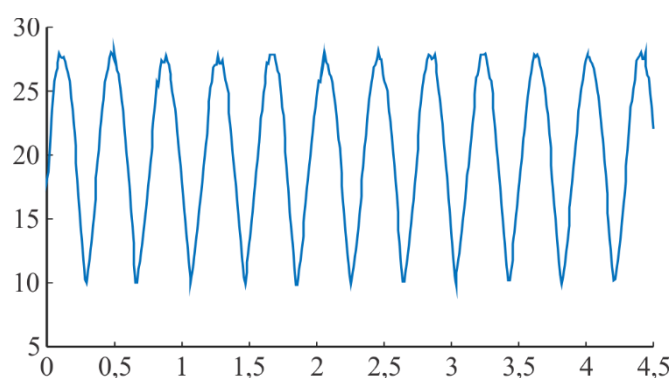


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

4.2 Segundo Cenário

No segundo cenário de testes, direcionou-se a atenção para a resposta do sistema barra e bola em malha fechada, utilizando a bola maciça, sendo assim uma variação na planta. Na Figura 12, encontramos a representação da resposta do sistema quando submetido ao controle de um controlador Proporcional. Conforme evidenciado na Figura 12, a utilização do controlador Proporcional resultou em uma resposta do sistema que exibe oscilações. Embora essas oscilações tenham uma amplitude menor em comparação ao primeiro cenário, é fundamental observar que o comportamento do sistema permanece instável sob esse controle.

Figura 12 - Resposta do sistema com um controlador proporcional com a bola maciça

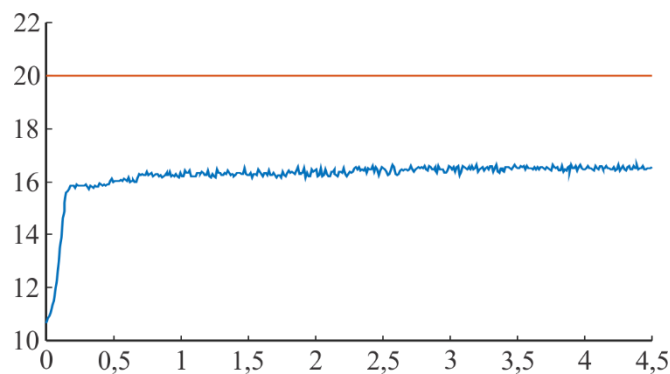


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na Figura 13, observa-se a representação da resposta do sistema barra e bola, quando submetido ao controle de um controlador PD. Conforme indicado na Figura 13, o sistema exibiu uma resposta transitória com um sobressinal inexistente. No entanto, é

importante notar que, em regime permanente, o sistema ainda apresentou um erro aproximado de $e(\infty) \cong 17,6\%$.

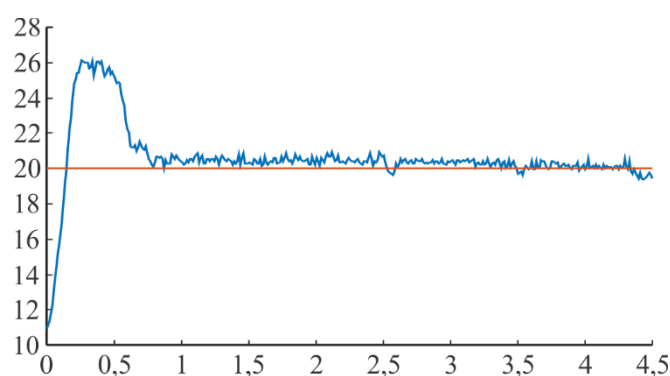
Figura 13 - Resposta do sistema com um controlador PD com a bola maciça



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Na Figura 14, está representada a resposta do sistema barra e bola sob o controle de um controlador PID. De acordo com os dados apresentados na Figura 14, a aplicação do controlador PID resultou em uma resposta transitória que exibiu um sobressinal de aproximadamente $Mp \cong 30\%$ e um tempo de acomodação de cerca de $t_s(2\%) = 1s$. No entanto, é relevante observar que, em regime permanente, a resposta do sistema ainda manifestou um erro residual de aproximadamente 1,5% ao longo do tempo.

Figura 14 - Resposta do sistema com um controlador PID com a bola maciça



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

5. CONCLUSÃO

Os objetivos propostos neste trabalho foram alcançados com êxito, o estudo aprofundado sobre o sistema barra-bola revelou uma complexidade fascinante inerente a esse sistema. Através da combinação de princípios de engenharia, controle, calibração de sensores e programação, foi possível explorar sua dinâmica única. Uma parte fundamental deste estudo foi a calibração do sensor Sharp GP2Y0A21Y, um componente vital no sistema. Ao estabelecer uma relação precisa entre tensão e distância, assegura-se medições confiáveis ao longo dos experimentos. Ao testar o sistema com duas configurações de bola, oca e maciça, empregou-se diferentes controladores (P, PD e PID), notavelmente o sistema demonstrou ser sensível a mudança de planta, com base nas conclusões extraídas dos resultados experimentais, o controlador PID revelou um desempenho notavelmente superior em comparação com os controladores P e PD, e em ambos os cenários de operação se manteve estável, demonstrando que foi uma escolha eficaz, desempenhando o papel de melhorar a resposta transitória e reduzir o erro em regime permanente.

6. REFERÊNCIAS

Arduino. Documentação Oficial. **Mega 2560**. Disponível em: <https://docs.arduino.cc/hardware/mega-2560>. Acesso em: (29/08/2023).

BAZANELLA, A. S.; JR., J. M. G. D. S. **Sistemas de Controle: princípios e métodos de projeto**. 1 ed. Porto Alegre: UFRGS, 2005.

Bhounsule, P., Chiou, G., Plascencia, A., & Rowe, T. (2016). **Balancing a Ball and Beam with PID**. RAM Lab, Department of Mechanical Engineering, The University of Texas at San Antonio.

Castrucci, P.L.; Bittar, A. e Sales, R. M. Controle Automático. Editora GEN/LTC, Rio de Janeiro, RJ, 2018.

COLÓN, Diego et al. **Modeling, Control and Implementation of a Ball and Beam System**. In: 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), Ribeirão Preto, SP, Brazil, 2013 p. 1-12.

Electronic Components Datasheet Search, MG995 Datasheet. Disponível em: <https://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/1132435/ETC2/MG995.html>. Acesso em: (30/08/2023).

MG995 Servo Motor. Disponível em: <https://components101.com/motors/mg995-servo-motor>. Acesso em: (30/08/2023).

NISE, Norman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 6ª Edição. ed. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2012.

PANG, Zhong-Hua; ZHENG, Geng; LUO, Chun-Xiang. **Augmented State Estimation and LQR Control for a Ball and Beam System**. In: IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, Beijing, China, 6th, 2011. p. 1-5.

SAAD, Mustafa; KHALALLAH, Mohammad. **Design and Implementation of an Embedded Ball-beam Controller Using PID Algorithm**. In: Universal Journal of Control and Automation, San Jose, CA, Bani-walid, Lybia, 2017. p. 1-8.

SOUZA, Fabio. **Arduino Mega 2560**. Embarcados, 2014. Disponível em: <https://embarcados.com.br/arduino-mega-2560/>. Acesso em: (29/08/2023).