



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CAMPUS PAU DOS FERROS**

FRANCISCO EDUARDO DUARTE DA SILVA

**SISTEMA MASSA-MOLA DE RIGIDEZ
VARIÁVEL COMO UMA EQUAÇÃO DE
AIRY**

PAU DOS FERROS

2019

FRANCISCO EDUARDO DUARTE DA SILVA

SISTEMA MASSA-MOLA DE RIGIDEZ VARIÁVEL COMO UMA EQUAÇÃO DE AIRY

Monografia (graduação) submetida à Coordenação do Curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia

Orientador: Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor

PAU DOS FERROS

2019

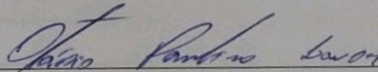
FRANCISCO EDUARDO DUARTE DA SILVA

SISTEMA MASSA-MOLA DE RIGIDEZ VARIÁVEL COMO UMA EQUAÇÃO DE AIRY

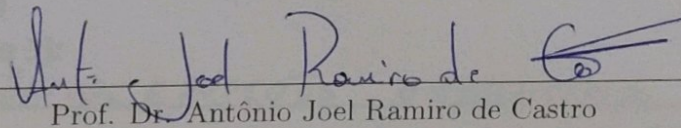
Monografia (graduação) submetida à Coordenação do Curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia

Aprovada em 07/03/2019

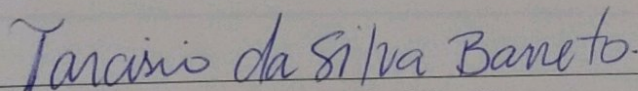
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor
Universidade Federal Rural do Semi-Árido



Prof. Dr. Antônio Joel Ramiro de Castro
Universidade Federal do Ceará



Prof. Me. Tarcísio da Silva Barreto
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Biblioteca Setorial do Campus

d586s	da Silva, Francisco Eduardo Duarte. SISTEMA MASSA-MOLA DE RIGIDEZ VARIÁVEL COMO UMA EQUAÇÃO DE AIRY / Francisco Eduardo Duarte da Silva. – 2019. 30 p.;il. Monografia (graduação) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Campus Paus dos Ferros , 2019. Área de Concentração: Física Matemática Orientação: Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor 1. Movimento Harmônico. 2. Equações Diferenciais. 3. Equação de Airy. 4. Sistema massa-Mola. 5. Rigidez variável. I.
-------	---

*Aos Meus Pais
e
a todos que me
acompanharam nesta
longa jornada*

AGRADECIMENTOS

Desde já quero agradecer grandemente a Deus por me conceder a oportunidade incrível de terminar a primeira graduação.

Agradecer aos meus pais Francisco de Assis Barbosa da Silva e Izabela Lacerda Duarte Silva por me incentivarem desde o começo até o fim desta longa jornada, a nunca desistir e sempre seguir enfrentando de cabeça erguida qualquer dificuldade.

Agradecer aos meus irmãos, Everanne Madja Lacerda, Sarah Duarte Sil e Francisco de Assis Barbosa da Silva Junior por todo apoio e incentivo que os mesmos me deram.

Agradecer a todos os amigos que fizeram parte desta jornada em especial a Joelton-Santa, Romulo Sobreira, Luiz Pordeus, Alex Pinheiro, Jonatham Oliveira, Jhon deivid, Raito Né, José Bruno, William Vieira, Yago Daniel.

Agradecer a todos os amigos de longa data que conheci durante o curso de C&T em especial a Paulina Silva, Jose Lira, Franklyn Monteiro e Lucas Cavalcante em nome de todos os demais.

Agradecer Grandemente ao Professor Otávio Paulino por ter sido esse exemplo de orientador e por ter me concedido a oportunidade de ser seu orientando.

Agradecer ao professor Antônio Joel e Tarcisio Barreto por terem aceitado a participar da banca

Agradecer a todos os professores que contribuíram para minha formação.

O conhecimento é como uma série de Taylor, onde, quanto mais você se deriva aos estudos, mais o aprimora, contudo, a melhor aproximação seria o infinito, ou seja, por mais que você ache que já chegou ao seu limite você pode ir mais além. Entretanto, não deixe que essa série fique centrada em torno de pontos estabelecidos por outros, mais sim que a mesma esteja em torno da humildade e da vontade de crescer cada dia mais.

(Eduardo Duarte)

RESUMO

Um problema clássico apresentado por diversos autores é o do sistema massa-mola, esse apresenta diversas formas de oscilações, uma dessas é o movimento harmônico simples. Entretanto, esse só é apresentado com uma mola que possui uma rigidez constante em relação ao tempo. Contudo, esse problema pode se tornar mais complexo se o mesmo se dispor de uma mola com rigidez variável com o tempo, diante de tal fato um método de solução para tal problema seria modelar a equação desse sistema de forma a se chegar na equação desenvolvida pelo astrônomo Airy.

Palavras-chave: Movimento Harmônico. Equações Diferenciais. Equação de Airy. Sistema massa-Mola. Rigidez variável.

ABSTRACT

A classic problem presented by several authors is the mass-spring system, which presents several forms of oscillations, one of these is the simple harmonic movement. However, it is only presented by a spring that has a constant stiffness with respect to time. Furthermore, this problem may become more complex if it has a spring with variable stiffness over time, considering this fact a method of solution for this problem would be to model the equation of this system in order to achieve the equation developed by astronomer Airy.

Keywords: Harmonic Motion. Differential Equations. Airy Equation. Mass-Spring system. Variable stiffness.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p. 10
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	p. 12
2.1	Breve histórico das equações diferenciais	p. 12
2.2	Equações diferenciais	p. 13
2.3	Métodos de Séries	p. 14
2.4	Função Gama	p. 17
2.5	Equação de Airy	p. 19
3	SISTEMA MASSA-MOLA	p. 23
4	SISTEMA MASSA-MOLA COM UMA RIGIDEZ VARIÁVEL	p. 26
5	CONCLUSÃO	p. 28

1 INTRODUÇÃO

Convivemos em nosso dia-a-dia com uma sociedade rica em conhecimento e tecnologia, no entanto, sabemos que nem sempre o homem se dispunha de tamanha sabedoria, com isso nos resta dúvida, como isso foi possível a partir de qual princípio o homem começou a busca por tdo esse acarbousos de discernimento?

Todo teve seu início motivado por algo simples e intrínseco de todo ser racional, o medo, inicialmente por medo dos fenômenos naturais que o cercavam, de animais que viviam ao seu redor dentre outros fatores o homem buscou entedimento de tudo que o cercava, tendo por objetivo a própria sobrevivência biológica.

Contudo, na Grécia antiga o conhecimento passou a ser buscado não mais pelo medo, mas apenas por mero saber, onde as pessoas que praticavam tais atos, eram consideradas sábias ou ainda eram denotados de filósofos. Durante um bom tempo os filósofos englobavam todas as áreas do conhecimento, onde com o passar dso tempos os filósofos foram se aprofundado cada vez mais em apenas uma área, onde cada filósofo se aprofundava na área em que ele tinha mais afinidade e com isso a filosofia foi se ramificando dando origem a diversas outras áreas tal como a filosofia natural, conhecida hoje em dia como ciência.

A ciência busca explicação para diversos fenômenos, onde em alguns casos, faz uso da física para tentar encontrar explicações sobre algum fato, e para isso muitas vezes o uso de modelagens matemáticas e de equações diferenciais são inevitáveis e de fundamental importância. Na física as equações diferenciais representam diretamente ou indiretamente fenômenos naturais, assim podemos afirmar que a física moderna se desenvolveu depois que se compreendeu a importância de representar tais fenômenos por meio de tais equações (BARATA, 2018).

As equações diferenciais explicam diversos problemas dentre tais temos como exemplo o da corda vibrante que por vezes é apresentado nas academias de uma forma bem simples. Esse foi apresentado de uma forma mais complexa por Felipe (2017), e por Silva (2017), onde os mesmos trataram respectivamente do problema de uma corda vibrante não-homogênea com uma equação de Bessel e o problema de uma corda vibrante não-homogênea pendurada com uma equação Hipergeométrica confluyente, em ambos os trabalhos as modelagens matemática e as equações diferenciais foram de suma importância para que os mesmos conseguissem solucionar os problemas em questão.

Outro problema que podemos citar dentre os tantos que envolvem as equações dife-

renciais, é o do sistema massa-mola, idealizado pelo físico inglês Robert Hooke (1635 – 1703). Somente a partir dos estudos de Hooke sobre tal sistema se foi possível desenvolver o relógio. Hooke teve a ideia de atar uma mola ao volante de um relógio, que ocasionaria um movimento oscilatório podendo assim marcar unidades de tempo (ZILL, 2001). Dessa forma já se é possível imaginar o reflexo desse sistema nos dias atuais, pois, todas as tecnologias existentes para marca as unidades de tempo poderiam nunca existir sem o auxílio deste. Entretanto, Tal sistema só é tratado de forma simples, ou seja, com uma mola de rigidez constante, que nem d longe se adequa a realidade, pois, na prática, vários fatores afetam o movimento oscilatório de um sistema massa-mola.

Dentre os poucos tópicos apresentados até o momento, a importância das equações diferenciais já se torna clara de tal forma que entender o surgimento destas tratando de alguns autores que contribuíram de forma significativa para o surgimento das mesma se torna algo extremamente necessário, pois, se ainda voltarmos ao caso do relógio, apenas com auxílio das equações diferenciais foi-se possível prever o comportamento de tal sistema e assim verificar se o mesmo seria capaz de marca unidades de tempo.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1 Breve histórico das equações diferenciais

As equações diferenciais tiveram seu início a partir de Issac Newton (1642 – 1727), pois, ao desenvolver o cálculo, por sua vez também deu origem as equações diferenciais, no entanto, Newton teve uma contribuição relativamente pequena no desenvolvimento das equações diferenciais. Um dos grandes percursores destas foi o filósofo e matemático Gottfried Wihel Leibniz (1646 – 1716), que chegou ao mesmo resultado de Newton, porém, de forma independente e pouco depois de Newton. Contudo, por Leibniz viajar bastante para outros locais, surgiu rumores que o mesmo copiou o trabalho de Newton, no entanto, o que se sabe é que os mesmos descobriram o cálculo de maneiras diferentes e publicaram em momentos diferentes suas pesquisas sobre tal assunto.

Leibniz foi o percussor das notações matemáticas usadas hoje em dia, tais como as notações de derivadas, $\frac{dy}{dx}$, assim como o sinal de integral. Leibniz também desenvolveu alguns métodos de resolução para as equações diferenciais, onde não só desenvolveu esses métodos como também teve a oportunidade de manter contato com diversos matemáticos em especial com os da família Bernoulli, assim podendo desenvolver outras equações diferenciais bem como resolver vários problemas relacionados a estas, tais fatos ocorreram durante a parte final do século XVII (BYOCE; DIPRIMA,1930).

Um trabalho realizado por Leibniz foi o método de separação de variáveis, onde este foi desenvolvido por Jakob Bernoulli e generalizado por Leibniz, o irmão de Jakob, Johann Bernoulli, possivelmente foi um dos primeiros matemáticos a compreender os cálculos de Leibniz juntamente com os princípios da mecânica para modelar matematicamente os fenômenos físicos através de equações diferenciais encontrando soluções para as mesmas (PROVEZANO, 2010).

Outros grandes nomes também contribuíram de forma significativa para o avanço das equações diferenciais tais como Lipschitz, Lagrange, Euler, Daniel Bernoulli, Laplace, Gauss e Cauchy (NÓBREGA, 2016). Estes buscaram tanto soluções particulares para as equações existentes, como uma solução que abrangessem todas as equações diferenciais, entretanto, os grandes matemáticos chegaram a conclusão que não haveria a possibilidade de um método de resolução para as equações diferenciais de uma forma geral, mas apenas resoluções com certas particularidades.

Leonhard Euler (1707 – 1783), além de grande matemático, também possuía conhecimento em outras áreas tais como medicina e astronomia. Euler era praticamente um autodidata em matemática e tinha interesses em suas aplicações, este teve o benefício de ter em mãos outras obras já publicadas sobre o assunto, contudo, tinha um grande conhecimento sobre as funções e suas aplicações, assim conseguindo tanto desenvolver soluções para algumas equações diferenciais, usando frequentemente o método de série de potências para solução destas, como também desenvolveu novas equações diferenciais (BYOCE; DIPRIMA,1930).

Euler também contribuiu com o desenvolvimento de métodos numéricos, que proporcionou um impulso bastante significativo para as soluções das equações diferenciais, contudo, Carl Runge (1856 – 1927), foi quem se aprofundou mais em tais técnicas de resolução, onde durante seus estudos com o espectro atômico desenvolveu alguns modelos numéricos para solucionar problemas que apareciam ao longo de seus estudos, onde estes são utilizados até hoje (FERNANDO, 2010). Os métodos numéricos são hoje uns dos mais abrangentes em termos de resolução das equações diferenciais.

2.2 Equações diferenciais

Uma equação diferencial é, basicamente uma equação que contém derivadas ou diferenciais de uma função que dependa de uma, ou mais variáveis com relação a uma ou mais variáveis independentes, onde, a resolução destas é voltada a encontrar qual função ou quais funções satisfazem a igualdade existente na mesma. Dentre essas podem existir equações diferenciais ordinárias quando as derivadas dessa são em relação a apenas uma variável ou as equações diferenciais parciais onde as derivadas desta são em relação a duas, ou mais variáveis. Como exemplos, temos:

$$\frac{dy}{dx} = 6 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^3 = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4)$$

As equações (2.1) e (2.2), são equações diferenciais ordinárias (EDO'S), pois, elas contêm derivadas ordinárias com relação a uma única variável dependente, onde, por

exemplo, a equação (2.1) a variável dependente seria $y=y(x)$ e variável independente seria x . Nas equações (2.3) e (2.4), temos que estas possuem derivadas parciais em relação à duas ou mais variáveis independentes, portanto, são denominadas de equações diferenciais parciais (EDP'S).

Podemos ainda classificar as equações acima quanto a sua ordem, onde a ordem de uma equação diferencial é definida como sendo a ordem da derivada de maior ordem na equação diferencial em questão, temos, portanto, que a equação (2.1) é de primeira ordem, a (2.3) pode ser confundida com uma equação de terceira ordem, contudo, ela é uma equação de segunda ordem, já que no segundo termo a esquerda temos uma derivada primeira de ordem elevada ao cubo, e não uma derivada terceira da função, a (2.2) é de segunda ordem e (2.4) de quarta ordem. Para encontrar as soluções destas equações existem inúmeras maneiras, tais como separação de variáveis, método de Cauchy-Euler, método de séries de potências dentre outros inúmeros existentes.

2.3 Métodos de Séries

Uma série é dita série numérica quando seus elementos são números, tal série é representada por,

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n \quad (2.5)$$

no caso em que os elementos da série são potências de variáveis, temos então uma série de potências. Onde esta é caracterizada por,

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n x^n \quad (2.6)$$

Definição 2.1 (Soma da série e propriedades de somatórios).

A soma de uma série nada mais é que a soma de seus elementos, e no caso da série de potências teremos,

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n x^n = a_{n_0} x^{n_0} + a_{n_0+1} x^{n_0+1} + \dots + a_{n_f} x^{n_f}$$

temos que para os somatórios as seguintes propriedades são válidas,

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n x^n + \sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n y^n = \sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n (x^n + y^n)$$

e,

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} ax^n = a \sum_{n=n_0}^{n=n_f} x^n$$

vale salientar que existem inúmeras outras propriedades para os somatórios.

Definição 2.2 (Série de Taylor)

Seja $f = f(x)$ uma função que possa ser indefinidamente derivável a representação desta por uma série de Taylor em torno do ponto $x = x_0$ é, a série de potências definida por,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x_0} (x - x_0)^n &= f(x_0) + (x - x_0) \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0} \\ &+ \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{x_0} + \dots + (x - x_0)^n \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x_0} + \dots \end{aligned}$$

onde $\frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x_0}$, representa a n-ésima derivada de $f(x)$ aplicada no ponto x_0 , para que a série possa representar a função $f(x)$, a mesma terá que ser convergente.

Definição 2.3 (Teste de Convergência).

seja a série de potências dada por:

$$\sum_n a_n x^n = \sum_n b_n$$

podemos achar o seu intervalo de convergência pelo teste da razão. Que por vezes é expresso como segue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = L$$

assim temos que se $L < 1$, a série será convergente. Por outro lado, se $L > 1$, a série diverge e ainda se $L = 1$, o teste é inconclusivo. Para tal caso podemos utilizar o teste do termo geral, expresso por,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

se a série for convergente o limite acima será nulo.

Realizado tais testes e a série sendo convergente ela então será a própria função, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x_0} (x - x_0)^n$$

de acordo com Zill (2001), muitas equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes variáveis, podem ser solucionadas por séries infinitas. Onde estas podem ser na

forma de séries de potências, Para tanto consideremos a seguinte equação homogênea de segunda ordem.

$$R(x)\frac{d^2y}{dx^2} + S(x)\frac{dy}{dx} + T(x)y = 0 \quad (2.7)$$

que apresenta coeficientes variáveis, onde queremos obter uma solução $y(x)$ em torno de um ponto qualquer x_0 , onde $y(x)$ é escrita na forma de uma série de potências do tipo,

$$y(x) = \sum_n^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (2.8)$$

Para darmos continuidade a solução da equação (2.7), precisamos escrevê-la na forma padrão, ou seja,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad (2.9)$$

onde,

$$P(x) = \frac{S(x)}{R(x)} \quad Q(x) = \frac{T(x)}{R(x)} \quad (2.10)$$

Definição 2.4 (Pontos Ordinários e Singulares).

As funções racionais $P(x)$ e $Q(x)$ não podem ser escritas em série de Taylor em torno dos pontos x_r que compõem as raízes do denominador (pois, assim teríamos uma divisão por zero, ou seja, uma inconsistência matemática). Portanto, se $P(x)$ e $Q(x)$ forem analíticas em x_r , dizemos que este é um ponto ordinário ou não-singular, por outro lado, se uma das funções não forem analíticas dizemos que x_r é um ponto singular.

Teorema 2.1 (Existência de solução em série de potências para pontos ordinários). Se x_0 for um ponto não-singular da equação (2.9), então segundo Zill (2011), esta possui duas soluções linearmente independentes em forma de séries de potências centradas no ponto x_0 :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (2.11)$$

ou ainda, se considerarmos uma solução em torno do ponto $x_0 = 0$, ficamos com,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.12)$$

um fato importante sobre (2.12) é que ao derivamos esta precisamos somar uma ao limite inferior do somatório, tal fato é notório ao realizar a derivação explicitando alguns termos do somatório. Com isso temos que a derivada de (2.12) é dado por,

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (2.13)$$

2.4 Função Gama

A função Gama entra como parte de métodos de solução para as equações diferenciais, pois, se analisarmos as equações de recorrências apresentadas nos métodos de séries como um todo essas em sua grande maioria apresenta fatoriais. Partindo desse pressuposto a função gama de Euler ou simplesmente função gama foi concebida por tal autor como uma generalização do fatorial de números naturais $n!$ (BARATA, 2018). A mesma é expressar por, $\Gamma(x)$ e é definida pela integral,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.14)$$

A função $\Gamma(x)$, possui algumas propriedades e valores importantes, onde iremos abordar algumas. A primeira seria calcular $\Gamma(1)$, mediante (2.14), temos então,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = -0 - (-1) = 1 \quad (2.15)$$

Outro ponto importante é mostrar que a função $\Gamma(x)$ representa um fatorial, para tanto iremos efetuar uma integração por partes na equação (2.14), sendo u e dv definidos por,

$$u = t^{x-1} \quad dv = e^{-t} dt$$

dessa forma,

$$du = (x-1)t^{x-2} dt \quad v = -e^{-t}$$

e com isso, $\Gamma(x)$ fica,

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = -t^{x-1} e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (x-1)t^{x-2} e^{-t} dt$$

substituindo os limites de integração no primeiro termo depois da igualdade o mesmo se anula, assim ficamos com,

$$\Gamma(x) = (x-1) \int_0^{\infty} t^{x-2} e^{-t} dt \quad (2.16)$$

agora fazendo uso da (2.14), para reescrever $\Gamma(x-1)$, isto é,

$$\Gamma(x-1) = \int_0^\infty t^{x-2} e^{-t} dt \quad (2.17)$$

unindo (2.16) e (2.17), ficamos com,

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (2.18)$$

agora fazendo uma consideração sobre x , tomando como segue $x = n$, com n sendo um número natural positivo, temos então que,

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-4) = (n-1)(n-2) \cdots 1 \times \Gamma(1) \quad (2.19)$$

por (2.15), temos que (2.19) fica,

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \cdots 1 \times 1 = (n-1)! \quad (2.20)$$

onde podemos simplificar (2.20) como segue,

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (2.21)$$

da equação (2.21) podemos concluir que se n é um inteiro positivo, $\Gamma(n+1)$ generaliza o fatorial de n .

Podemos reescrever a equação (2.18) e assim tirar um resultando importante da mesma, onde a reescrevendo ficamos com,

$$\Gamma(x-1) = \frac{\Gamma(x)}{x-1} \quad (2.22)$$

primeiro iremos aplicar um limite com $x \rightarrow 1$ em (2.22), dessa forma teremos,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \Gamma(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Gamma(x)}{x-1}$$

ou,

$$\Gamma(0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Gamma(x)}{x-1} \rightarrow \infty$$

assim, temos que,

$$\Gamma(0) = \infty \quad (2.23)$$

aplicando agora o limite com $x \rightarrow 0$ em (2.22),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x-1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x)}{x-1}$$

ou,

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1}$$

ou, utilizando a equação (2.23) temos,

$$\Gamma(-1) = -\infty \quad (2.24)$$

se repetirmos esse processo inúmeras vezes ficará ainda mais claro que se n for nulo ou negativo $\Gamma(x)$ irá divergir e com isso a função $\Gamma(x)$ irá representar um fatorial se e somente se obedece a seguinte restrição,

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \neq -1, -2, -3, \dots$$

2.5 Equação de Airy

George Biddell Airy (1801 -1892), foi um astrônomo britânico que desenvolveu a equação,

$$\frac{d^2y}{dz^2} - zy(z) = 0 \quad (2.25)$$

tal equação foi desenvolvida por Airy durante seus estudos sobre a teoria do Arco-Íris, estudando os raios de luz que eram refletidos ou refratados (BARATA, 2018). A equação de Airy é uma equação de segunda ordem com coeficientes variáveis, que por sua vez é uma equação ordinária em $z_0 = 0$, portanto, podemos determinar uma solução para esta por meio de séries infinitas. Para tanto supondo uma solução do tipo,

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (2.26)$$

temos que,

$$y'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

e,

$$y''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} \quad (2.27)$$

reescrevendo (2.27), tomando $n = m + 2$, ficamos com,

$$y''(z) = \sum_{m+2=2}^{\infty} (m+2)(m+2-1) c_{(m+2)} z^{(m+2)-2} = y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2) c_{(m+2)} z^m$$

entretanto, agora temos um somatório em m , porém, tanto o índice n como m indicam apenas onde começa e onde termina o somatório, de modo que se trocarmos o índice

m pelo n não estaríamos alterando em nada nosso somatório, agora, trocando m por n ficamos com,

$$y''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{(n+2)}z^n \quad (2.28)$$

substituindo (2.28) e (2.26) em (2.25), temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{(n+2)}z^n - z \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0$$

ou,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{(n+2)}z^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1}}_I = 0$$

tomando $n = m - 1$, I pode ser escrita como segue,

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} z^m$$

ou,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^n$$

de tal forma que ficamos com,

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{(n+2)}z^n}_{II} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^n = 0$$

ou ainda, fazendo uma breve expansão em II, temos

$$2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{(n+2)}z^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^n = 0$$

que de acordo com a definição 2.1, podemos escrever a equação acima da seguinte forma,

$$2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-1}] z^n = 0$$

ficamos agora com uma igualdade de polinômios, onde o polinômio da direita é o polinômio nulo, assim para que a igualdade seja válida, temos que,

$$c_2 = 0, \quad \underbrace{(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-1}}_{III} = 0, \quad \forall_{n \geq 1}$$

reescrevendo III, com $n = m + 1$ ficando com,

$$(m + 2)(m + 3)c_{m+3} - c_m = 0$$

ou,

$$(n + 2)(n + 3)c_{n+3} - c_n = 0, \quad \forall_{n \geq 0}$$

que pode ser reescrito como segue,

$$c_{n+3} = \frac{c_n}{(n + 2)(n + 3)}$$

e sabemos que,

$$c_2 = 0$$

para $n = 0, 1, 2, 3 \dots$, temos,

$$c_3 = \frac{c_0}{2 \cdot 3}$$

$$c_4 = \frac{c_1}{3 \cdot 4}$$

$$c_5 = \frac{c_2}{5 \cdot 6} = \frac{0}{5 \cdot 6} = 0$$

$$c_6 = \frac{c_3}{5 \cdot 6} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$c_7 = \frac{c_4}{6 \cdot 7} = \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$c_8 = \frac{c_5}{7 \cdot 8} = \frac{c_2}{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{0}{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} = 0$$

para o k -esimo termo, teremos

$$c_{3k} = \frac{c_0}{3^k k! (3k - 1)!!!}$$

$$c_{3k+1} = \frac{c_1}{3^k k! (3k + 1)!!!}$$

$$c_{3k+2} = 0, \text{ já que } c_2 = 0$$

de modo que devemos ter uma solução do tipo,

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{3k} z^{3k} + \sum_{3k+1}^{\infty} c_{3k+1} z^{3k+1}$$

ou seja,

$$y(z) = c_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{3^k k! (3k - 1)!!!} \right) + c_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k+1}}{3^k k! (3k + 1)!!!} \right) \quad (2.29)$$

podemos ainda reescrever a equação acima fazendo uso da definição 2.5, que nos indica as seguintes igualdades,

$$(3k-1)!!! = \frac{3^k \Gamma(k + \frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}, \quad (3k+1)!!! = \frac{3^k \Gamma(k + \frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3})}$$

com isso podemos reformular a solução (2.29), ficando com,

$$y(z) = c_0 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{3^k k! \Gamma(k + \frac{2}{3})} \right) + c_1 \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k+1}}{3^k k! \Gamma(k + \frac{4}{3})} \right) \quad (2.30)$$

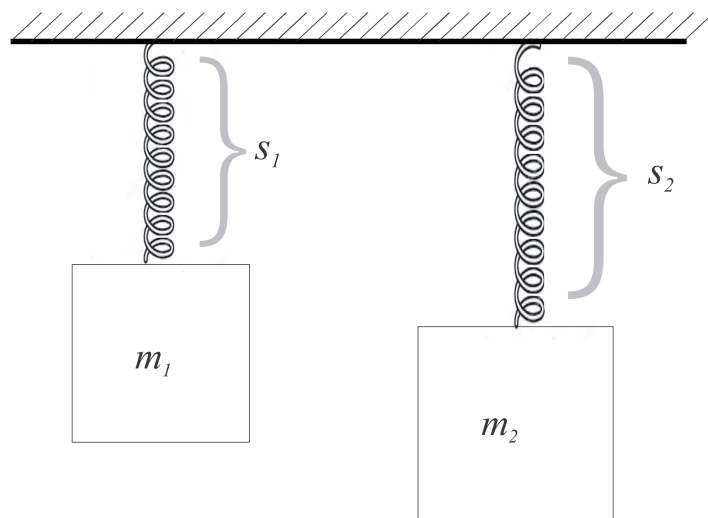
3 SISTEMA MASSA-MOLA

Esse sistema pode gerar uma oscilação conhecida como movimento harmônico. Para o melhor entendimento desse se faz necessário o conhecimento de algumas propriedades importantes, a primeira destas é a lei de Hooke.

Definição 3.1 (Lei de Hooke).

Robert Hooke (1635 – 1703), foi um físico inglês que publicou uma lei que leva seu nome nos dias atuais, a lei de Hooke como conhecida foi publicada em 1658. Esta afirma que ao prendermos um bloco com uma certa massa a uma mola esta exercerá uma força restauradora contrária ao deslocamento provocado pelo bloco de massa m , como ilustrado na Figura 1, nesta temos a ilustração de duas massas diferentes fixadas a uma mesma mola que por vezes foi fixada a um suporte rígido, como esperado quando uma massa m_1 é acoplada a mola essa se distende a uma distância s_1 e quando uma massa m_2 , com $m_2 > m_1$, é colocada na mesma mola ela irá se deslocar a uma distância s_2 , onde temos que $s_2 > s_1$, Hook enunciou que quanto maior o deslocamento maior a força restauradora exercida pela mola, tal fato foi anunciado simplesmente como $f(s) = -ks$, onde ele afirmou que a força restauradora exercida por uma mola era diretamente proporcional ao deslocamento sofrido por estar acompanhada por uma constante de proporcionalidade k .

Figura 1: Representação idealizada de um sistema massa-mola.



Fonte: Autor

Definição 3.2 (Segunda Lei de Newton).

Issac Newton, grande físico que já teve algumas de suas contribuições ressaltadas anteriormente em um de seus estudos, formulou leis conhecidas como primeira, segunda e terceira lei de Newton, contudo, iremos se atentar apenas a segunda, onde segundo Nussenzveig (2002), a aceleração que age sobre um corpo deve ser igual à força atuante no mesmo vezes um coeficiente de proporcionalidade dado por $1/m$, dessa forma, a força atuante em um corpo por sua vez pode ser entendida como o produto da massa pela aceleração, ou seja, $f = ma$.

Para o sistema massa-mola temos que quando um bloco for acoplado ao uma mola como já citado anteriormente, ele deslocará a mola a uma distância s , onde nesse ponto haverá um equilíbrio entre a força peso W , dada por $W = mg$, e a força restauradora exercida pela mola, ou seja,

$$ks = mg$$

ou,

$$ks - mg = 0$$

no entanto, agora, imaginaremos que um bloquinho de massa m , seja deslocada uma distância x desse ponto de equilíbrio e após esse deslocamento ele seja liberado, iniciando assim um movimento oscilatório, temos então que a força resultante será uma força dinâmica e expressa pela segunda lei de Newton, onde a aceleração pode ser dada como sendo a derivada segunda do espaço em relação ao tempo, assim $f = m \frac{d^2x}{dt^2}$. Segundo Zill (2001), se nenhuma outra força atuar no sistema, iniciando-se então um movimento harmônico livre, a força resultante f pode ser igualada a força resultante do peso e a força restauradora, tendo então,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg$$

ou ainda,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \underbrace{-ks + mg}_0$$

os termos acima se anulam, pois, como já definimos anteriormente estes são equivalentes. Assim ficamos com a seguinte equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ou, dividindo ambos os lados da equação por m , temos,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m}$$

ou ainda,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0 \quad (3.1)$$

a equação (3.1), é a equação que retrata o movimento harmônico simples.

4 SISTEMA MASSA-MOLA COM UMA RIGIDEZ VARIÁVEL

Com todos os tópicos já apresentados, imaginar que movimento do sistema massa-mola já deduzido seria o caso mais perfeito possível, em casos reais quando se desloca o bloquinho uma distância x qualquer do ponto de equilíbrio é o soltamos a partir desse momento não se entra em ação apenas a força restauradora da mola e a força resultante do peso mais sim uma gama de fatores atuam nesse momento tais fatores esse podem ser a resistência do ar, a dissipação de energia por aquecimento da mola, o bloquinho atado a mola pode perder massa com o tempo dentre outros inúmeros fatores, assim ao tratarmos apenas de uma desses fatores que séria considerar que a mola possui-se uma rigidez variável com o tempo já estaria tornando o caso desse sistema mais real assim como, já sabemos, a equação que descreve o movimento harmônico simples é,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0 \quad (4.1)$$

agora, portanto, se tivermos uma rigidez variável com o tempo, como segue,

$$k = -\frac{t}{m}$$

temos então que a equação (4.1), fica da seguinte forma,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\frac{t}{m}x}{m} = 0 \quad (4.2)$$

realizando uma substituição do tipo,

$$u = \frac{t}{m} \quad (4.3)$$

temos que,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{m} \quad (4.4)$$

e,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 0 \quad (4.5)$$

pela regra da cadeia podemos obter o seguinte resultado,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

e,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d^2x}{du^2} \cdot \frac{du}{dt} \quad (4.6)$$

assim, pelas equações (4.3), (4.5) e (4.4) a equação (4.2) pode ser reescrita como segue,

$$\frac{dx}{du} \cdot 0 + \frac{d^2x}{du^2} \cdot \frac{1}{m} - \frac{ux}{m} = 0$$

ou,

$$\frac{d^2x}{du^2} \cdot \frac{1}{m} - \frac{ux}{m} = 0 \quad (4.7)$$

ou ainda,

$$\underbrace{\frac{1}{m}}_I \underbrace{\left[\frac{d^2x}{du^2} - ux \right]}_{II} = 0$$

assim temos que ou $I=0$, ou $II=0$, o bloquinho pode ter uma massa considerável e assim I seja próximo de zero ou ainda que seu peso, seja muito pequeno fazendo com que I tenda ao infinito, contudo, em nenhum desses casos I será zero. Dessa forma II terá que ser igual a zero, ou seja,

$$\frac{d^2x}{du^2} - ux = 0 \quad (4.8)$$

tal equação é a conhecida equação de Airy, onde, já conhecemos a solução que é dada pela equação (2.30), temos então,

$$x = c_0 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{3k}}{3^k k! \Gamma(k + \frac{2}{3})} \right) + c_1 \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{3k+1}}{3^k k! \Gamma(k + \frac{4}{3})} \right)$$

entretanto, sabemos que $u = \frac{t}{m}$, assim teremos:

$$x = c_0 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{m}\right)^{3k}}{3^k k! \Gamma(k + \frac{2}{3})} \right) + c_1 \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{m}\right)^{3k+1}}{3^k k! \Gamma(k + \frac{4}{3})} \right) \quad (4.9)$$

a equação (4.9), é a solução para o problema de um sistema massa-mola com uma rigidez variável em uma equação de Airy.

5 CONCLUSÃO

Por fim, com base em todos os tópicos apresentados ao longo deste trabalho, conseguiu-se observar a importância das equações diferenciais para se solucionar problemas físicos de diversas características. Ao tratarmos do sistema massa-mola foi notório a importância de modo geral do sistema massa-mola, pois, só a partir deste se teve a oportunidade de se marcar unidades de tempo e ao tratarmos tal sistema com uma rigidez variável observamos uma das inúmeras formas de oscilações que o mesmo pode apresentar e ao tentar encontrar a solução deste foi notório a importância das modelagens, pois, conseguimos solucionar o problema de um sistema com rigidez variável utilizando a equação do astrônomo Ayri que por vezes foi desenvolvida pelo mesmo para o estudo de raios de luz que eram refletidos ou refratados em arco-íris. Dessa forma observando que com o bom entendimento das equações diferenciais as barreiras para solucionar as diversidades de problemas existentes se torna bem menor.

REFERÊNCIAS

BARATA, J. C. A. **Curso de Física -Matemática**. Departamento de Física-Matemática da Universidade de São Paulo, Versão de 2018, v.17,

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

DA SILVA, Alesando Linemberg Estevam. **Corda Não-Homogênea Pendurada Como Uma Equação Hipergeometrica Confluente**. 2017. 35 p. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) (Graduação em Ciência e Tecnologia)- universidade federal rural do semi-árido, Pau dos Ferros - RN, 2017.

FERNANDES CAVALCANTI, Filioe Abrantes. **Corda Vibrante não-homogênea com uma equação de bessel**. 2017. 35 p. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) (Graduação em Ciência e Tecnologia)- universidade federal rural do semi-árido, Pau dos Ferros - RN, 2017.

MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas**. Ponta Grossa: TODAPALAVRA Editora, 2012. 751 p.

NÓBREGA, Daniel Dantas. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó - RN, 2016. Disponível em: <https://monografias.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/2777/6/Equa%C3%A7%C3%B5es%20diferenciais%20ordin%C3%A1rias%20e%20algumas%20aplica%C3%A7%C3%B5es_Monogr%C3%A1fia_N%C3%B3brega.pdf>. Acesso em: 04 out. 2018

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica: mecânica**. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

PROVEZANO, Luiz Fernando. **Introdução às equações Diferenciais**. [S. l.], 2010. Disponível em: <https://www.ebah.com.br/content/ABAAA0-8AE/introducao-a-equacoes-diferenciais>. Acesso em: 28 fev. 2019.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, c2001. 2 v. ISBN 8534612919 (v.1).