

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE O MÉTODO DAS RAÍZES MÚLTIPLAS E O MÉTODO DE BAIRSTOW

Ronaldo Lopes Gonçalves¹, Ivan Mezzomo (Orientador)

Resumo: As funções polinomiais e suas raízes são de grande importância nas inúmeras áreas da ciência. Os cálculos dessas raízes podem ser feitos através de métodos numéricos que buscam seu valor aproximado. Entretanto, alguns métodos numéricos apresentam problemas quando as raízes contêm multiplicidade. Dois métodos capazes de contornar esse problema são os métodos numéricos das Raízes Múltiplas e o método de Bairstow. Este trabalho tem por objetivo fazer uma comparação entre esses dois métodos analisando o erro relativo e o número de iterações em 10 funções que apresentam raízes com multiplicidade e sem multiplicidade. O algoritmo de ambos os métodos foi implementado no software Dev-C++ e os resultados foram dispostos em uma tabela.

Palavras-chave: métodos numéricos, Newton-Raphson, método de Bairstow, método das Raízes Múltiplas.

1. INTRODUÇÃO

A palavra “computador” vem do verbo “computar”, que por sua vez significa calcular. O primeiro registro de um aparelho capaz de ajudar nos cálculos data de 500 anos antes de Cristo. Chamado de ábaco, esse aparelho foi um importante passo para a matemática. Em paralelo ao ábaco, os métodos numéricos surgiram ainda na antiguidade e são aplicações de algoritmos pelos quais é possível formular e resolver problemas matemáticos usando operações aritméticas menos complexas. No papiro de Rhind, é possível encontrar um método numérico capaz de encontrar raízes de equações simples. Além disso, as primeiras aplicações dos métodos numéricos consistiam em fazer aproximações de medidas de triângulos e círculos.

Segundo [8], método numérico é um conjunto de procedimentos utilizados para transformar um modelo matemático num conjunto de procedimentos capazes de encontrar soluções, mesmo que aproximadas, para problemas numéricos. Dentre os métodos numéricos podemos classificá-los em métodos diretos e indiretos.

Segundo [4], os métodos numéricos diretos consistem na resolução de sistemas lineares com um número finito de operações e são baseados apenas em uma sequência de passos.

Conforme [5], métodos indiretos são processos de cálculos infinitos e recursivos, em que o valor obtido a cada ciclo depende de valores obtidos em ciclos anteriores. Este tipo de método, na maioria das vezes, não obtém o valor exato para as raízes, mas sim, uma solução aproximada dentro de uma faixa de erro considerada aceitável. Podemos organizar os métodos iterativos em dois grupos, sendo eles em métodos abertos e intervalares.

Os métodos intervalares exploram o fato das funções mudarem de sinal nas vizinhanças de uma raiz. Logo, os métodos intervalares necessitam de duas estimativas iniciais que delimitam a raiz. A principal característica que diferencia os métodos intervalares entre si, são os cálculos sistemáticos para diminuir o intervalo que contém a raiz.

Métodos abertos são aqueles que necessitam de um único valor inicial x_0 , ou dois valores iniciais de x que não necessariamente precisam circundar a raiz. Os métodos abertos em alguns casos podem divergir da raiz a medida que os cálculos prosseguem.

A junção entre computadores digitais e métodos numéricos, no fim da década de 1940, deu um grande avanço no uso e desenvolvimento dos métodos numéricos nas inúmeras áreas da ciência. Podemos citar como exemplo, a utilização de métodos numéricos para calcular soluções de equações encontradas na engenharia; como leis de movimento de Newton que descrevem a trajetória de um projétil e servem para expressar conceitos como energia e inércia; no mercado de ações prevendo como os preços podem variar ao longo do tempo; na Lei Kirchhoff nos projetos de análise de circuitos; nos balanços de calor, massa e energia, entre outros.

Por outro lado, alguns outros problemas de engenharia como ajustes de curvas e modelagem de sistemas dinâmicos, estão associados a funções polinomiais e suas raízes. A razão dos polinômios serem bastante utilizados e estudados está na facilidade de manipulação. As operações elementares de soma, subtração e multiplicação de polinômios são bastante intuitivas. No estudo dos métodos numéricos, encontramos alguns métodos capazes de calcular as raízes de funções, como o método da falsa posição, biseção, secante, Müller, Newton-Raphson, entre outros. Entretanto, em alguns casos encontrar as raízes de equações polinomiais nem sempre é uma tarefa simples. Cada método numérico possui pontos fortes e fracos que devem ser levados em consideração na hora do cálculo.

Um dos problemas mais recorrentes em métodos numéricos como da secante ou do ponto fixo, ocorrem quando as raízes apresentam multiplicidade ou são números complexos. Uma das variações do método de Newton Raphson, chamada de método das Raízes Múltiplas, foi elaborado para evitar problemas com raízes que

apresentavam multiplicidade. Outro método ligado ao método de Newton-Raphson foi desenvolvido por Leonard Bairstow para calcular raízes complexas ou raízes com multiplicidade. Desta forma, dada a importância dos métodos numéricos e suas aplicações, estudar métodos capazes de contornar os problemas de multiplicidade e de números complexos pode se tornar uma alternativa viável para ciência.

O presente trabalho tem por objetivo comparar o desempenho do método das Raízes Múltiplas e do método de Bairstow quanto ao número de iterações e erro relativo. Este trabalho será dividido em 6 seções que consistirão em: Seção 2, faremos uma revisão bibliográfica de conceitos básicos necessários para o entendimento deste trabalho, como por exemplo, funções, raízes de funções, métodos numéricos, erros, critérios de parada e convergência. Seção 3, descreveremos os métodos numéricos que serão abordados neste trabalho, com suas principais características e figuras ilustrativas para uma melhor compreensão. A Seção 4 será reservada para a metodologia deste trabalho e a definição dos problemas. Na Seção 5, analisaremos os resultados obtidos com as comparações dos métodos numéricos. Finalmente, a Seção 6 faremos as considerações finais do trabalho.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção abordaremos os conceitos e definições da literatura para embasar o estudo do método numérico das Raízes Múltiplas e o método de Bairstow. Vamos abordar conceitos como funções, tipos de erro entre outros.

2.1. Função

Segundo [2], se considerarmos A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$, uma função $f: A \rightarrow B$ é uma lei ou regra que determina que cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B . O conjunto A é chamado domínio de f e é denotado por $D(f)$. O conjunto B , é chamado de contradomínio ou campo de valores de f . Sendo assim, uma função refere-se essencialmente a correspondência entre conjuntos. O gráfico de f pode ser determinado pelo conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano.

De acordo com [6], existem vários tipos de funções, tais como: racionais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, entre outras. Dentre elas, as funções polinomiais, algébricas e transcendentais, são as que apresentam maior notoriedade em suas aplicações.

De acordo com [2], uma função polinomial de grau n é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ onde $a_n \neq 0$ e $a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \dots a_0$ são constantes reais. Se o coeficiente dominante a_n for diferente de zero, então o grau do polinômio é n . O gráfico da função polinomial é uma curva que apresenta pontos de máximos e mínimos. Segundo [3], funções polinomiais são de grande importância para as ciências sociais e naturais pela sua aplicação na modelagem de fenômenos e processos no nosso cotidiano.

Funções algébricas são aquelas formadas por operações algébricas a partir de polinômios. De acordo com [3], as operações que formam as funções algébricas são adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes dos polinômios envolvidos. Um dos exemplos mais conhecidos de funções algébricas é a função da Teoria da Relatividade de Albert Einstein, dada por $E = mc^2$.

De acordo com [3], as funções transcendentais são as funções não algébricas, que incluem as funções trigonométricas, trigonométrica inversa, exponenciais e logarítmicas. Existem ainda, inúmeras funções que não apresentam um nome definido, mas que se incluem dentre as funções transcendentais. Segundo [3], algumas funções transcendentais são as somas de séries infinitas.

Nesse trabalho, usaremos as funções polinomiais pelas características que os métodos numéricos estudados apresentam de encontrar raízes complexas, raízes com e sem multiplicidade.

Definição: Dada uma função real definida por $y = f(x)$, δ é raiz de f se $f(\delta) = 0$.

Desta forma, calcular a raiz de uma função, consiste em determinar os pontos de intersecção do gráfico da função com o eixo das abscissas no plano cartesiano. Os tipos de raízes mais conhecidas são as raízes complexas, reais, racionais e raízes múltiplas. Segundo [6], dizemos que δ é raiz múltipla de multiplicidade n , $n \geq 1$, da equação $f(x) = 0$ se, e somente se, $f = (x - \delta)^n \cdot Q$ e $Q(\delta) \neq 0$. Isto é, a decomposição de f apresenta n fatores iguais a $(x - \delta)$.

De acordo com [5], podemos observar algumas regras para as raízes de polinômios:

- Para uma equação de grau n , existem n raízes reais ou complexas. Deve-se observar que essas raízes não serão necessariamente distintas;
- Se n for ímpar, existe pelo menos uma raiz real;
- Se existirem raízes complexas, elas serão em pares conjugados.

De acordo com [1], para encontrar as raízes de uma função são necessárias duas fases:

Fase 1. Isolamento da raiz, consiste em obter um intervalo que contém a raiz através de métodos gráficos e teóricos;
Fase 2. Refinamento, visa melhorar a aproximação inicial até atingir a precisão desejada e pré-estabelecida.

O isolamento da raiz será feito por análise teórica e gráfica da função. Como exemplo de análise teórica, podemos citar o teorema de Bolzano.

Teorema (Teorema de Bolzano): Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $x = \delta$ entre a e b que é zero de $f(x)$.

O teorema de Bolzano é empregado na análise de valores de uma função. Construindo uma tabela considerando apenas os sinais dos valores, é possível determinar o intervalo em que as raízes são encontradas observando a alternância de sinais. Para saber se existe apenas uma raiz naquele intervalo, utilizaremos o corolário a seguir.

Corolário: Sob as hipóteses do teorema anterior, se $f'(x)$ existir e preservar o sinal em (a, b) , então este intervalo contém um único zero de $f(x)$.

Vale ressaltar, que esse corolário não funcionará quando aplicado a raízes que apresentam multiplicidade par, uma vez que o sinal da derivada muda por se tornar um ponto de inflexão que cruza o eixo das abscissas e o sinal na raiz se altera.

Conforme [1], a análise gráfica pode ser feita esboçando o gráfico da função $f(x)$ e localizando os pontos onde a curva intercepta o eixo x . Uma outra forma para encontrar as raízes de $f(x)$, é usar equações equivalentes $g(x)$ e $h(x)$ tal que $f(x) = h(x) - g(x)$. Esboçando o gráfico de $g(x)$ e $h(x)$ no mesmo plano cartesiano, os pontos onde as curvas $g(x)$ e $h(x)$ se interceptam, são as raízes de $f(x)$. Assim, $f(\delta) = 0 \Leftrightarrow g(\delta) = h(\delta)$.

Por outro lado, conforme [4], as funções de primeiro até quarto grau e algumas funções transcendentais, podem ter suas raízes determinadas através de métodos analíticos. Entretanto, ocorre uma dificuldade em calcular a raiz de funções polinomiais de grau superior a quatro. De acordo com [9], alguns artifícios matemáticos como Briot-Ruffini, encontram raízes de polinômios usando apenas os coeficientes. Considerando o quociente $h(x) = x - a$, onde a é um número real, o dispositivo de Briot-Ruffini ao final do seu procedimento, reescreve o polinômio como $P(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$, onde $q(x)$, $r(x)$ são respectivamente o quociente e o resto da divisão. É possível encontrar uma raiz usando o dispositivo de Briot-Ruffini quando $r(x) = 0$, ou seja $a = \delta$. Entretanto, muitas vezes esse processo se torna complicado e longo. Para contornar esses problemas, foram criados métodos numéricos que fornecem soluções mediante operações aritméticas simples.

Na fase dois ocorrerá o emprego de métodos numéricos para executar o refinamento. A forma de calcular o refinamento é a principal característica que diferencia os métodos entre si.

2.2. Erros

Embora as técnicas numéricas tenham produzido estimativas que estão próximas da solução analítica exata, há uma discrepância ou erro nas soluções encontradas. Segundo [5], os erros numéricos são causados pelo uso de aproximações para representar operações e quantidades matemáticas exatas. Os erros fazem parte do processo de cálculo, e em muitos casos, não podem ser evitados. Dentre os principais erros em cálculo numérico, podemos citar os erros de truncamento, arredondamento, absoluto e relativo.

De acordo com [7], a representação de um número depende fundamentalmente da máquina utilizada e de seu Sistema de Ponto Flutuante (SPF), o que gera nesses casos, os erros de arredondamento e truncamento. Os erros de truncamento estão relacionados a representação de números infinitos em máquinas que recebem apenas valores finitos. Já os erros de arredondamento ocorrem devido a tentativa de executar propriedades aritméticas em calculadoras e computadores, tendo o número arredondado para que sua representação seja possível no SPF da máquina.

De uma maneira geral, a resolução de um problema de qualquer área do conhecimento científico passa por uma fase de conhecimento entre a relação dos valores reais e aproximados. De acordo com [1], o erro absoluto é a diferença entre o valor exato de um número x e seu valor aproximado $\tilde{x}$, que pode ser expresso pela equação $EA = |x - \tilde{x}|$. Normalmente, apenas o valor aproximado $\tilde{x}$ é conhecido, o que torna impossível de obter o valor exato. Desta forma, é necessário obter um limitante superior ou estimativa para o módulo do erro absoluto.

O erro relativo é a divisão entre o erro absoluto pelo valor aproximado, que pode ser expresso pela equação $ER = \frac{|EA|}{|\tilde{x}|}$. Em geral, ao contrário do erro absoluto, o erro relativo leva em consideração as dimensões dos valores em análise.

3. MÉTODOS NUMÉRICOS ESTUDADOS

Nesse trabalho abordaremos dois métodos abertos, o método das Raízes Múltiplas e o método de Bairstow. O método das Raízes Múltiplas consiste em uma variação do método de Newton-Raphson, ao passo que o método de Bairstow corresponde a divisão de polinômios similarmente encontrado na função de iteração do método de Newton-Raphson. Desta forma, antes de introduzir o método das Raízes Múltiplas e o método de Bairstow, vamos

fazer uma breve introdução do método de Newton-Raphson. Explicaremos posteriormente como ocorre o processo iterativo e as principais características dos métodos numéricos abordados.

3.1. Método de Newton-Raphson

De acordo com [5], o método de Newton-Raphson é deduzido com base em sua interpretação geométrica. Considerando a aproximação inicial da raiz igual a x_i e estendendo uma reta tangente a partir do ponto $[x_i, f(x_i)]$, o ponto onde essa tangente cruza o eixo x representa uma estimativa melhorada da raiz. Como podemos ver na Figura 1.

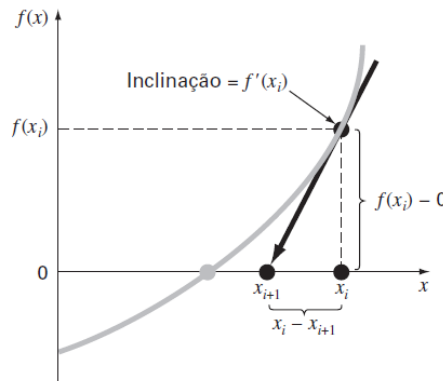


Figura 1. Descrição gráfica do método de Newton-Raphson (CHAPRA).

Sendo a primeira deriva de x_i equivalente a inclinação:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

podemos reorganiza-la para fornecer a equação de iteração de Newton-Raphson, escrita como:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Segundo [5], embora o método de Newton-Raphson seja eficiente na maioria dos casos, em algumas situações ele apresenta resultados insatisfatórios. Podemos citar como exemplo, a ocorrência de pontos de máximo ou mínimo próximos da raiz ou são as raízes, pois os valores tenderam a oscilar nesses pontos e não irão convergir. Além disso, a implementação do método em algumas linguagens de programação, muitas vezes torna o processo complicado, pela falta de operadores que calculem a derivada encontrada na fórmula de iteração do método de Newton-Raphson.

3.2. Método das Raízes Múltiplas

A fim de contornar problemas em raízes com multiplicidade, o método das Raízes Múltiplas foi desenvolvido na tentativa de melhorar o método de Newton-Raphson. De acordo com [5], uma modificação no método de Newton-Raphson foi feita em 1978, por Ralston e Rabinowitz que consiste em definir uma nova função

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e substituir no método de Newton-Raphson para evitar a divisão por zero, que ocorre na derivada primeira de raízes com multiplicidade.. Assim, a função é dada por

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}$$

Simplificando a fórmula e voltado as variáveis em função de f , obtemos a seguinte função de iteração

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i+1})}{[f(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

De acordo com [5], embora ele seja mais eficiente para raízes múltiplas, a ocorrência da derivada segunda no denominador da nova fórmula de iteração exige mais esforço computacional do que o método padrão para raízes simples de Newton-Raphson.

3.3. Método de Bairstow

Segundo [8], o método de Bairstow é um método iterativo de convergência quadrática que determina simultaneamente duas raízes através de um fator quadrático $x^2 - rx - s$. Para isso, o método de Bairstow usa apenas os coeficientes dos polinômios para executar uma divisão sintética. Técnica similar é encontrada em Briot-Ruffini, enquanto o método de Briot-Ruffini faz a divisão por um polinômio de grau um, no método de Bairstow executa a divisão por um polinômio de grau dois, para que seja possível o cálculo de raízes complexas.

De acordo com [5], considerando o polinômio

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

a divisão sintética pelo fator $x^2 - rx - s$ resulta em um polinômio de grau duas vezes menor, escrito pela função

$$f_{n-2}(x) = b_2 + b_3x + \dots + b_{n-1}x^{n-3} + b_nx^{n-2}$$

com um resto denotado por

$$R = b_1(x - r) + b_0$$

Como é pouco provável que a aproximação inicial dos valores de r e s levem o resto zero, devemos determinar uma maneira sistemática de modificar nossas aproximações de modo que b_0 e b_1 se aproximem de zero. Para fazê-lo, o método de Bairstow usa uma estratégia parecida com a abordagem do método de Newton-Raphson. Como b_0 e b_1 são funções tanto de r quanto de s , podemos relaciona-las no sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial b_1}{\partial s} \Delta s = -b_1 \\ \frac{\partial b_0}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial b_0}{\partial s} \Delta s = -b_0 \end{cases}$$

onde $\frac{\partial b_1}{\partial r}$, $\frac{\partial b_1}{\partial s}$, $\frac{\partial b_0}{\partial r}$ e $\frac{\partial b_0}{\partial s}$ são as derivadas parciais e Δr e Δs são as variações necessárias a serem feitas nos coeficientes de r e s na próxima iteração para que o fator $x^2 - rx - s$ se torne um divisor exato do polinômio em que deseja encontrar as raízes.

De acordo com [5], Leonard Bairstow mostrou que as derivadas parciais podem ser obtidas por uma divisão sintética dos b 's de um modo análogo à maneira como os próprios b 's foram determinados. Desta forma, obteremos o sistema com duas variáveis e duas incógnitas onde $\frac{\partial b_0}{\partial r} = c_1$; $\frac{\partial b_0}{\partial s} = \frac{\partial b_1}{\partial r} = c_2$; $\frac{\partial b_1}{\partial s} = c_3$

$$\begin{cases} c_2 \Delta r + c_3 \Delta s = -b_1 \\ c_1 \Delta r + c_2 \Delta s = -b_0 \end{cases}$$

Uma forma prática de visualizar o cálculo dos coeficientes das equações no sistema pode ser vista na Figura 2.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
r		$+$	$+$		$+$	$+$	
		$r \times b_n$	$r \times b_{n-1}$	...	$r \times b_3$	$r \times b_2$	$r \times b_1$
s			$+$		$+$	$+$	
			$s \times b_n$	...	$s \times b_4$	$s \times b_3$	$s \times b_2$
	b_n	$=$	b_{n-1}	$=$	b_{n-2}	$=$	b_2
						b_1	b_0
r		$+$	$+$		$+$	$+$	
		$r \times c_n$	$r \times c_{n-1}$	...	$r \times c_3$	$r \times c_2$	
s			$+$		$+$	$+$	
			$s \times c_n$	...	$s \times c_4$	$s \times c_3$	
	c_n	$=$	c_{n-1}	$=$	c_{n-2}	$=$	c_2
						c_1	

Figura 2. Esquema pratico do método de Bairstow (Autoria própria)

Para que seja possível uma melhor compreensão do esquema pratico do método de Bairstow, demonstraremos um exemplo no Apêndice 1.

Se $x^2 - rx - s$ for um divisor exato do polinômio, as raízes podem ser determinadas pela fórmula de Bhaskara. Portanto, o método se reduz a determinar valores de r e s que tornam o fator quadrático um divisor exato. Em outras palavras, procuram-se os valores que tornam o termo do resto igual a zero. Para o resto ser nulo, b_0 e b_1 precisam ser nulos.

Em cada caso, podemos fazer uma estimativa percentual do erro em r e s , calculados pela seguintes equações

$$|\varepsilon_{a,r}| = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| 100\%$$

$$|\varepsilon_{a,s}| = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| 100\%$$

De acordo com [8], uma das principais vantagens do método de Bairstow consiste em trabalhar com números reais mesmo quando se está calculando raízes complexas. Acrescido a isso, de acordo com [5], outro ponto forte é a maneira concisa de como as relações de recorrência podem ser programadas no computador.

Entretanto, o método de Bairstow apresenta divergência para alguns valores iniciais de r e s . O problema da estimativa inicial, muitas vezes é comum nos métodos abertos.

4. METODOLOGIA

Neste trabalho abordaremos as funções polinomiais que apresentam raízes com multiplicidade e sem multiplicidade para fazer um comparativo entre os métodos das Raízes Múltiplas e o método de Bairstow. Para o método das Raízes Múltiplas foi adotado x_0 como aproximação inicial. No método de Bairstow utilizaremos os valores iniciais para r e s iguais a um, no polinômio $x^2 - rx - s$. Como critério de parada, foi utilizado 10000 iterações e $\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} < \varepsilon$, com tolerância de $\varepsilon = 10^{-8}$.

O algoritmo de ambos os métodos foi implementado na linguagem de programação C, compilado no software Dev-C++, na versão 4.9.2, em um computador com memória RAM de 4G, sistema operacional Windows 10 e processador Intel core i5.

As funções estudadas estão listadas a seguir com a raiz que cada função apresenta, a multiplicidade de cada raiz, a raiz analisada e o x_0 para implementação do método das Raízes Múltiplas.

Problema 1: $f_1(x) = x^5 - 22x^4 + 192x^3 - 832x^2 + 1792x - 1536$, possui raízes 4 e 6 com multiplicidade 4 e 1 respectivamente. Vamos analisar a raiz 4, com $x_0 = 5$ para o método das Raízes Múltiplas.

Problema 2: $f_2(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$, possui raízes -1 e 1 com multiplicidade 1 e 3 respectivamente. Neste problema vamos analisar a raiz -1, com $x_0 = -1.5$ para o método das Raízes Múltiplas;

Problema 3: $f_3(x) = x^7 - 11x^6 + 51x^5 - 129x^4 + 192x^3 - 168x^2 + 80x - 16$ possui raízes 1 e 2 com multiplicidade 3 e 4 respectivamente. Neste problema vamos analisar a raiz 2, com $x_0 = 1.5$ para o método das Raízes Múltiplas;

Problema 4: $f_4(x) = x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 46x^2 + 65x + 25$, possui raízes -1 e 5 com multiplicidade 3 e 2 respectivamente. Neste problema vamos analisar a raiz -1, com $x_0 = 0.5$ para o método das Raízes Múltiplas;

Problema 5: $f_5(x) = x^6 + 11x^5 + 31x^4 - 47x^3 - 340x^2 - 464x - 192$, possui raiz -4, -1 e 3 com multiplicidade 3, 2 e 1 respectivamente. Neste problema vamos analisar a raiz 3, com $x_0 = 3.5$ para o método das Raízes Múltiplas;

Problema 6: $f_6(x) = x^4 - 3x^3 - 398x + 1200x - 800$, possui raízes -20, 1,2 e 20. Neste problema vamos analisar a raiz 1, com $x_0 = 0$ para o método das Raízes Múltiplas.

Problema 7: $f_7(x) = x^5 - 9x^4 - 42x^3 + 584x^2 - 1344x$, possui raízes -8, 0, 4, 6, 7. Neste problema vamos analisar a raiz 4, com $x_0 = 1.5$ para o método das Raízes Múltiplas;

Problema 8: $f_8(x) = x^6 - 106x^5 + 4359x^4 - 85900x^3 + 799375x^2 - 2906250x + 3515625$ possui raízes 3 e 25 com multiplicidade 2 e 4 respectivamente. Neste problema vamos analisar a raiz 3, com $x_0 = 2$ para o método das Raízes Múltiplas;

Problema 9: $f_9(x) = x^4 - 35x^3 - 1569x^2 + 75555x - 712800$, possui raízes -45, 15, 32, 33. Neste problema vamos analisar a raiz 32, com $x_0 = 30$ para o método das Raízes Múltiplas.

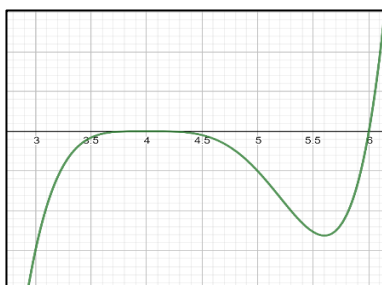


Figura 3. Gráfico do Problema 1 (Autoria Própria)

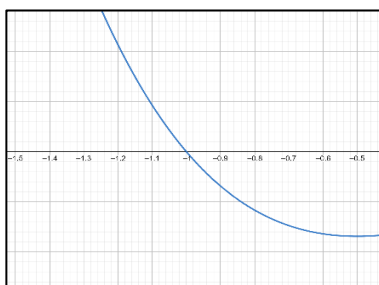


Figura 4. Gráfico do Problema 2 (Autoria Própria)

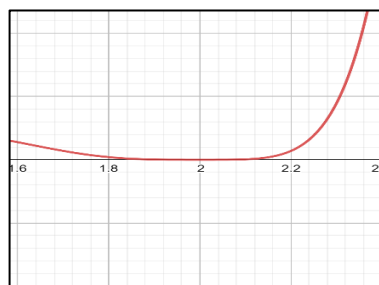


Figura 5. Gráfico do Problema 3 (Autoria Própria)

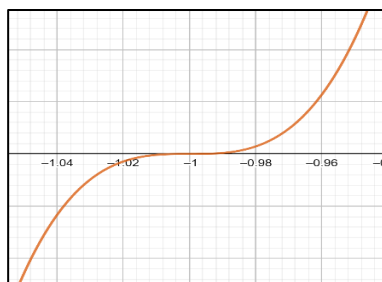


Figura 6. Gráfico do Problema 4 (Autoria Própria)

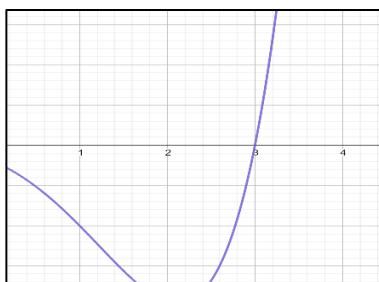


Figura 7. Gráfico do Problema 5 (Autoria Própria)

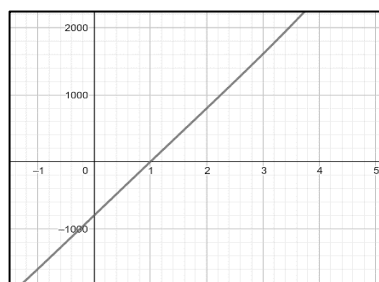


Figura 8. Gráfico do Problema 6 (Autoria Própria)

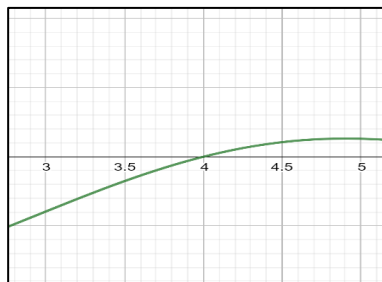


Figura 9. Gráfico do Problema 7 (Autoria Própria)

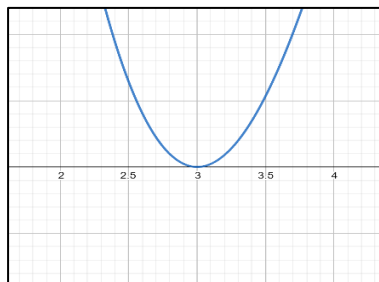


Figura 10. Gráfico do Problema 8 (Autoria Própria).

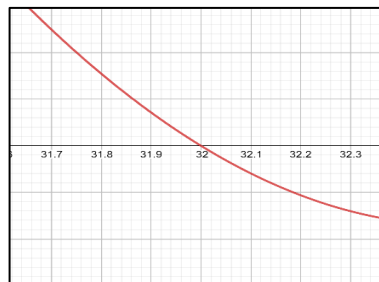


Figura 11. Gráfico do Problema 9 (Autoria Própria).

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, os métodos numéricos estudados foram aplicados em 9 funções. Os resultados estão expressos na tabela 1:

Tabela 1: Aplicação dos métodos numéricos					
Problema	Método	δ	$\bar{x}$	Nº de Iter.	Erro
Problema 1	Raízes Múltiplas	4	4.00016019	4	1.75×10^{-4}
	Bairstow		4.11840438	45	2.87×10^{-2}
Problema 2	Raízes Múltiplas	-1	-1.00000000	7	0
	Bairstow		-1.00000000	32	0
Problema 3	Raízes Múltiplas	2	1.99982539	6	1.00×10^{-4}
	Bairstow		73.42020000	Divergiu	-
Problema 4	Raízes Múltiplas	-1	-1.00000003	4	3.70×10^{-9}
	Bairstow		-1.0026 - 0.0049i	8	2.59×10^{-3}
Problema 5	Raízes Múltiplas	3	3.00000000	62	0
	Bairstow		2.99999761	160	7.96×10^{-7}
Problema 6	Raízes Múltiplas	1	1.00000000	6	0
	Bairstow		1.00000000	4	0
Problema 7	Raízes Múltiplas	4	3.99999999	10	2.5×10^{-9}
	Bairstow		3.99999928	7	1.79×10^{-7}
Problema 8	Raízes Múltiplas	3	2.99996331	Não convergiu	-
	Bairstow		3.00097688	7	3.25×10^{-4}
Problema 9	Raízes Múltiplas	32	31.99999999	5	3.12×10^{-11}
	Bairstow		32.00001907	11	5.96×10^{-7}

Analisando a Tabela 1, é possível notar que todas as funções convergiram em pelo menos um dos métodos. O método das Raízes Múltiplas convergiu em todos os problemas, exceto no Problema 8, enquanto o método de Bairstow divergiu apenas no Problema 3.

No problema 1, em relação ao número de iterações, o método das Raízes Múltiplas teve uma eficiência 1025% em comparação ao método de Bairstow e quanto ao erro relativo, o método das Raízes Múltiplas obteve a melhor eficiência.

No problema 2, em relação ao número de iterações, o método das Raízes Múltiplas obteve uma eficiência 228.57% em comparação ao método de Bairstow e quanto ao erro relativo, o método das Raízes Múltiplas obteve a melhor eficiência.

No problema 3, o método das Raízes Múltiplas obteve resultado após 6 iterações, enquanto que o método de Bairstow se afastou progressivamente do valor real da raiz a cada iteração.

No problema 4, em relação ao número de iterações, o método das Raízes Múltiplas obteve uma eficiência 100% em comparação ao método de Bairstow que convergiu para uma raiz complexa. O erro relativo para o método de Bairstow neste problema foi calculado em relação a parte real da raiz complexa e o valor exato da raiz. Como resultado, o método das Raízes Múltiplas demonstrou ser mais eficiente no erro relativo.

No problema 5, em relação ao número de iterações, o método das Raízes Múltiplas obteve uma eficiência 158.06% em comparação ao método de Bairstow e quanto ao erro relativo, o método das Raízes Múltiplas obteve a melhor eficiência.

No problema 6, em relação ao número de iterações, o método de Bairstow obteve uma eficiência 50% em comparação ao método das Raízes Múltiplas e quanto ao erro relativo, ambos os métodos demonstraram a mesma eficiência.

No problema 7, em relação ao número de iterações, o método das Raízes Múltiplas obteve uma eficiência 25% em comparação ao método de Bairstow e quanto ao erro relativo, o método das Raízes Múltiplas obteve a melhor eficiência.

No problema 8, o método das Raízes Múltiplas não convergiu para a raiz, levando em consideração os parâmetros pré-determinados nesse trabalho. Apesar da raiz calculada ter sido próximo da raiz real após 10000 iterações, ainda seriam necessários um número muito maior de iterações pois o tamanho do passo em cada iteração estava muito pequeno. O método de Bairstow convergiu com 7 iterações.

No problema 9, em relação ao número de iterações, o método das Raízes Múltiplas teve uma eficiência 120% em comparação ao método de Bairstow e quanto ao erro relativo, o método das Raízes Múltiplas obteve a melhor eficiência.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi realizado um estudo comparativo entre o método Bairstow e o método das Raízes Múltiplas em relação ao número de iterações e erro relativo que foram analisados em 9 funções polinomiais que variavam a multiplicidade. Implementamos os métodos numéricos abordados nesse estudo na linguagem de programação C e os resultados foram expostos na Tabela 1 para facilitar a análise e compreensão dos dados.

De modo geral, quase todos os problemas apresentaram convergência de ambos os métodos. A exceção ocorreu no Problema 3 quando o método de Bairstow divergiu, se afastando progressivamente do valor real da raiz e no Problema 8 quando o número de iterações ultrapassou o critério de parada antes que o valor da raiz estivesse suficientemente próximo do real. Nas raízes estudadas que apresentavam multiplicidade, o método das Raízes Múltiplas convergiu em 75% dos problemas abordados, sendo que o Problema 8 que não apresentou convergência poderia ter convergido se o número de iterações fosse aumentado.

Quanto ao número de iterações, o método das Raízes Múltiplas foi mais eficiente em 88,88% dos problemas estudados. No Problema 6 em que o método de Bairstow obteve menor número de iterações, a eficiência foi apenas de 50%. A busca simultânea de duas raízes a cada iteração para o método de Bairstow pode ser a explicação para que o método necessite do número maior de iterações. Das quatro raízes estudadas que apresentavam multiplicidade, o método das Raízes Múltiplas foi mais eficiente em todos os casos, com exceção do problema 8 em que o método não convergiu.

Em relação ao erro relativo, nos problemas que apresentaram convergência para ambos os métodos, o método das Raízes Múltiplas obteve eficiência de 71,42% dos problemas em relação ao método de Bairstow. Em 28,57% dos problemas ambos os métodos obtiveram o mesmo desempenho.

Nos problemas analisados neste trabalho, o método das Raízes Múltiplas apresentou maior eficiência em relação ao número de iterações e erro relativo. Nos problemas que apresentavam multiplicidade, o método contornou a dificuldade encontrada na derivada de primeira ordem da fórmula de iteração do método de Newton-Raphson. Entretanto, os resultados dos problemas que apresentavam multiplicidade e dos que não apresentavam multiplicidade dependeram da aproximação inicial x_0 . Os problemas abordados neste trabalho demonstraram que o resultado tendia para a raiz mais próxima de x_0 . Esta característica também é encontrada no método de Newton-Raphson.

O método de Bairstow apresentou uma convergência independente das aproximações iniciais de r e s do polinômio $x^2 - rx - s$. Junto a isso, o método demonstrou convergir para raízes complexas mesmo quando o valor da raiz calculada é real. Neste caso, a parte real da raiz complexa se aproximou do valor verdadeiro da raiz.

Ao buscar informação para este trabalho, foi possível observar uma escassez de dados para ambos os métodos. A literatura que aborda o tema de cálculo numérico dá prioridade a métodos como Bisseção, Falsa posição, Newton-Raphson, entre outros. Métodos numéricos como o método de Laguerre que tem taxa de convergência cúbica, poderiam ser analisados com o método de Bairstow. Uma abordagem interessante para trabalhos futuros seria utilizar o método de Bairstow para encontrar raízes e, então, refinar a aproximação utilizando-se o método de Laguerre.

O trabalho intitulado “O estudo comparativo entre o método das Raízes Múltiplas e o método de Bairstow” foi aprovado para ser apresentado no XXXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2018.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] RUGGIERO, Márcia A. G.; LOPES, Vera L. R., **Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais**. 2.ed., São Paulo, Makron Books, 1996.
- [2] FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração**. 6ª ed., São Paulo, Pearson, 2007.
- [3] STEWART, James. **Cálculo**. 5ª ed., São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 2006.
- [4] BARROSO, Leônidas C., **Cálculo Numérico**. São Paulo, Harbra, 1987.
- [5] CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P., **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5.ed., São Paulo, McGraw-Hill, 2008.
- [6] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Complexo, Polinômios e Equações**. 2.ed., São Paulo, Atual Editora, 1977.
- [7] ANELARES, S.; DAREZZO, ARTUR. **Cálculo Numérico: Aprendizagem com apoio de software**. 2.ed. São Paulo 2010.
- [8] SPERANDIO, D.; MENDES, T.J.; SILVA, L. H. M. **Cálculo Numérico: Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. 2.ed. São Paulo 2006.

Apêndice 1

Considerando a função polinomial $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1$ com raízes 0.2808, -1 e -1.7808, podemos descrever o esquema em 10 passos que podem ser vistos a seguir, a descrição do que ocorre em cada passo está listado abaixo:

- Passo 1: Escolha das estimativas iniciais para r e s , no exemplo adotamos $r = s = 1$;
- Passo 2: Após identificar e retirar os coeficientes do polinômio, multiplicaremos o termo b_3 ($b_3 = 2$) pelo valor de r . Ambos estão circulados em vermelho para uma melhor compreensão. O resultado será posto abaixo de a_2 ($a_2 = 5$);
- Passo 3: Fazendo a soma dos termos em verde, obtemos o valor de b_2 ($b_2 = 7$);
- Passo 4: Multiplicaremos agora o termo b_2 por s e b_3 por r . O resultado está nas cores azul e vermelha respectivamente;
- Passo 5: Fazendo a soma dos termos em verde para obter o valor de b_1 ($b_1 = 11$);
- Passo 6: Multiplicaremos o termo b_1 por s e b_2 por r . O resultado está nas cores azul e vermelha respectivamente;
- Passo 7: Fazendo a soma dos termos em verde para obter o valor de b_0 ($b_0 = 17$);
- Passo 8: Repetiremos o mesmo processo de multiplicação e soma com os valores dos b 's encontrados.
- Passo 9: O resultado do passo 8 após as multiplicações e somas é visto no passo 9;
- Passo 10: obtemos os valores necessários para o sistema que fornecerá as variações Δr e Δs . Que corresponde $b_0 = 17$, $b_1 = 11$, $c_1 = 22$, $c_2 = 9$, $c_3 = 2$.

		2	5	2	-1
$r \rightarrow$	1				
$s \rightarrow$	1				
			2		
$r \rightarrow$	1				
$s \rightarrow$	1				

Passo 1 e 2

		2	5	2	-1
1			2		
1			7		
		2			
1					
1					

Passo 3

		2	5	2	-1
1			2		
1			7		
		2			
1					
1					

Passo 4

		2	5	2	-1
1			2		
1			7		
		2			
1					
1					

Passo 5

		2	5	2	-1
1			2		
1			7		
		2			
1					
1					

Passo 6

		2	5	2	-1
1			2		
1			7		
		2			
1					
1					

Passo 7

		2	5	2	-1
1			2		
1			7		
		2			
1					
1					

Passo 8

		2	5	2	-1
1			2		
1			7		
		2			
1					
1					

Passo 9

		2	5	2	-1
1			2		
1			7		
		2			
1					
1					

Passo 10

Desta forma, obtemos o sistema $\begin{cases} 9\Delta r + 2\Delta s = -11 \\ 22\Delta r + 9\Delta s = -17 \end{cases}$ que tem como solução $\Delta r = -1.7567$ e $\Delta s = 2.4054$ que serão somados aos valores de r e s para que inicie o processo iterativo novamente. Após 7 iterações que podem ser vistas no Apêndice 2, o método de Bairstow convergiu para as raízes com valores $x_1 = 0.2807$ e $x_2 = -1.7808$ com erro relativo de 3.5635×10^{-4} e 0 respectivamente.

Apêndice 2

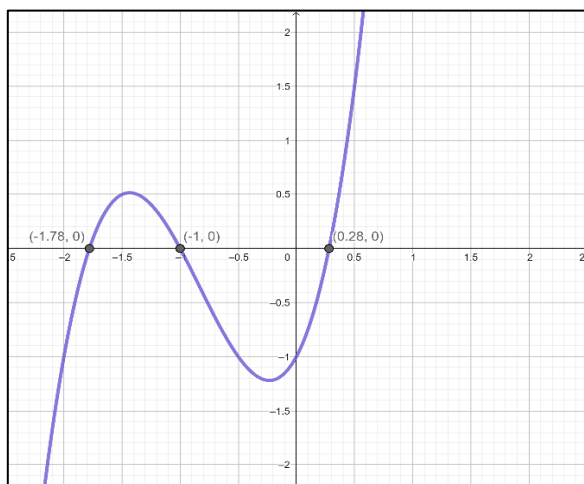


Gráfico da função. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1$.

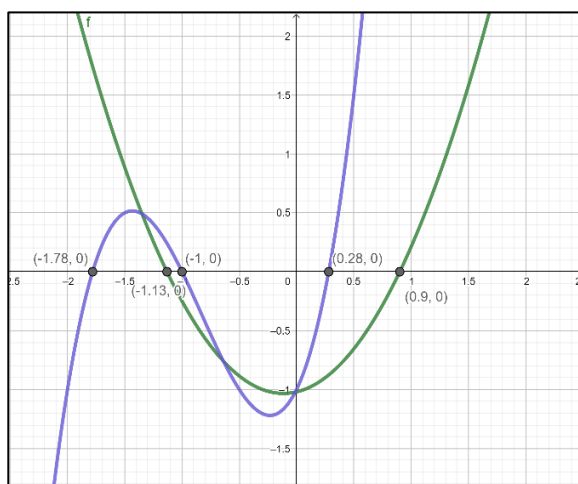


Gráfico da segunda iteração dada por $f(x) = x^2 + 0.2264x - 1.0188$.

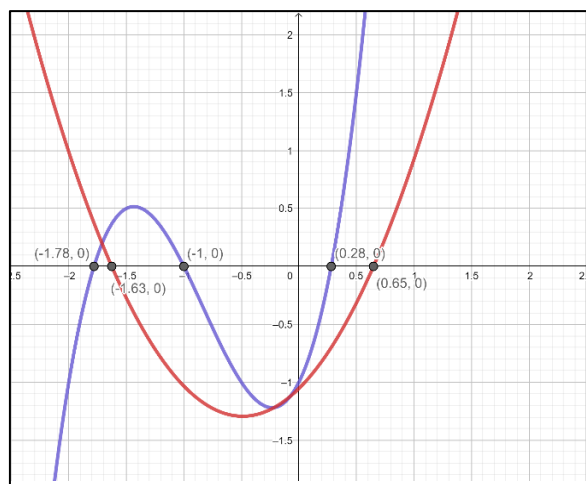


Gráfico da terceira iteração dada por $f(x) = x^2 + 0.9785x - 1.0545$.



Gráfico da quarta iteração dada por $f(x) = x^2 + 1.2853x - 0.6553$.

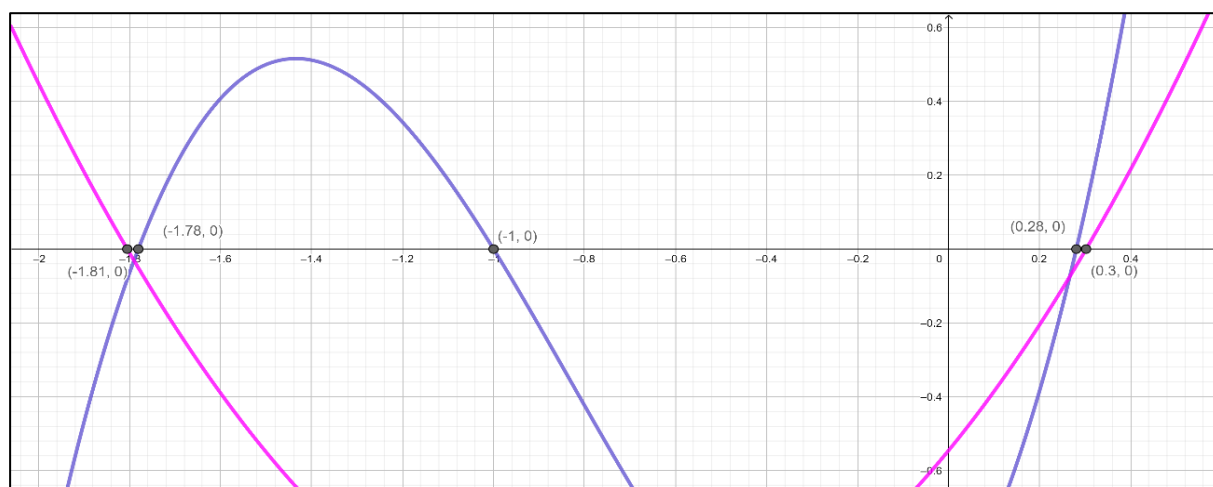


Gráfico da quinta iteração dada por $f(x) = x^2 + 1.5028x - 0.5458$.

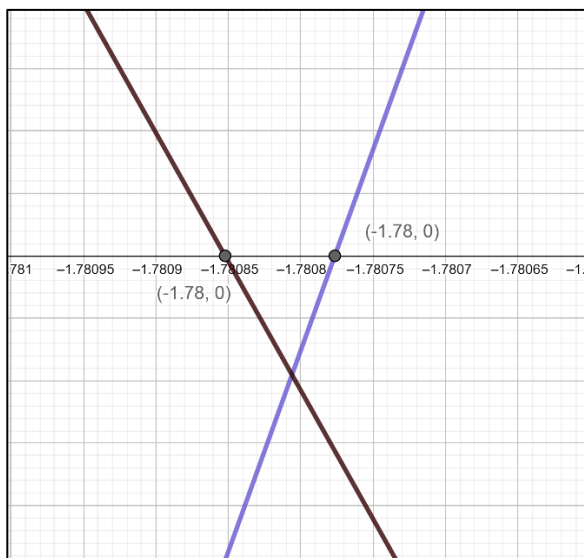


Gráfico da sexta iteração dada por $f(x) = x^2 + 1.5002x - 0.4998$ (raiz a esquerda).

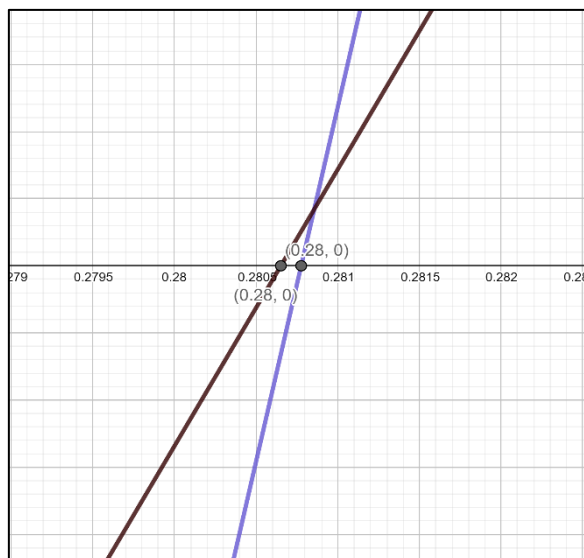


Gráfico da sexta iteração dada por $f(x) = x^2 + 1.5002x - 0.4998$ (raiz a direita).

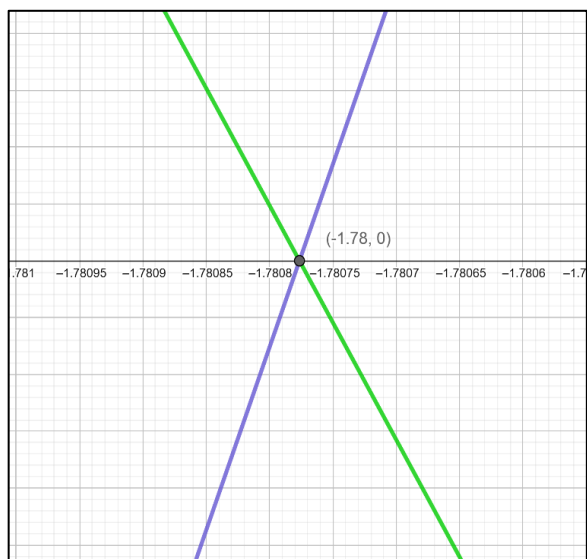


Gráfico da sétima iteração dada por $f(x) = x^2 + 1.5000x - 0.5000$ (raiz a esquerda).

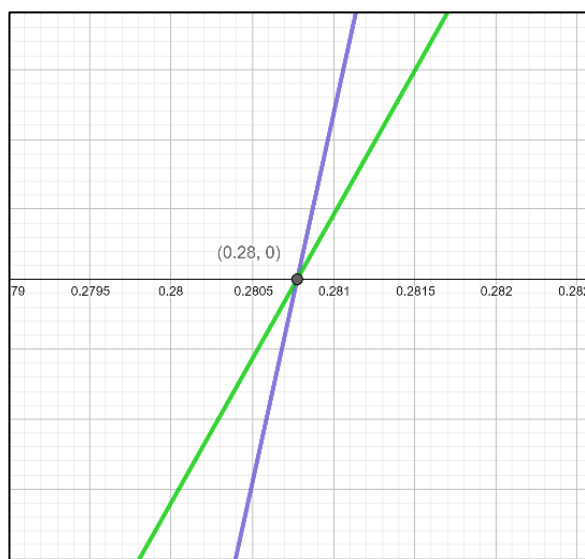


Gráfico da sétima iteração dada por $f(x) = x^2 + 1.5000x - 0.5000$ (raiz a direita).