

ANÁLISE DIFERENCIAL DA VIBRAÇÃO LIVRE COM AMORTECIMENTO VISCOZO DE UM SISTEMA MASSA-MOLA PARA DIFERENTES FLUIDOS

Igor R. B. de Freitas, Matheus da Silva Menezes (Orientador)

Neste trabalho pretende-se abordar os estudos teóricos referentes as equações diferenciais e utilizar o método de resolução dos coeficientes constantes para encontrar a função que descreve o comportamento vibratório do sistema massa-mola quando imerso em diferentes fluidos. Na análise teórica foi usado o método dos coeficientes constantes para obter as funções dos sistemas: superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido, seguido da resolução de problemas teóricos. Na análise experimental foi realizado uma videoanálise com o auxílio do software *Tracker*, com o objetivo de averiguar o comportamento do sistema quando imerso em três diferentes fluidos. Os resultados obtidos nos problemas propostos foram semelhantes aqueles vistos em teoria, comprovando assim a eficiência do método. Na análise comportamental, os gráficos não foram iguais a teoria, porém conseguiu-se uma boa descrição do fenômeno.

Palavras-chave: equações diferenciais; sistema massa-mola; superamortecido; criticamente amortecido; subamortecido

1 Introdução

Nas ciências e na engenharia, modelos matemáticos são desenvolvidos para auxiliar na compreensão de fenômenos físicos. Estes modelos frequentemente geram uma equação que contém algumas derivadas de uma função desconhecida. Tal equação é chamada de equação diferencial [1]. Existem inúmeras aplicações em que esses modelos podem ser usados, algumas são: dinâmica populacional, decaimento radioativo, lei do movimento de Newton, disseminação de doenças, entre outras.

Uma importante aplicação na engenharia, é a análise de vibrações. Mais recentemente, com o avanço da tecnologia e, consequentemente da indústria, diversos problemas surgiram decorrentes desse fenômeno, levando máquinas e estruturas à falhas repentinas ou a sua inutilização, um exemplo disso ocorreu com a ponte de Tacoma Narrows (1940). Apesar de seus efeitos danosos, a vibração pode ser utilizada a favor em várias aplicações industriais e de consumo [2].

Diante de sua vasta aplicação é importante conhecer as equações diferenciais e saber desenvolver os métodos para encontrar a função desconhecida de um fenômeno. Vamos estudar a teoria matemática relacionada as equações diferenciais e desenvolver um dos métodos utilizados para encontrar a função que descreve o comportamento vibratório de um sistema. O sistema em análise é o massa-mola com amortecimento viscoso, para qual teremos três casos distintos e possíveis.

Com isso, traçamos alguns objetivos: descrever a equação diferencial, sua classificação e teoria matemática relacionada; demonstrar a resolução analítico-matemática do modelo diferencial do sistema massa-mola amortecido para os diferentes casos; realizar experimento prático e com o auxílio de um software computacional verificar o comportamento gráfico em diferentes fluidos.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Equações Diferenciais

Para o melhor entendimento dos estudos desenvolvidos neste trabalho, apresentaremos um breve resumo da teoria fundamental relacionada às equações diferenciais. As demonstrações dos teoremas mais

gerais fogem do escopo do presente trabalho e serão omitidas em seu texto, podendo serem vistas na bibliografia básica dos cursos de equações diferenciais. Para darmos início ao estudo, faz-se necessário entender o que é uma equação diferencial. Entre outros autores, [3] vem mostrar que:

Definição 2.1 *Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial (ED)**.*

Essas equações, por sua vez, podem ser classificadas por tipo, ordem e linearidade. Quanto ao tipo podem ser *ordinária* ou *parcial*, onde a equação que apresenta derivadas com relação a uma única variável independente é chamada de **equação diferencial ordinária (EDO)**, todavia, se a equação apresenta derivadas com relação a duas ou mais variáveis independentes é denominada de **equação diferencial parcial (EDP)**. A classificação por ordem, corresponde a derivada de maior ordem na equação. Quanto à linearidade, dada a EDO de n -ésima ordem por:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (1)$$

A equação acima é dita linear se a variável dependente y e todas as suas derivadas $y', y'', \dots, y^n$ são do primeiro grau e os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ de $y, y', y'', \dots, y^n$, são constantes ou dependem de funções cuja variável é independente.

2.1.1 Equação Linear de Segunda Ordem

A equação linear em (1) está escrita em sua forma geral de n -ésima ordem ou de ordem n . Fazendo $n = 2$, obtemos a equação linear de segunda ordem na forma:

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (2)$$

no qual o coeficiente $a_2(x)$ deve ser diferente de zero. É importante ressaltar dois casos em que a equação acima pode ser apresentada, o primeiro para $g(x) = 0$, dizemos que a equação é homogênea, caso contrário, quando $g(x) \neq 0$, a equação é dita heterogênea. Frequentemente, problemas que envolvem o sistema massa-mola resultam em uma equação linear de segunda ordem, motivo pelo qual nossa fundamentação teórica é voltada para esse tipo de equação diferencial.

2.1.2 Dependência e Independência Linear

Para entendermos a solução geral de uma equação homogênea, precisamos definir alguns conceitos auxiliares como dependência e independência linear. Um conjunto de duas funções $c_1 f_1(x)$ e $c_2 f_2(x)$ é dito **linearmente dependente (LD)** em um intervalo I , se houver constantes c_1 e c_2 não todas nulas para todo x nesse intervalo, que satisfaça a seguinte condição:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0, \quad (3)$$

entretanto, se para a relação ser satisfeita, $c_1 = c_2 = 0$, então o conjunto é **linearmente independente (LI)**. Sempre que necessário podemos recorrer a esse conceito para saber se um conjunto de funções é LD ou LI, mas nem sempre aplicá-lo é o mais viável, para isso foi desenvolvido uma ferramenta chamada **wronskiano**. Supondo que cada uma das funções f_1, f_2 tenham pelo menos uma derivada, então o wronskiano pode ser calculado como o determinante da matriz:

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Teorema 2.2 *Sejam y_1 e y_2 duas soluções da equação diferencial linear homogênea de ordem 2 em um intervalo I . Então, o conjunto de soluções será **linearmente independente** em I se e somente se $W(y_1, y_2) \neq 0$ para todo x no intervalo I .*

2.1.3 Equação Homogênea de 2ª Ordem - Solução Geral

A equação homogênea de segunda ordem, possui a forma:

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0. \quad (5)$$

Segundo [4], a solução de uma equação pode ser definida da seguinte maneira:

Definição 2.3 A solução de uma equação diferencial de ordem n em um intervalo I é toda função f que está definida em I , possui pelo menos n derivadas contínuas em I e que quando substituídas na equação diferencial, reduzem a mesma a uma identidade.

A solução geral de uma equação diferencial de ordem n em um intervalo I é formada por uma família de n soluções $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$ no mesmo intervalo I dependendo de n constantes. Sendo assim, a solução geral de uma equação linear homogênea de 2ª ordem, é tal que:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad (6)$$

qualquer solução particular pode ser obtida atribuindo-se valores as constantes c_1 e c_2 , e que as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções conhecidas e linearmente independentes. Quaisquer duas soluções da equação linear homogênea de 2ª ordem, que sejam linearmente independentes, formam o que chamamos de **conjunto fundamental de soluções (CFS)**, responsável por gerar todas as demais soluções a partir da combinação linear em (6).

2.1.4 Problema de Valor Inicial (PVI)

Em geral, os métodos matemáticos utilizados para resolver uma EDO fornecem como resultado uma solução geral, porém, na prática estamos interessados em uma solução particular, ou seja, uma função $y(x)$ que satisfaça determinadas condições de contorno que são impostas sobre ela e suas derivadas, e o problema para encontrar tal função dada as condições iniciais sobre x_0 , é chamado de **problema de valor inicial (PVI)**. Sendo assim, o problema de valor inicial de segunda ordem, possui as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= f(x, y, y') \\ y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \end{aligned}$$

onde x_0, y_0 e y_1 são dados conhecidos. Outro tipo de problema que consiste em encontrar a solução de uma EDO dado as condições iniciais em pontos *diferentes* é denominado de **problema de valor de contorno (PVC)**. Para sabermos se um PVI possui uma solução única, devemos fazer uso do teorema a seguir.

Teorema 2.4 Sejam $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ e $g(x)$ contínuas no intervalo I e seja $a_2(x) \neq 0$ para todo x nesse intervalo. Se $x = x_0$ for um ponto qualquer nesse intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ do problema de valor inicial nesse intervalo.

2.1.5 Equações Diferenciais com Coeficientes Constantes

As equações lineares homogêneas de 2ª ordem com coeficientes constantes, são equações na forma de:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0, \quad (7)$$

sendo a, b e c constantes. Para encontrar a solução geral de equações diferenciais que possuem essa estrutura, dentre os métodos disponíveis utilizamos o dos coeficientes constantes, esse método constitui em supor que uma das soluções da equação acima é $y(x) = e^{sx}$, onde s é constante. Essa suposição é interessante pois e^{sx} é a única função cuja derivada é um múltiplo de si mesma. Partindo dessa suposição inicial, temos que suas derivadas são:

$$\begin{aligned} y'(x) &= se^{sx} \\ y''(x) &= s^2 e^{sx}, \end{aligned} \quad (8)$$

dessa forma, substituindo (8) em (7) e deixando o termo repetitivo e^{sx} em evidência, temos:

$$\begin{aligned} a(s^2 e^{sx}) + b(se^{sx}) + c(e^{sx}) &= 0 \\ e^{sx}(as^2 + bs + c) &= 0, \end{aligned}$$

sabendo que $e^{sx} \neq 0$, então para a igualdade ser satisfeita a expressão reduz-se em:

$$as^2 + bs + c = 0. \quad (9)$$

A Equação (9) é denominada de equação auxiliar ou característica, para encontrar a solução geral da equação diferencial associada devemos encontrar o valor de s , sendo assim teremos que considerar três casos possíveis para suas raízes:

1. Quando $\Delta > 0$, duas raízes reais e distintas;
2. Quando $\Delta = 0$, duas raízes iguais;
3. Quando $\Delta < 0$, duas raízes complexas;

Caso I: raízes reais e distintas

Para o caso em que $\Delta > 0$, aplicando a fórmula de Bhaskara encontramos as raízes:

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

como as raízes s_1 e s_2 são reais e distintas, a solução geral torna-se:

$$y(x) = c_1 e^{s_1 x} + c_2 e^{s_2 x}. \quad (10)$$

Caso II: raízes reais e iguais

Para o caso em que $\Delta = 0$, temos duas raízes iguais como:

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2a},$$

porém, duas soluções iguais não formam o CFS e assim não podemos descrever a solução geral para esse caso. Para resolvermos esse problema, recorreremos a outro método para soluções de EDs: *redução de ordem*¹. Por meio desse método é possível encontrar outra solução, de tal maneira que, ambas sejam linearmente independentes. Pela redução de ordem, obtemos:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \quad \because P(x) = \frac{b}{a} \\ &= e^{-\frac{b}{2a}x} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{(e^{-\frac{b}{2a}x})^2} dx \\ &= e^{-\frac{b}{2a}x} \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{-\frac{b}{a}x}} dx \\ y_2(x) &= x e^{-\frac{b}{2a}x}. \end{aligned}$$

Agora, a solução geral pode ser formulada:

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}. \quad (11)$$

Caso III: raízes complexas

Para $\Delta < 0$, temos duas raízes conjugadas e complexas, de maneira que:

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

reorganizando, temos:

$$s_{1,2} = \alpha \pm \beta i.$$

Aplicando as raízes complexas, podemos obter a solução geral:

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + c_2 e^{(\alpha - \beta i)x},$$

mas o uso dessa solução geral não é prático, pois apresenta funções exponenciais complexas, sendo assim é preferível trabalhar com funções reais. Para isso, usamos a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

substituindo θ por βx e $-\beta x$, tem-se:

$$\begin{cases} e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x \\ e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x \end{cases},$$

¹A redução de ordem constitui outro método para resolução de EDs, motivo esse de não abordarmos seus conceitos e demonstração matemática, pois divergem dos objetivos pretendidos neste artigo.

somando e subtraindo os termos obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} &= 2 \cos \beta x \\ e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} &= 2i \sin \beta x. \end{aligned}$$

Vamos montar duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, fazendo $c_1 = c_2 = 1$ para $y_1(x)$ e $c_1 = 1, c_2 = -1$ para $y_2(x)$. Portanto:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \\ y_2(x) &= e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}. \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_2(x) &= e^{\alpha x} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x} \sin \beta x, \end{aligned}$$

e como consequência do conjunto fundamental de soluções, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ podem ser escritos como combinação linear para obtermos a solução geral:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (12)$$

2.2 Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

A vibração livre é compreendida como a vibração que um sistema exerce como resultado de uma perturbação inicial. O sistema escolhido em nossa análise é o massa-mola, que após uma perturbação inicial por meio de uma distensão em sua mola, vibra livremente em meio viscoso. Na Figura 1 temos a representação do sistema em estudo.

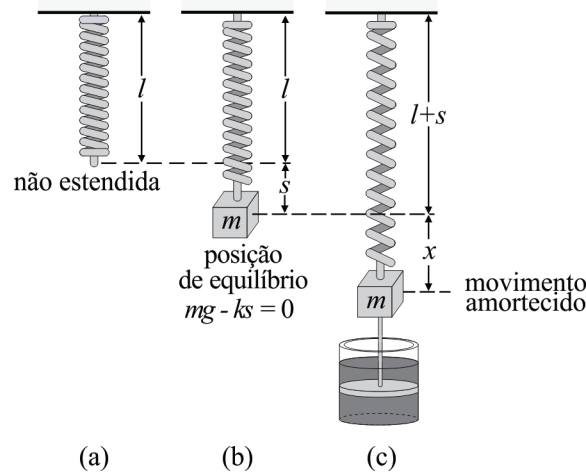


Figura 1: Sistema massa-mola em diferentes estados. (a) mola não estendida, (b) posição de equilíbrio e (c) movimento amortecido. (Adaptado) [3]

Para encontrarmos o modelo matemático que descreve o comportamento vibratório do sistema apresentado, antes é necessário fazermos algumas considerações relevantes. Primeiro, vamos considerar que a mola possui massa suficientemente pequena, de modo que, os efeitos de seu peso sobre o bloco sejam desprezíveis e que a força restauradora que exerce é oposta ao seu alongamento e é dado pela lei de Hooke na forma $F_r = -kx$, onde k é a constante da mola e x representa o alongamento da mola a partir da posição não estendida; segundo, o sistema sofre deslocamento somente no eixo vertical x ; e terceiro, o fluido que envolve a haste ou bloco, dependendo da configuração do sistema, exerce uma força contrária ao seu deslocamento e possui magnitude diretamente proporcional a sua velocidade, sendo expressa por:

$$F = -c \frac{dx}{dt}, \quad (13)$$

onde c é a *constante de amortecimento*. Essa força é a responsável por dissipar a energia mecânica do sistema e o seu valor depende de vários fatores como: tamanho e forma do corpo em vibração,

viscosidade, frequência de vibração, velocidade, entre outros. Aplicando a segunda lei de Newton ao bloco e considerando o sentido positivo do eixo x para baixo, temos:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= mg - k(x + s) - c \frac{dx}{dt} \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= mg - ks - kx - c \frac{dx}{dt},\end{aligned}$$

por meio da condição de equilíbrio mostrada na Figura 1(b), onde $mg = ks$, encontramos o modelo matemático que descreve a **vibração livre com amortecimento viscoso**:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (14)$$

A solução dessa equação diferencial é obtida utilizando o método dos coeficientes constantes, como explicado em 2.1.5. Sua equação auxiliar é expressa:

$$ms^2 + cs + k = 0,$$

cujas raízes são:

$$\begin{aligned}s_{1,2} &= \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \\ &= \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}},\end{aligned} \quad (15)$$

antes de encontrarmos as possíveis soluções, vamos reescrever essas raízes em termos da *constante de amortecimento crítico* e o *fator de amortecimento*.

Segundo [2], o amortecimento crítico c_c é definido como o valor da constante de amortecimento c para o qual o radicando da Equação (15) torne-se zero:

$$\begin{aligned}\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} &= 0 \\ c_c &= 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n,\end{aligned} \quad (16)$$

onde $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, é a *frequência natural de vibração* do sistema.

O fator de amortecimento ζ é definido pela razão entre a constante de amortecimento do sistema c e o amortecimento crítico c_c , da seguinte maneira:

$$\zeta = \frac{c}{c_c}. \quad (17)$$

Podemos reescrever:

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c} \cdot \frac{c_c}{2m} = \zeta\omega_n,$$

e como consequência as raízes tornam-se:

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n,$$

admitindo $0 \leq \zeta \leq \infty$, o radicando do termo acima pode ser positivo, negativo ou zero. Vejamos os três casos possíveis para o comportamento do fenômeno.

2.2.1 Caso I: sistema superamortecido

Para $\zeta > 1$ as raízes são reais e distintas, e sua solução geral conforme a Equação (10) é:

$$x(t) = c_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + c_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}. \quad (18)$$

Para as condições iniciais em que $x(0) = x_0$ e $x'(0) = x'_0$, substituindo na solução geral encontrada e resolvendo o sistema formado, encontramos:

$$c_1 = \frac{x'_0 + x_0\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \text{ e } c_2 = \frac{-x'_0 - x_0\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \quad (19)$$

visto que as raízes s_1 e s_2 são ambas negativas, a Equação (18) descreve um movimento aperiódico, que para $t \rightarrow \infty$, diminuirá até zero.

2.2.2 Caso II: sistema criticamente amortecido

Para $\zeta = 1$ as raízes são reais e iguais, que pela Equação (11) sua solução geral é:

$$x(t) = c_1 e^{-\omega_n t} + c_2 t e^{-\omega_n t}, \quad (20)$$

aplicando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = x'_0$, obtemos:

$$c_1 = x_0 \text{ e } c_2 = x'_0 + \omega_n x_0. \quad (21)$$

A função do movimento desse sistema também é aperiódico, porém diferente do sistema superamortecido, a função tende a zero em um intervalo de tempo muito menor, sendo este o princípio básico de funcionamento de um amortecedor.

2.2.3 Caso III: sistema subamortecido

Para $\zeta < 1$, as raízes são complexas e distintas e a solução geral possui a forma da Equação (12), como:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ x(t) &= c_1 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t) + c_2 e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t), \end{aligned} \quad (22)$$

mas a expressão acima pode ser reescrita em uma forma alternativa com a introdução de uma notação, fazendo:

$$c_1 = A \sin \phi \text{ e } c_2 = A \cos \phi,$$

que utilizando a relação trigonométrica do $\sin(\phi + \theta) = \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta$, e substituindo na Equação (22) encontramos a solução geral na forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta \omega_n t} (c_1 \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t) + c_2 \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t)) \\ &= A e^{-\zeta \omega_n t} (\sin \phi \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t) + \cos \phi \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t)) \\ x(t) &= A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi). \end{aligned} \quad (23)$$

Onde a frequência angular $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$ é denominado de *frequência de vibração amortecida*. A constante A é a *amplitude de vibração livre* e ϕ é o *ângulo de fase*, que através das relações seguintes é possível encontrarmos seus valores:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ e } \phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{c_1}{c_2} \right). \quad (24)$$

Para as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = x'_0$, aplicados na solução geral da Equação (22) chegamos em:

$$c_1 = x_0 \text{ e } c_2 = \frac{x'_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n}. \quad (25)$$

Analisando a Equação (23) percebemos que o movimento desse sistema é oscilatório, porém devido ao fator $e^{-\zeta \omega_n t}$, sua amplitude diminui exponencialmente com o tempo, levando o sistema à posição zero. A Figura 2 mostra a diferença do comportamento gráfico de cada caso que discutimos anteriormente.

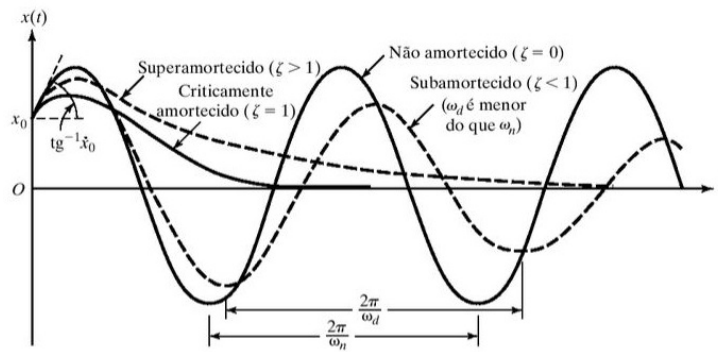


Figura 2: Comparação entre os movimentos com tipos diferentes de amortecimento. [2]

Notamos que, somente é possível encontrar a solução particular do sistema subamortecido se soubermos o fator de amortecimento ζ , entretanto, na prática seu valor é desconhecido. Pensando nisso foram desenvolvidos vários métodos para *determinação*² desse fator, aqui discutiremos apenas o método de decremento logarítmico.

²Para mais informações sobre os métodos de determinação do fator de amortecimento, recomendamos à leitura de [5].

2.2.4 Decremento Logarítmico

O decremento logarítmico representa a taxa de redução da amplitude de uma vibração livre amortecida, sendo definido como o logaritmo natural da razão de duas amplitudes distintas [2]. Considerando t_n e t_{n+i} os instantes de tempo de duas amplitudes consecutivas com diferença de i ciclos entre eles, onde $i = 1, 2, 3, \dots$ número inteiro, então $t_{n+i} = t_n + i\tau_d$, e $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ é o *período de vibração amortecida*. A razão das amplitudes é expressa por:

$$\frac{x_n}{x_{n+i}} = \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t_n} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_n + \phi)}{Ae^{-\zeta\omega_n t_{n+i}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_{n+i} + \phi)}. \quad (26)$$

Como consequência, $\sin \omega_d t_{n+i} = \sin \omega_d(t_n + i2\pi/\omega_d) = \sin \omega_d t_n$. Substituindo na Equação (26) e aplicando o logaritmo natural, temos:

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n+i}} &= \frac{e^{-\zeta\omega_n t_n}}{e^{-\zeta\omega_n(t_n+i\tau_d)}} \\ &= e^{i\zeta\omega_n\tau_d} \\ \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+i}}\right) &= i\zeta\omega_n\tau_d, \end{aligned}$$

fazendo $\lambda = \left(\frac{1}{i}\right) \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+i}}\right)$, reorganizando e isolando ζ , encontramos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \zeta \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ \zeta &= \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}} \end{aligned} \quad (27)$$

3 Metodologia

Para comprovar o método de resolução de equações diferenciais apresentado neste trabalho, utilizamos em nossa metodologia dois métodos de análise, são eles: teórico e experimental. A análise teórica consiste em encontrarmos a solução de problemas teóricos e depois com o auxílio do software *Excel* plotar seus respectivos gráficos.

Na análise experimental, realizamos um experimento em laboratório afim de constatar o fenômeno e comparar o seu comportamento com a teoria vista. Para a realização do experimento foram necessários os seguintes materiais: câmera digital, suporte universal; barbante (fino e resistente); becker de 600 ml; 3 massas de 50 g; mola; régua; adesivo de cor; 500 ml de água; 500 ml de detergente; e 500 ml de shampoo. O aparato experimental deve ser montado conforme ilustrado na Figura 3. É extremamente importante

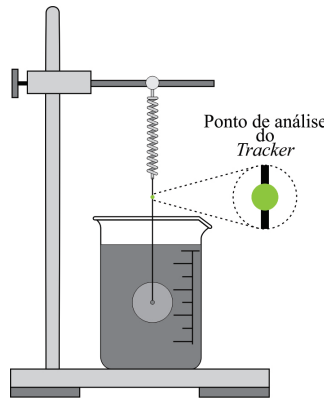


Figura 3: Modelo do aparato experimental. (Autoria própria)

que o adesivo possua um contraste bem nítido com o barbante e esteja fixo no meio dele, para facilitar a análise do software.

Com o aparato experimental pronto, para a execução do experimento realizamos uma perturbação (distensão) no sistema massa-mola, e em seguida, uma gravação em vídeo foi feita, para usarmos o software *Tracker* e descrever o comportamento da posição da massa em função do tempo. O experimento foi executado três vezes seguidas, onde para as mesmas condições iniciais variamos o fluido de amortecimento e com ele o fator de amortecimento para obtermos diferentes sistemas vibratórios. Os fluidos utilizados foram: água, detergente e shampoo.

3.1 Problemas Teóricos

Os problemas que vamos solucionar a seguir, constituem parte da análise teórica e abordam os três casos de vibração amortecida que foram vistos na teoria. Vejamos seus enunciados:

Problema 1: o cilindro de 1,2 Kg está preso a um amortecedor viscoso e à mola de rigidez $k = 180$ N/m. Se o cilindro é liberado a partir do repouso, no instante $t = 0$, da posição em que está deslocado de uma distância $x = 150$ mm em relação a sua posição de equilíbrio, trace um gráfico do deslocamento x em função do tempo para o caso em que $c = 100$ Kg/s. (Adaptado) [6]

Problema 2: o cano da arma de caça tem massa de 1,2 Kg e é retornado para a posição de tiro após o recuo de um recuperador de constante $c = 29,4$ Kg/s. Determine (a) a constante k que deveria ser usada para o recuperador retornar o cano para a posição de tiro no menor tempo possível sem qualquer oscilação, (b) a equação do movimento, sabendo que $x_0 = 0,15$ m e $v_0 = 0$. (Adaptado) [7]

Problema 3: uma massa de 1,2 Kg é presa a uma mola de cuja constante é 180 N/m e todo o sistema é então submerso em um líquido que oferece uma força de amortecimento numericamente igual a 3 vezes a velocidade instantânea. Determine a equação do movimento, considerando que a massa é solta do repouso do ponto 0,15 m abaixo da posição de equilíbrio. (Adaptado) [3]

3.2 Estratégias de Resolução

- Resolução analítica diferencial do problemas teóricos;
- Análise Comportamental (experimento);

4 Resultados e Discussões

A seguir apresentamos os resultados e discussões aos problemas teóricos propostos e a análise comportamental em diferentes fluidos.

4.1 Problema 1

Para resolver esse problema, é necessário sabermos qual tipo de sistema amortecido estamos trabalhando e assim saber qual equação usarmos, para isso devemos calcular o valor do fator de amortecimento. Substituindo a Equação (16) em (17) e aplicando os dados do problema, temos:

$$\zeta = 3,4021$$

Como $\zeta > 1$, concluímos que o sistema é superamortecido, agora para chegarmos na equação de seu movimento precisamos encontrar as constantes c_1 e c_2 , que pela Equação (19) obtemos:

$$c_1 = 0,1535 \text{ m e } c_2 = -0,003466 \text{ m},$$

e substituindo tudo na Equação (18) encontramos a equação do seu movimento, como:

$$x(t) = 0,1535e^{-1,8406t} - 0,003466e^{-81,4931t}.$$

O comportamento gráfico da função acima está representado na Figura 4.

4.2 Problema 2

Para resolver a primeira parte deste problema, devemos observar que no próprio enunciado ficou claro que sistema deve retornar para posição de equilíbrio no menor tempo possível e o único sistema em que isso ocorre é no sistema criticamente amortecido. Sabendo que $\zeta = 1$, concluímos que $c = c_c$ e pela Equação (16) isolamos k e encontramos seu valor, como:

$$29,4 = 2 \cdot 1,2 \cdot \sqrt{\frac{k}{1,2}} \therefore k \cong 180 \text{ N/m}.$$

Na segunda parte devemos calcular os valores das constantes c_1 e c_2 através da Equação (21), obtendo assim:

$$c_1 = 0,15 \text{ m e } c_2 = 1,8371 \text{ m/s},$$

que substituídas na Equação (20), encontramos a função do sistema:

$$x(t) = 0,15e^{-12,2474t} + 1,8371te^{-12,2474t}.$$

O gráfico dessa função pode ser vista na Figura 4.

4.3 Problema 3

Para resolvermos o problema proposto devemos ter em mente qual sistema estamos trabalhando, para chegarmos a essa conclusão devemos calcular o fator de amortecimento. Segundo o enunciado a força de amortecimento é 3 vezes a velocidade instantânea, logo pela Equação (13) o coeficiente $c = 3 \text{ Kg/s}$, então aplicando a Equação (17) obtemos o seguinte resultado:

$$\zeta = 0,1021,$$

caracterizando assim um sistema subamortecido, pois $\zeta < 1$. Agora precisamos calcular as constantes c_1 e c_2 que pela Equação (25), temos:

$$c_1 = 0,15 \text{ m e } c_2 = 0,01540 \text{ m/s},$$

e pela Equação (24) a amplitude de vibração livre e ângulo de fase:

$$A = 0,1508 \text{ m e } \phi = 1,4685 \text{ rad}.$$

Substituindo todos os parâmetros encontrados na Equação (23), chegamos na equação do movimento desse sistema:

$$x(t) = 0,1508e^{-1,2504t} \sin(12,1834t + 1,4685),$$

e o gráfico dessa função está representado na Figura 4.

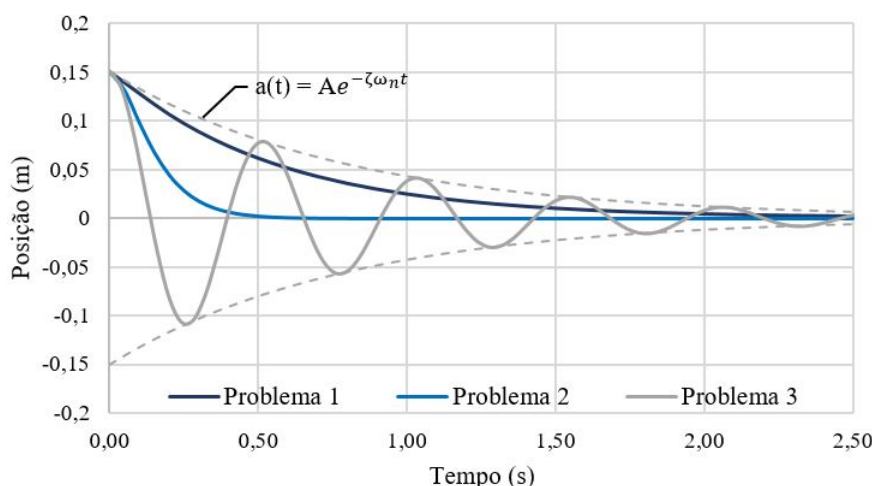


Figura 4: Comportamento gráfico dos problemas teóricos. (Autoria própria)

Como podemos notar na Figura 4, os gráficos dos problemas teóricos apresentaram um comportamento semelhante ao esperado de acordo com a fundamentação vista (ver Figura 2), com uma pequena diferença no início de cada gráfico, que pode ser justificado pelas condições iniciais do problema em questão. Os problemas foram escolhidos propositalmente para abordar os casos vistos na fundamentação e assim poder validar o método dos coeficientes constantes para resolver equações diferenciais.

4.4 Experimento Comportamental

O *Tracker* é um software *freeware* (gratuito) utilizado para videoanálise de fenômenos físicos, dentre suas funcionalidades destacam-se: coletar dados, criar gráficos e gerar curvas de ajustes. Tudo isso é possível, a partir da análise quadro a quadro realizada em vídeo, sendo o vídeo uma sequência de imagens denominadas de *frames*. Na Figura 5, temos o resultado de uma videoanálise em diferentes fluidos.

Podemos concluir que o sistema massa-mola quando imerso em diferentes fluidos, o seu fator de amortecimento é alterado. Por exemplo, é o caso da água e o detergente, que embora possuam o mesmo sistema subamortecido o fator de amortecimento deles são diferentes, por esse motivo no detergente o sistema oscilou menos. No shampoo, o sistema oscilou uma única vez, e como o intervalo de tempo em que ocorreu foi muito pequeno, podemos afirmar que esse sistema possui o comportamento esperado de um sistema criticamente amortecido.

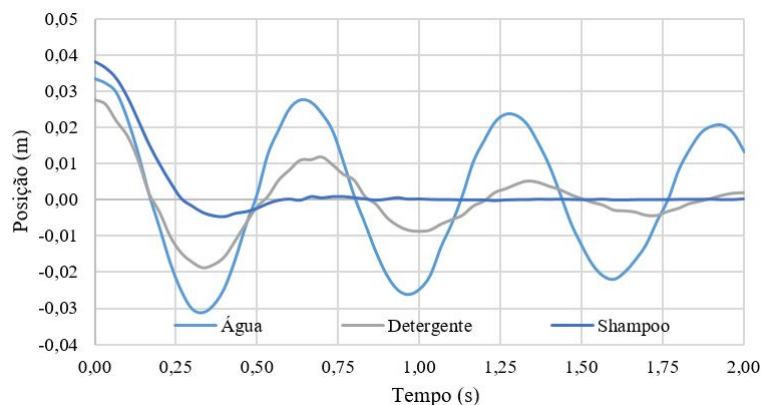


Figura 5: Dados obtidos pelo *Tracker* do sistema massa-mola em diferentes fluidos. (Autoria própria)

4.5 Considerações Finais

Este trabalho explorou parte da teoria matemática das equações diferenciais, com ênfase na teoria relacionada para descrever a vibração livre de um sistema massa-mola com amortecimento viscoso. Todos os objetivos delimitados foram alcançados, onde o método dos coeficientes constantes mostrou-se eficaz e os gráficos obtidos dos problemas propostos são acurados à aqueles vistos na fundamentação. A limitação encontrada neste estudo diz respeito a videoanálise do comportamento do sistema, isso porque embora todos os procedimentos descrito na metodologia tenham sido executados corretamente, os gráficos fornecidos pelo software não são iguais aos vistos em teoria devido a diversos erros inerentes ao experimento e que na análise ideal não são considerados, contudo, o comportamento geral está de acordo com os fenômenos estudados. É compreensível que o software é uma ferramenta que nos fornece dados estimados do que se quer analisar, portanto, os seus gráficos não coincidem como na teoria, mas nos fornece uma boa compreensão do fenômeno.

Referências

- [1] NAGLE, R. Kent; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. **Equações Diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2012. 562p. Tradução de: Daniel Vieira.
- [2] RAO, Singiresu S.. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2008. 424p. Tradução de: Arlete Simille.
- [3] ZILL, Dennis G.. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. 437p. Tradução de: Márcio Koji Umezawa.
- [4] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. 604p. Tradução de: Valéria de Magalhães Iório.
- [5] GARBIN, Nayane L. S.. **Estudos de técnicas para a determinação da matriz de amortecimento em sistemas estruturais**. 2016. 61 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2015.
- [6] MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G.. **Mecânica para engenharia: Dinâmica**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 520p. Tradução de: José Luís Lopes da Silveira.
- [7] BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON, E. Russell; CORNWELL, Phillip J.. **Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012. 753p. Tradução de: Antônio Eustáquio de Melo Pertence.