



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CAMPUS PAU DOS FERROS

MATHEUS ALVES DE MEDEIROS

SÉRIES DE POTÊNCIAS COMO
SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ESPECIAIS E
APLICAÇÕES

PAU DOS FERROS

2015

MATHEUS ALVES DE MEDEIROS

**SÉRIES DE POTÊNCIAS COMO
SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ESPECIAIS E
APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido
à Coordenação do Curso de Bacharelado em
Ciência e Tecnologia, da Universidade Fede-
ral Rural do Semi-Árido, como requisito par-
cial para a obtenção do grau de Bacharel em
Ciência e Tecnologia

Orientador: Prof. Me. Otávio Paulino Lavor

PAU DOS FERROS

2015

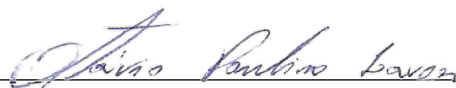
MATHEUS ALVES DE MEDEIROS

SÉRIES DE POTÊNCIAS COMO SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESPECIAIS E APLICAÇÕES

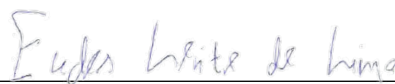
Trabalho de Conclusão de Curso submetido
à Coordenação do Curso de Bacharelado em
Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal
Rural do Semi-Árido, como requisito parcial
para a obtenção do grau de Bacharel em
Ciência e Tecnologia

Aprovado em 29/01/2015

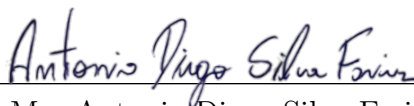
BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. Otávio Paulino Lavor (Orientador)
Universidade Federal Rural do Semi-Árido



Prof. Me. Eudes Leite de Lima
Universidade Federal Rural do Semi-Árido



Prof. Me. Antonio Diego Silva Farias
Universidade Federal Rural do Semi-Árido

© Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Campus Pau dos Ferros (BCPDF)
Setor de Informação e Referência

M488s Medeiros, Matheus Alves de.

Séries de potências como soluções de equações diferenciais especiais e aplicações/ Matheus Alves de Medeiros -- Pau dos Ferros, 2015.

64p.: il.

Orientador: Prof. Me. Otávio Paulino Lavor

Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) –
Universidade Federal Rural do Semi-Árido.

1. Equações diferenciais. 2. Equações especiais. 3. Séries de Potências. I. Título.

RN/UFERSA/BCPDF

CDD: 515.35

Bibliotecário: Eugênio Pacelli Ferreira da Costa
CRB-15/658

*Aos Meus Pais
e
Família...*

AGRADECIMENTOS

Primeiro, quero agradecer a Deus por me dá força e fé para percorrer esta jornada.

Agradeço a minha mãe que sempre me apoiou e ajudou da forma que ela pode, sendo por palavras ou gestos.

Agradeço aos meus avós e ao meu Tio Jansen, que sempre me ajudaram nesta jornada de estudos até aqui.

Agradeço a minha família, que sempre estão juntos comigo, dando todo suporte para realizar meus estudos.

Agradeço a todos os amigos que fiz ao longo desses anos, pelos momentos que passamos juntos, sendo estudando ou nos divertindo.

Agradeço a todos os professores da UFERSA e das instituições que estudei, que contribuíram para minha formação.

Agradeço ao meu orientador Otávio Paulino por ter dado todo o suporte para realização deste trabalho.

RESUMO

Nas áreas de ciências e tecnologias muitos dos problemas são modelados por equações diferenciais, donde surge a necessidade de um aprofundamento nestas equações para que possamos solucionar alguns destes problemas. Este trabalho tem por objetivo fazer um estudo das séries de potências como solução de equações diferenciais, em especial da equação de Gauss ou Hipergeométrica e a equação de Bessel, pois as mesmas tem diversas aplicações, como no problema da corda vibrante. O método de séries e o método de Fröbenius são utilizados para solucionar estas equações diferenciais, bem como a equação de Schrödinger para um determinado potencial. Algumas aplicações serão feitas visando uma melhor compreensão do assunto e mostrando a relevância dos conhecimentos apresentados.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Equações especiais. Séries de potências. Método de séries. Método de Fröbenius.

ABSTRACT

In science and technology many of the problems are modeled by differential equations, whence arises the need for a deepening these equations so that we can have these problems. This work aims to make a study of power series as the solution of differential equations, especially the Gauss equation or hypergeometric equation or the equation and Bessel, and the Bessel equation have various applications, as the problem of the vibrating string. The method of series and Frobenius is used to solve these differential equations, and the Schrödinger equation for a given potential. Some applications are made to better understand the issue and showing the relevance of the knowledge presented.

Keywords: Differential equations. Special equations. Power series. Method series. Method Frobenius.

LISTA DE FIGURAS

1	Um elemento de corda deslocada	p. 38
---	--	-------

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p. 11
2	REFERENCIAL TEÓRICO	p. 13
2.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	p. 13
2.1.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM .	p. 14
2.1.1.1	EQUAÇÕES LINEARES	p. 14
2.1.1.2	EQUAÇÕES SEPARÁVEIS	p. 16
2.1.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 2ª ORDEM . . .	p. 17
2.1.2.1	EQUAÇÕES LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS . . .	p. 21
2.1.3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES	p. 22
2.2	SÉRIES DE POTÊNCIAS	p. 23
2.2.1	MÉTODO DE SÉRIES	p. 24
2.2.2	MÉTODO DE FRÖBENIUS	p. 25
3	ALGUMAS EQUAÇÕES ESPECIAIS	p. 27
3.1	EQUAÇÃO DE GAUSS OU HIPERGEOMÉTRICA	p. 27
3.2	EQUAÇÃO DE BESSEL	p. 31
4	ALGUMAS APLICAÇÕES	p. 38
4.1	CORDA VIBRANTE	p. 38
4.1.1	CORDA VIBRANTE HOMOGÊNEA	p. 40
4.1.2	CORDA VIBRANTE HOMOGÊNEA PENDURADA	p. 44

4.1.3	CORDA VIBRANTE NÃO-HOMGÊNEA	p. 52
4.2	EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER	p. 56
5	CONCLUSÃO	p. 63
	REFERÊNCIAS	p. 64

1 INTRODUÇÃO

Ao analisarmos os principais problemas da física, computação, engenharia, etc., possivelmente aparecerão variáveis que irão depender de outras e, em muitas das vezes, essa dependência comporta-se em uma taxa referente as variáveis do problema. Nesse contexto cabe o estudo das equações diferenciais, pois elas interligam as variáveis através de um código, que podemos chamar de uma solução. Diante disso, surge a necessidade de um estudo detalhado destas equações e as séries de potências como soluções. O trabalho visa um aprofundamento de alguns tipos de equações diferenciais que aparecem com maior frequência.

Para que possamos chegar à solução de uma equação diferencial torna-se necessário conhecer algumas técnicas e métodos que levam a tais soluções. Na busca de soluções é viável conhecer o problema de interesse e a equação diferencial que rege o fenômeno, bem como o tipo de equação e como podemos resolvê-la.

Inúmeros problemas da física são modelados por equações diferenciais parciais, ou seja, são equações em que as variáveis dependentes são funções de uma ou mais variáveis independentes, com isso para resolução destes problemas é necessário um tratamento especial, que transforma essa equação diferencial parcial em equações diferenciais ordinárias que dependem apenas de uma variável independente. Ao fazer essa separação pode aparecer uma equação diferencial especial que na maioria das vezes é linear, mas não apresenta coeficientes constantes, logo isso nos leva a tentar escrever a solução desta equação como uma série de potências.

Dentre os inúmeros problemas onde se aplicam as equações diferenciais, este trabalho aborda dois assuntos relevantes nas áreas de ciências e tecnologias. Os problemas de destaque tratados neste trabalho são o da corda vibrante e da equação de Schrödinger para um potencial $V = E \tanh(x)$.

Uma vez que esses problemas são modelados por equações diferenciais lineares com coeficientes não constantes, o método de séries é usado na busca de soluções analíticas.

O trabalho está organizado da forma apresentada a seguir.

O capítulo 2 trás uma revisão de equação diferenciais, trazendo definições importantes para o entendimento de equações diferenciais e como elas são classificadas, e quais tratamentos podemos dar para encontrar uma solução das mesmas, tendo em vista que esta resolução pode ser através de uma integração direta, uma equação característica ou ainda através de uma série de potências.

O capítulo 3 aborda algumas equações especiais, como a equação de Bessel e a equação de Guass ou Hipergeométrica. Dentre um universo de equações diferenciais, o trabalho se propõe a relatar tais equações, pois a equação de Bessel modela uma grande variedade de problemas, em especial os que envolvem coordenadas cilíndricas e suas soluções conhecidas como funções de Bessel são soluções de outras equações. A equação de Gauss também aparece com frequência e diversas funções podem ser escritas em termos de sua solução, a função hipergeométrica ou de Gauss.

O capítulo 4 trás algumas aplicações. Primeiramente temos uma breve dedução da equação da corda vibrante e depois de seus casos genéricos. Posteriormente temos a equação de Schrödinger, em seguida uma classificação destas equações e que métodos podemos utilizar para a solucionar estes problemas, pois os mesmos são descritos por equações diferenciais parciais, onde nos leva a ter um tratamento especial, para transformar este tipo de equação em uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes não constantes, que pode ser resolvida através de séries de potências.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Definição 1.1 (Equação diferencial). *Uma equação diferencial é uma equação em que aparecem derivadas das variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.*

Se tivermos $y = f(x)$, isto quer dizer que y é uma função de x , em que y é a variável dependente e x é a independente.

Temos os seguintes exemplos de equações diferenciais:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial h} + \frac{\partial y}{\partial t} = xy^2 \quad (2.2)$$

$$\frac{dy}{dt} + ty = t^3 \quad (2.3)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + y^2 = 0 \quad (2.6)$$

Definição 1.2 (Equação Diferencial Ordinária). *Uma equação diferencial é ordinária se todas as derivadas são ordinárias, ou seja, derivadas de uma equação ou mais variáveis dependentes em relação a uma variável independente.* Exemplos: (2.1), (2.3) e (2.6).

Definição 1.3 (Equação Diferencial Parcial). *Se na equação aparecem derivadas parciais, a equação é dita equação diferencial parcial.* Exemplos: (2.2), (2.4) e (2.5).

Definição 1.4 (Ordem de uma Equação Diferencial). *A ordem da equação diferencial*

é dada pela ordem da derivada de maior ordem. Exemplos: (2.1) e (2.2) são de segunda ordem; (2.3), (2.4) e (2.5) são de primeira ordem; (2.6) é de terceira ordem.

Definição 1.5 (Equação Diferencial Linear). *Uma equação diferencial é dita linear se não aparecem:*

i) *Termos transcendentais das variáveis dependentes, tais como $\ln y(x)$. Termos transcendentais são todas as funções exceto polinômios. Exemplos: $\ln y(x)$; $\cos y(t)$; $\tan x(t)$; entre outras.*

ii) *Produto das variáveis dependentes ou suas derivadas, tais como, $[x(t)]^2$; $x(t)y(t)$; $x(t)\frac{dx}{dt}$; $(\frac{dx}{dt})^2$.*

Então temos os seguintes exemplos: As equações (2.1), (2.3) e (2.5).

Definição 1.6 (Equação Diferencial Não-Linear). *Uma equação diferencial é dita não-linear se aparecem um dos termos das condições i) e ii) do item acima. Exemplos: (2.2), (2.4) e (2.6).*

Definição 1.7 (Solução de uma equação diferencial). *A solução de uma equação diferencial é uma função que quando substituída na equação diferencial torna a igualdade verdadeira. Exemplo:*

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Podemos dizer que a solução para equação acima seria $y = x^2 + C_1$, pois se fizermos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + C_1) = 2x$$

Logo, percebemos que a igualdade é verdadeira.

2.1.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM

Trataremos de equações do tipo $\frac{dy}{dx} = f(y, x)$, em que os casos mais importantes são as equações do tipo linear, separáveis e exatas.

2.1.1.1 EQUAÇÕES LINEARES

Começaremos com o caso $\frac{dy}{dx} = -ay + b$ ou

$$\frac{dy}{dx} = -a(y - \frac{b}{a}), a \neq 0,$$

ou

$$\frac{1}{(y - \frac{b}{a})} \frac{dy}{dx} = -a.$$

Integrando ambos os termos em relação a variável x :

$$\int \frac{1}{y - \frac{b}{a}} \frac{dy}{dx} dx = -a \int dx,$$

daí,

$$\ln(y - \frac{b}{a}) = -ax + C_1.$$

Aplicando uma exponencial em ambos os termos, vemos que

$$y - \frac{b}{a} = e^{-ax+C_1},$$

ou ainda,

$$y = \frac{b}{a} + e^{-ax} e^{C_1}.$$

Podemos escrever $e^{C_1} = K$, logo a solução da equação $\frac{dy}{dx} = -ay + b$ é:

$$y = K e^{-ax} + \frac{b}{a}.$$

Iremos adotar alguns métodos para resolver equações do tipo:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{2.7}$$

• Método dos fatores integrantes

Consiste em multiplicar a equação diferencial linear por uma função apropriada, de modo a resolvê-la por integração direta:

1º) Tomando a equação (2.7) e multiplicando por $u(x)$, temos:

$$u(x) \frac{dy}{dx} + u(x)p(x)y = u(x)g(x), \tag{2.8}$$

Observe que:

$$\frac{d}{dx}[u(x)y] = u(x) \frac{dy}{dx} + y \frac{du(x)}{dx}. \tag{2.9}$$

Comparando as equações (2.8) e (2.9) podemos obter:

$$\frac{d}{dx}[u(x)y] = u(x) \frac{dy}{dx} + y \frac{du(x)}{dx} = u(x) \frac{dy}{dx} + u(x)p(x)y,$$

ou,

$$y \frac{du(x)}{dx} = u(x)p(x)y$$

Como $y \neq 0$,

$$\frac{du(x)}{dx} = u(x)p(x).$$

Isolando os termos semelhantes e integrando a expressão resultante em relação a variável x , temos:

$$\frac{1}{u(x)} \frac{du(x)}{dx} dx = p(x)dx.$$

Integrando

$$\ln[u(x)] = \int p(x)dx,$$

ou,

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}. \quad (2.10)$$

Voltando para a equação (2.8), temos:

$$u(x) \frac{dy}{dx} + u(x)p(x)y = u(x)g(x),$$

que fica

$$\frac{d[u(x)y]}{dx} = u(x)g(x).$$

Integrando a equação acima em relação a x

$$u(x)y = \int u(x)g(x)dx,$$

ou

$$y = \frac{1}{u(x)} \int u(x)g(x)dx. \quad (2.11)$$

Portanto, a solução da equação (2.7) é dada por (2.11), que por sua vez é dada por (2.10).

2.1.1.2 EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Considere uma equação diferencial ordinária do tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2.12)$$

Podemos escrever a equação (2.12) na forma $M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$, pois podemos tornar $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$.

Temos de acordo com a equação (2.12),

$$N(x, y) \frac{dy}{dx} = -M(x, y),$$

ou,

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é separável se esse M depende apenas de x e N depende apenas de y , ou seja, a equação pode ser escrita na seguinte forma:

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2.14)$$

Logo, a equação (2.14) pode ser resolvida por simples integração.

2.1.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 2ª ORDEM

Considere a equação:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}) \quad (2.15)$$

Se a função f na equação (2.15) depende linearmente de y e $\frac{dy}{dx}$, a equação (2.15) é dita linear, ou seja, f tem a forma:

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = -p(x) \frac{dy}{dx} - q(x)y + g(x)$$

Portanto, uma equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem é do tipo:

$$a_0(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = g(x) \quad (2.16)$$

Se na equação (2.16), $g(x) = 0$, (2.16) é dita homogênea.

Se $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $a_2(x)$ em (2.16) são constantes, dizemos que a equação (2.16) é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes, logo podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0,$$

ou,

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (2.17)$$

Podemos propor uma solução do tipo $y = e^{rx}$ para a equação diferencial (2.17). Então,

$$y' = re^{rx} \quad e \quad y'' = r^2 e^{rx},$$

Substituindo em (2.17) temos:

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0,$$

ou,

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Para que a igualdade acima seja verdadeira devemos ter

$$ar^2 + br + c = 0,$$

Esta equação é chamada de equação característica.

Digamos que as soluções das equações características sejam r_1 e r_2 . Então temos duas soluções para a EDO, $y_1 = e^{r_1 x}$ e $y_2 = e^{r_2 x}$.

Proposição: *Se y_1 e y_2 são soluções de (2.17), então qualquer combinação linear destas soluções também é uma solução de (2.17).*

Prova: Escreva y como

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad ; \quad y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \quad ; \quad y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''$$

Substituindo na equação (2.17), ficamos com:

$$a(C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + b(C_1 y_1' + C_2 y_2') + c(C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0$$

$$C_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + C_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0$$

Temos que $ay_1'' + by_1' + cy_1 = ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$, logo y é solução de (2.17).

Percebemos que a equação característica é uma equação do 2º grau, logo esta equação pode apresentar três tipos de raízes.

→ Raízes da equação característica

- i) Raízes reais e distintas;
- ii) Raízes Complexas conjugadas;
- iii) Raízes reais e repetidas.

Se temos $ar^2 + br + c = 0$, o r pode ser calculado da seguinte forma $r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\Delta = b^2 - 4ac$, logo para:

i) Raízes reais e distintas

$$\Delta > 0 \quad ; \quad r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad \mathbb{R} \ni r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$$

ii) Raízes complexas conjugadas

$$\Delta < 0 \quad ; \quad r_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{i\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad r_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{i\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad \mathbb{C} \ni r_1 \neq \bar{r}_2 \in \mathbb{C}$$

Onde $\frac{-b}{2a} = \gamma$ e $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \mu$.

iii) Raízes reais e repetidas

$$\Delta = 0 \quad ; \quad r_1 = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad r_2 = \frac{-b}{2a} \quad ; \quad \mathbb{R} \ni r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$$

Logo a solução para cada tipo de raiz é o seguinte:

i) Raízes reais e distintas

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

ii) Raízes complexas conjugadas

$$r_1 = \gamma + i\mu,$$

$$r_2 = \gamma - i\mu,$$

$$y_1 = e^{(\gamma+i\mu)x} = e^{\gamma x} e^{i\mu x} \quad ; \quad y_2 = e^{(\gamma-i\mu)x} = e^{\gamma x} e^{-i\mu x}, \quad (2.18)$$

Mas,

$$e^{i\mu x} = \cos \mu x + i \sin \mu x, \quad (2.19)$$

$$e^{-i\mu x} = \cos \mu x - i \sin \mu x. \quad (2.20)$$

Substituindo (2.19) e (2.20) em (2.18), obtemos:

$$y_1 = e^{\gamma x} (\cos \mu x + i \sin \mu x),$$

$$y_2 = e^{\gamma x} (\cos \mu x - i \sin \mu x).$$

A solução geral é:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

que fica,

$$y = C_1 e^{\gamma x} (\cos \mu x + i \sin \mu x) + C_2 e^{\gamma x} (\cos \mu x - i \sin \mu x),$$

ou,

$$y = e^{\gamma x} [(C_1 + C_2) \cos \mu x + (C_1 i - C_2 i) \sin \mu x].$$

Fazendo $C_1 + C_2 = A$ e $C_1 i - C_2 i = B$, logo:

$$y = e^{\gamma x} (A \cos \mu x + B \sin \mu x)$$

iii) Raízes reais repetidas

Logo, $r_1 = r_2$.

Tomemos

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Como para r_1 ser igual a r_2 , $\Delta = 0$ então:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow r_1 = \frac{-b}{2a} ; r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Fazendo,

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{a} \Rightarrow r_1 = r_2 = r.$$

Logo,

$$r = \frac{-b}{2a}.$$

Já sabemos que $y = e^{rx}$ é solução então, $y_1 = e^{\frac{-bx}{2a}}$. Vamos supor que $y_2 = v(x)y_1$ também é solução. Assim,

$$y_2 = v e^{\frac{-bx}{2a}},$$

$$y_2' = \frac{-b}{2a} v e^{\frac{-bx}{2a}} + v' e^{\frac{-bx}{2a}},$$

$$y_2'' = \frac{b^2}{4a^2} v e^{\frac{-bx}{2a}} - \frac{b}{2a} v' e^{\frac{-bx}{2a}} - \frac{b}{2a} v' e^{\frac{-bx}{2a}} + v'' e^{\frac{-bx}{2a}} = \frac{b^2}{4a^2} v e^{\frac{-bx}{2a}} - \frac{bv'}{a} e^{\frac{-bx}{2a}} + v'' e^{\frac{-bx}{2a}}.$$

Substituindo na equação original, ficamos com:

$$a \left[\frac{b^2}{4a^2} v e^{\frac{-bx}{2a}} - \frac{bv'}{a} e^{\frac{-bx}{2a}} + v'' e^{\frac{-bx}{2a}} \right] + b \left[\frac{-b}{2a} v e^{\frac{-bx}{2a}} + v' e^{\frac{-bx}{2a}} \right] + c v e^{\frac{-bx}{2a}} = 0.$$

Eliminando as exponenciais ficamos com:

$$a\left(\frac{b^2v}{4a^2} - \frac{bv'}{a} + v''\right) + b\left(-\frac{b}{2a} + v'\right) + cv = 0.$$

Da equação acima chegamos à:

$$-\frac{v}{4a}(b^2 - 4ac) + av'' = 0.$$

Mas $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, logo:

$$av'' = 0.$$

Tendo a seguinte solução:

$$v = Cx + D.$$

Portanto, $y_2 = (Cx + D)e^{\frac{-bx}{2a}}$, logo a solução geral é:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

Substituindo

$$y = C_1e^{\frac{-bx}{2a}} + C_2(Cx + D)e^{\frac{-bx}{2a}},$$

Da equação acima chegamos à:

$$y = (C_1 + C_2D)e^{\frac{-bx}{2a}} + C_2Cxe^{\frac{-bx}{2a}},$$

Tomando $C_1 + C_2D = A$ $C_2C = B$, logo:

$$y = Ae^{\frac{-bx}{2a}} + Bxe^{\frac{-bx}{2a}}.$$

A equação acima é a solução geral da equação (2.17).

2.1.2.1 EQUAÇÕES LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS

As equações lineares não homogêneas são equações do tipo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (2.21)$$

Com $g(x) \neq 0$. E $y = y(x)$

Já para $g(x) = 0$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (2.22)$$

A equação (2.22) é chamada equação homogênea associada a equação (2.21).

Teorema 1.1: *Se y_1 e y_2 são soluções de (2.21), então $y_1 - y_2$ é solução de (2.22). Além disso se y_1 e y_2 são soluções fundamentais de (2.22), então $y_1 - y_2 = C_1 y_1 + C_2 y_2$.*

Prova:

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = g(x),$$

e,

$$-y_2'' - p(x)y_2' - q(x)y_2 = -g(x).$$

Logo, somando as duas equações acima ficamos com:

$$(y_1 - y_2)'' + p(x)(y_1' - y_2') + q(x)(y_1 - y_2) = 0$$

Portanto, $y_1 - y_2$ é solução de (2.22).

Teorema 1.2: *A solução geral de (2.21) é $y(x) = \phi(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + Y(x)$, onde y_1 e y_2 são soluções fundamentais de (2.22) e $Y(x)$ é uma solução particular ou específica de (2.21).*

Prova:

Na equação $y_1 - y_2 = C_1 y_1 + C_2 y_2$, tome $\phi(x) = y_1(x)$ e $Y(x) = y_2(x)$, logo:

$$\phi(x) - Y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

que fica

$$y(x) = \phi(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + Y(x).$$

2.1.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

São equações do tipo:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = b. \quad (2.23)$$

Se $b = 0$, a equação (2.23) é dita homogênea.

Portanto, a EDO linear de ordem n homogênea com coeficientes constantes é do tipo:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad (2.24)$$

→ **Soluções da equação (2.24):**

Iremos supor que a solução seja algo do tipo $y = e^{rx}$, logo teremos o seguinte:

$$\frac{dy}{dx} = re^{rx} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx} \quad ; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = r^3e^{rx} \quad \dots \quad \frac{d^ny}{dx^n} = r^ne^{rx}.$$

Substituído as derivadas acima em (2.24):

$$a_nr^n e^{rx} + a_{n-1}r^{n-1}e^{rx} + \dots + a_1r e^{rx} + a_0e^{rx} = 0.$$

Dividindo a equação acima por e^{rx} ficamos com:

$$a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0. \quad (2.25)$$

A equação (2.25) é chamada de equação característica.

A solução geral de (2.24) é a combinação linear das soluções do tipo e^{r_ix} , onde r_i , $1 \leq i \leq n$, é solução de (2.25). Portanto, a solução é do tipo:

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \dots + C_ne^{r_nx}.$$

A solução acima é para *raízes do tipo reais e distintas*.

A solução para *raízes do tipo reais e repetidas* é o seguinte:

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_2x} + \dots + C_kx^{k-1}e^{r_kx} + C_{k+1}x^ke^{r_{k+1}x} + \dots,$$

ou,

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\theta} C_kx^{k-1}e^{r_kx},$$

onde θ é o grau da equação diferencial.

A solução para *raízes complexas* e com $r = \gamma \pm i\mu$, iremos trocar as soluções do tipo $e^{(\gamma \pm i\mu)x}$ por $e^{\gamma x} \sin \mu x + e^{\gamma x} \cos \mu x$.

2.2 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Agora iremos estudar as série de potências, um assunto muito importante na matemática e em outros campos, devido a sua vasta aplicação na resolução de problemas de ciência e tecnologia. Algumas das aplicações deste conteúdo surgem na resolução de

problemas como o da corda vibrante e da equação de Schrödinger, como veremos a frente no decorrer deste trabalho

Definição 1.6 (Série). *Uma série é uma soma de elementos dispostos numa ordem que é simbolizada por:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} an.$$

Definição 1.7 (Série de potência). *Uma série de potência é aquela em que as potências de uma determinada variável, são simbolizadas por:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Exemplo: $\sum_{n=1}^4 x^{2n} = x^2 + x^4 + x^6 + x^8$

Definição 1.8 (Série de Taylor). *A série de Taylor de uma função $f(x)$ é a série de potências definidas por:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x_0} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots,$$

Se a série converge, a série de Taylor é a própria função, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x_0} (x - x_0)^n.$$

Definição 1.9 (Série de Maclaurin). *É um caso particular da série de Taylor com $x_0 = 0$, ou seja, a série de potências é definida por.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_0 x^n.$$

2.2.1 MÉTODO DE SÉRIES

Considere a EDO:

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = 0. \quad (2.26)$$

Normalizando a equação acima, dividindo todos os termos por $a_0(x)$, ficamos com:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y = 0$$

Escrevendo $p_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ e $p_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$, obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0 \quad (2.27)$$

Definição 1.10 (Pontos ordinários e singulares). *Se $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são analíticas em $x = x_0$, este ponto é ordinário. Caso contrário, x_0 é singular, ou seja, um ponto em que a função não pode receber este valor.*

Se a equação (2.26) tem um ponto ordinário $x = x_0$, as soluções desta equação são dadas por:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

2.2.2 MÉTODO DE FRÖBENIUS

Definição 1.10 (Ponto singular regular e irregular). *Tomando por base a equação diferencial (2.27) normalizada, em que x_0 é um ponto singular da equação diferencial. Se as funções*

$$Q_1(x) = (x - x_0)p_1(x) \quad \text{e} \quad Q_2(x) = (x - x_0)^2p_2(x)$$

são ambas analíticas em x_0 , então em x_0 é ponto singular regular. Se pelo menos uma não for analítica, x_0 é um ponto singular irregular.

Teorema 1.3: *Considere que x_0 seja um ponto singular regular da equação (2.27), então existe pelo menos uma solução da forma:*

$$y(x) = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

em torno de x_0 , onde r é um parâmetro a ser determinado.

OBSERVAÇÃO: Só se utiliza o método de Fröbenius para pontos singulares regulares.

De acordo como o livro Equações diferenciais aplicadas de Kleber Daum Machado temos o seguinte teorema.

Teorema 1.4: *Se x_0 um ponto singular regular da equação 2.27 e r_1 e r_2 as raízes da equação indicial ligado ao x_0 , com $r_1 \in \mathbb{R}$ e $r_2 \in \mathbb{R}$. Na situação, as soluções da equação diferencial de acordo com o método de Fröbenius ao redor de um ponto x_0 são dadas de acordo com o caso abaixo.*

1. Se $r_1 - r_2 \neq N$, em que N é um número natural, as duas soluções LI em série são:

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2(x) = |x - x_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

2. Se $r_1 - r_2 = N$, $N \neq 0$, as soluções LI em série são¹:

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Onde C é uma constante.

3. Se $r_1 = r_2$, as soluções LI em série ficam:

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x - x_0| + |x - x_0|^{r_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

¹Mais em alguns casos a solução pode ser igual ao item anterior.

3 ALGUMAS EQUAÇÕES ESPECIAIS

Neste capítulo, estudaremos duas equações diferenciais especiais, a equação diferencial de Gauss ou hipergeométrica e a equação diferencial de Bessel. A escolha se deve a grande aplicabilidade nas ciências e na engenharia, pois alguns problemas podem ser modelados ou redefinidos chegando até essas equações.

3.1 EQUAÇÃO DE GAUSS OU HIPERGEOMÉTRICA

A equação de Gauss ou hipergeométrica é toda equação que pode ser escrita na forma:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \quad (3.1)$$

onde γ, α e β são constantes.

Reescrevendo a equação (3.1) temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]}{x(1-x)}\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta y}{x(1-x)} = 0 \quad (3.2)$$

Da equação (3.2), percebe-se que $x = 0$ e $x = 1$ são pontos singulares.

Analizando se $x = 0$ é regular:

$$Q_1(x) = (x - x_0)P_1(x) = (x - 0)\frac{[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]}{x(1-x)} = \frac{[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]}{(1-x)}$$

com,

$$Q_2(x) = (x - x_0)^2P_2(x) = (x - 0)^2\frac{\alpha\beta}{x(1-x)} = \frac{\alpha\beta x}{(1-x)}$$

As funções $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ são analíticas em $x = 0$, portanto $x_0 = 0$ é ponto singular

regular e podemos supor uma solução do tipo:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad (3.3)$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} \quad (3.4)$$

Substituindo as equações (3.3) e (3.4) em (3.1):

$$\begin{aligned} x(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \\ - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} \\ + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} - (\alpha + \beta + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r} \\ - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

No primeiro somatório podemos fazer $n-1 = m$ ou $n = m+1$, obtendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} = \sum_{m=-1}^{\infty} a_{m+1} (m+r)(m+r+1) x^{m+r}$$

ou ainda

$$\sum_{m=-1}^{\infty} a_{m+1} (m+r)(m+r+1) x^{m+r} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1} (n+r)(n+r+1) x^{n+r}$$

No terceiro somatório podemos fazer $n-1 = m$ ou $n = m+1$, logo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} = \sum_{m=-1}^{\infty} a_{m+1} (m+r+1) x^{m+r} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1} (n+r+1) x^{n+r}$$

Substituindo os somatórios acima em (3.5), ficamos com:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(n+r)(n+r+1)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} \\ & + \gamma \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(n+r+1)x^{n+r} - (\alpha + \beta + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} \\ & - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & a_0(r-1)rx^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+r)(n+r+1)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} \gamma a_0 r x^{r-1} \\ & + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+r+1)x^{n+r} - (\alpha + \beta + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & a_0 r [(r-1) + \gamma] x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+1}(n+r)(n+r+1) - a_n(n+r)(n+r-1) \\ & + \gamma a_{n+1}(n+r+1) - (\alpha + \beta + 1)a_n(n+r) - \alpha\beta a_n] x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & a_0 r [(r-1) + \gamma] x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \{ [(n+r)(n+r+1) + \gamma(n+r+1)] a_{n+1} \\ & - [(n+r)(n+r-1) + (\alpha + \beta + 1)(n+r) + \alpha\beta] a_n \} x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

Logo

$$a_0 r [(r-1) + \gamma] x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+r+1)(n+r+\gamma) a_{n+1} - [(n+r)(n+r+\alpha+\beta) + \alpha\beta] a_n \} x^{n+r} = 0. \quad (3.6)$$

Observe que:

$$(n+r+\alpha)(n+r+\beta) = (n+r)(n+r) + (n+r)\alpha + (n+r)\beta + \alpha\beta = (n+r)(n+r\alpha+\beta) + \alpha\beta$$

que substituindo a na equação (3.6), temos:

$$a_0 r [(r-1) + \gamma] x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r+1)(n+r+\gamma) a_{n+1} - (n+r+\alpha)(n+r+\beta) a_n] x^{n+r} = 0 \quad (3.7)$$

Da equação (3.7) podemos tirar as seguintes relações:

$$a_0 r[(r-1) + \gamma] = 0 \quad (3.8)$$

e

$$(n+r+1)(n+r+\gamma)a_{n+1} - (n+r+\alpha)(n+r+\beta)a_n = 0 \quad (3.9)$$

A equação (3.8) é conhecida como equação indicial e a (3.9) é a relação de recorrência. Da equação indicial podemos encontrar o r , logo resolvendo (3.8) com $a_0 \neq 0$, pois assim a relação torna-se verdadeira, então temos $r[(r-1) + \gamma] = 0$ e desta equação as raízes são $r_1 = 0$ e $r_2 = 1 - \gamma$.

Considerando $r_1 = 0$, a relação de recorrência (3.9) fica, para $\gamma \neq 0$ e $\gamma \neq -1$:

$$a_{n+1}(n+1)(n+\gamma) - (n+\alpha)(n+\beta)a_n = 0$$

ou

$$a_{n+1}(n+1)(n+\gamma) - (n+\alpha)(n+\beta)a_n = 0$$

ou ainda

$$a_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)a_n}{(n+1)(n+\gamma)} \quad ; \quad n \geq 0$$

Agora aplicando alguns valores para n e calculando alguns termos da série, temos

Para $n = 0$,

$$a_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}a_0$$

Para $n = 1$,

$$a_2 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(1+\gamma)} \Rightarrow a_2 = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)a_0}{2\gamma(\gamma+1)}$$

Para $n = 2$,

$$a_3 = \frac{(\alpha+2)(\beta+2)a_2}{3(\gamma+2)} \Rightarrow a_3 = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+2)(\beta+2)a_0}{2 \cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}$$

Se observarmos os termos calculados acima, percebemos determinada sequência que pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2) \cdots (\beta+n-1)a_0}{n!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdots (\gamma+n-1)}$$

Da equação (3.3) podemos concluir que:

$$y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Substituindo os termos calculados e colocando a_0 em evidência, temos:

$$y_1 = a_0 \left[1 + \frac{\alpha\beta x}{\gamma} + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2) \cdots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdots (\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} + \cdots \right] \quad (3.10)$$

O termo entre colchetes na equação (3.10) é conhecido como uma função especial, denominada *função hipergeométrica* $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Logo:

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta x}{\gamma} + \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2) \cdots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdots (\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (3.11)$$

Com isso a solução para $r = 0$ fica:

$$y_1(x) = a_0 \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) \quad (3.12)$$

A segunda solução pode ser obtida aplicando-se o $r = 1 - \gamma$.

3.2 EQUAÇÃO DE BESSEL

Estudaremos agora a equação de Bessel devido a sua importância e aplicabilidade nas ciências e na engenharia. Na engenharia podemos aplicar esta equação na flambagem de uma coluna vertical, na física pode ser aplicada no problema da corda vibrante, no efeito corona e entre outros.

Temos a seguinte equação de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0, \quad (3.13)$$

onde p é uma constante maior ou igual a zero. Podemos supor a seguinte série para um $x_0 = 0$, cujo o mesmo é um ponto singular regular, como solução da equação (3.13):

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad (3.14)$$

e derivando

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} \quad (3.15)$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} \quad (3.16)$$

Substituindo as equações (3.14), (3.15) e (3.16) na equação (3.13), obtemos:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + (x^2 - p^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

ou ainda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad (3.17)$$

No terceiro somatório podemos fazer $n+2 = m$ ou $n = m-2$, logo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+r} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.17)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Deixando todos os somatórios iniciando com $n=2$, temos:

$$\begin{aligned} & a_0(r)(r-1)x^r + a_1(r+1)(r)x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} + a_0 r x^r + a_1(r+1)x^{r+1} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} - p^2 a_0 x^r - p^2 a_1 x^{r+1} - p^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & a_0 x^r [r(r-1) + r - p^2] + a_1 x^{r+1} [r(r+1) + (r+1) - p^2] \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - p^2] a_n + a_{n-2}\} x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$a_0 x^r (r^2 - p^2) + a_1 x^{r+1} [(r+1)^2 - p^2] + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r)^2 - p^2] a_n + a_{n-2}\} x^{n+r} = 0 \quad (3.19)$$

Da equação (3.19) temos a seguinte equação indicial:

$$(r^2 - p^2)a_0 = 0$$

Para um $a_0 \neq 0$, temos o seguinte:

$$r^2 - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm p \quad (3.20)$$

Da equação (3.19) também temos:

$$[(r + 1)^2 - p^2]a_1 = 0 \quad (3.21)$$

e

$$[(n + r)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0 \quad (3.22)$$

Apartir da equação (3.22), podemos tirar a seguinte relação de recorrência:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n + r)^2 - p^2} \quad ; \quad n \geq 2 \quad (3.23)$$

De acordo com a equação (3.20) temos $r^2 = p^2$, logo para a equação (3.23) ficamos com:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n + 2r)} \quad ; \quad n \geq 2 \quad (3.24)$$

Lembrando do teorema 1.4 do capítulo anterior, na aplicação do método de Fröbenius temos que ter alguns cuidados quanto as soluções que podem ser obtidas, porque em alguns casos a solução pode ser linearmente dependente. Então temos a primeira solução para o maior valor de r , que no caso é $r = p$.

Para $r = p$ temos o seguinte, de acordo com a equação (3.21):

$$(p^2 + 2p + 1 - p^2)a_1 = 0$$

ou

$$(2p + 1)a_1 = 0 \quad (3.25)$$

Para que a equação (3.25) seja verdadeira é necessário termos $a_1 = 0$, pois $p \geq 0$. Também temos o seguinte para $r = p$ de acordo com a relação de recorrência:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n + 2p)} \quad ; \quad n \geq 2 \quad (3.26)$$

Como $a_1 = 0$, percebemos que para n ímpar, a_n é nulo. Assim, obtemos apenas os termos pares.

Agora, calculando alguns termos da série, temos:

Para $n = 2$, de acordo com a equação (3.26), temos:

$$a_2 = -\frac{a_{2-2}}{2(2+2p)} = -\frac{a_0}{2(2+2p)} = -\frac{a_0}{4 \times 1(1+p)}$$

ou,

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 \times 1(1+p)} \quad (3.27)$$

Para $n = 4$, temos:

$$a_4 = -\frac{a_{4-2}}{4(4+2p)} = -\frac{a_2}{4(4+2p)} = \frac{a_0}{2^4 \times 2(1+p)(2+p)}$$

ou,

$$a_4 = \frac{a_0}{2^4 \times 2(1+p)(2+p)}$$

ou ainda,

$$a_4 = \frac{a_0}{2^4 \times 2![(1+p)(2+p)]} \quad (3.28)$$

Para $n = 6$, temos:

$$a_6 = -\frac{a_{6-2}}{6(6+2p)} = -\frac{a_4}{6(6+2p)} = -\frac{a_0}{2^4 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3(1+p)(2+p)(6+2p)}$$

ou,

$$a_6 = -\frac{a_0}{2^5 \times [1 \times 2 \times 3](1+p)(2+p)2(3+p)}$$

ou ainda,

$$a_6 = -\frac{a_0}{2^6 \times 3![(1+p)(2+p)(3+p)]} \quad (3.29)$$

Se observarmos as expressões (3.27), (3.28) e (3.29), percebe-se determinada sequência que pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! [(1+p)(2+p) \cdots (n+p)]}$$

ou melhor

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n p! a_0}{2^{2n} n! (n+p)!}$$

Levando em conta que em $r = p$, apenas os termos pares são não nulos e de acordo

com a equação (3.14):

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n p! a_0 x^{2n+p}}{2^{2n} n! (n+p)!}$$

ou ainda

$$y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n p! a_0 x^{2n}}{2^{2n} n! (n+p)!} \quad (3.30)$$

Agora fazendo a solução para $r = -p$ de acordo com as equações (3.21) e (3.24) temos:

$$(1 - 2p)b_1 = 0 \quad (3.31)$$

e

$$b_n = -\frac{b_{n-2}}{n(n-2p)} \quad ; \quad n \neq 2p \quad ; \quad n \geq 2 \quad (3.32)$$

Da expressão (3.31), percebe-se que n não pode ser igual a $2p$, logo n assumirá este valor quando p for inteiro ou semi-inteiro (como por exemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, etc.).

Então iremos fazer a solução para um $2p$ não inteiro. Da equação (3.31) temos $b_1 = 0$, logo todos os termos ímpares da relação de recorrência serão nulos. Agora calculando alguns termos da série par.

Para $n = 2$, temos:

$$b_2 = -\frac{b_{2-2}}{2(2-2p)} = -\frac{b_0}{4 \times 1(1-p)} = -\frac{b_0}{2^2 \times (1-p)} \quad (3.33)$$

Para $n = 4$, temos:

$$b_4 = -\frac{b_{4-2}}{4(4-2p)} = -\frac{b_2}{4 \times 1 \times 2(2-p)} = \frac{b_0}{2^2 \times 4 \times 2!(1-p)(2-p)}$$

ou

$$b_4 = \frac{b_0}{2^4 \times 2![(1-p)(2-p)]} \quad (3.34)$$

Para $n = 6$, temos:

$$b_6 = -\frac{b_{6-2}}{6(6-2p)} = -\frac{b_4}{2 \times 1 \times 2 \times 3(3-p)} = \frac{b_0}{2^4 2![(1-p)(2-p)]2 \times 3!(3-p)}$$

ou ainda

$$b_6 = -\frac{b_0}{2^6 3![(1-p)(2-p)(3-p)]} \quad (3.35)$$

Se observarmos as expressões (3.33), (3.34) e (3.35), percebe-se uma determinada

sequência que pode ser escrita da seguinte forma:

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n b_0}{2^{2n} n! [(1-p)(2-p)(3-p)]}$$

ou melhor

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n (-p)! b_0}{2^{2n} n! (n-p)!} \quad ; \quad n \neq p$$

Levando em conta que em $r = -p$, apenas os termos pares são não nulos e de acordo com a equação (3.14):

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-p)! b_0 x^{2n-p}}{2^{2n} n! (n-p)!}$$

ou ainda

$$y_2(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-p)! b_0 x^{2n}}{2^{2n} n! (n-p)!} \quad (3.36)$$

A solução geral é a soma das equações (3.30) e (3.36), logo:

$$y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n p! a_0 x^{2n}}{2^{2n} n! (n+p)!} + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-p)! b_0 x^{2n}}{2^{2n} n! (n-p)!} \quad (3.37)$$

Também podemos escrever a solução da equação de Bessel em termos das funções Γ definidas como

$$\Gamma(p+1) = p!$$

e

$$\Gamma(n+p+1) = (n+p)!$$

.

Assim,

$$y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(p+1) a_0 x^{2n}}{2^{2n} n! \Gamma(n+p+1)}$$

ou

$$y_1(x) = a_0 \Gamma(p+1) \frac{2^p}{2^p} x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

ou ainda

$$y_1(x) = a_0 2^p \Gamma(p+1) \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad (3.38)$$

Se definirmos

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} \quad (3.39)$$

e substituindo (3.39) em (3.38), considerando $y_1(x) = J_p(x)$, teremos assim uma função

especial chamada de *função de Bessel* de primeiro tipo de ordem p , escrita da seguinte forma:

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad (3.40)$$

De forma análoga podemos fazer a mesma coisa para a equação (3.36) e chegaremos a uma *função de Bessel* de primeiro tipo de ordem $-p$, logo:

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad (3.41)$$

Logo, podemos escrever a solução geral da equação de Bessel da seguinte forma:

$$y(x) = a_1 J_p(x) + a_2 J_{-p}(x) \quad (3.42)$$

Note que a equação acima é válida apenas para valores de p inteiro ou semi-inteiro.

4 ALGUMAS APLICAÇÕES

Neste capítulo trataremos de algumas aplicações, que comprovaram a relevância do estudo das equações diferenciais.

4.1 CORDA VIBRANTE

Ao analisarmos o movimento em uma corda, podemos assemelhar este fenômeno a propagação de uma onda, em que este movimento de onda é transversal.

Neste seção iremos descrever o movimento de uma corda vibrante, em três situações, a corda vibrante homogênea, a corda vibrante homogênea pendurada e a corda vibrante não homogênea, apresentando a dedução das equações, onde a teoria física nos leva a escrever uma equação diferencial parcial para este movimento, então o objetivo é encontrar a solução dessa equação ajustando-a as condições que serão descritas mais a frente.

Para a dedução temos a seguinte situação; considere a corda presa nas duas extremidades, onde quando a onda passa por um elemento de corda (dS) faz o mesmo se mover perpendicularmente a direção da onda, como mostra a imagem abaixo. Aplicando a 2ª Lei de Newton podemos chegar a equação da onda.

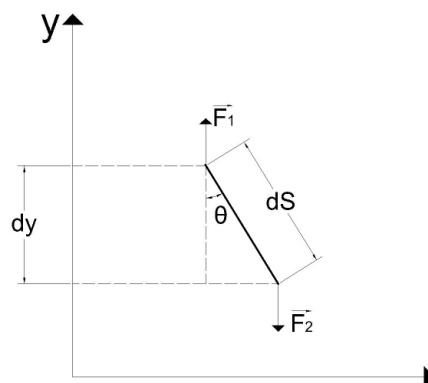


Figura 1: Um elemento de corda deslocada

Como a resultante das forças é diferente de zero, é produzido uma aceleração a_x , ao longo do eixo x , como mostrado abaixo:

$$F_{1x} - F_{2x} = dm \cdot a_x$$

De acordo com a figura podemos escrever $F_{1x} = F_1 \sin \theta$ e $F_{2x} = F_2 \sin \theta$ e $a_x = \frac{d^2 u(y,t)}{dt^2}$, onde u é o deslocamento transversal, logo podemos escrever:

$$F_1 \sin \theta - F_2 \sin \theta = dm \cdot \frac{d^2 u}{dt^2}(y, t)$$

ou,

$$(F_1 - F_2) \sin \theta = dm \cdot \frac{d^2 u}{dt^2}(y, t)$$

Temos que $\sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta$, onde considerando θ muito pequeno temos $\sin \theta \simeq \tan \theta$, também podemos escrever $\tan \theta = \frac{dx}{dy}$, logo:

$$(F_1 - F_2) \frac{dx}{dy} = dm \cdot \frac{d^2 u}{dt^2}(y, t)$$

Podemos escrever $F_1 - F_2 = F_r$, onde essa força resultante (F_r) pode ser escrita assim

$$F_r = \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot v) = \frac{d}{dt} \left[m \cdot \frac{du}{dt}(y, t) \right] = m \frac{d^2 u}{dt \cdot dt}(y, t)$$

O termo $\frac{dx \cdot m}{dt \cdot dt}$, pode ser escrito como uma tensão resultante (τ), logo:

$$\tau \frac{d^2 u}{dy} (y, t) = dm \frac{d^2 u}{dt^2}(y, t)$$

Temos que $dm = \rho \cdot dy$, onde ρ é a densidade linear, então:

$$\tau \frac{d^2 u}{dt^2}(y, t) = \rho dy \frac{d^2 u}{dt^2}(y, t)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 u}{dy^2}(y, t) - \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 u}{dt^2}(y, t) = 0 \quad (4.1)$$

Para a corda vibrante homogênea temos ρ e τ constantes logo de acordo com a equação (4.1) podemos escrever $c^2 = \frac{\tau}{\rho}$, que é a constante positiva identificada como velocidade de fase, então temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) = 0 \quad (4.2)$$

Para a corda vibrante homogênea pendurada podemos substituir a tensão resultante

pelo peso da corda $\tau = m \cdot g$, logo de acordo com a equação (4.1) temos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, t) - \frac{\rho}{m \cdot g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) = 0$$

Mas $m = \rho \cdot y$, logo temos:

$$g \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) = 0 \quad (4.3)$$

Já para a corda vibrante não homogênea ρ irá depender do comprimento, $\rho = \rho(y)$, então de acordo com a equação (4.1) temos:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) - \rho(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.4)$$

4.1.1 CORDA VIBRANTE HOMOGÊNEA

Iremos utilizar a equação (4.2), mas para isso devemos ter algumas condições iniciais, como no ponto $y = 0$ o deslocamento transversal u é igual a zero e da mesma forma $y = L$ o $u = 0$, pois são os pontos onde a corda está fixa. Também consideraremos as condições iniciais para $t = 0$, $u(y, 0) = u_0(y)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(y, 0) = v_0(y)$, onde $v_0(y)$ é uma função velocidade.

Temos a seguinte equação (4.2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) = 0$$

em que u está em função de y e t , então através do método de separação de variáveis podemos considerar $u(y, t) = Y(y)T(t)$, em que $Y(y)$ está em função apenas de y e $T(t)$ é apenas função apenas de t , logo substituindo em (4.2):

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [Y(y)T(t)] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [Y(y)T(t)] = 0$$

Temos que como Y e T são dependentes apenas de y e t , respectivamente, observa-se que algumas derivadas são iguais a zero e as derivadas parciais podem ser transformadas em derivadas ordinárias, logo:

$$T(t) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \frac{Y(y)}{c^2} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

Dividindo a equação acima por $Y(y)T(t)$, ficamos com:

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \frac{1}{c^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

Logo essa igualdade só será verdadeira se igualarmos a equação acima há uma constante $-\mu^2$, temos então:

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \frac{1}{c^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\mu^2$$

ou

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\mu^2 Y(y) \quad (4.5)$$

e

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\mu^2 c^2 T(t) \quad (4.6)$$

Primeiro iremos solucionar as equações (4.5) e (4.6) para um $\mu = 0$, logo:

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0 \quad (4.7)$$

e

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0 \quad (4.8)$$

A solução da equação (4.7) é:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{dY(y)}{dy} \right) = 0$$

Aplicando uma integração simples, obtemos

$$\frac{dY(y)}{dy} = A_1$$

Da mesma forma, temos:

$$Y(y) = A_1 y + B_1 \quad (4.9)$$

onde A_1 e B_1 são constantes.

De forma análoga como foi feito para a equação (4.7), podemos fazer para a equação (4.8) e chegaremos a:

$$T(t) = A_2 t + B_2 \quad (4.10)$$

De acordo com as condições iniciais temos $Y(0)=Y(L)=0$, pois desta forma a condição

imposta $u(0, t) = Y(0)T(t) = 0$, logo aplicando as condições na equação (4.9) temos $A_1 = B_1 = 0$. Então temos que $Y(y) = 0$, conseqüentemente $u(y, t) = 0$, logo essa é a solução trivial, levando a crer que a corda estará eternamente parada.

Agora iremos solucionar as equações (4.5) e (4.6) para $\mu \neq 0$. Para a equação (4.5):

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\mu^2 Y(y)$$

ou

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \mu^2 Y(y) = 0$$

A equação acima é chamada equação diferencial linear de segunda ordem, logo a solução pode ser feita apartir de uma equação característica que fica:

$$r^2 + \mu^2 = 0$$

Encontrando as raízes da equação acima temos:

$$r_{1,2} = \pm i\mu$$

Logo a solução de $Y(y)$ será $Y(y) = A_1 \cos(\mu y) + B_1 \sin(\mu y)$, de acordo com as condições iniciais $Y(0) = Y(L) = 0$, logo para $Y(0) = 0$ temos:

$$0 = A_1 \cos(0) + B_1 \sin(0)$$

Então $A_1 = 0$, para $Y(L) = 0$ temos:

$$0 = B_1 \sin(\mu L)$$

Para que a condição seja verdadeira B_1 ou $\sin(\mu L)$ terá que ser igual a zero, se $B_1 = 0$ gerará a solução trivial, logo para que isso não ocorra $\sin(\mu L) = 0$, então para que está condição seja verdadeira μL deve ser um múltiplo inteiro positivo de π , ou seja, $\mu L = n\pi$, onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, mas para $n = 0$ teremos a solução trivial. Então $\mu = \frac{n\pi}{L}$, logo:

$$Y_n(y) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

De forma análoga como feita para equação (4.5) podemos fazer para a equação (4.6).

$$T(t) = A_2 \cos(\mu ct) + B_2 \sin(\mu ct)$$

Neste caso $\mu = \frac{n\pi}{L}$ e as constantes A_2 e B_2 podem depender de n , logo:

$$T_n(t) = A'_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B'_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Temos que a solução geral é $u_n(y, t) = Y_n(y)T_n(t)$, então substituindo $Y_n(y)$ e $T_n(t)$, temos

$$u_n(y, t) = B_1 \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \left[A'_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B'_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

ou escrevendo $A'_n \cdot B_1 = A_n$ e $B'_n \cdot B_1 = B_n$ temos:

$$u_n(y, t) = \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

ou ainda para uma solução mais geral $u(y, t)$, podemos escrever $u(y, t)$ como a soma u_n , ou seja,

$$u(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (4.11)$$

em que a equação acima representa o deslocamento transversal. Para a velocidade, temos;

$$\frac{du}{dy}(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{n\pi c}{L} A_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \frac{n\pi c}{L} B_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (4.12)$$

De acordo com as condições iniciais $u(y, 0) = u_0(y)$ e $\frac{du}{dy}(y, 0) = v_0(y)$, temos:

$$u(y, 0) = u_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (4.13)$$

e

$$\frac{du}{dt}(y, 0) = v_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (4.14)$$

Como $u_0(y)$ e $v_0(y)$ são contínuas no intervalo $0 \leq x \leq L$ pelo teorema da Série de Fourier, podemos encontrar as constantes A_n e B_n , que satisfazem as condições $u(0, t) = u(L, t) = 0$, logo temos:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy$$

e

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy$$

4.1.2 CORDA VIBRANTE HOMOGÊNEA PENDURADA

Como foi deduzido anteriormente, temos que a equação da corda vibrante homogênea pendurada dada pela equação (4.3).

Mas para aplicar a equação (4.3) temos que ter algumas condições de contorno, onde a corda tem um comprimento L e está fixa em $y = L$, logo $u(L, t) = 0$, também podemos escrever $u(y, 0) = u_0(y)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = v_0(y)$.

De acordo com o método de separação de variáveis podemos supor $u(y, t) = Y(y)T(t)$, em que $Y(y)$ é função apenas de y e $T(t)$ é função apenas de t , logo substituindo na equação (4.3) temos:

$$g \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y \frac{\partial}{\partial y} [Y(y)T(t)] \right\} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} [Y(y)T(t)] = 0$$

ou,

$$gT(t) \frac{\partial}{\partial y} \left[y \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right] - Y(y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0$$

ou ainda,

$$gT(t) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} + gT(t)y \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - Y(y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0$$

ou,

$$gT(t) \left[\frac{\partial Y(y)}{\partial y} + y \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \right] = Y(y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{Y(y)} \left[\frac{\partial Y(y)}{\partial y} + y \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{gT(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}.$$

Logo essa igualdade só será verdadeira se igualarmos a equação acima há uma constante $-\mu^2$, temos então:

$$\frac{1}{Y(y)} \left[\frac{\partial Y(y)}{\partial y} + y \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{gT(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -\mu^2$$

ou,

$$\frac{1}{Y(y)} \left[\frac{\partial Y(y)}{\partial y} + y \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \right] = -\mu^2 \quad (4.15)$$

e

$$\frac{1}{gT(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -\mu^2 \quad (4.16)$$

Primeiro iremos solucionar as equações (4.15) e (4.16) para $\mu = 0$ e podemos transformar as derivadas parciais em derivadas ordinárias, logo temos:

$$y \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{dY(y)}{dy} = 0 \quad (4.17)$$

e

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0 \quad (4.18)$$

A solução para as equações (4.17) e (4.18), são respectivamente:

$$Y(y) = A_1 \ln(y) + B_1 \quad (4.19)$$

e

$$T(t) = A_2 t + B_2 \quad (4.20)$$

Agora faremos para $\mu \neq 0$, para a equação (4.16) temos a seguinte solução:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \mu^2 g T(t) = 0$$

Como a equação acima é uma equação diferencial linear de segunda ordem, temos a solução da seguinte forma:

$$T(t) = A_2 \cos(\mu\sqrt{g}t) + B_2 \sin(\mu\sqrt{g}t)$$

Para a equação (4.15) temos:

$$y \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial Y(y)}{\partial y} + \mu^2 Y(y) = 0$$

Para encontrar a solução da equação acima utilizaremos a equação de Bessel de ordem zero, antes precisamos fazer uma mudança de variável,

$$x = \sqrt{4\mu^2 y} \quad ; \quad Y(y) = Z(x) = Z\left(\sqrt{4\mu^2 y}\right) \quad (4.21)$$

e

$$\frac{\partial Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial y} \right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \quad (4.22)$$

e

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2\mu^2}{\sqrt{4\mu^2 y}} \quad ; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \frac{2\mu^2 4\mu^2}{(4\mu^2 y)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{\mu^2}{y\sqrt{4\mu^2 y}} \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.22):

$$\frac{\partial Y(y)}{\partial y} = \frac{2\mu^2}{\sqrt{4\mu^2 y}} \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{2\mu^2}{x} \frac{\partial Z}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \left(\frac{2\mu^2}{\sqrt{4\mu^2 y}} \right)^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \frac{\mu^2}{y\sqrt{4\mu^2 y}} \frac{\partial Z}{\partial y}$$

ou

$$\frac{\partial Y(y)}{\partial y} = \frac{2\mu^2}{x} \frac{\partial Z}{\partial y} \quad ; \quad y \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \frac{\mu^2}{x} \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (4.24)$$

Substituindo (4.23) e (4.24) em (4.15):

$$\mu^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \frac{\mu^2}{x} \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{2\mu^2}{x} \frac{\partial Z}{\partial y} + \mu^2 Z = 0 \quad (4.25)$$

Multiplicando (4.25) por x^2 e dividindo por μ^2 obtemos:

$$x^2 Z''(x) + x Z'(x) + x^2 Z(x) = 0 \quad (4.26)$$

A equação acima é conhecida como equação de Bessel de ordem zero, onde para encontrar a solução usaremos o método de Frobenius em torno de um ponto singular regular $x_0 = 0$:

$$Z = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = (x - 0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

ou,

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad (4.27)$$

Derivando a equação (4.27) temos:

$$Z' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \quad ; \quad Z'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} \quad (4.28)$$

Substituindo (4.27) e (4.28) em (4.26):

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

ou ainda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0 \quad (4.29)$$

Percebe-se que a variável x aparece elevada a potências diferentes dentro dos somatórios, de modo que precisamos manipular o terceiro somatório, considerando $m = n+2$ ou $n = m - 2$, resultando em:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+r}$$

e voltando aos índices n , temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r}$$

Substituindo a equação acima em (4.29):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0$$

deixando os somatórios iniciando com $n = 2$:

$$\begin{aligned} a_0 r(r-1) x^r + a_1 (r+1) r x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + a_0 r x^r + a_1 (r+1) x^{r+1} \\ + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

Rearranjando a equação acima temos:

$$a_0 x^r (r^2) + a_1 x^{r+1} (r+1)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] + a_{n-2}\} x^{n+r} = 0$$

Da equação acima podemos tirar a equação indicial:

$$a_0 r^2 x^r = 0$$

e

$$a_1 (r+1)^2 x^{r+1} = 0 \quad (4.30)$$

Também tirar a relação de recorrência:

$$\{a_n [(n+r)(n+r-1) + (n+r)] + a_{n-2}\} x^{n+r} = 0 \quad (4.31)$$

A solução para a equação indicial é $r_1 = r_2 = 0$, logo temos o caso de raízes iguais. A relação de recorrência é para:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+r)(n+r-1) + (n+r)} \quad ; \quad n \geq 2$$

Para determinar Z_1 , fazemos $r = 0$. Na equação (4.30) para que a mesma seja verdadeira $a_1 = 0$. Dessa forma todos os termos dependentes de a_1 serão zero, ou seja,

$a_3 = a_5 = a_7 = \dots + 0$. Além disso,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2} \quad ; \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots$$

ou fazendo

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n)^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4.32)$$

Calculando alguns termos. Primeiro $n = 1$:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}$$

Para $n = 2$, temos:

$$a_4 = -\frac{a_{2 \cdot 2 - 2}}{(2 \cdot 2)^2} = -\frac{a_0}{2^4 \cdot 2^2}$$

Para $n = 3$, temos:

$$a_6 = -\frac{a_{2 \cdot 3 - 2}}{(2 \cdot 3)^2} = -\frac{a_0}{2^6 (3 \cdot 2)^2}$$

Dos termos calculados acima percebe-se determinada sequência que pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} (n!)^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4.33)$$

Portanto a primeira solução é:

$$Z_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \right] \quad ; \quad x > 0$$

A função entre colchetes é conhecida como *função de Bessel* de primeira espécie e é denotada por $J_0(x)$. A série converge para todo x e J_0 é analítica em $x = 0$.

Como as raízes são repetidas, uma forma de encontrar Z_2 , é calcular a derivada da relação de recorrência. Veja que devido o coeficiente da equação (4.30) x^{r+1} , $(r+1)^2 a_1 = 0$, para que isso seja verdadeiro $a'_1(0) = 0$, logo todos o termos dependentes de $a_1(0)$, também seram zero, $a'_3(0) = a'_5(0) = \dots = a'_{2n-1}(0) = 0$, então vamos calcular $a'_{2n}(0)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Da equação (4.32), considerando r , segue que:

$$a_{2n}(r) = -\frac{a_{2n-2}(r)}{(r+2n)^2} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.34)$$

Resolvendo a relação de recorrência, ou seja, para $n = 1$ temos:

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+2)^2}$$

Para $n = 2$, temos:

$$a_4(r) = \frac{a_0}{(r+2)^2(r+4)^2}$$

Em geral podemos escrever:

$$a_{2n}(r) = \frac{(-1)^n a_0}{(r+2)^2 \cdots (r+2n)^2} \quad n \geq 2$$

Para calcular $a'_{2n}(r)$ de maneira mais conveniente notando-se que,

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{\beta_1} (x - \alpha_2)^{\beta_2} (x - \alpha_3)^{\beta_3} \cdots (x - \alpha_n)^{\beta_n}$$

e se x é diferente de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, então:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x - \alpha_1} + \frac{\beta_2}{x - \alpha_2} + \frac{\beta_3}{x - \alpha_3} + \cdots + \frac{\beta_n}{x - \alpha_n}$$

Aplicando esse resultado a $a_{2n}(r)$ na equação (4.34), observa-se que:

$$\frac{a'_{2n}(r)}{a_{2n}(r)} = -2 \left(\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \cdots + \frac{1}{r+2n} \right),$$

fazendo $r = 0$,

$$a'_{2n}(0) = -2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) a_{2n}(0)$$

Substituindo $a_{2n}(0)$, dado da equação (4.33) na equação acima e fazendo:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Obtemos finalmente:

$$a'_{2n}(0) = -\frac{H_n (-1)^n a_0}{2^{2n} (n!)^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A segunda equação de Bessel de ordem zero pode ser encontrada fazendo-se $a_0 = 1$ e substituindo na equação

$$Z_2(x) = Z_1(x) \ln |x| + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}(r_1) x^n$$

temos $Z_1(x) = J_0(x)$ e $b_{2n} = a'_{2n}$. Obtendo:

$$Z_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+1) H_n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \quad ; \quad x > 0 \quad (4.35)$$

Em vez de Z_2 , a segunda solução considerada, em geral, é uma determinada com-

binação linear de J_0 e Z_2 . Ela é conhecida como função de Bessel de segunda espécie e é determinada por Z_0 . Definindo:

$$Z_0 = \frac{2}{\pi} [Z_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)] \quad (4.36)$$

Onde γ é a constante de Euler-Máscheroni, ela é definida pela equação:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) \simeq 0,5772$$

Substituindo $Z_2(x)$ na equação (4.36), obtemos:

$$Z_0 = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+1) H_n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \right] \quad ; \quad x > 0 \quad (4.37)$$

A solução geral da equação de Bessel para $x > 0$ é:

$$Z = C_1 J_0(x) + C_2 Z_0(x)$$

Sendo Z_0 a função de ordem 0. Voltando para as variáveis do problema obtemos a solução da equação espacial da onda para um $\mu \neq 0$.

$$Y(y) = C_1 J_0 \left(\sqrt{4\mu^2 y} \right) + C_2 Z_0 \left(\sqrt{4\mu^2 y} \right) \quad (4.38)$$

A solução acima tem por particularidade que se $C_2 \neq 0$, o termo $Z_0(\sqrt{4\mu^2 y})$ diverge em $y = 0$, esse comportamento não é aceitável, o que nos levar a impor $C_2 = 0$.

Chegamos então a solução $Y(y) = C_1 J_0 \left(\sqrt{4\mu^2 y} \right)$ (adotando $C_1 = 1$), para a qual devemos impor a condição de contorno $u(L, t) = 0 \rightarrow Y(L) = 0$. Isso implica $\sqrt{4\mu^2 L}$ deve ser um dos zeros α_k^0 , $k \in \mathbb{N}$ da função de Bessel J_0 em $\mathbb{R}_+$. Concluimos que:

$$\mu = \frac{\alpha_k^0}{\sqrt{4L}} \quad ; \quad 0 \leq y \leq L$$

e

$$Y_k(y) = J_0 \left(a_k^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.39)$$

Da equação temporal obteve-se:

$$T(t) = A_2 \cos(\mu\sqrt{g}t) + B_2 \sin(\mu\sqrt{g}t)$$

Substituindo as condições de contorno $t = 0$ e $u(L, t) = 0 \rightarrow T(L) = 0$, portanto

$T(0) = 0$, logo:

$$T(0) = A_2 = 0 \quad ; \quad T(L) = B_2 \sin(\mu\sqrt{g}t)$$

Isso é verdade para $w_k = \mu\sqrt{g}$ onde $\mu = \frac{\alpha_k^0}{2\sqrt{L}}$. Assim para um k específico temos:

$$T_k(t) = A_k \cos(w_k t) + B_k \sin(w_k t) \quad (4.40)$$

Substituindo (4.39) e (4.40) em $u_k(y, t) = Y(y)T(t)$, temos:

$$u_k(y, t) = [A_k \cos(w_k t) + B_k \sin(w_k t)] J_0 \left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right)$$

A solução geral é:

$$u(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(w_k t) + B_k \sin(w_k t)] J_0 \left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right)$$

e derivando

$$\frac{\partial u}{\partial t}(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [-A_k w_k \sin(w_k t) + B_k w_k \cos(w_k t)] J_0 \left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right)$$

Em $u(y, 0) = u_0(y)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(y, 0) = v_0(y)$, que nos conduz a:

$$u_0(y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0 \left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) \quad (4.41)$$

e

$$v_0(y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k w_k J_0 \left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) \quad (4.42)$$

Para determinar as constantes A_k e B_k faremos uso das relações de ortogonalidade para a função de Bessel J_0 :

$$\int_0^1 J_0(\alpha_k^0 x) J_0(\alpha_l^0 x) x dx = \frac{\delta_{k,l} J_1(\alpha_k^0)^2}{2}$$

Multiplicando ambos os lados das equações (4.41) e (4.42) por $J_0 \left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right)$ e integrando de 0 a L , obtem-se:

$$\int_0^L J_0 \left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) u_0(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} A_k \int_0^L J_0 \left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) J_0 \left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) dy$$

e

$$\int_0^L J_0 \left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) v_0(y) dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} B_k \alpha_k^0 \int_0^L J_0 \left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) J_0 \left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) dy$$

Onde, $w_k = \frac{\alpha_k^0}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}$. Fazendo uma substituição de variável:

$$x = \sqrt{\frac{y}{L}} \quad ; \quad dx = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{L} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{L} dy \quad \rightarrow \quad dy = 2Lx dx$$

Então,

$$\int_0^L J_0 \left(\alpha_k^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) J_0 \left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) dy = 2L \int_0^1 J_0(\alpha_k^0 x) J_0(\alpha_l^0 x) x dx = L (J_1(\alpha_k^0))^2 \delta_{k,l}$$

logo

$$\int_0^L J_0 \left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) u_0(y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} A_k L (J_1(\alpha_k^0))^2 \delta_{k,l}$$

e

$$\int_0^L J_0 \left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) v_0(y) dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} B_k \alpha_k^0 L (J_1(\alpha_k^0))^2 \delta_{k,l}$$

Onde $\delta_{k,l} = 1 \rightarrow k = l$ e $\delta_{k,l} = 0 \rightarrow k \neq l$, fazendo $k = l$ obtemos as soluções para as constantes satisfazendo as condições de contorno:

$$A_l = \frac{1}{L(J_1(\alpha_k^0))^2} = \int_0^L J_0 \left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) u_0(y) dy$$

e

$$B_l = \frac{1}{\alpha_k^0 \sqrt{gL} (J_1(\alpha_k^0))^2} \int_0^L J_0 \left(\alpha_l^0 \sqrt{\frac{y}{L}} \right) v_0(y) dy$$

4.1.3 CORDA VIBRANTE NÃO-HOMOGÊNEA

Como foi deduzido anteriormente temos que a equação da corda vibrante não-homogênea é a equação (4.4). Escrita abaixo:

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) - \rho(y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Neste caso a corda tem um comprimento L e está fixa nas duas extremidades e que a tensão τ seja constante.

Para encontrarmos a solução da equação (4.4) satisfazendo as condições de contorno iremos utilizar novamente o método de separação de variáveis, logo temos $u(y, t) = Y(y)T(t)$, onde $Y(y)$ está em função de y e $T(t)$ está em função de t , substituindo na

equação (4.4) temos:

$$\tau \frac{\partial^2}{\partial y^2} [Y(y)T(t)] - \rho(y) \frac{\partial^2}{\partial t^2} [Y(y)T(t)] = 0$$

ou

$$\frac{1}{\rho(y)Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\tau \cdot T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

Logo essa igualdade só será verdadeira se igualarmos a uma constante $-\mu^2$, temos então:

$$\frac{1}{\rho(y)Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\tau \cdot T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -\mu^2$$

ou

$$y''(y) + \mu^2 \rho(y)Y(y) = 0 \quad (4.43)$$

e

$$T''(t) + \mu^2 \tau T(t) = 0 \quad (4.44)$$

Primeiro iremos solucionar as equações (4.43) e (4.44) para $\mu = 0$, logo temos:

$$Y''(y) = 0 \quad (4.45)$$

e

$$T''(t) = 0 \quad (4.46)$$

Então as soluções para (4.45) e (4.46) são, respectivamente, $Y(y) = A_1 y + B_1$ e $T(t) = A_2 t + B_2$. De acordo com as condições de contorno $Y(0) = 0$ e $Y(L) = 0$, temos $A_1 = B_1 = 0$, logo $Y(y) = 0$ e como $u(y, t) = Y(y)T(t)$, temos $u = 0$ que é justamente a solução trivial que representa a corda eternamente parada.

Agora iremos solucionar as equações (4.43) e (4.44) para $\mu \neq 0$ e também vamos definir $\rho(y) = \rho_0 + \eta y$, onde ρ_0 e η são constantes, logo temos o seguinte para a equação (4.43):

$$Y''(y) + \mu^2(\rho_0 + \eta y)Y(y) = 0 \quad (4.47)$$

ou

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \mu^2(\rho_0 + \eta y)Y(y) = 0$$

Resolvendo a equação acima para um $y_0 = 0$, pelo método de séries e com uma solução do seguinte tipo:

$$Y(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (y - y_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \quad (4.48)$$

e derivando

$$\frac{dY(y)}{dy} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n y^{n-1} \quad ; \quad \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) y^{n-2} \quad (4.49)$$

Substituindo (4.48) e (4.49) em (4.47) temos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) y^{n-2} + \mu^2 \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n + \mu^2 \eta \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{n+1} = 0 \quad (4.50)$$

No primeiro somatório fazendo $n-2 = m$ ou $n = m+2$, temos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) y^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} (m+2)(m+1) y^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) y^n$$

No terceiro somatório fazendo $n+1 = m$ ou $n = m-1$, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} y^m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} y^n$$

Substituindo os somatórios acima na equação (4.50), temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) y^n + \mu^2 \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n + \mu^2 \eta \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} y^n = 0$$

Deixando todos os somatórios iniciando com $n = 1$, temos:

$$a_{0+2} (0+2)(0+1) \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) y^n + \mu^2 \rho_0 a_0 + \mu^2 \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n + \mu^2 \eta \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} y^n = 0$$

Também podemos escrever a equação acima considerando $\mu^2 \rho_0 = \theta$ e $\mu^2 \eta = \alpha$, então temos:

$$2a_2 + \theta a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_{n+2} (n+2)(n+1) + \theta a_n + \alpha a_{n-1}] y^n = 0 \quad (4.51)$$

Da equação acima podemos tirar as seguintes relações:

$$\begin{cases} 2a_2 + \theta a_0 = 0 \\ a_{n+2} (n+2)(n+1) + \theta a_n + \alpha a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Da primeira relação podemos tirar que:

$$a_2 = -\frac{\theta a_0}{2}$$

e da segunda temos:

$$a_{n+2} = \frac{-\theta a_n - \alpha a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad ; \quad n \geq 1$$

ou ainda

$$a_{n+3} = \frac{-\theta a_{n+1} - \alpha a_n}{(n+3)(n+2)} \quad ; \quad n \geq 0$$

Agora calculando alguns termos da relação acima.

Para $n = 0$, temos:

$$a_3 = \frac{-\theta a_1 - \alpha a_0}{6}$$

Para $n = 1$, temos:

$$a_4 = \frac{-\theta a_2 - \alpha a_1}{12} = \frac{\theta^2 a_0 - 2\alpha a_1}{24}$$

Para $n = 2$, temos:

$$a_5 = \frac{-\theta a_3 - \alpha a_2}{20} = \frac{\frac{\theta^2 a_1 + \theta \alpha a_0}{6} + \frac{\theta \alpha a_0}{2}}{20}$$

ou

$$a_5 = \frac{\theta^2 a_1 + 4\theta \alpha a_0}{120}$$

Temos a seguinte solução para $Y(y)$:

$$Y(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

ou

$$Y(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + a_5 y^5 + \dots$$

Substituindo os valores de a_2, a_3, a_4 e a_5 na equação acima, temos:

$$Y(y) = a_0 + a_1 y - \frac{\theta a_0}{2} y^2 + \left(\frac{-\theta a_1 - \alpha a_0}{6} \right) y^3 + \left(\frac{\theta^2 a_0 - 2\alpha a_1}{24} \right) y^4 + \left(\frac{\theta^2 a_1 + 4\theta \alpha a_0}{120} \right) y^5 + \dots$$

ou ainda

$$\begin{aligned} Y(y) = a_0 & \left(1 - \frac{\theta}{2} y^2 - \frac{\alpha}{6} y^3 + \frac{\theta^2}{24} y^4 + \frac{\theta \alpha}{30} y^5 + \dots \right) \\ & + a_1 \left(y - \frac{\theta}{6} y^3 - \frac{\alpha}{12} y^4 + \frac{\theta^2}{120} y^5 + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Como observa-se a equação (4.52) apresenta a soma de duas equações linearmente independentes, logo a equação (4.52) pode ser considerado a solução geral de $Y(y)$. Temos

também que a solução para $T(t)$ é:

$$T(t) = A \cos(\mu\sqrt{\tau}t) + B \sin(\mu\sqrt{\tau}t)$$

Temos também que $u(y, t) = Y(y)T(t)$, logo a solução geral é:

$$u(y, t) = a_0 \left(1 - \frac{\theta}{2}y^2 - \frac{\alpha}{6}y^3 + \frac{\theta^2}{24}y^4 + \frac{\theta\alpha}{30}y^5 + \dots \right) \cdot [A \cos(\mu\sqrt{\tau}t) + B \sin(\mu\sqrt{\tau}t)] \\ + a_1 \left(y - \frac{\theta}{6}y^3 - \frac{\alpha}{12}y^4 + \frac{\theta^2}{120}y^5 + \dots \right) \cdot [A \cos(\mu\sqrt{\tau}t) + B \sin(\mu\sqrt{\tau}t)]$$

4.2 EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Na física quântica toda a informação sobre o sistema encontra-se na função de onda $[\Psi(x, t)]$, que fornece a amplitude de probabilidade de uma partícula ser encontrada numa dada posição x e no instante de tempo t . Nesse sentido, é importante saber como $[\Psi(x, t)]$ evolui. Essa evolução é dada pela equação de Schrödinger escrita abaixo:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x, t) + V(x, t)\Psi(x, t) \quad (4.53)$$

Na equação $\hbar$ e m são constantes.

Para a solução temos que fazer o método de separação de variáveis, logo podemos supor algo do tipo $\Psi(x, t) = \psi(x)T(t)$ e substituindo na equação (4.53):

$$i\hbar \psi(x) \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x, t)\psi(x)T(t)$$

e multiplicando a equação acima por $\frac{1}{\psi(x)T(t)}$:

$$\frac{i\hbar}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x, t) \quad (4.54)$$

Admitindo que $V(x, t) = V(x)$ e igualando a equação (4.54) há uma constante E , conhecida como energia total, temos

$$\frac{i\hbar}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) = E$$

Daí, podemos escrever

$$\frac{i\hbar}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = E \quad \Rightarrow \quad \frac{dT(t)}{dt} - \frac{ET(t)}{i\hbar} = 0 \quad (4.55)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m\psi(x)}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V(x) = E \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) - E\psi(x) = 0 \quad (4.56)$$

A equação (4.56) é conhecida como equação de Schrödinger independente do tempo.

Resolvendo as equação (4.55) e (4.56) para $E = V(x) = 0$, temos:

$$\frac{dT(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = A_1 \quad (4.57)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi(x)}{dx} = A_2 \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = A_2x + B_2 \quad (4.58)$$

Como $\Psi(x, t) = \psi(x)T(t)$, logo a solução geral para $E = V = 0$ é:

$$\Psi(x, t) = (A_2x + B_2)A_1 \quad \Rightarrow \quad \Psi(x, t) = Ax + B$$

onde A e B são constantes.

Agora busquemos a solução para $E \neq 0$. Primeiro, a solução para a equação (4.55) se obtém por simples integração:

$$T(t) = A_1 e^{\frac{Et}{\hbar}} \quad (4.59)$$

Fazendo a solução para equação de Schrödinger indepente do tempo (4.56), temos:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{E2m}{\hbar^2}\psi(x) - \frac{2mV(x)}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

Considerando que $\gamma = \frac{E2m}{\hbar^2}$, temos o seguinte de acordo com a equação acima:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \gamma\psi(x) - \frac{\gamma V(x)}{E}\psi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \gamma\left(1 - \frac{V(x)}{E}\right)\psi(x) = 0$$

Supondo $V(x) = E \tanh(x)$, temos:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \gamma(1 - \tanh(x))\psi(x) = 0 \quad (4.60)$$

Considerando $Z = 1 - \tanh(x)$, temos:

$$\frac{dZ}{dx} = -\text{sech}^2(x) = -(1 - \tanh^2(x)) = -1 + \tanh^2(x) = -1 + (1 - Z)^2 = -2Z + Z^2$$

ou

$$\frac{dZ}{dx} = Z(Z - 2)$$

e

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = 2 \operatorname{sech}^2(x) \tanh^2(x) = 2(1 - \tanh^2(x)) \tanh(x) = 2[1 - (1 - Z)^2](1 - Z)$$

ou

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = 2(1 - Z)(2 - Z)Z$$

Fazendo

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{d\psi}{dZ} \frac{dZ}{dx} \quad ; \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dZ^2} \left(\frac{dZ}{dx} \right)^2 + \frac{d\psi}{dZ} \frac{d^2 Z}{dx^2}$$

Substituindo as derivadas de $\frac{dZ}{dx}$ e $\frac{d^2 Z}{dx^2}$ em $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$, temos:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = Z^2(Z - 2)^2 \frac{d^2\psi}{dZ^2} + 2Z(1 - Z)(2 - Z) \frac{d\psi}{dZ} \quad (4.61)$$

Substituindo a equação (4.61) em (4.60), temos:

$$Z^2(Z - 2)^2 \frac{d^2\psi}{dZ^2} + 2Z(1 - Z)(2 - Z) \frac{d\psi}{dZ} + \gamma Z\psi = 0$$

ou

$$\frac{d^2\psi}{dZ^2} + \frac{2(1 - Z)(2 - Z)}{Z(Z - 2)^2} \frac{d\psi}{dZ} + \frac{\gamma\psi}{Z(Z - 2)^2} = 0$$

ou ainda

$$\frac{d^2\psi}{dZ^2} + \frac{2(1 - Z)}{Z(2 - Z)} \frac{d\psi}{dZ} + \frac{\gamma\psi}{Z(Z - 2)^2} = 0$$

Como em $Z_0 = 0$ e $Z_0 = 2$ são pontos singulares regulares, podemos obter soluções em torno deles através do método de Fröbenius, logo:

$$\psi(Z) = |Z - Z_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - Z_0)^n \quad \Rightarrow \quad \psi(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z - Z_0)^{n+r}$$

Resolvendo em torno de $Z_0 = 0$, temos:

$$\psi(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^{n+r}$$

Derivando,

$$\psi'(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)Z^{n+r-1} \quad \Rightarrow \quad \psi''(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)Z^{n+r-2}$$

Mas,

$$Z(2-Z)^2\psi''(Z) + 2(1-Z)(2-Z)\psi'(Z) + \gamma\psi(z) = 0$$

Substituindo, temos:

$$\begin{aligned} (4Z - 4Z^2 + Z^3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)Z^{n+r-2} + (4 - 6Z + 2Z^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)Z^{n+r-1} \\ + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)Z^{n+r-1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)Z^{n+r} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)Z^{n+r+1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)Z^{n+r-1} \\ - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)Z^{n+r} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)Z^{n+r+1} \\ + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^{n+r} = 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Fazendo no primeiro somatório $n-1 = m$ ou $n = m+1$, temos:

$$\sum_{m=-1}^{\infty} a_{m+1}(m+r+1)(m+r)Z^{m+r} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(n+r+1)(n+r)Z^{n+r}$$

Fazendo no terceiro somatório $n+1 = m$ ou $n = m-1$, temos:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1}(m+r-1)(m+r-2)Z^{m+r} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(n+r-1)(n+r-2)Z^{n+r}$$

Fazendo no quarto somatório $n-1 = m$ ou $n = m+1$, temos:

$$\sum_{m=-1}^{\infty} a_{m+1}(m+r+1)Z^{m+r} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(n+r+1)Z^{n+r}$$

Fazendo no sexto somatório $n + 1 = m$ ou $n = m - 1$, temos:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1}(m+r-1)Z^{m+r} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(n+r-1)Z^{n+r}$$

Substituindo os somatórios acima em (4.62), temos:

$$\begin{aligned} & 4 \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(n+r+1)(n+r)Z^{n+r} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)Z^{n+r} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(n+r-1)(n+r-2)Z^{n+r} + 4 \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(n+r+1)Z^{n+r} \\ & - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)Z^{n+r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(n+r-1)Z^{n+r} \\ & + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^{n+r} = 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Deixando todos os somatórios iniciando em $n = 1$:

$$\begin{aligned} & 4a_0r(r-1)Z^{r-1} + 4a_1(r+1)rZ^r - 4a_0r(r-1)Z^r + 4a_0rZ^{r-1} + 4a_1(r+1)Z^r \\ & - 6a_0rZ^r + \gamma a_0Z^r + \sum_{n=1}^{\infty} [4a_{n+1}(n+r+1)(n+r) - 4a_n(n+r)(n+r-1) \\ & + a_{n-1}(n+r-1)(n+r-2) + 4a_{n+1}(n+r+1) - 6a_n(n+r) \\ & + 2a_{n-1}(n+r-1) + \gamma a_n] Z^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & [4a_0r(r-1) + 4a_0r] Z^{r-1} + [4a_1(r+1)r - 4a_0r(r-1) + 4a_1(r+1) - 6a_0r + \gamma a_0] Z^r \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [4a_{n+1}(n+r+1)(n+r) - 4a_n(n+r)(n+r-1) + a_{n-1}(n+r-1)(n+r-2) \\ & + 4a_{n+1}(n+r+1) - 6a_n(n+r) + 2a_{n-1}(n+r-1) + \gamma a_n] Z^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & 4a_0[r(r-1) + r]Z^{r-1} + Z^r \{4a_1[(r+1)r + (r+1)] - a_0[4r(r-1) + 6r - \gamma]\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \{4a_{n+1}[(n+r+1)(n+r) + (n+r+1)] + a_n[-4(n+r)(n+r-1) - 6(n+r) + \gamma] \\ & + a_{n-1}[(n+r-1)(n+r-2) + 2(n+r-1)]\} Z^{n+r} = 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Da equação (4.64), lembrando que $(r+1)r + (r+1) = (r+1)^2$ e por igualdade de

polinômios, temos que:

$$4a_0[r(r-1)+r]=0 \quad (4.65)$$

$$4a_1(r+1)^2 - a_0[4r(r-1)+6r-\gamma]=0 \quad (4.66)$$

$$4a_{n+1}(n+r+1)^2 + a_n[-4(n+r)(n+r-1)-6(n+r)+\gamma] + a_{n-1}[(n+r-1)(n+r)] = 0 \quad (4.67)$$

Resolvendo a equação (4.65) para $a_0 \neq 0$, temos:

$$r(r-1)+r=0 \quad \Rightarrow \quad r^2=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=r_2=0$$

Como as raízes são iguais a solução será:

$$\psi_1(Z) = |Z|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$$

e

$$\psi_2(Z) = \psi_1(Z) \ln |Z| + |Z|^{r_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^n$$

Logo, para $r_1 = 0$ temos de acordo com a equação (4.66), que:

$$4a_1 + a_0\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{\gamma a_0}{4}$$

e para a relação de recorrência que é a equação (4.67), temos:

$$4a_{n+1}(n+1)^2 + a_n[-4n(n-1)-6n+\gamma] + a_{n-1}[(n-1)n] = 0$$

ou

$$a_{n+1} = -\frac{a_n[-4n(n-1)-6n+\gamma] - a_{n-1}(n-1)n}{4(n+1)^2} \quad ; \quad n \geq 1$$

Calculando alguns termos da relação acima.

Para $n = 1$, temos:

$$a_2 = -\frac{a_1(-6+\gamma)}{4 \cdot 2^2} = \frac{\gamma(-6+\gamma)a_0}{64}$$

Para $n = 2$, temos:

$$a_3 = \frac{-a_2[-4 \cdot 2(2-1)-6 \cdot 2+\gamma] - a_1(2-1)2}{36}$$

ou

$$a_3 = \frac{-a_2(-20+\gamma) - 2a_1}{36} = \frac{\frac{\gamma a_0(-6+\gamma)(20-\gamma)}{64} + \frac{\gamma a_0}{2}}{36}$$

ou ainda

$$a_3 = -\frac{\gamma a_0(\gamma^2 - 26\gamma - 88)}{2304}$$

Para $n = 3$, temos:

$$a_4 = \frac{-a_3[-4 \cdot 3(3-1) - 6 \cdot 3 + \gamma] - a_2(3-1)3}{4(3+1)^2} = \frac{-a_3(-42 + \gamma) - 6a_2}{64}$$

ou

$$a_4 = \frac{\frac{\gamma a_0(-42+\gamma)(\gamma^2-26\gamma+88)}{2304} - \frac{\gamma a_0(-6+\gamma)6}{64}}{64}$$

ou ainda

$$a_4 = \frac{\gamma a_0(\gamma^3 - 68\gamma^2 + 964\gamma - 2400)}{147456}$$

Temos a seguinte solução para $\psi_1(Z)$:

$$\psi_1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + a_4 Z^4 + \dots$$

Substituindo a_1 , a_2 , a_3 e a_4 na solução acima:

$$\begin{aligned} \psi_1(Z) = a_0 - \frac{\gamma a_0}{4} Z + \frac{\gamma a_0(-6 + \gamma)}{64} Z^2 - \frac{\gamma a_0(\gamma^2 - 26\gamma + 88)}{2304} Z^3 \\ + \frac{\gamma a_0(\gamma^3 - 68\gamma^2 + 964\gamma - 2400)}{147456} Z^4 + \dots \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \psi_1(Z) = a_0 \left[1 - \frac{\gamma}{4} Z + \frac{\gamma(-6 + \gamma)}{64} Z^2 - \frac{\gamma(\gamma^2 - 26\gamma + 88)}{2304} Z^3 \right. \\ \left. + \frac{\gamma(\gamma^3 - 68\gamma^2 + 964\gamma - 2400)}{147456} Z^4 + \dots \right] \end{aligned}$$

A segunda solução linearmente independente pode ser obtida em função da primeira, visto o teorema 1.4.

5 CONCLUSÃO

No trabalho fizemos uma revisão de equações diferenciais dando ênfase aos métodos de soluções, em especial o método de séries e de Fröbenius.

Depois realizamos o estudo de duas equações diferenciais especiais, devido as suas grandes aplicações na área das ciências e tecnologias, a equação de Gauss ou Hipergeométrica e a equação de Bessel. As soluções destas equações foram obtidas pelo método de séries e de Fröbenius, que mostraram-se muito eficazes para a solução do problema que foi proposto, que no caso era a solução destas equações diferenciais em torno de um ponto ordinário e de um ponto singular regular.

Algumas aplicações foram feitas usando os conhecimentos adquiridos ao longo do trabalho, onde foi acrescentado o estudo de equações diferenciais parciais, pois os problemas físicos abordados neste trabalho eram regidos por equações deste tipo, logo era necessário a aplicação do método de separação das variáveis, para que assim fosse possível fazer a solução dos problemas através do método de séries, de Fröbenius ou outro adequado.

Obtivemos as soluções dos problemas da corda vibrante, sendo o primeiro da corda vibrante homogênea, em que a solução foi através da equação característica, mas ainda caiu em uma série devido as similaridades do problema. Depois, obtivemos a solução do problema da corda vibrante homogênea, em que a solução foi feita pelo método de Frobenius, mais a solução através das mudanças de variáveis leva a uma equação de Bessel, mostrando a importância da mesma. A terceira solução foi a da corda vibrante não-homogênea, onde sua solução foi feita através do método de séries. Por último foi feita a solução da equação de Schrödinger através do método de Fröbenius, mostrando assim a importância da série de potência para solução de algumas equações diferenciais, principalmente equações diferenciais lineares com coeficientes não constantes.

REFERÊNCIAS

- [1] BARATA. João Carlo Alves, **Curso de física-matemática**. São Paulo: USP, 2006.
- [2] CARDOZO. Marcelo dos Santos, **Um fenômeno físico resolvido com ideais da matemática**. 2010. 24 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2010.
- [3] MACHADO. Kleber Daum, **Equações diferenciais aplicadas**. Ponta Grossa: TODAPALAVRA, 2012. Vol. 1.
- [4] OLIVEIRA. Edmundo Capela, **Funções especiais com aplicações**. 1. Ed. São Paulo: LIVRARIA DA FISICA, 2005 1ªED.
- [5] BOYCE. Willian E.; DIPRIMA. Richard C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. Ed. São Paulo: LTC EDITORA, 2010.