



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS - DECEN
BACHARELADO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

ELIVANIO CARNEIRO DO NASCIMENTO JUNIOR

**GEOGEBRA: UMA FERRAMENTA PARA AUXILIAR NO ENSINO E
APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

PAU DOS FERROS

2022

ELIVANIO CARNEIRO DO NASCIMENTO JUNIOR

**GEOGEBRA: UMA FERRAMENTA PARA AUXILIAR O ENSINO E
APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Trabalho de conclusão de curso apresentado, a
Universidade Federal Rural do Semi-Árido -
UFERSA, Campus Pau dos Ferros, como
requisito para obtenção do título de Bacharel
em Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Josenildo Ferreira
Galdino.

PAU DOS FERROS

2022

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

J95g Junior, Elivania Carneiro do Nascimento .
Geogebra: uma ferramenta para auxiliar no
ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e
integral / Elivania Carneiro do Nascimento
Junior. - 2022.
41 f. : il.

Orientador: Josenildo Ferreira Galdino.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2022.

1. Geogebra. 2. Cálculo diferencial e
integral. 3. Contribuição. 4. Ensino e
aprendizagem. I. Galdino, Josenildo Ferreira ,
orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Pau dos Ferros
Bibliotecária: Erlanda Maria Lopes da Silva
CRB: 1115

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

ELIVANIO CARNEIRO DO NASCIMENTO JUNIOR

**GEOGEBRA: UMA FERRAMENTA PARA AUXILIAR NO ENSINO E
APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Trabalho de conclusão de curso apresentado, a Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFRSA, Campus Pau dos Ferros, como requisito para obtenção do título de Bacharel em Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 10/06/2022

BANCA EXAMINADORA

JOSENILDO FERREIRA
GALDINO:03844787437

Assinado de forma digital por
JOSENILDO FERREIRA
GALDINO:03844787437
Dados: 2022.06.21 13:27:03 -03'00'

Prof. Dr. Josenildo Ferreira Galdino (UFERSA)
Presidente

ANTONIO DIEGO SILVA
FARIAS:01368341322

Assinado de forma digital por ANTONIO
DIEGO SILVA FARIAS:01368341322
Dados: 2022.06.21 08:31:29 -03'00'

Prof. Dr. Antonio Diego Silva Farias (UFERSA)
Membro Examinador

BRUNO FONTES DE
SOUSA:07265769481

Assinado de forma digital por BRUNO
FONTES DE SOUSA:07265769481
Dados: 2022.06.21 12:37:13 -03'00'

Prof. Me. Bruno Fontes de Souza (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por proporcionar força, coragem e saúde para poder está concluindo essa etapa da minha vida pessoal e profissional, diante dos obstáculos enfrentado e de todo empenho depositado.

Agradeço ao meu Orientador, o professor Dr. Josenildo Ferreira Galdino pelas oportunidades e confiança depositada. Ademais, não sendo apenas um professor, mais um amigo receptivo que me guiou durante o processo de pesquisa e por todos os ensinamentos de vida e conhecimentos obtidos ao longo da elaboração desse trabalho.

Agradeço a Banca Examinadora pelo tempo dedicado e contribuições acerca do trabalho. Sendo ela composta por professores que me acompanhou, motivou e orientou desde o início do curso até esta etapa final.

Agradeço a Debora Raquel, uma pessoa meiga e incrível que a vida me presenteou durante essa jornada. Agradeço por jamais ter negado apoio, carinho, incentivo e diálogo. Além de tudo, muito obrigado pela compreensão durante os momentos que permaneci ausente, e por me fazer entender que a vida tem mais sentido quando se deposita o amor.

Agradeço aos meus amigos, Jose Ronaldo e Júlio Cesar que ao longo desta jornada me encorajaram, incentivaram, inspiraram e me apoiaram, fazendo com que esta fosse sem dúvidas umas das melhores fases da minha vida. Ademais, a eles muito obrigado pelo conforto de entender que nunca estarei só nesse universo e serei sempre capaz de conquistar tudo por maiores que sejam os obstáculos, quero que saibam que reconheço tudo que fizeram por mim, ficarão eternamente gravados no meu coração.

Agradeço ainda as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para que essa jornada fosse possível.

RESUMO

A utilização de metodologias complementares de ensino e aprendizagem, voltadas principalmente às disciplinas que demandam de um certo grau de abstração para o seu correto entendimento e compreensão, a exemplo do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), torna-se um fator norteador para uma melhor aquisição dos conhecimentos adquiridos na literatura. Com base nessas perspectivas, o presente estudo teve como objetivo identificar as principais contribuições do *Software GeoGebra* como ferramenta auxiliar no ensino e aprendizagem nas disciplinas de CDI na Universidade Federal Rural do Semi- Árido (UFERSA). A pesquisa foi realizada na comunidade das ciências exatas da referida instituição de ensino superior (IES) através de formulário eletrônico pela plataforma do *Google Forms*. A mesma consistiu em um questionário composto por nove questões, em que seis delas buscavam a diferença com e sem o uso do *GeoGebra* nas resoluções de questões específicas do CDI, e as três últimas tinha um caráter qualitativo, em que se averiguava as vantagens e desvantagens da utilização do *software*, contendo também as possíveis contribuições ou não, nesse contexto, foi observado que o *GeoGebra* trouxe contribuição como ferramenta para o auxílio do ensino e aprendizagem do CDI na referida IES, e as mais importantes entre elas foi o auxílio da visualização do esboço dos gráficos e na identificação de erros cometidos durante a resolução manual das questões.

Palavras-chave: *GeoGebra*. Cálculo Diferencial e Integral. Contribuição. Ensino e aprendizagem.

ABSTRACT

The use of complementary teaching and learning methodologies, aimed mainly at subjects that demand a certain degree of abstraction for their correct understanding, such as Differential and Integral Calculus (DIC), becomes a guiding factor for a better absorption of knowledge acquired in the literature. Based on these perspectives, the present study aimed to identify the main contributions of the *GeoGebra Software* as an auxiliary tool for learning in DIC subjects at the Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). The research was carried out in the exact sciences community of the aforementioned higher education institution (HEI) through an electronic form through the *Google Forms* platform. It consisted of a questionnaire composed in nine questions, in which six of them sought the difference with and without the use of *GeoGebra* in solving specific DIC questions, and the last three had a qualitative character, in which the advantages and disadvantages were investigated. of the use of the *software*, also containing the possible contributions or not, in this context, it was observed that *GeoGebra* brought a contribution as a tool to help the teaching and learning of the DIC in that IES, and the most important among them was the aid of the visualization of the sketching the graphs and identifying mistakes made during the manual resolution of the questions.

Keywords: *GeoGebra*. Differential and integral calculus. Contribution. Teaching and learning.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Área de interação do <i>GeoGebra Classic 5</i>	14
Figura 2 - Interpretação geométrica da derivada.....	16
Figura 3 - A região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$	17
Figura 4 - Aproximação feita dividindo a região com retângulos perpendiculares aos eixos.....	18
Figura 5 - A área ΔA_x do k -ésimo retângulo é o produto entre sua altura $f(c_k) - g(c_k)$, e sua largura Δx_k	18
Figura 6 - Relação entre as curvas de nível e os cortes horizontais	20
Figura 7 - Mapas de regiões montanhosas	20
Figura 8 - Função $f(x) = 2x^2 + 3$	22
Figura 9 - Ponto P (4, 35).....	23
Figura 10 - Derivada $f'(x) = 4x$ e seu gráfico	23
Figura 11 - O valor da derivada e da função em $x = 4$	24
Figura 12 - Equação da reta tangente a função $f(x) = 2x^2 + 3$ no ponto (4, 35) e seu gráfico.....	25
Figura 13 - Passos para expandir a expressão da equação da reta tangente.....	26
Figura 14 - Esboço da $f(x)$ e $g(x)$	28
Figura 15 - Passos para determinar os pontos de interseção entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$	29
Figura 16 - Passos para calcular a integral definida.....	30
Figura 17 - Esboço das curvas de níveis $x^2 + y^2 = C$ no plano xy	31
Figura 18 - Passos para adicionar o controle deslizante.....	32
Figura 19 - Passos para inserir a curva de nível $x^2 + y^2 = 1$	32
Figura 20 - Curva de nível $x^2 + y^2 = 4$	33
Figura 21 - Curva de nível $x^2 + y^2 = 9$	33
Figura 22 - Passos para inserir simultaneamente as curvas de níveis $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$	34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados obtidos para vantagens e desvantagens do uso do <i>GeoGebra</i>	35
Tabela 2 - Resultados das possíveis contribuições do <i>GeoGebra</i>	35
Tabela 3 - Resultado do questionamento qual a contribuição mais importante	36

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDI	Cálculo Diferencial e Integral
IES	Instituição de Ensino Superior
.ggb	Extensão de Arquivo de Dados do <i>GeoGebra</i>
u. a.	Unidade de Área
UFERSA	Universidade Federal Rural do Semi - Árido

LISTA DE SÍMBOLOS

$\text{tg}(\alpha \text{ ou } \beta)$	Coeficiente Angular
$\int_a^b f(x) \, dx$	Denotação da integral definida de a até b de f de x dx
$Z = f(x, y)$	Denotação de uma função f de duas variáveis
$\ P\ $	Norma da partição
$[a, b]$	Notação de intervalo fechado
$f'(x_0)$	Notação de Lagrange para a derivada de primeira ordem em um ponto de abcissa x_0
$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = L$	Notação do limite L de uma função f(x), quando x tende a k, onde x e k são números reais
$\neq$	Símbolo matemático que indica “diferente de”
$\geq$	Símbolo matemático que indica “maior ou igual a”
$\sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k$	Soma Riemann

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 OBJETIVOS	13
2.1 Geral	13
2.2 Específicos	13
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
3.1 GeoGebra	14
3.2 Definição de derivada de uma função em um ponto do domínio	15
3.2.1 Interpretação geométrica da derivada.....	15
3.3 Área entre curvas.....	17
3.4 Curvas de nível	19
4 METODOLOGIA.....	21
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO	35
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	37
REFERÊNCIAS	38
APÊNDICE A – ROTEIRO DO QUESTIONÁRIO	40

1 INTRODUÇÃO

As dificuldades encontradas nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) ofertadas nos cursos de ciências exatas, ocasionam várias discussões no que concerne às metodologias de ensino empregadas. É natural que o corpo docente tenha uma maior preocupação acerca da maneira como as informações são repassadas, priorizando a utilização de ferramentas didático-pedagógicas que propiciem uma melhor compreensão do conteúdo ministrado. Deste modo, o CDI possui na sua estruturação um mecanismo complicado e discutível de ensino-aprendizagem na UFERSA.

Em razão das dificuldades de expressar graficamente e/ou algebricamente os problemas matemáticos e seu grande nível de abstração, uma considerável parcela dos discentes não compreendem de forma satisfatória os conteúdos ministrados. À vista disso, temos altos índices de insucesso, e, por vezes, evasões estudantis associadas, tornando-se o CDI, um dos principais responsáveis por esse quadro.

Em apoio a essas perspectivas, para Machado (2008) a aprendizagem do CDI pode ser influenciada por alguns fatores como, por exemplo, o cognitivo, nos quais os discentes não possuem compreensão suficiente para entender o grau de complexibilidade do conteúdo, a didática não apropriada, em que o aprendizado é, por vez, dificultado pela metodologia de ensino, e um outro fator é de natureza epistemológica. Vale salientar que os fatores são diversificados e não podemos atribuir esse obstáculo aos docentes ou discentes.

Os *softwares* matemáticos, a exemplo do GeoGebra, são ferramentas que auxiliam na formação de conceitos e aplicações referentes ao cálculo, acarretando o surgimento de mecanismos de aprendizagem que viabilizam um conhecimento mais independente e autônomo. Conforme aponta Silva e Penteado (2009), esses *softwares* permitem que os usuários realizem averiguação de propriedades geométricas e algébricas que dificilmente se observa no papel. Diante disso, estudos direcionam uma alternativa para o ensino de cálculo, em especial no caminho da utilização de tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem (CURY, 2006; FERREIRA e BRUMATTI, 2009; SILVA e FERREIRA, 2009). Assim, os *softwares* matemáticos minimizam as dificuldades identificadas nas disciplinas de cálculo, beneficiando o ensino e a aprendizagem na universidade.

Dado o exposto, este projeto investiga as contribuições do *software GeoGebra* na amenização das dificuldades enfrentadas no processo de ensino-aprendizagem de CDI na Universidade Federal Rural do Semi – Árido (UFERSA).

Para isso, foi realizado um levantamento com a comunidade das ciências exatas da UFERSA, com o propósito de analisar as diferenças na resolução de problemas fundamentais do CDI com o auxílio do GeoGebra, e sem o auxílio do mesmo, para assim verificar se a utilização do *software* é vantajosa ou não, e chegar nessas contribuições, se porventura existirem.

Por meio dos resultados, o considerável impacto deste *software* na instituição, possibilita uma melhor estruturação no ensino e aprendizagem do CDI. Em que se pode elencar as contribuições mais importantes da ferramenta.

2 OBJETIVOS

2.1 Geral

- Identificar as contribuições do *GeoGebra* para o ensino e aprendizagem das disciplinas do Cálculo Diferencial e Integral;

2.2 Específicos

- Compreender os assuntos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) abordados no projeto;
- Aprender os comandos no *GeoGebra* referente a esses assuntos;
- Elaborar atividades no *GeoGebra* de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral;
- Pesquisar sobre as soluções realizadas pelos discentes da UFERSA de problemas de CDI com o auxílio do *Geogebra*, e sem esse auxílio;

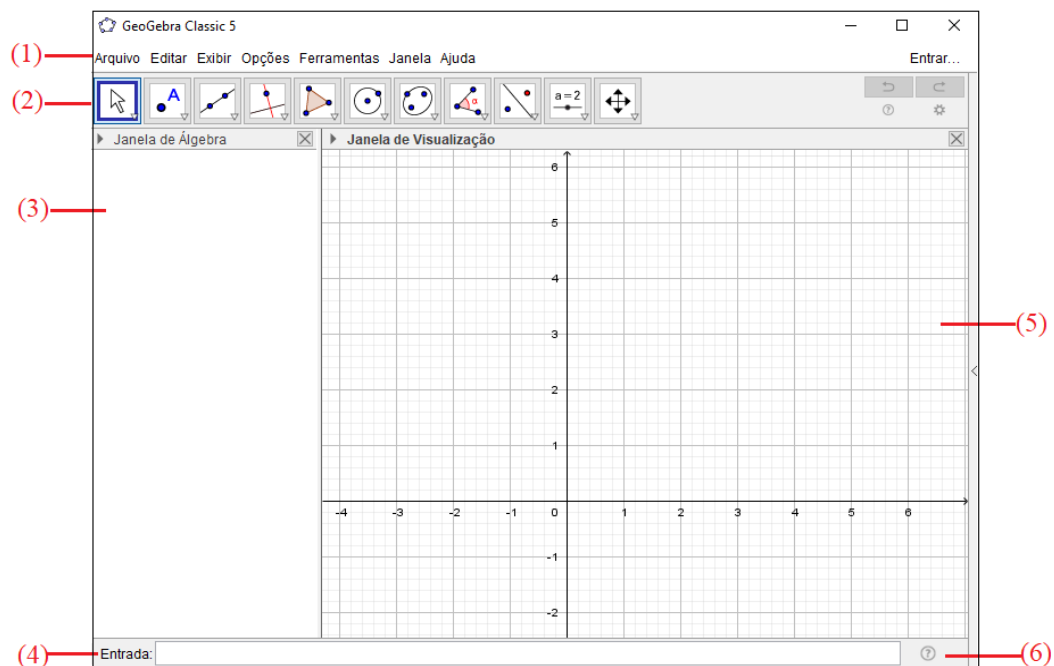
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 GeoGebra

Segundo Cometti (2016), o *GeoGebra* é um *software* gratuito que foi criado em 2001, por Markus Hohenwarter, na Universität Salzburg – Áustria, com a finalidade de melhorar o ensino e aprendizagem de matemática. Por ser um *software* livre, o *GeoGebra* permite que seus usuários realizem mudanças nos códigos fontes com o intuito de atualizar ou implementar novas ferramentas.

Na sua área de interação, o *software* contém artifícios de geometria, álgebra e cálculo. Conforme a figura 1 abaixo, essa área possui: (1) barra de menu com a funcionalidade de gerir configurações gerais e salvamento de arquivos em (.ggb); (2) barra de ferramentas com funcionalidades que permitem construir, figuras geométricas, segmentos, medir os objetos, etc; (3) janela de álgebra, no qual são mostradas as coordenadas, equações e algumas propriedades de objetos feitos; (4) entradas de comandos; (5) listagem de comandos previstos; (6) janela de visualização, na qual é permitido visualizar os objetos graficamente que é possível ser desenhados utilizando o mouse, os ícones ou digitando no comando entrada.

Figura 1 - Área de interação do *GeoGebra* Classic 5



A entrada dos comandos do *GeoGebra* é simples e a sua área de interação é bem intuitiva, possuindo opções de alteração do zoom, movimentação de pontos, ajuste de janela, realização de animações que melhora a compreensão do usuário e etc. As funcionalidades do *software* podem ser acessadas tanto na barra de ferramentas quanto no campo de entrada. Na barra de ferramentas existem 11 janelas com suas respectivas utilidades, sendo essas evidenciadas por um ícone e um nome. Ao deslocar o ponteiro do mouse sobre uma janela selecionada, uma breve descrição da utilidade da ferramenta é apresentada, dessa forma, fica evidente que o *GeoGebra* é autoexplicativo.

Vale salientar que, na janela de visualização com o auxílio do botão direito do mouse, é possível adicionar ou retirar malhas e eixos coordenados, além do ajuste do formato da malha. Além dos mais, é permitido dentro da janela de visualização, alterar a distância entre números, as cores de eixos coordenados e de qualquer objeto construído nessa janela. Após a implementação dos comandos, a visualização dos comandos é mostrada ao clicar no botão ENTER do teclado. A janela algébrica possui diversas funções, entre elas, a visualização de dados dos objetos algébricos, e editar as características dos objetos com o auxílio do botão direito do mouse.

3.2 Definição de derivada de uma função em um ponto do domínio

A derivada da função $y = f(x)$ em um ponto $P_0(x_0, f(x_0))$, denotada por $f'(x_0)$, é definida pela equação 3.1:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (3.1)$$

Onde P_0 pertence ao domínio de $f(x)$, e desde que o limite exista (HALLAL, 2020).

3.2.1 Interpretação geométrica da derivada

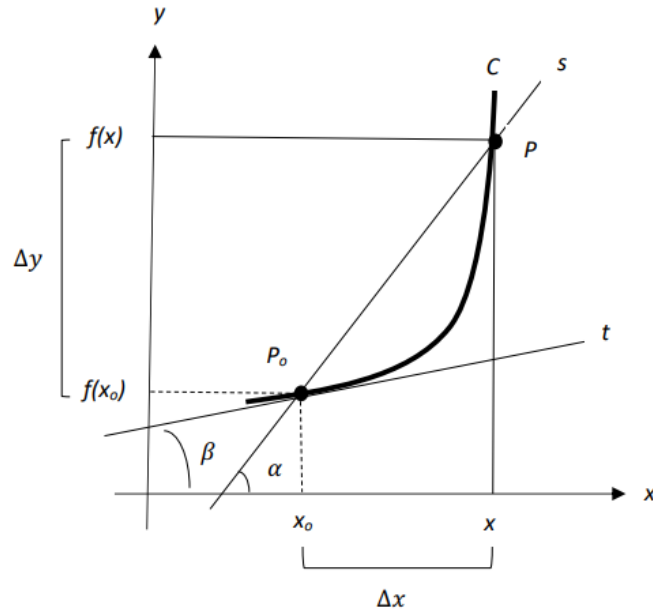
A derivada de uma função f em um ponto $P_0(x_0, f(x_0))$ é igual ao coeficiente angular (ou inclinação) da reta tangente ao gráfico de f nesse ponto P_0 .

Dada a função $f(x)$ definida no intervalo A e contínua, e sendo o gráfico de f uma curva digamos C , com x e x_0 pertence à A , e $x \neq x_0$ (observar figura 2). Caso a reta

secante s à curva C , é definida pelos pontos $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x, f(x))$, conseguimos afirmar que o coeficiente angular de s é dado pela razão de $f(x)$ no ponto x_0 , ou seja, o coeficiente angular de s é definido pela equação 3.2 abaixo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3.2)$$

Figura 2 - Interpretação geométrica da derivada



Fonte: HALLAL et al (2020, p.236)

Quando Δx tende ao valor 0, isto é, quando x tende à x_0 , P se aproximar de P_0 e a reta secante tenderá a reta tangente a curva C no ponto P_0 .

Se $s \rightarrow t$, então $\alpha \rightarrow \beta$. Logo,

$$\operatorname{tg}(\beta) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3.3)$$

Pelo fato do $\Delta x = x - x_0$ temos que $x = x_0 + \Delta x$, rescrevendo a equação acima, temos:

$$\operatorname{tg}(\beta) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (3.4)$$

Assim $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}(\beta)$, logo:

$$f'(x) = \operatorname{tg}(\beta) \quad (3.5)$$

Portanto, o coeficiente angular $\text{tg}(\beta)$ da reta tangente t ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P_0(x_0, f(x_0))$ é igual a derivada de $f(x)$ em x_0 .

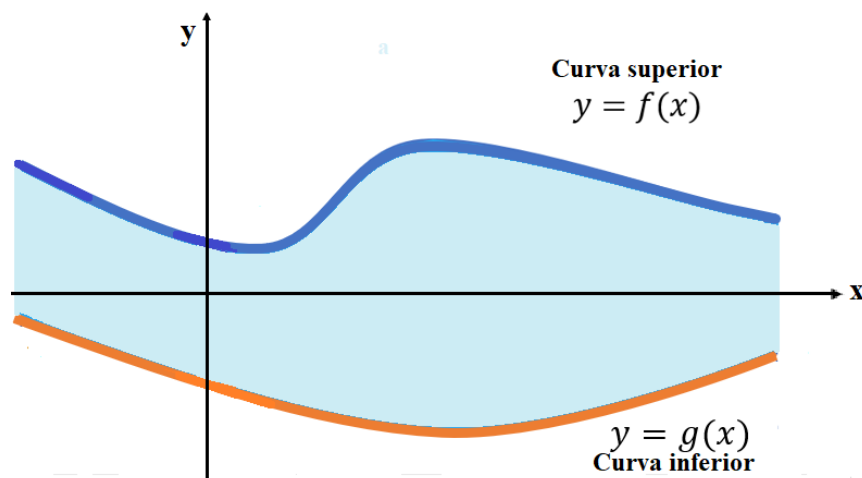
Assim, a reta tangente t é denotada pela equação 3.6 abaixo:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (3.6)$$

3.3 Área entre curvas

Supondo que queiramos determinar a área de uma região superiormente limitada pela curva $y = f(x)$, inferiormente pela curva $y = g(x)$ à esquerda por $x = a$ e à direita por $x = b$ (observar figura 3). A região pode ter uma forma que podemos determinar a área geometricamente, entretanto se $f(x)$ e $g(x)$ forem funções contínuas arbitrárias, de maneira geral para encontrar a área usaremos uma integral.

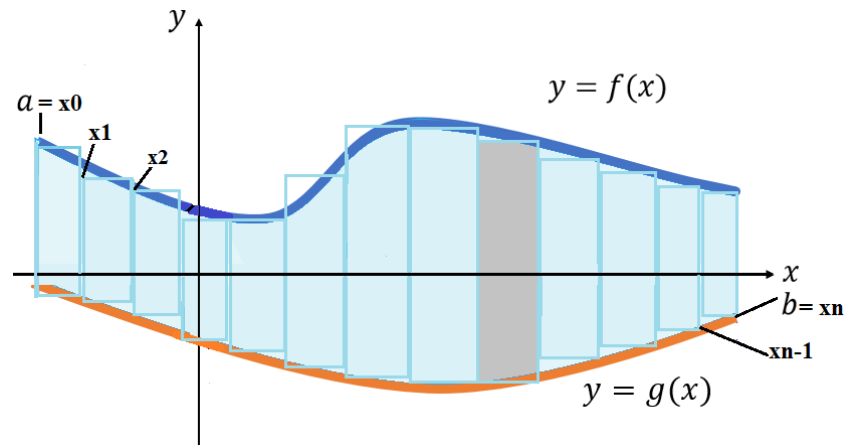
Figura 3 - A região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$



Fonte: Autoria Própria (2022)

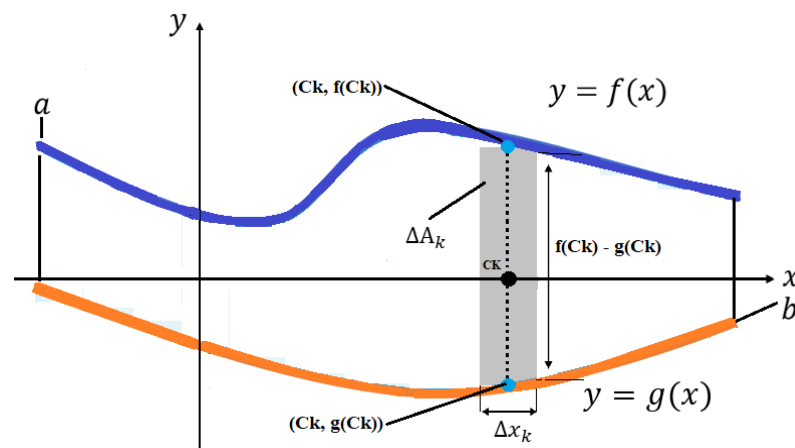
Para sabermos qual deve ser a integral, primordialmente aproximamos a região com n retângulos verticais com bases em uma partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ (observar figura 4). O k -ésimo retângulo (observar figura 5) tem a área igual à $\Delta A_k = \text{altura} \times \text{largura} = [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k$.

Figura 4 - Aproximação feita dividindo a região com retângulos perpendiculares aos eixos



Fonte: Autoria Própria (2022)

Figura 5 - A área ΔA_k do k-ésimo retângulo é o produto entre sua altura, $f(c_k) - g(c_k)$, e sua largura Δx_k



Fonte: Autoria Própria (2022)

Somando as áreas dos n retângulos realizamos uma aproximação para a área da região conforme a equação 3.7:

$$A \approx \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k \quad (\text{soma de Riemann}) \quad (3.7)$$

À medida que a norma da partição tende a zero, ou seja, $\|P\| \rightarrow 0$, as somas da direita se aproximam do limite $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ pois $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas. Tomamos a área da região como o valor dessa integral, ou seja,

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (3.8)$$

Assim, temos a seguinte definição para a área entre curvas, se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas com $f(x) \geq g(x)$ ao longo do intervalo $[a, b]$, então a área da região

entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ de a até b é a integral de $(f(x) - g(x))$ desde a até b , ou seja,

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (3.9)$$

Na aplicação da definição, é conveniente esboçar as curvas, pois assim é revelado qual delas é a curva superior $f(x)$, e qual é a inferior $g(x)$. Além disso, ajudará a encontrar os limites de integração, caso eles ainda não sejam conhecidos. Para determinar esses limites, possivelmente seja necessário achar a intersecção entre as curvas, e isso pode envolver a solução da equação $f(x) = g(x)$ para valores de x . depois, é só realizar a integração de $f - g$ para descobrir a área entre as intersecções.

3.4 Curvas de nível

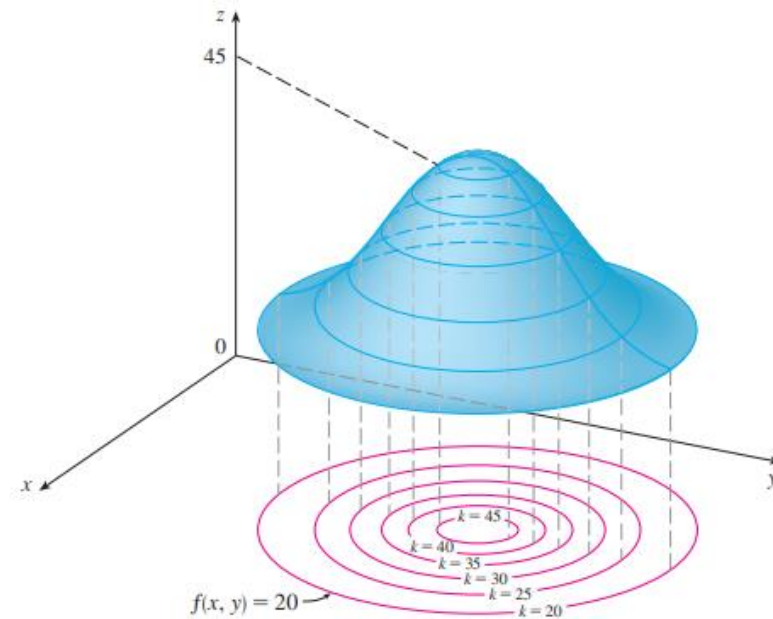
É sabido que podemos visualizar funções utilizando dois métodos diferentes, o diagrama de flechas e os gráficos. Um terceiro método, vindo da cartografia, é um mapa de contorno, onde os pontos de elevação constantes são ligados para formar curvas de nível ou curvas de contorno.

Assim sendo, as curvas de nível de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x,y) = k$, em que k é uma constante na imagem de f .

A curva de nível $f(x,y) = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f onde o valor de f é k , ou seja, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k .

Na Figura 6 podemos visualizar a relação entre as curvas de nível e os cortes horizontais. As curvas de nível $f(x,y) = k$ são apenas cortes do gráfico de f no plano horizontal $z = k$ projetados sobre o plano xy . Deste modo, ao traçar as curvas de nível da função e visualizá-las elevadas para a superfície na altura indicada, poderá imaginar o gráfico da função colocando as duas informações juntas. Quando as curvas de nível estiverem mais próximas umas das outras a superfície será mais inclinada. Já se as curvas de nível estão distantes umas das outras, a superfície será um pouco mais achatada.

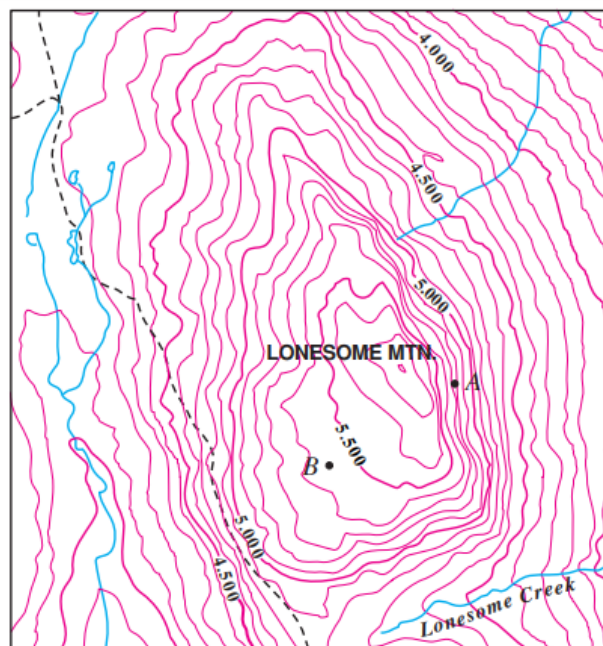
Figura 6 - Relação entre as curvas de nível e os cortes horizontais



Fonte: STEWART (2013, p.796)

A exemplo de uma curva de nível, temos os mapas topográficos de regiões montanhosas, como o mapa da Figura 7. As curvas de nível são aquelas na qual a elevação em relação ao nível do mar é constante. Ao andarmos sobre um desses contornos, nem subiremos nem descereamos.

Figura 7 - Mapas de regiões montanhosas



Fonte: STEWART (2013, p.796)

4 METODOLOGIA

Este estudo possui natureza qualitativa. Assim como ressaltam Bogdan e Biklen (2003), o método qualitativo se caracteriza pelos dados serem descritivos, sendo registrados em um contato entre o pesquisador e a área estudada, enaltecendo mais o processo do que o resultado, e se preocupando em representar o panorama dos envolvidos. Ademais, conforme Oliveira (2011, p. 25) a análise dos dados segue o processo intuitivo, onde os pesquisadores não buscam evidências que comprovam as hipóteses estabelecidas antes de iniciar a pesquisa. A tabulação dos dados e sua análise foram efetuadas pelo *Google Forms* com auxílio do Excel.

Para alcançar os objetivos desejados, a metodologia utilizada foi fundamentada bibliograficamente por artigos acadêmicos e livros. O estudo desse método compõe-se em uma pesquisa, na qual envolve a compreensão dos conteúdos do CDI, a elaboração de atividades no *GeoGebra* dos conteúdos, além de elucidar a aplicabilidade e funcionalidade do *software* nos problemas do CDI, com o intuito de identificar as possíveis contribuições do *GeoGebra* para o ensino e aprendizagem dos discentes da UFERSA que cursaram o referido cálculo.

Antes de tudo, houve a preparação de questões envolvendo assuntos do Cálculo Diferencial e Integral, especificamente a equação da reta tangente a uma curva, a área entre curvas e as curvas de nível, onde tais questões são utilizadas como corpo de um questionário online. Após isso, o mesmo foi aplicado via plataforma *Google Forms* (de acesso gratuito), sendo direcionado à comunidade de ciências exatas da UFERSA que já tem conhecimento das disciplinas de CDI, e que já tenham ou não utilizado o *GeoGebra* nas resoluções de exercícios.

No formulário (APÊNDICE A), foi proposto a resolução das questões do CDI, as quais a comunidade deve solucionar primeiramente três delas manualmente, sem o auxílio do *GeoGebra*, e depois essas mesmas três questões utilizando o *software*. Além do mais, outras três questões pediam para que os entrevistados descrevessem as suas experiências relacionadas às vantagens ou desvantagens com a utilização do *software* nessas resoluções, e que indicassem as possíveis contribuições e a mais importante entre elas, e se não houve contribuição da ferramenta.

Na referida pesquisa foi sugerida uma revisão rápida dos conteúdos abordados nas questões. Ademais, a fim de que os entrevistados tenham o conhecimento necessário da implementação dos problemas propostos na ferramenta, foram também inseridos vídeos de

autoria própria mostrando a utilização do *GeoGebra* no desenvolvimento dos exercícios. A revisão e os vídeos, poderiam ser acessados respectivamente por meio de links do Google Fotos e do Google Drive disponibilizados no próprio questionário.

Os exercícios disponibilizados na revisão, bem como o passo a passo da implementação deles no *GeoGebra* mostrados nos vídeos, são apresentados logo abaixo:

Equação da reta tangente;

Exemplo 1: Encontre a equação da reta tangente a função $f(x) = 2x^2 + 3$ no ponto (4, 35).

Solução:

$$x_0 = 4$$

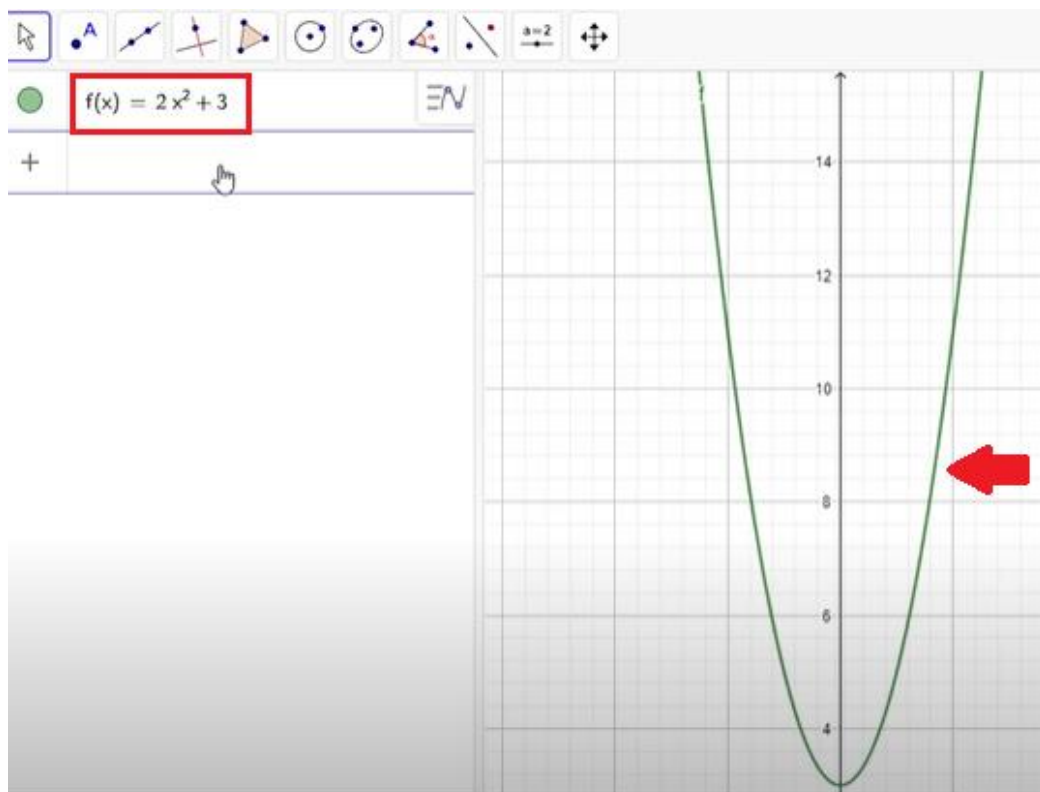
$$f(x_0) = f(4) = 2 * (4)^2 + 3 \rightarrow f(4) = 35$$

$$f'(x) = 4x \text{ e } f'(4) = 4 * 4 = 16 \rightarrow f'(x) = 16$$

Logo $y = 35 + 16(x - 4)$, assim a equação da reta é $y = 16x - 29$

Passo 1: Digite a função " $f(x) = 2x^2 + 3$ " no comando de entrada do *GeoGebra*, e dê um ENTER. Após isso, é possível visualizar o esboço do gráfico (em verde) de $f(x)$ na janela geométrica. (Observar figura 8).

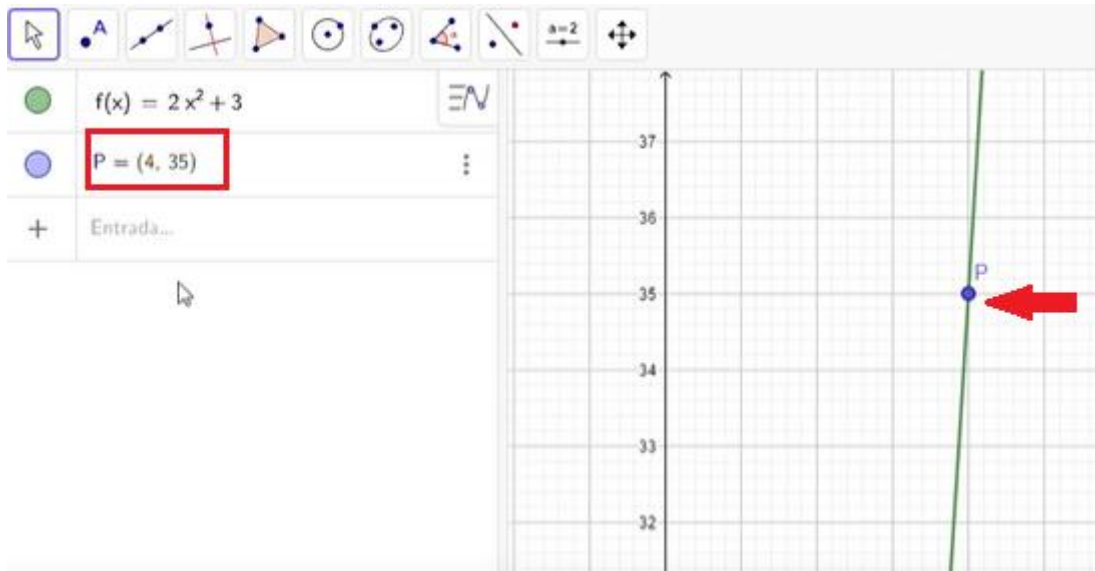
Figura 8 - Função $f(x) = 2x^2 + 3$



Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 2: Em entrada digite o ponto “P = (4, 35)”. Após um ENTER, pode-se visualizar o referido ponto na janela geométrica. (observar figura 9).

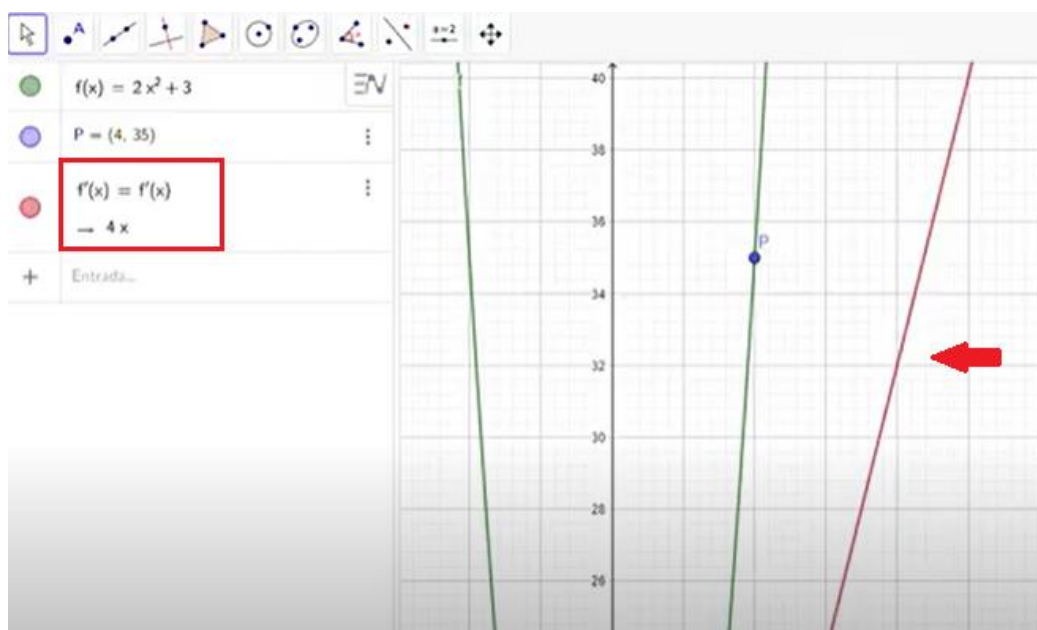
Figura 9 - Ponto P (4, 35)



Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 3: Antes de continuar investigando a equação da reta tangente, é necessário encontrar a derivada de $f(x) = 2x^2 + 3$. Para tal, digite “ $f'(x)$ ” em entrada e dê ENTER. Feito isso, a visualizar dessa derivada ($4x$) é vista na janela algébrica, e o seu gráfico (reta em vermelho) na janela geométrica, conforme a figura 10.

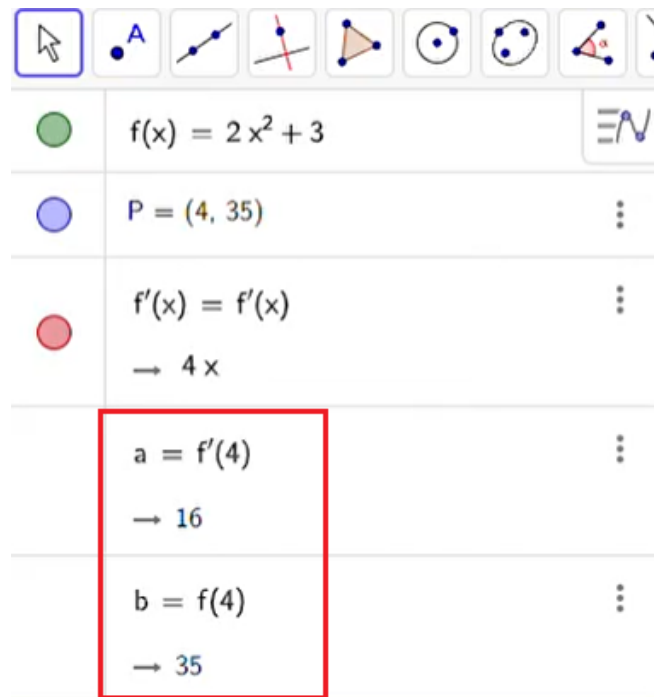
Figura 10 - Derivada $f'(x) = 4x$ e seu gráfico



Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 4: Ao digitar “ $f'(4)$ ” e posteriormente ENTER, teremos o valor da derivada em $x = 4$, ou seja, $a = f'(4) = 16$. Além disso, é necessário determinar o valor numérico de $f(x) = 2x^2 + 3$ em $x = 4$, isto é, $b = f(4) = 35$. Para encontrar esse valor, é só digitar “ $f(4)$ ” e clicar em ENTER. (observar figura 11).

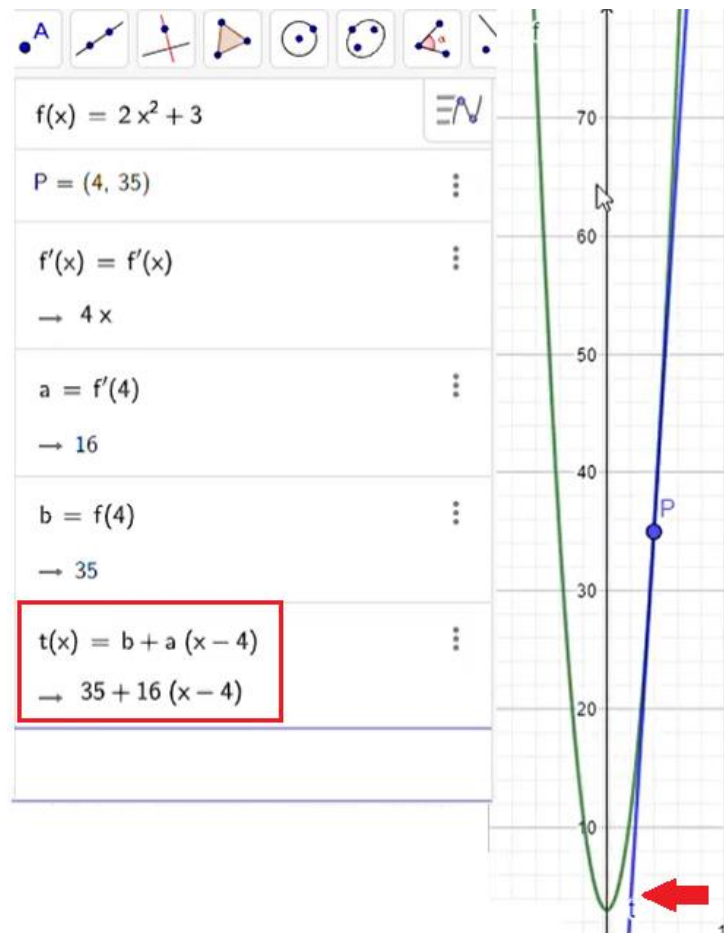
Figura 11 - O valor da derivada e da função em $x = 4$



Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 5: Com os valores de $a = f'(4) = 16$ e $b = f(4) = 35$, podemos determinar a equação da reta tangente. Para tal, no comando de entrada digite “ $t(x) = a + b(x - 4)$ ” e ao pressionar ENTER, teremos a equação da reta tangente $t(x) = 35 + 16(x - 4)$ e seu gráfico (reta em azul). (observar figura 12).

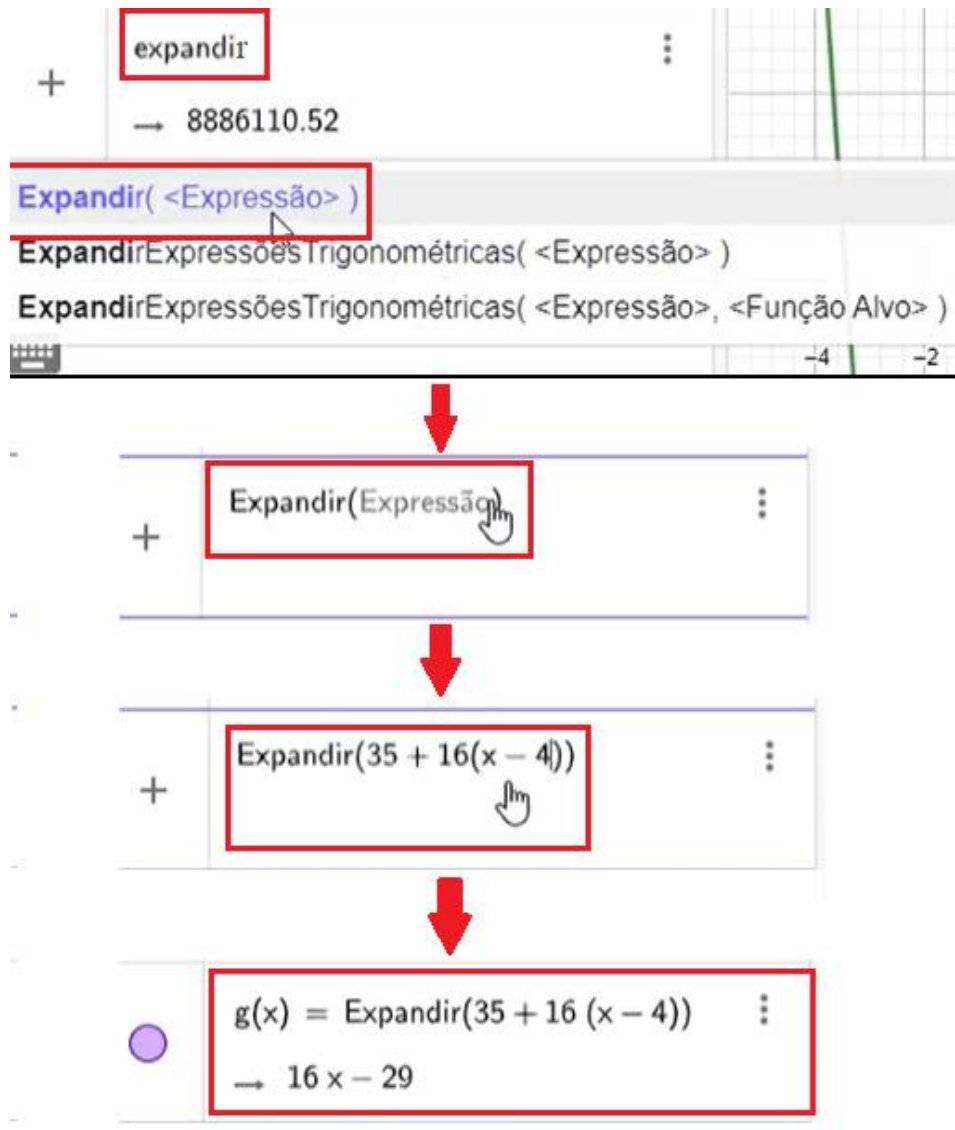
Figura 12 - Equação da reta tangente a função $f(x) = 2x^2 + 3$ no ponto $(4, 35)$ e seu gráfico



Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 6: A expressão $t(x) = 35 + 16(x - 4)$ pode ser expandida (transformar um produto em uma soma algébrica). Para tanto, digite em entrada “Expandir” que irá abrir a opção “Expandir (<Expressão>)”, e em “(<Expressão>)” digite “ $35 + 16(x - 4)$ ” e dê ENTER. Assim temos $g(x) = \text{Expandir}(35 + 16(x - 4)) = 16x - 29$, isto é $t(x) = 16x - 29$, que é a equação da reta tangente a função $f(x) = 2x^2 + 3$ no ponto $(4, 35)$. (observar figura 13).

Figura 13 - Passos para expandir a expressão da equação da reta tangente



Fonte: Autoria Própria (2022)

Área entre as curvas;

Exemplo 2: Calcule a área entre as curvas $f(x) = -\frac{1}{10}(x^2 - 18x + 17)$ e $g(x) = \frac{x+1}{2}$.

Solução:

Encontrar os pontos de intersecção e analisar onde $f(x)$ é maior do que $g(x)$. Os pontos de intersecção são quando $f(x) = g(x)$. Logo,

$$-\frac{1}{10}(x^2 - 18x + 17) = \left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Assim,

$$x^2 - 13x + 22 = 0$$

Ao determinar as raízes temos $x = 2$ e $x = 11$. Desse modo, concluímos que a região desejada fica entre estes dois valores de x . Posteriormente, devemos identificar qual das funções é maior neste intervalo. Para isto avaliamos as duas funções em um ponto qualquer entre $x = 2$ e $x = 11$. Assim,

$$f(5) = -\frac{1}{10}(5^2 - 18 \cdot 5 + 17) = \frac{24}{5}$$

e

$$g(5) = \frac{5+1}{2} = 3$$

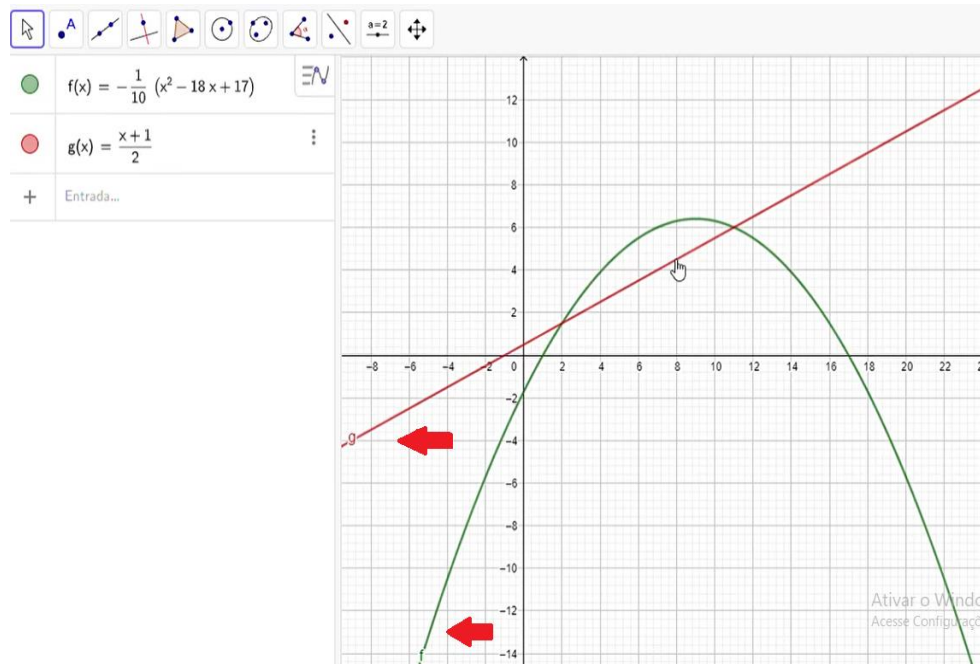
Portanto, no intervalo indicado $f(x)$ é maior do que $g(x)$. Desse modo, devemos apenas aplicar a integral:

$$A = \int_2^{11} [f(x) - g(x)] dx = \int_2^{11} \left[\left(-\frac{1}{10}(x^2 - 18x + 17) \right) - \left(\frac{x+1}{2} \right) \right] dx \longrightarrow$$

$$A = \int_2^{11} \left[\left(-\frac{x^2}{10} + \frac{18x}{10} - \frac{17}{10} \right) - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] dx = \left(-\frac{x^3}{30} + \frac{18x^2}{20} - \frac{22x}{10} \right) \Big|_2^{11} = \frac{243}{20}$$

Portanto, $A = \frac{243}{20}$ u. a. (unidade de área)

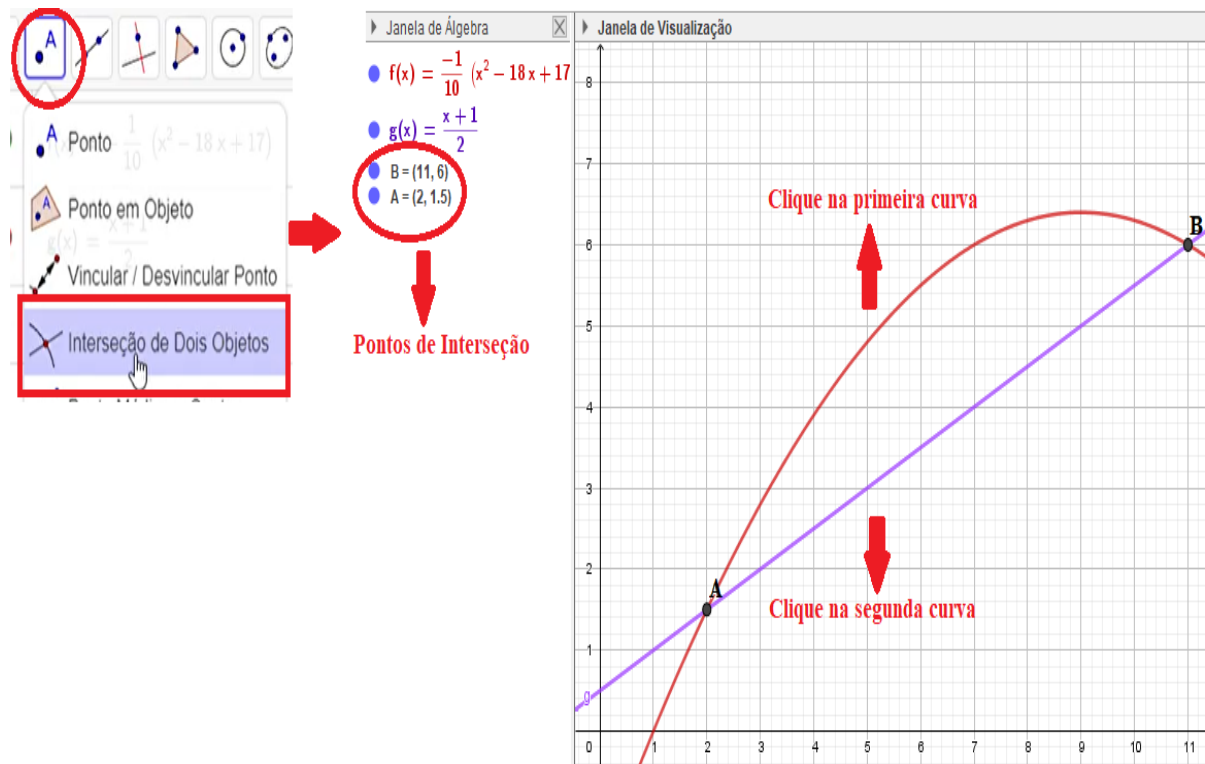
Passo 1: Esboçar as curvas $f(x)$ e $g(x)$, para tanto no comando de entra digite “ $f(x) = -\frac{1}{10}(x^2 - 18x + 17)$ ” e “ $g(x) = \frac{x+1}{2}$ ” e aperte ENTER. Na janela geométrica é possível visualizar o esboço dos gráficos (parábola em verde da $f(x)$ e reta em vermelho da $g(x)$). (observar figura 14).

Figura 14 - Esboço da $f(x)$ e $g(x)$ 

Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 2: Para prosseguir na determinação da área é necessário determinar os pontos de interseção entre as curvas, no intuito de encontrar os limites de integração. Esse intervalo está compreendido entre as abscissas dos pontos de interseção. Assim, na opção ponto na barra de ferramenta, selecione “Interseção de Dois Objetos”, posteriormente clique na primeira curva e depois na segunda curva, após isso os pontos $A = (11, 6)$ e $B = (2, 15)$ irão aparecer automaticamente. Portanto, o intervalo de integração é o $[2, 11]$. (observar figura 15).

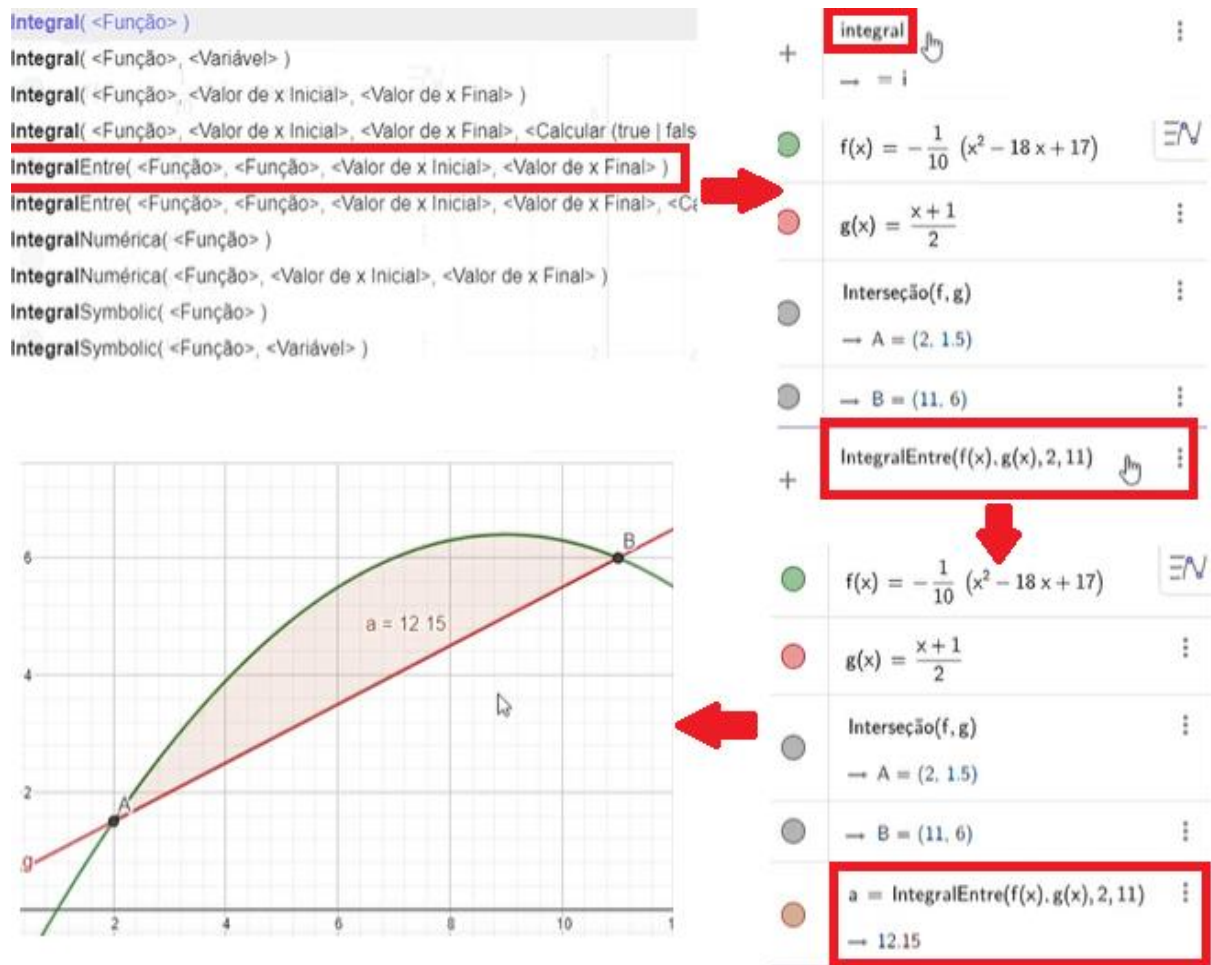
Figura 15 - Passos para determinar os pontos de interseção entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$



Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 3: Com os pontos de interseção, pode-se encontrar a área entre as curvas através da integral definida, onde o integrando será a diferença entre a maior e a menor curva dentro do intervalo de integração. Ademais, pelo gráfico acima e abaixo, são respectivamente a $f(x)$ e a $g(x)$. Em outras palavras, para calcular a área basta resolver a integral $\int_2^{11} [f(x) - g(x)] dx$. Para tal finalidade, no comando entrada digite “integral” e escolha a opção “IntegralEntre (<Função>, <Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)”. Nessa opção, o primeiro (<Função>) e o segundo campo (<Função>) correspondem respectivamente, a maior e a menor curva, já o terceiro (<Valor de x Inicial>) e o quarto (<Valor de x Final>) campo equivalem respectivamente ao primeiro e ao segundo intervalo de integração. Assim, ao substituir $f(x)$, $g(x)$, 2 e 11 em “IntegralEntre (<Função>, <Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)” detém-se “IntegralEntre($f(x)$, $g(x)$, 2, 11)”. Após pressionar ENTER a área desejada é $a = \text{IntegralEntre}(f(x), g(x), 2, 11) = 12,15$ unidade de área (u.a), ou seja, $A = 12,15$ u.a. (observar figura 16).

Figura 16 - Passos para calcular a integral definida



Fonte: Autoria Própria (2022)

Curva de nível;

Exemplo 3: Dada a função $f(x,y) = x^2 + y^2$. Encontre suas curvas de nível quando $C = 1$, $C = 4$ e $C = 9$.

Solução:

Para $C = 1$: (equivalente a $z = 1$)

1) substituir na função $f(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

2) classificar o tipo de função obtida: equação da circunferência de raio 1 e centro (0,0):

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$$

Para $C = 4$: (equivalente a $z = 4$)

1) substituir na função $f(x,y) = x^2 + y^2 = 4$

2) classificar o tipo de função obtida: equação da circunferência de raio 2 e centro (0,0):

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$

Para $C = 9$: (equivalente a $z = 9$)

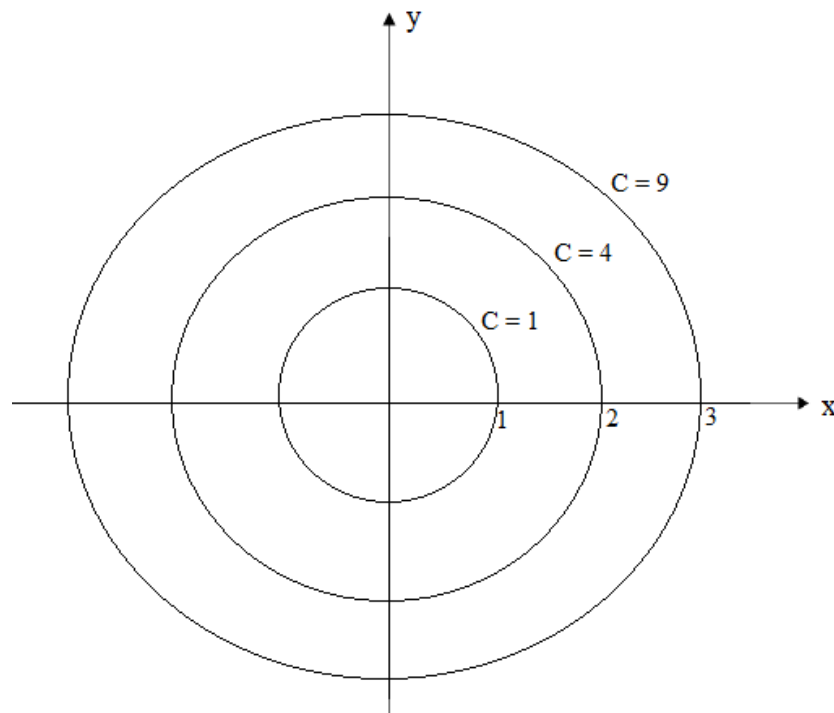
1) substituir na função $f(x,y) = x^2 + y^2 = 9$

2) classificar o tipo de função obtida: equação da circunferência de raio 3 e centro $(0,0)$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 3^2$$

O esboço dessas curvas é visto na figura 17.

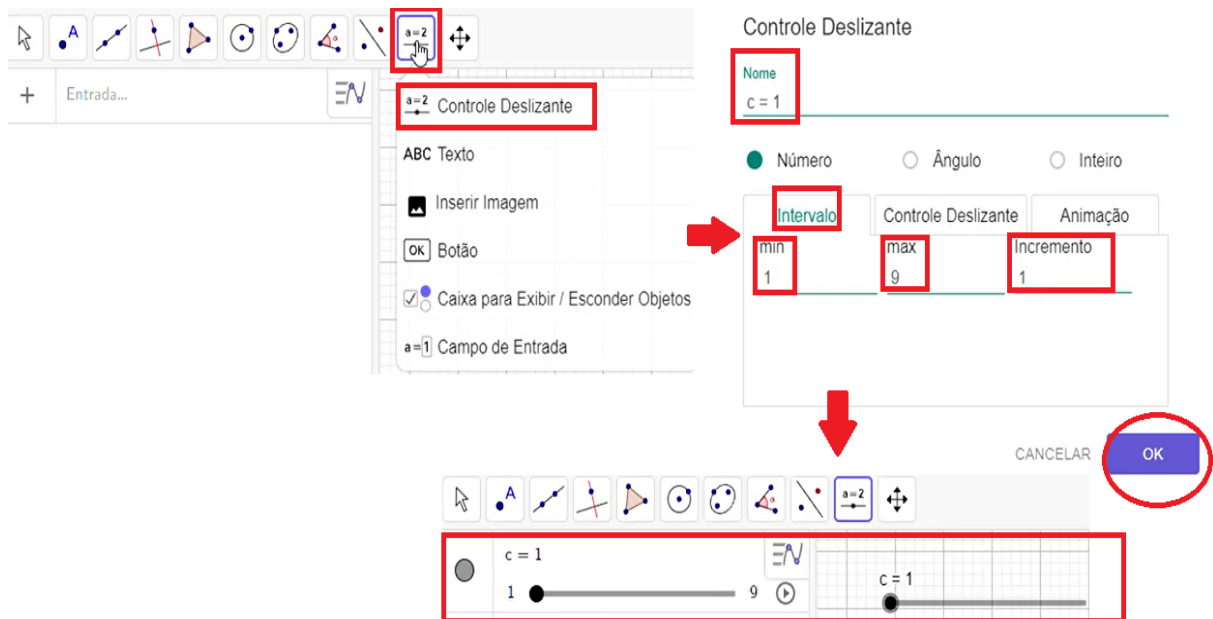
Figura 17 - Esboço das curvas de níveis $x^2 + y^2 = C$ no plano xy



Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 1: Adicionar controle deslizante. Para tal fim, selecione a opção “controle deslizante” na barra de ferramenta, e clique na janela geométrica. Logo em seguida irá abrir uma janela. Nessa janela, em “nome” atribua a constante C , já no “intervalo min” e no “intervalo max” digite respectivamente 1 e 9 e no “incremento” coloque o dígito 1. Em seguida pressione “OK” que o controle deslizante irá aparecer tanto na janela geométrica quanto na algébrica. (observar figura 18).

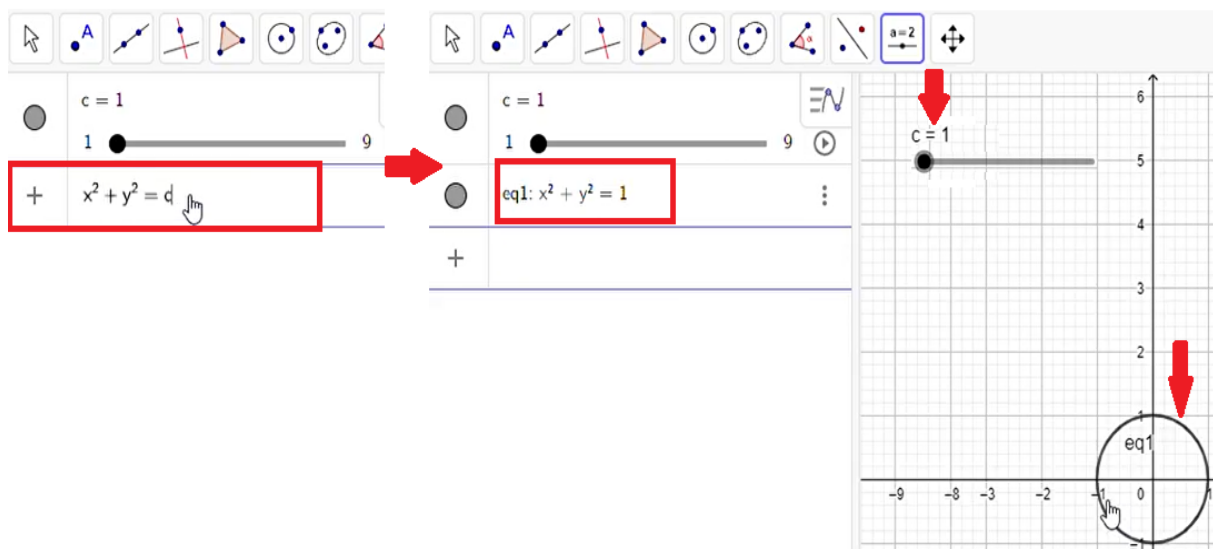
Figura 18 - Passos para adicionar o controle deslizante



Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 2: Inserir a Curva de nível. Para esse propósito, digite na entrada “ $x^2 + y^2 = C$ ” e aperte ENTER. Após isso, uma circunferência centrada na origem e de raio 1 (eq1: $x^2 + y^2 = 1$) será mostrada na janela geométrica. Vale salientar que o raio é igual a raiz quadrada da constante C, ou seja, $r = \sqrt{C}$. (observar figura 19).

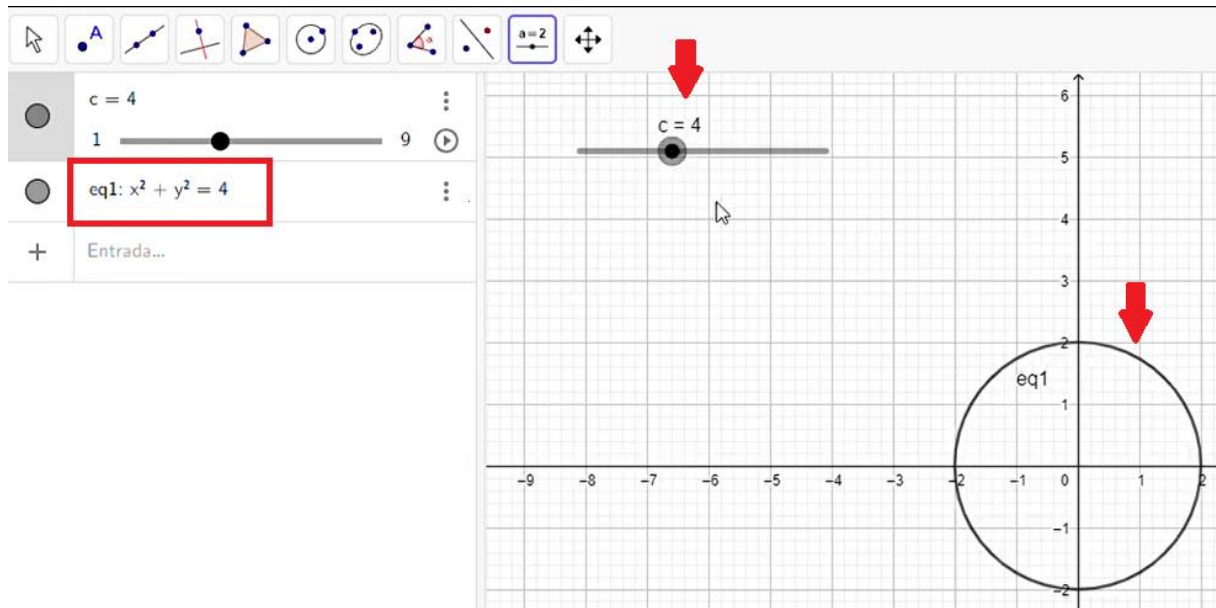
Figura 19 - Passos para inserir a Curva de nível $x^2 + y^2 = 1$



Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 3: Ao deslizar o controle deslizante para $C = 4$, temos na janela geométrica uma circunferência centrada na origem de raio 2 (eq1: $x^2 + y^2 = 2$). (observar figura 20).

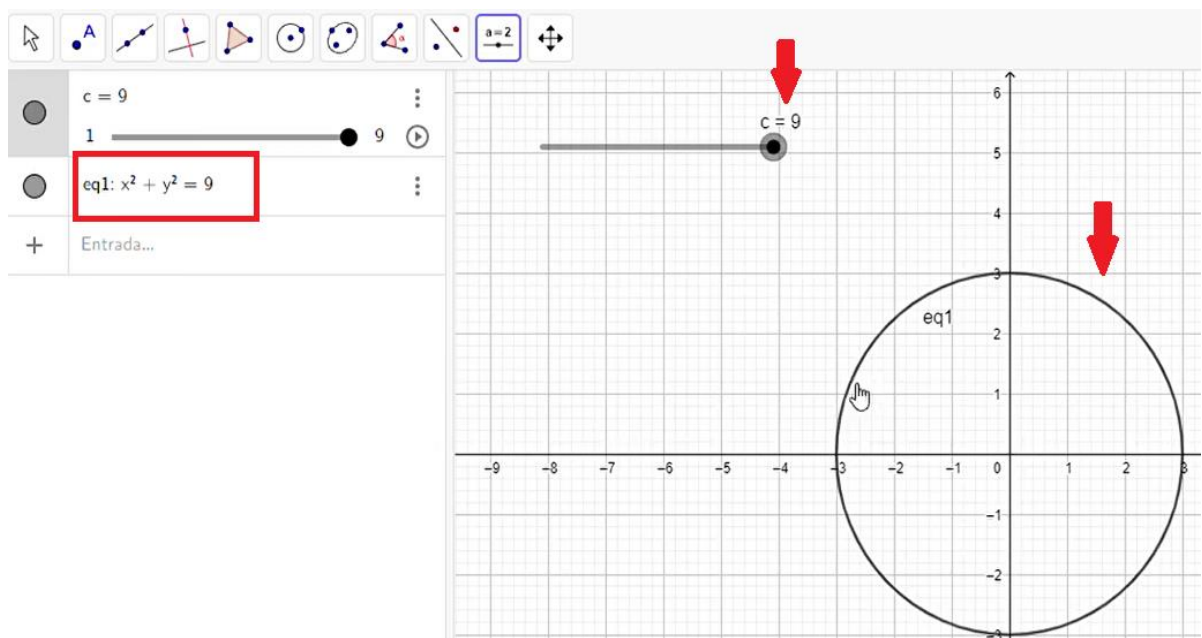
Figura 20 - Curva de nível $x^2 + y^2 = 4$



Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 4: Agora ao deslocar o controle deslizante para $C = 9$, surge na janela geométrica uma circunferência centrada na origem de raio 3 (**eq1: $x^2 + y^2 = 3$**). (observar figura 21).

Figura 21 - Curva de nível $x^2 + y^2 = 9$

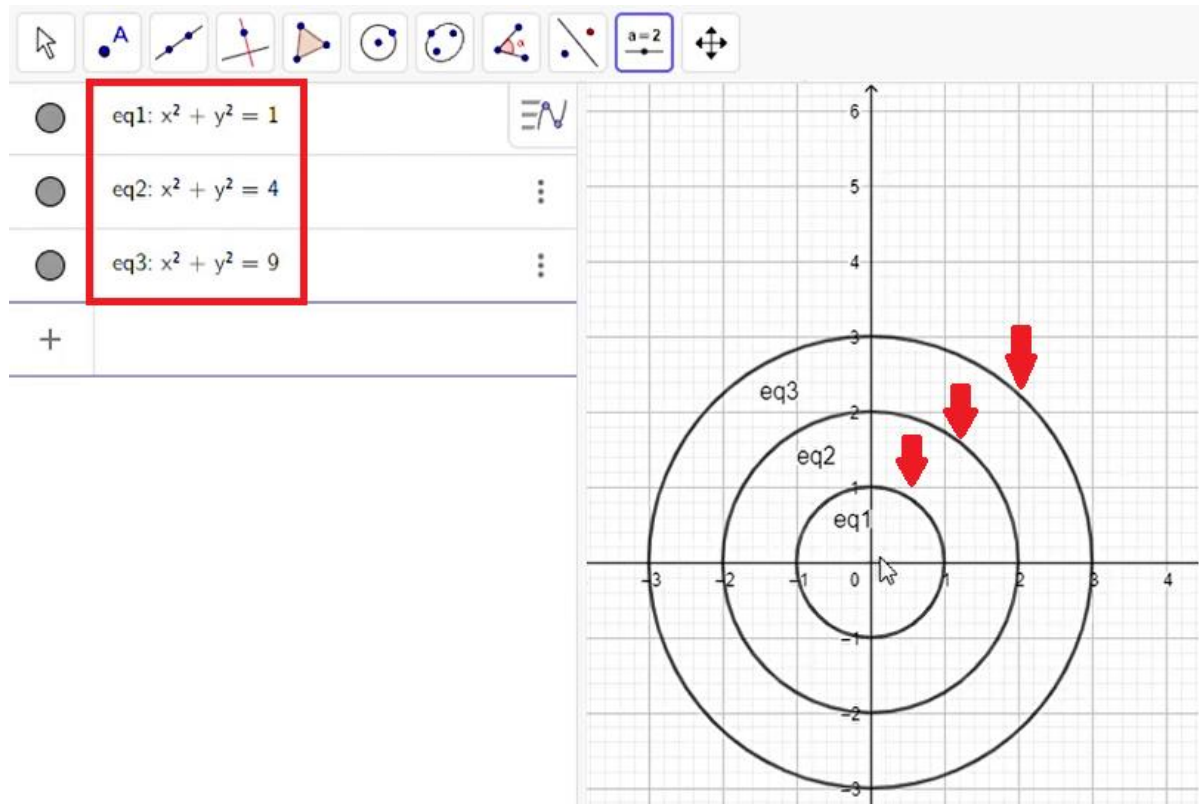


Fonte: Autoria Própria (2022)

Passo 5: Para esboçar essas curvas simultaneamente no plano xy, basta digitar “ $x^2 + y^2 = 1$ ”, “ $x^2 + y^2 = 2$ ” e “ $x^2 + y^2 = 3$ ” em entrada e apertar ENTER. Feito isso, surge na janela geométrica as curvas. (observar figura 22).

Figura 22 - Passos para inserir simultaneamente as curvas de níveis $x^2 + y^2 = 1$,

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ e } x^2 + y^2 = 9$$



Fonte: Autoria Própria (2022)

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção são apresentados os resultados coletados com o questionário. Após a realização da pesquisa, pode-se constatar com as 6 primeiras questões aplicadas, a diferenciação entre a resolução dos exercícios com o uso do *Software GeoGebra* e sem, ou seja, manualmente. Em razão disso, foi possível averiguar o que os entrevistados julgavam a respeito do uso da ferramenta, especificamente as vantagens ou desvantagens dessa utilização, onde os resultados em termos percentuais para tal julgamento pode ser visualizados através da tabela 1.

Tabela 1 - Resultados obtidos para vantagens e desvantagens do uso do *GeoGebra*

Perguntas	Sim	Não
A implementação dos exercícios no <i>GeoGebra</i> é fácil?	96%	4%
O <i>GeoGebra</i> provoca uma melhor compreensão dos assuntos se comparado quando feito à mão?	97%	3%
Com o <i>GeoGebra</i> ficou mais fácil resolver as questões?	93%	7%
É mais prático resolver os exercícios com o <i>GeoGebra</i> ?	100%	0%

Fonte: Autoria própria (2022)

Observando a tabela 1, pode-se notar que 96% dos entrevistados consideram a implementação dos exercícios no *software* como fácil. Além disso, nota-se que a maioria dos entrevistados (97%) acredita que o programa facilita a compreensão dos assuntos; 93% acharam que a resolução das questões também é facilitada pela ferramenta; e todos concordaram que o aplicativo apresenta praticidade para resolução dos exercícios. Assim, é notório que o *GeoGebra* apresenta algumas vantagens na resolução dos exercícios.

Quando questionados se o *GeoGebra* apresenta ou não alguma contribuição para o ensino e aprendizagem de CDI, todos os entrevistados responderam de forma positiva e assinalaram pelo menos uma das possíveis contribuições elencadas na pergunta. A porcentagem de participantes que concordaram com cada uma delas está descrita na tabela 2.

Tabela 2 - Resultados das possíveis contribuições do *GeoGebra*

Alternativas	Taxa
Proporciona um auxílio significativo ao esboçar os gráficos das curvas de nível que custaria muito tempo para esboçar manualmente.	81,3%
Proporciona a possibilidade de simulação ao resolver exercícios do Cálculo Diferencial e Integral.	65,6%
Proporciona a verificação de resoluções feitas manualmente.	62,5%
Proporciona o entendimento dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.	65,6%

Proporciona uma ajuda significativa na identificação de erros cometidos durante as resoluções feitas manualmente.	84,4%
O uso do <i>Geogebra</i> é essencial nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral para um melhor rendimento.	65,6%
Não houve contribuições.	0,0%

Fonte: Autoria própria (2022)

Mediante os resultados da pergunta anterior, é questionado a seguir qual a contribuição mais importante dentre as elencadas, ou se não houve. Esses resultados estão descritos na tabela 3, no formato de porcentagem.

Tabela 3 - Resultado do questionamento qual a contribuição mais importante

Alternativas	Taxa
Auxilia na visualização e esboço de gráficos.	65,6%
Verifique as resoluções feitas manualmente.	28,1%
Permite a compreensão dos conceitos.	28,1%
A utilização do <i>GeoGebra</i> é essencial nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.	43,8%
Simula a resolução dos exercícios.	25,0%
Auxilia significativamente na identificação de erros nas resoluções feitas manualmente.	53,1%
Fortalece o ensino e aprendizagem.	40,6%
Não houve contribuição.	0,0%

Fonte: Autoria própria (2022)

Como mostrado na tabela 3, as duas contribuições consideradas mais importantes para a maioria dos participantes da pesquisa foram: o auxílio na visualização e esboço de gráficos, 65,5% de indicações, e o auxílio na identificação de erros cometidos durante a resolução manual das questões, 53,10%.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com ênfase nos resultados obtidos, é perceptível que o *software* é bastante vantajoso quando utilizado no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que norteia o desenvolvimento dos exercícios, amenizando assim as dificuldades encontradas. Ademais, observou-se que as principais contribuições do *software* é a de auxiliar no esboço de gráficos e na identificação de erros que são cometidos quando os exercícios são resolvidos de forma manual.

Com base nessas conclusões, pode-se inferir que o *software GeoGebra*, deveria ser mais disseminado na comunidade acadêmica, como forma de auxiliar e contribuir significativamente para o ensino e aprendizado do CDI, haja vista, que se trata de uma ferramenta a qual possui inúmeras vantagens e ainda, encontra-se gratuitamente para download.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Lara Martins. Uso do software GeoGebra na exploração de problemas da história da matemática: Possibilidades para demonstrações em cálculo infinitesimal com tecnologias. **XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**, São Paulo, 2019.

BOGDAN, R. S.; BIKEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. 12.ed. Porto: Porto, 2003.

COMETTI, M. A. **Discutindo o Ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: Contribuições do GeoGebra 3D para a Aprendizagem**. Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Curitiba – PR, nov. 2016.

CURY, H. N. (2006). Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores. **III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia, Anais**. Águas de Lindóia: SBEM, CDROM.

FERREIRA, D. H. L.; Brumatti, R. N. M. (2009). Um olhar voltado para alunos com dificuldades em Matemática num curso de Engenharia Elétrica. **Anais do VI Congresso Iberoamericano de Educación Matemática**. Puerto Montt, Chile, P. 949-955.

HALLAL, Renato et al. O Ensino de matemática e o software GeoGebra: Apresentando potencialidades dessa relação como recurso para o ensino de derivada. **Revista Espacios**, Paraná, v. 41, 2020 - ISSN 0798-1015.

HELLMANN, Liliane et al. GeoGebra no ensino de cálculo diferencial e integral I. **Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia**, Medianeira, v. 2, n.14, p. 31-46, jul./dez. 2016.

LEITE, Nayanne Maria Gonçalves et al. A utilização do GeoGebra no ensino do cálculo de várias variáveis. **EPBEM**, Paraíba, 2018.

LOPES, Thiago Beirigo; SANTOS, Leniedson Guedes dos. O uso do GeoGebra como ferramenta auxiliar para estudo da reta tangente a um gráfico. **CINTED-UFRGS**, Rio Grande do Sul, v. 14, n.2, 2016.

MACHADO, S. (org). **Teoria das Situações Didáticas**. São Paulo: EDUC (Série Trilhas) (p.77-113), 2008.

OLIVEIRA, Maxwell Ferreira de. Metodologia Científica: Um manual para a realização de pesquisas em Administração. **Manual**, Goiás, 2011. 72 p.

OLIVEIRA, Ricardo Augusto de; GONÇALVES, William Vieira; PIASSON, Diego. O uso do GeoGebra para o ensino de cálculo diferencial e integral, um mapeamento de suas publicações. **Revista Thema**, Mato Grosso, v. 15, n.2, p. 466-484, 2018.

REIS, Frederico da Silva; COMETTI, Márcio Antônio; SANTOS, Edson Crisostomo dos. Contribuições do GeoGebra 3d para a aprendizagem de integrais múltiplas no cálculo de várias variáveis. **REnCiMa**, v. 10, n.2, p. 15-29, 2019.

SILVA, G. H.G.; PENTEADO, M.G. O trabalho com Geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa. In: **Anais...I** simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia - SINTEC. Ponta Grossa: I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2009, v. 1, 2009.

SILVA, J. I. G.; Ferreira, D. H. L. (2009). O uso de tecnologias na disciplina de cálculo diferencial e integral I. **Anais do XIV Encontro de Iniciação Científica da PUC Campinas**.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

THOMAS, George B. **Cálculo**. 11. ed. São Paulo: Pearson, 2008. v. 1.

APÊNDICE A – ROTEIRO DO QUESTIONÁRIO

Responda as questões abaixo sem o auxílio do *GeoGebra*:

1) Encontre a equação da reta tangente a função $f(x) = x^2 + 2x$ no ponto (1, 3).

Caso haja necessidade, acesse o link para revisar:

[https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKLWY0kX4xw-](https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKLWY0kX4xw-4rl4YiUdGFsI_0u9uoYPZSaKfCJUHQKAFKOdt01n2wvW8z_zXsk7anS4lJ9x5WnJzU-IE6K9_vW0p6ydQLGpNUoYLZ_AZ9RpZlGRKLKvYcQXNS2ZhAS6lDZxfgkQSZCwbDCQonGo5=w905-h438-no?authuser=0)

[4rl4YiUdGFsI_0u9uoYPZSaKfCJUHQKAFKOdt01n2wvW8z_zXsk7anS4lJ9x5WnJzU-](https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKLWY0kX4xw-4rl4YiUdGFsI_0u9uoYPZSaKfCJUHQKAFKOdt01n2wvW8z_zXsk7anS4lJ9x5WnJzU-IE6K9_vW0p6ydQLGpNUoYLZ_AZ9RpZlGRKLKvYcQXNS2ZhAS6lDZxfgkQSZCwbDCQonGo5=w905-h438-no?authuser=0)

[IE6K9_vW0p6ydQLGpNUoYLZ_AZ9RpZlGRKLKvYcQXNS2ZhAS6lDZxfgkQSZCwbDCQonGo5=w905-h438-no?authuser=0](https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKLWY0kX4xw-4rl4YiUdGFsI_0u9uoYPZSaKfCJUHQKAFKOdt01n2wvW8z_zXsk7anS4lJ9x5WnJzU-IE6K9_vW0p6ydQLGpNUoYLZ_AZ9RpZlGRKLKvYcQXNS2ZhAS6lDZxfgkQSZCwbDCQonGo5=w905-h438-no?authuser=0)

2) Calcule a área entre as curvas $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4$. Dica: Para $x = 0$ temos $g(0) = 4$ e $f(0) = 0$.

Caso haja necessidade, acesse o link para revisar:

[https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKLXy7-6XyriM8xczg-](https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKLXy7-6XyriM8xczg-rN1jJEnBSj0xvho4RGvFYqi8wbT1wQvuccMeWthZ_cQHvTAhkMwqbH9Gf7KNU5xdgln8lP9YAY-NhJsvhDsmd2jMeHC4CQEQQu0nP9Eh6GR8IIqmduZjlgcW7VGYdjZUTPfVT=w994-h514-no?authuser=0)

[rN1jJEnBSj0xvho4RGvFYqi8wbT1wQvuccMeWthZ_cQHvTAhkMwqbH9Gf7KNU5xdgln8lP9YAY-](https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKLXy7-6XyriM8xczg-rN1jJEnBSj0xvho4RGvFYqi8wbT1wQvuccMeWthZ_cQHvTAhkMwqbH9Gf7KNU5xdgln8lP9YAY-NhJsvhDsmd2jMeHC4CQEQQu0nP9Eh6GR8IIqmduZjlgcW7VGYdjZUTPfVT=w994-h514-no?authuser=0)

[NhJsvhDsmd2jMeHC4CQEQQu0nP9Eh6GR8IIqmduZjlgcW7VGYdjZUTPfVT=w994-h514-no?authuser=0](https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKLXy7-6XyriM8xczg-rN1jJEnBSj0xvho4RGvFYqi8wbT1wQvuccMeWthZ_cQHvTAhkMwqbH9Gf7KNU5xdgln8lP9YAY-NhJsvhDsmd2jMeHC4CQEQQu0nP9Eh6GR8IIqmduZjlgcW7VGYdjZUTPfVT=w994-h514-no?authuser=0)

3) Dada a $f(x, y) = x^2 - y$, construa o gráfico das curvas de nível quando $c = 4$ e $c = 9$.

Caso haja necessidade, acesse o link para revisar:

[https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-](https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKL V70smGIvWoIqSaacofRXEIP5ShaUm2DbsCJBaMPCfYC-byNYzOvj3R-LGUpCg94KuzhUPJeMpI7dw2N17xoupyeAHV1HRCvov1vShnK0vCZcBQ61IHWd7p2DKbtUEcBPDsK3fWHWHLKGaSgx4eKx=w1186-h444-no?authuser=0)

[JKL V70smGIvWoIqSaacofRXEIP5ShaUm2DbsCJBaMPCfYC-byNYzOvj3R-](https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKL V70smGIvWoIqSaacofRXEIP5ShaUm2DbsCJBaMPCfYC-byNYzOvj3R-LGUpCg94KuzhUPJeMpI7dw2N17xoupyeAHV1HRCvov1vShnK0vCZcBQ61IHWd7p2DKbtUEcBPDsK3fWHWHLKGaSgx4eKx=w1186-h444-no?authuser=0)

[LGUpCg94KuzhUPJeMpI7dw2N17xoupyeAHV1HRCvov1vShnK0vCZcBQ61IHWd7p2](https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKL V70smGIvWoIqSaacofRXEIP5ShaUm2DbsCJBaMPCfYC-byNYzOvj3R-LGUpCg94KuzhUPJeMpI7dw2N17xoupyeAHV1HRCvov1vShnK0vCZcBQ61IHWd7p2DKbtUEcBPDsK3fWHWHLKGaSgx4eKx=w1186-h444-no?authuser=0)

[DKbtUEcBPDsK3fWHWHLKGaSgx4eKx=w1186-h444-no?authuser=0](https://lh3.googleusercontent.com/pw/AM-JKL V70smGIvWoIqSaacofRXEIP5ShaUm2DbsCJBaMPCfYC-byNYzOvj3R-LGUpCg94KuzhUPJeMpI7dw2N17xoupyeAHV1HRCvov1vShnK0vCZcBQ61IHWd7p2DKbtUEcBPDsK3fWHWHLKGaSgx4eKx=w1186-h444-no?authuser=0)

Responda as questões abaixo com o auxílio do *GeoGebra*:

Link para baixar o Geogebra: <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>

Escolha a opção *GeoGebra* Clássico 5 ou *GeoGebra* Clássico 6

4) Encontre a equação da reta tangente a função $f(x) = x^2 + 2x$ no ponto (1, 3).

Como resolvo essa questão no *GeoGebra*?
veja: <https://drive.google.com/file/d/1Ki9Y3mc1xnXYWSaxb9JKugluEoX1WLke/view?usp=sharing>

5) Calcule a área entre as curvas $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4$. Dica: Para $x = 0$ temos $g(0) = 4$ e $f(0) = 0$.

Como resolvo essa questão no *GeoGebra*?
veja: https://drive.google.com/file/d/1C6uuGj8rmTUWV2PGx6RyGy_VhzECqsst/view?usp=sharing

6) Dada a $f(x, y) = x^2 - y$, construa o gráfico das curvas de nível quando $c = 4$ e $c = 9$.

Como resolvo essa questão no *GeoGebra*?
veja: https://drive.google.com/file/d/1XgWVQ1_nYXih7VvgAqpxpMTk6fwt7Yk7/view?usp=sharing

7) Você considera como vantagem ou desvantagem o uso do *GeoGebra* na resolução dos exercícios? Caso considere vantagem assinale a (as) alternativa (as). Caso considere desvantagem assinale a (as) alternativa (as).

- ☐ A implementação dos exercícios no *GeoGebra* é fácil
- ☐ A implementação dos exercícios no *GeoGebra* é difícil
- ☐ O *GeoGebra* provocou uma incompreensão dos assuntos se comparado quando feitos a mão
- ☐ O *GeoGebra* proporcionou uma maior compreensão dos assuntos do que quando feita na mão poderia oferecer
- ☐ Com o *GeoGebra* ficou mais difícil resolver as questões do que na mão
- ☐ Com o auxílio do *GeoGebra* ficou mais fácil as resoluções se comparada as resoluções feitas à mão
- ☐ O *GeoGebra* é prático ao resolver os exercícios
- ☐ O *GeoGebra* não é prático ao resolver os exercícios

8) você considera que o *GeoGebra* proporciona contribuições para o ensino do cálculo diferencial e integral? Se sim, assinale as alternativas que você considera contribuições. Se não, marque "Não houve contribuições".

- Proporciona um auxílio significativo ao esboçar os gráficos das curvas de nível que custaria muito tempo para esboçar manualmente
 - Proporciona a possibilidade de simulação ao resolver exercícios do cálculo diferencial e integral
 - Proporciona a verificação de resoluções feitas manualmente
 - Proporciona o entendimento dos conceitos do cálculo diferencial e integral
 - Proporciona uma ajuda significativa na identificação de erros cometidos durante as resoluções feitas manualmente
 - O uso do Geogebra é essencial nas disciplinas de cálculo diferencial e integral para um melhor rendimento
 - Não houve contribuições
- 9) Assinale entre as alternativas que você considera como a contribuição mais importante do *Geogebra* para auxiliar o ensino do cálculo diferencial e integral. Caso você considere que o Geogebra não contribui, marque "Não houve contribuição".
- Auxilia na visualização e esboço de gráficos
 - Verifica as resoluções feitas manualmente
 - Permite a compreensão dos conceitos
 - A utilização do *GeoGebra* é essencial nas disciplinas de cálculo diferencial e integral
 - Simula a resolução dos exercícios
 - Auxilia significativamente a identificação de erros nas resoluções feitas manualmente
 - Fortalece o ensino e aprendizagem
 - Não houve contribuição