

# ANÁLISE DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO EM UM EIXO COM UM FURO TRANSVERSAL SOB A AÇÃO DE UM CARREGAMENTO DE TORÇÃO.

*João Paulo Rodrigues dos Santos<sup>1</sup>, Filipe Lima do Santos<sup>2</sup>.*

**Resumo:** No trabalho cotidiano de um engenheiro, tornou-se costumeiro a utilização de Softwares especializados, os quais favorecem o exercício da função nas mais profusas vertentes. Desse modo, essa área da engenharia é dita como Engenharia Assistida por Computador ou Computer Aided Engineering (CAE). E, apesar dessas ferramentas facilitarem tarefas ordinárias do engenheiro, incumbe-se a esse o conhecimento geral, e a capacidade de abstração para uma precisa utilização. À vista disso, o objetivo do artigo analisar a concentração de tensão provocada por carregamento de torção, através de simulações computacionais, por meio do software ANSYS, utilizando-se o Método dos Elementos Finitos (FEM). Analisando a relevância do refinamento de malha e das ferramentas de convergência foram realizadas simulações computacionais utilizando o programa comercial supracitado, variando a quantidade de elementos de malha do modelo e relacionando com valores finais da solução. O material simulado foi o aço SAE 1020 devido à sua boa relação entre resistência mecânica e resistência à fratura, sendo amplamente utilizado por causa do seu custo benefício. As malhas com menor quantidade de elementos nas zonas críticas abrangeram os maiores desvios padrões, em contrapartida, as que possuíam maiores quantidades apresentaram convergência. Após a análise dos resultados ficou notório a importância do analista do caso devido às oscilações de valores finais apresentados nas soluções das simulações.

**Palavras-chave:** Concentração de Tensão; Carregamento de Torção; Elementos Finitos; Utilização de Softwares; Convergência.

## 1. INTRODUÇÃO

Diariamente, profissionais da engenharia enfrentam problemas técnicos com estruturas complexas, as quais necessitam para uma resolução satisfatória, o uso de uma gama de ferramentas matemáticas. À vista disso, as estruturas, na prática, tornam-se inviáveis a utilização de métodos analíticos, por isso que se realiza a discretização do problema.

O meio mencionado à cima, concentra-se em dividir a estrutura de um sistema contínuo em partes separadas distintas, interligadas em pontos discretos. Podendo aplicar operações padrões para produzir equações algébricas simultâneas que são processadas com auxílio de computadores.

Nesse ínterim, a situação problema evidenciada neste trabalho será a concentração de tensão em um eixo, especificamente provocado por um carregamento de torção.

Sendo assim, o presente estudo tem como objetivo analisar a concentração de tensão provocada por carregamento de torção, através de simulações computacionais, por meio do software ANSYS, baseado no Método de Elementos Finitos. Onde as fases executadas para o presente trabalho foram: a revisão bibliográfica; simulação computacional e análise dos resultados para averiguar a aplicação.

## 2. DESENVOLVIMENTO

A revisão bibliográfica foi elaborada em cima de artigos e livros. Com o designo de aprofundar o conhecimento acerca dos conceitos de concentração de tensão, análise de estruturas e método numérico. Já a simulação computacional, será moldada para incorporar um modelo de análise de concentração de tensão, que terá os resultados finais comparados com soluções analíticas apresentadas nos livros e artigos similares ao estudo.

Em outro giro, para a modelação dos elementos finitos será utilizado o programa comercial ANSYS. Dessa forma, o trabalho foi dividido em duas etapas: a primeira relacionada com a variação de parâmetros na construção da malha; e a segunda reside na comparação entre os dados experimentais e os apresentados em literatura.

### 2.1. Fundamentação teórica

---

### 2.1.1. Carregamento de Torção

A aplicabilidade da fórmula de torção é diretamente direcionada a peças, que possuem seção transversal circular constante ou ligeiramente cônica. Quando surgem mudanças repentinas na seção transversal, as distribuições de tensão de cisalhamento e da deformação por cisalhamento no eixo tornam-se complexas e só podem ser obtidas por meios experimentais ou, se possível, por análise matemática baseada na teoria da elasticidade.

Para que não exista a necessidade de se executar uma análise complexa de tensão em uma descontinuidade em uma determinada peça, a tensão de cisalhamento máxima pode ser obtida para uma geometria específica, através da utilização de um fator de concentração de tensão K. O fator de concentração de tensão pode ser obtido através da utilização dessas formulas descritas logo abaixo. [4]

$$J_{net} = \frac{\pi \cdot A (D^4 - d^4)}{32} \quad (1)$$

$$\tau_0 = \frac{T D}{2 J_{net}} \quad (2)$$

$$K = \frac{\tau_0}{\tau_s} \quad (3)$$

Em casos específicos, onde os elementos são carregados axialmente, os fatores de concentração de tensão por torção sempre devem ser utilizados no projeto de eixos feitos de materiais frágeis, que serão submetidos a carregamentos de fadiga ou de torção cíclica. Essas condições dão origem à formação de trincas na concentração de tensão, o que muitas vezes podem resultar na falha repentina da peça.

Entende-se também que, se um grande carregamento de torção estático for aplicado a um eixo de um material dúctil, deformações inelásticas podem surgir no interior do eixo. Como resultado do escoamento, a distribuição de tensão se tornará mais uniformemente distribuída em torno do eixo, de modo que a tensão máxima resultante não será limitada na concentração de tensão. [4]

### 2.1.2. Concentração de tensão

Peças, como exemplo os eixos, quando apresentam algum tipo de descontinuidade ou mudanças de seção, no momento em que são submetidos à algum tipo de carregamento, tendo como exemplo: compressão e torção, apresentam uma redistribuição de tensão. Assim, conseqüentemente, acaba gerando o que se intitula de concentração de tensão. [3]

Em vista disso, o princípio de Saint-venant explica que a distribuição de tensão não vai sofrer efeito das descontinuidades em regiões mais afastadas dessas imperfeições. Desta forma, tem-se que as distribuições das linhas de força são uniformes nas extremidades do eixo. Todavia, ao se aproximar do furo – da descontinuidade – o contornam e aproximam-se, gerando uma concentração de tensão ao redor do furo. [4]

Prosseguindo com a análise em questão, acrescenta-se que o cálculo da tensão máxima na estrutura é de fundamental importância para a elaboração de um projeto. Para, além disso, em situações que a área da seção transversal de um elemento é alterada, pode-se constatar a tensão normal máxima na seção crítica através de métodos experimentais ou por aplicação matemática na teoria da elasticidade. Os resultados são apresentados em gráficos com emprego de fator de concentração K. [3]

O fator de concentração de tensão não depende das propriedades do material analisado, sofrendo influência apenas da geometria e do tipo de continuidade. Nesse ínterim, inúmeros gráficos são construídos relacionando a capacidade K e a relação geométrica. Esses auxiliam a controlar as tensões durante a elaboração de projetos. [4]

### 2.1.3. Análise geométrica

Quando há a necessidade de solucionar um problema de análise estrutural, inicialmente deve-se verificar a classificação de sua geometria, modelo do material constituinte e ações aplicadas. A forma como o Método dos Elementos Finitos será aplicado dependerá de algumas simplificações particulares ao caso, com isso serão citados alguns fatores que devem ser avaliados antes da fase de análise de estrutura. [5]

Na análise estática, as ações aplicadas são suficientemente lentas ao ponto de torna-se desprezíveis as forças da inércia, gerando um modelo estático.

Por outro giro, na análise linear ou não linear, os deslocamentos de nós são ínfimos quando comparados as dimensões de segmentos da peça. Nesse sentido, assume-se que não há influência da pequena variação de geometria da peça nos esforços e tensões. À vista disso, o ensaio é feito com geometria inicial indeformada. [5]

O tipo de estrutura adotada e a forma linear, com seção transversal circular. O cilindro circular é um sólido geométrico alongado e arredondado, que possui o mesmo diâmetro ao longo de todo o comprimento. Essa figura geométrica apresenta dois círculos com raios e dimensões equivalentes, situadas em planos paralelos.

#### 2.1.4. Métodos dos Elementos Finitos

A construção do Método de Elementos Finitos necessita da presença de uma equação integral que possa substituir a integral sobre o domínio de complexo por um somatório de integrais estendidos a um subdomínio de geometria simplificada. Demonstrada no seguinte exemplo de uma função  $f$  integrando o volume  $V$ . [5]

$$\int_V f dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f dV \quad (4)$$

Aplicando a função:

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \quad (5)$$

Concluindo o somatório, após calculado todas as integrais dos subdomínios  $V_i$ , para obter a integral estendida de todo domínio. Cada elemento finito é representado por um subdomínio em  $V_i$ . Ou seja, o Método dos Elementos Finitos, faz-se o uso de estruturas reticuladas para assim determinar as especificações ao processo de montagem dos elementos. [5]

A análise se inicia com a relação entre forças e deslocamentos nodais para cada elemento individual. A constante elástica de uma mola, que é dada com a proporção entre força aplicada e deslocamento de um ponto observado, é capaz de representar, de forma bruta, um coeficiente de rigidez. [5]

As interações lineares são facilmente caracterizadas no computador pelo auxílio de um artifício, chamado de álgebra matricial. Os componentes de forças atuantes no elemento são representados no estado de matriz coluna, semelhantemente, podemos resolver os inúmeros componentes de deslocamento, ilustrado na Equação abaixo. Definimos assim o conceito de matriz de rigidez de um elemento finito. [5]

$$[f] = [k] \cdot [d] \quad (6)$$

Onde:

$f$ : matriz da coluna das forças que atuam nos elementos;

$K$ : matriz quadrada abrangendo os coeficientes de rigidez;

$d$ : matriz da coluna que retrata os deslocamentos modais dos elementos.

#### 2.1.5. Erro matemático

O modelo matemático é uma abstração do sistema físico real, nessa concepção são realizadas várias simplificações geométricas do domínio e a estrutura operacional da solução. Por consequência do processo, a definição de um modelo, discretização de um domínio e a solução numérica do sistema de equações resultantes instituem incertezas na validade dos resultados. Para essas etapas citadas podemos relacionar e classificar em três erros distintos. [6]

O erro na modelagem matemática, que é determinado pela desigualdade entre valores calculados e valores pontuais medidos no sistema físico, a veracidade da hipótese minimiza o intervalo do erro. Em outro giro, os erros de arredondamentos, que ocorrem devido as limitações computacionais, em específico na representação de números reais. Além disso, sempre existirá um limite para o refinamento de malha. [6]

O erro de discretização, definido como a diferença entre a solução exata e a aproximada calculada, este decorrente do posicionamento do domínio e das preferências nas funções de interpolação. Simplificação na modelagem dos elementos, dificuldade de modelar singularidades mais complexas e contornos curvos, são fontes comuns desse tipo de erro. [6]

A aplicação de uma malha extremamente fina para obter uma melhor descrição de um determinado objeto, com geometria relativamente pouco complexa, pode levar a ocorrências de erros. Mesmo com uma aplicação efetiva das ferramentas na construção da malha, pode ocorrer dificuldades de adaptação da rede com a geometria do modelo. Além disso, um número maior de elementos resulta em uma maior quantidade de operações matemáticas envolvidas, partindo da premissa que o método é aproximado, esse processo poderá contribuir para a propagação de erros numéricos. [7]

Com a capacidade da mecânica computacional de melhorar automaticamente uma solução numérica, usando o cálculo de estimativas do erro de discretização, fez-se possível o uso automático de processos adaptativos. A solução será otimizada de forma a obter um resultado mais refinado com um menor esforço computacional, atuando em regiões do domínio onde a solução se apresenta de alguma maneira deficiente. Desta maneira, desenvolveu-se o conceito de estimador de erro, que em poucas palavras, identifica as regiões do domínio a serem refinadas, com medidas qualitativas fornecendo um valor numérico aproximado da diferença entre as soluções. [6]

---

### 2.1.6. Métodos adaptativos

Os métodos adaptativos consistem em modificar a malha e/ou grau polinomial até alcançar um nível de precisão estabelecido. Para guiar esse método utiliza-se o princípio de equidistribuição do erro, que utiliza a premissa de uniformidade e redução do erro medido nos elementos da malha para garantir maior qualidade de aproximação. Atuando em regiões nas quais os estimadores de erro identificam valores muito acima dos encontrados no restante da malha. [5]

Dentre as várias maneiras de construção do método adaptativo, podemos destacar refinamento-h e refinamento-p. Refinamento-h mantém a posição de interpolação polinomial, alterando o tamanho e consequentemente a quantidade de elementos. Refinamento-p aumenta o grau polinomial da aproximação sem alterar a geometria da malha em questão. [8]

Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005) demonstram a divisão dos métodos acima em subcategorias [8]. Os autores enumeram três metodologias distintas para refinamento-h e duas para refinamento-p. Para o primeiro caso temos:

- Subdivisão de elementos: as regiões nas quais o erro é ressaltado têm seus elementos divididos em elementos menores, mantendo o contorno original.
- Completa regeneração: é gerada uma malha completamente nova, na qual o tamanho e quantidade de elementos podem variar livremente.
- Refinamento-r: os nós são ajustados da forma para obter uma maior qualidade da resposta aproximada, sendo o número total de nós inalterado.

Para o segundo caso temos um aumento do grau polinomial da aproximação que acontece de forma:

- Uniforme, ao longo de todo o domínio.
- Localmente, utilizando o refinamento hierárquico.

Segundo Proença (2009), em regiões de resposta com distribuições suaves o refinamento-p revelou-se mais eficiente, ao mesmo tempo em que refinamento-h é mais satisfatório em regiões de resposta com grandes gradientes localizados. Existem situações em que os refinamentos combinados estrategicamente, definido como refinamento-hp, fornecem valores altíssimos de convergência. [10]

O controle de precisão de uma solução pode ser feito através do refinamento da malha utilizando ferramentas de construção e edição de malha ou por meio da ferramenta de convergência como parte do processo de solução. A ferramenta controla a convergência para um grau de erro predefinido para os resultados encontrados, possuindo como avaliação a alteração percentual estabelecida na resolução, identificando e enriquecendo o modelo em zonas favoráveis. [10]

Para a construção de uma solução com a ferramenta de convergência adaptativa, de forma geral, o software usa uma malha base para uma primeira solução, estes elementos de malhas são analisados por dois critérios distintos. O primeiro explora essencialmente o tamanho do elemento, identificando os maiores em zonas críticas, que são suprimidos e substituídos por uma representação de elementos finitos mais refinados. O segundo opera a norma de Zienkiewicz e Zhu, usando o refinamento-h como método adaptativo. As regiões nas quais os erros são exorbitantes têm seus elementos colocados na fila para refinamento, esse processo é feito até que se atinja o nível de alteração percentual estabelecido. [10]

## 2.2. Metodologia

O software de simulação utilizado neste trabalho foi o Ansys Workbench versão 18.1, o qual baseia-se no método dos elementos finitos, onde a função de análise empregada foi o Static Structural. As geometrias das peças logradas nas simulações, foram criadas dispondo-se do software Solid Works, versão 18.1, em função da simplicidade geométrica das peças. Para a construção da malha, condições de contorno e solução, foi aplicado a função Mechanical.

Foram feitas 6 (seis) simulações ao total alterando somente um parâmetro geométrico que é o raio do furo transversal passante, cujo as medidas são: 2,5mm; 3,75mm; 5,0mm; 6,25mm; 7,5mm; 8,75mm. Sendo que o material empregado nas peças simuladas foi o aço SAE 1020, com suas propriedades revisadas no apêndice B – Propriedade de materiais de engenharia selecionados [11], representados logo à abaixo.

Tabela 1. Propriedades do Aço SAE 1020. [11]

|                                                                                |                        |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| Massa Específica (g/cm <sup>3</sup> )                                          | 7,85                   |
| Módulo de Elasticidade (Gpa)                                                   | 2,07                   |
| Coefficiente de Poisson                                                        | 0,3                    |
| Coefficiente Linear de Expansão Térmica (10 <sup>-6</sup> (°C) <sup>-1</sup> ) | 11,7                   |
| Condutividade Térmica (W/m.k)                                                  | 51,9                   |
| Calor Específico (J/kg.K)                                                      | 486                    |
| Resistividade Elétrica – Recozido (Ω.m)                                        | 1,60. 10 <sup>-7</sup> |

Na primeira simulação foi construído um eixo maciço com um furo transversal passante, com as seguintes dimensões: 300mm x 50mm (comprimento, diâmetro), com o diâmetro do furo transversal medindo 2,50 mm.

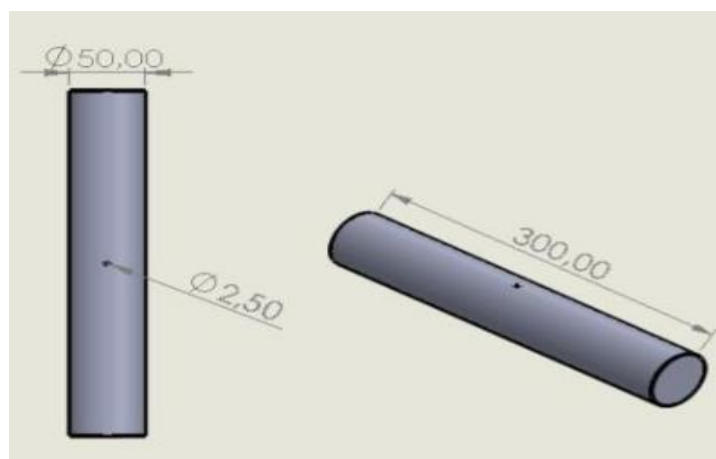


Figura 1 – peça 01 (Autoria própria)

Buscando certa padronização nos elementos na elaboração das malhas, foram recrutadas duas ferramentas específicas Method e Sizing, para com isso controlar forma e dimensão, respectivamente. No Method, foi selecionado o Método Hex Dominant, neste foram configurados Use Global Setting em Element Order e All Quad em Free Face Mesh Type, mostrado logo abaixo:

| Details of "Hex Dominant Method 2" - Method |                    |
|---------------------------------------------|--------------------|
| <b>Scope</b>                                |                    |
| Scoping Method                              | Geometry Selection |
| Geometry                                    | 1 Body             |
| <b>Definition</b>                           |                    |
| Suppressed                                  | No                 |
| Method                                      | Hex Dominant       |
| Element Order                               | Quadratic          |
| Free Face Mesh Type                         | All Quad           |
| Control Messages                            | No                 |

Figura 2. (Autoria própria)

Desta forma, foi aplicada uma malha com elementos hexadecimais com nós de meias costuras, para assim melhorar a qualidade geométrica da malha. Por meio da ferramenta Sizing, foi controlada a dimensão dos elementos de malha, até a convergência desta.

Vale ressaltar que O Sizing (Dimensionamento de Contato) é um tipo de configuração, a qual permite determinar o tamanho aproximado dos elementos na região de contato entre peças e, consequentemente são gerados elementos de tamanho próximos.

À vista disso, em todas as 6 (seis) simulações, foi utilizado o mesmo parâmetro da ferramenta Sizing, com o objetivo de refinar a malha ao máximo, com a medida específica de 0,004 m:

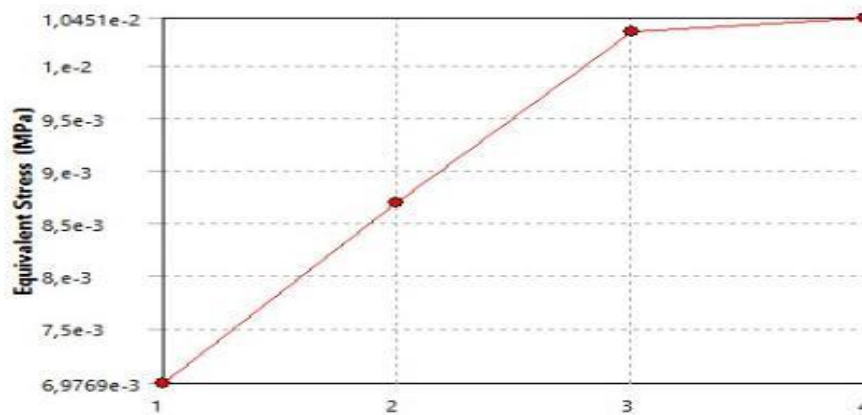


Figura 3. Gráfico referente à convergência de malha da peça 01 (Autoria Própria)

Já no módulo Static Structural foi inserido o Fixed Support em uma das fases, que é basicamente a fixação de uma determinada superfície. Já na face oposta foi aplicado o Moment, ou seja, um torque com intensidade de 70N. m, com sentido anti-horário, demonstrado logo abaixo:

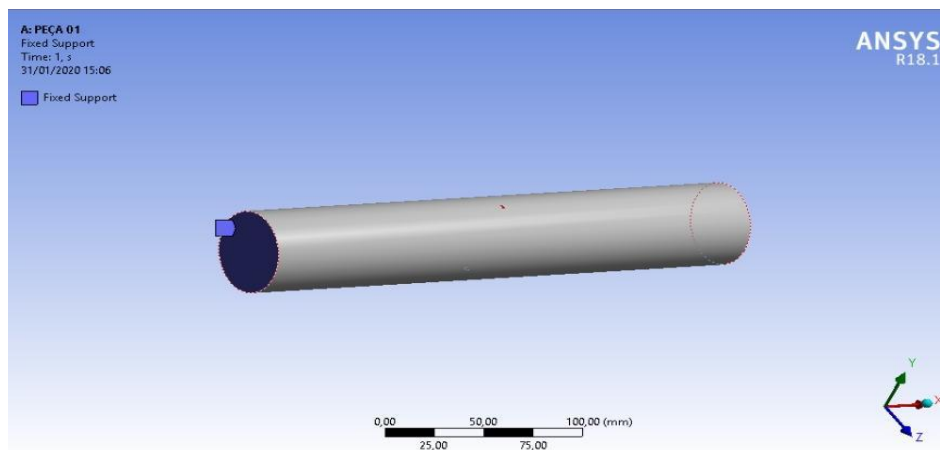


Figura 4 – peça 01: fixação de uma das faces (Autoria própria)

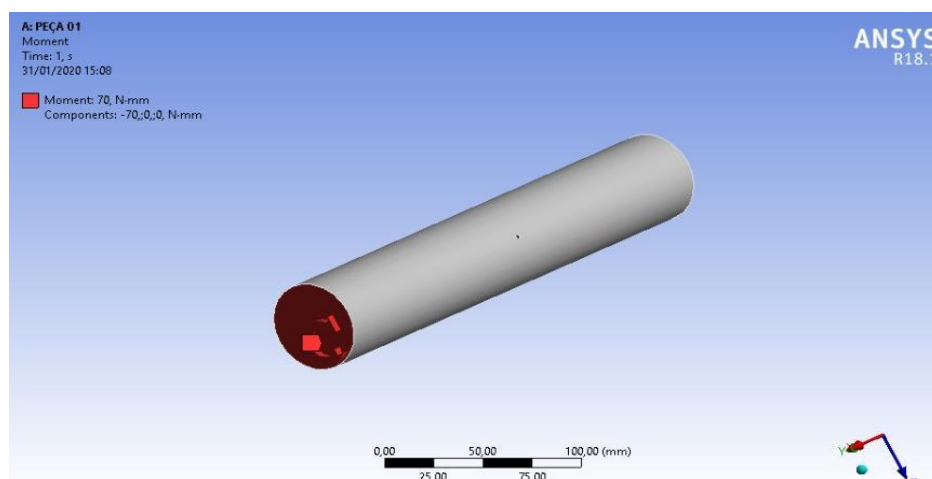


Figura 5 – peça 01: aplicação do torque em uma face (Autoria própria)

Na sexta simulação, a peça desgnida a passar pelo processo de simulação, foi um eixo maciço com um furo transversal passante no centro da peça, com as seguintes dimensões 300mm x 50mm (comprimento, diâmetro), com o diâmetro do furo transversal passante de 8.75mm.

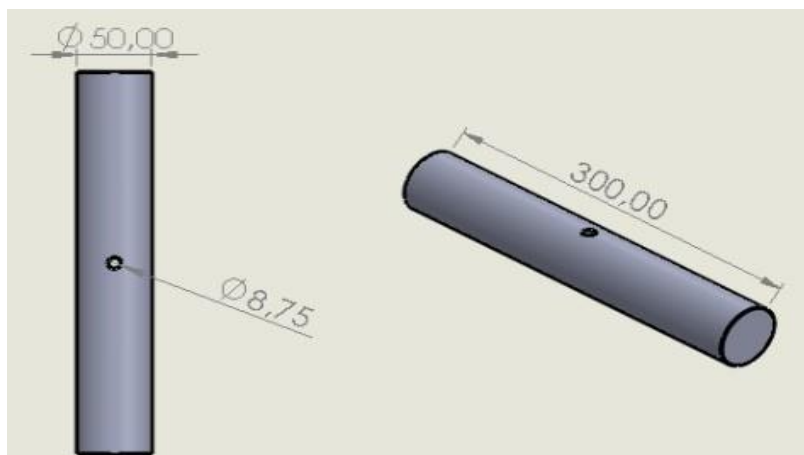


Figura 6 – peça 06 (Autoria própria)

Para cada eixo foram exigidas 10 (dez) interações, sempre com os mesmos parâmetros da ferramenta Sizing, variando somente os diâmetros ( $r$ ) dos furos transversais passantes. Em geral as malhas possuíram 0,004m, e progressivamente esse valor foi se reduzido a cada modelagem até a malha obter um alto nível de refinamento. Logo, as ferramentas citadas anteriormente foram aplicadas nas 6 simulações. Diante dos resultados obtidos de tensão (máxima), assim como as dimensões de cada diâmetro dos eixos, foram aplicadas na geração do fator de concentração de tensão.

Em vista disso, para analisar as simulações, foi empregada a ferramenta de solução Stress Equivalent (Von-Mises), que permite calcular qualquer estado de tensão arbitrário, sendo representado como valor único de tensão positiva que tem como princípio a teoria de critério de falha de Von-Mises, utilizada em materiais dúcteis.

### 2.3. Resultados e Discursões.

Nas simulações, foi aceito uma margem de erro máximo de até 2%, onde para cada simulação foi permitido um valor máximo de 10 interações.

Como os seis eixos simulados não possuíam muita variação em relação a sua geometria, o número de interações realizadas para ocorrer à convergência da malha foram os mesmos, especificamente quatro, como também as variações nas tensões máximas foram poucas.

O percentual de erro não chegou a 2% no geral. Na medida em que a malha foi sendo refinada, foram aumentando progressivamente o número de nós e elementos na geometria e na mesma proporção, ocorreu um aumento no número de erros.

A figura a seguir, demonstra que quando se aplica um carregamento de torção em um eixo com uma descontinuidade as tensões máximas iram ocorrer no interior do furo passante, presente na peça.

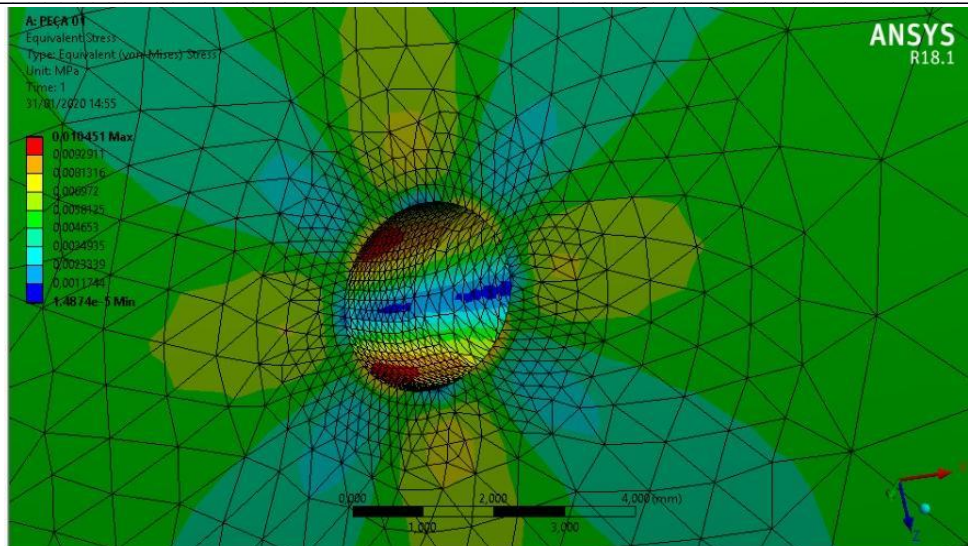


Figura 7- Peça 01 posterior ao teste de convergência da malha (Autoria Própria).

Os valores de tensão máxima, obtidos através das simulações, foram;  $\tau_1 = 0,01045$  Mpa;  $\tau_2 = 0,01035$ MPa;  $\tau_3 = 0,01032$ MPa;  $\tau_4 = 0,01027$ MPa;  $\tau_5 = 0,01015$ MPa;  $\tau_6 = 0,01011$ MPa.

Os valores de tensão máxima, obtidos nas 6 simulações, juntamente com o torque e os diâmetros dos eixos, foram colocados nas equações (1), (2), (3), para calcular o fator de concentração de tensão por torção (K). Os resultados obtidos foram inseridos no gráfico da figura 9 e comparados com os valores presentes na literatura.

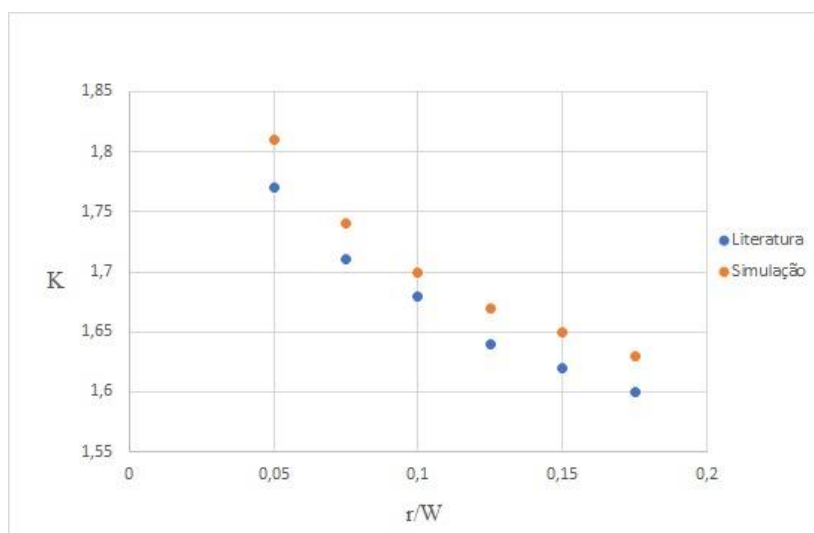


Figura 9 – Gráfico referente ao fator de concentração de tensão. (Autoria própria)

O número de elementos que compõem as malhas está diretamente ligado à estrutura geométrica das peças, sendo assim observada sua relevância nas soluções das simulações. Neste trabalho em específico, os refinamentos com o número abaixo de trezentos elementos por malha apresentaram uma relevante variação no cálculo da tensão máxima presentes nas devidas estruturas, onde foi constatado que grande maioria dos resultados apresentaram valores inferiores ao da solução final. Com um número entre trezentos e cinco mil elementos por malha, foi observado os primeiros resultados com um certa exatidão. Onde, a partir de cinco mil elementos, percebeu-se uma convergência acentuada e com isso obtendo resultados relativamente seguros.

Diante de toda literatura revisada e os dados obtidos através das simulações, analisando o gráfico, pode-se aferir que na medida em que se aumenta o diâmetro do furo passante “r”, irar existir uma redução do valor de K e consequentemente o valor de tensão máxima será menor [4], isso pode ser facilmente observado no gráfico, ao comparar os valores obtidos através das simulações e os obtidos por meio da literatura, onde essa diferença entre os pontos das duas curvas pode ser chamada de erro de discretização. Neste trabalho o valor médio calculado desse erro é de 0,13 e o erro relativo médio é de aproximadamente 14,6%.

---

### 3. CONCLUSÕES

Nas seis simulações, as geometrias das peças favoreceram o processo de construção das malhas, somente pelo aumento da quantidade do número de elementos, devido às zonas críticas, sendo evidenciada pela presença das descontinuidades, especificamente os (furos transversais passantes), presentes em pontos específicos nas devidas peças.

Isto posto, podemos concluir que os resultados adquiridos através das simulações nos forneceram resultados concisos, e exatos ao ficar muito próximos aos dados fornecidos pela literatura. Todavia, apresentou somente um pequeno erro de discretização, algo normal para esse tipo de análise. Desse modo, entende-se, e se verifica a importância do uso dessa ferramenta na resolução de problemas complexos presentes na engenharia.

### 4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ASSAN, ALOÍSIO E. Métodos dos elementos finitos: Primeiros passos. 2ªed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2003.
- [2] FELIPPA, CARLOS A.: Introduction to finite element method. Boulds, Colorado. 2004.
- [3] DE MENDONÇA, É. M. Análise de concentração de tensões e fadiga em uma junta soldada. Projeto de graduação- Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2016.
- [4] HIBBELER, Russell Charles. Resistência dos Materiais, 2010.
- [5] AZEVEDO, Á. F.M. Método dos Elementos Finitos, 2011.
- [6] LAS CASAS, E.B.: MAGALHAES, Max de Castro. Implementação computacional de estimador de erro baseado em técnicas superconvergentes de recuperação, 1995.
- [7] CORNWELL, JOHNSTON BEER, Mecânica Vetorial Para Engenheiros, Dinâmica. 9ªed. 2012.
- [8] LINS, R.M. Estimador do erro a posteriori baseado em recuperação do gradiente para o método dos elementos finitos generalizados. 2011.
- [9] ZIENKIEWICZ, OLEK C, TAYLOR, ROBERT L.; ZHU, JIAN Z. The finite element method: Its basis and fundamentals. Elsevier, 2005.
- [10] MANUAL, ANSYS user's. Swanson Analysis Systems. Inc, Volumes 1,2,3, Revision, V.S, n.o, 1994.
- [11] CALLISTER JUNIOR, WILLIAM D. Ciência e engenharia de materiais: uma introdução. Rio de Janeiro: LTC, v. 589, p. 294, 2002.