

CÔNICAS E QUÁDRICAS

Sandra Maria de Almeida Fernandes¹, Antônio Gomes Nunes²

¹Graduanda em Ciência e Tecnologia na Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFRSA). Mossoró, RN, Brasil. E-mail: sandra_fernandes_almeida@hotmail.com.

²Doutor em engenharia de processos pela Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Professor efetivo na Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFRSA). Mossoró, RN, Brasil. E-mail: nunesag@ufrsa.edu.br

Resumo: Nesse referido artigo, estudaremos as curvas e superfícies que podem ser expressas por equações do segundo grau, as quais são as curvas cônicas e as superfícies quádricas. Usaremos genericamente o termo cônicas para identificar as seguintes curvas planas: a circunferência, elipse, hipérbole e parábola. Elas são chamadas de seções cônicas, ou simplesmente cônicas, porque podem ser obtidas a partir da interseção de um plano com um cone. Em relação as quádricas, estudaremos gráficos de equações quádricas com três variáveis.

Palavras-chave: Cônicas; Quádricas; Equações do segundo grau.

1. INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica é a parte da Matemática que relaciona a geometria à álgebra e estuda os resultados dessa relação, de modo que os conceitos da geometria são analisados por meio de processos algébricos. Além disso, as cônicas (circunferência, elipse, hipérbole e parábola) e quádricas (esfera, elipsoide, hiperboloide, paraboloides, cone e cilindro) são de fundamental importância para a matemática. As cônicas, por exemplo, desempenham um papel importante em muitas aplicações de nosso dia-a-dia, como a construção de telescópios, antenas e lanternas.

2. DESENVOLVIMENTO

Nesta seção, são descritas as curvas e superfícies que podem ser expressas por equações do segundo grau, as quais são intituladas de curvas cônicas e de superfícies quádricas.

2.1. Cônicas

Usaremos genericamente o termo cônicas para identificar as seguintes curvas planas: a circunferência, elipse, hipérbole e parábola. Elas são chamadas de seções cônicas, ou simplesmente cônicas, porque podem ser obtidas a partir da interseção de um plano com um cone, como descrito na Figura 1.

Um cone circular C é a superfície obtida pela rotação de uma reta r , chamada de geratriz, em torno de uma reta fixa s , a qual é chamada de eixo de rotação, que se cortam em um ponto V , chamado de vértice do cone. As próximas subseções detalham cada curva cônica.

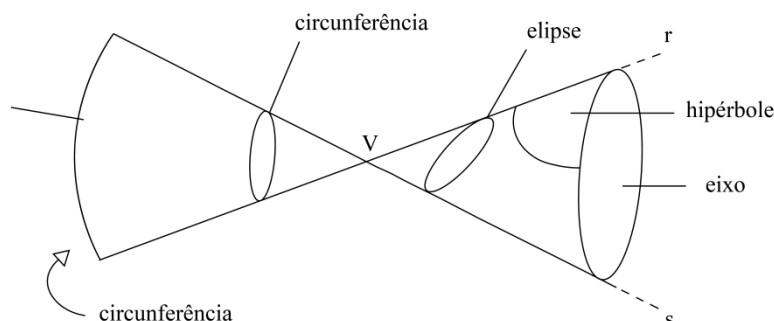


Figura 1. Cone Circular. (Autoria Própria)

2.1.1. CIRCUNFERÊNCIA

Chama-se circunferência o conjunto de pontos $P = (x, y)$ do plano cuja distância a um ponto fixo $C = (x_0, y_0)$ é constante. O ponto fixo C é chamado de centro e a distância constante r é chamada de raio r .

Vetorialmente, a equação da circunferência é dada por:

$$d(c, p) = r \text{ ou } \|\vec{CP}\| = r$$

Em coordenadas, temos:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Onde $C = (x_0, y_0)$ é o centro da circunferência e r é o raio.

Exemplo 1: Determinar a equação da circunferência de centro $(2, -1)$ e raio 3.

Solução:

A equação reduzida é dada por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Sendo $(2, -1)$ o centro da circunferência e 3, o raio, temos:

$$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = 3^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

2.1.2. ELIPSE

Chama-se elipse o conjunto de pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano, tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos, F_1 e F_2 , do mesmo plano é constante. Na Figura 2, temos os elementos de uma elipse com centro na origem.

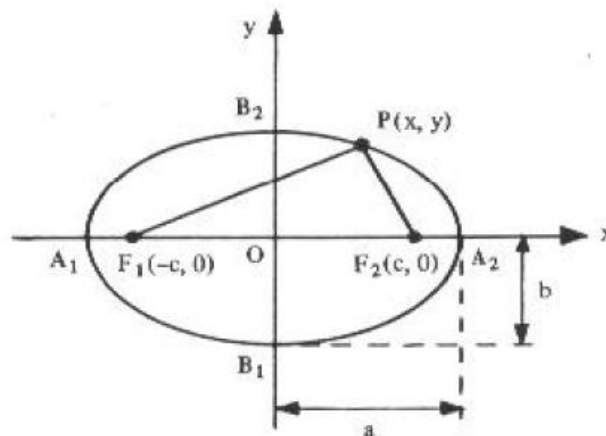


Figura 2. Elipse com centro na origem. [1]

Onde:

C é o centro da elipse;

F_1 e F_2 são os focos da elipse ($d(F_1, F_2) = 2c$ distância focal);

$A_1 A_2$ eixo focal, ou eixo maior ($d(A_1, A_2) = 2a$);

$B_1 B_2$ eixo transversal ou eixo menor ($d(B_1, B_2) = 2b$);

PF_1, PF_2 são os raios focais.

Logo, a equação da elipse do centro C e focos F_1 e F_2 , cuja soma dos raios focais é igual a $2a$, é:

$$\begin{aligned} \|\vec{PF_1}\| + \|\vec{PF_2}\| &= 2a \rightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a \\ \Rightarrow \left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right)^2 \\ \Rightarrow (x + c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \\ \Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ \Rightarrow 4cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad (\div 4) \\ cx &= a^2 - a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Por definição, temos que $d(B_1, F_1) = a$ e $d(0, F_1) = c$. Logo, temos uma elipse com triângulo retângulo, como é mostrado na Figura 3:

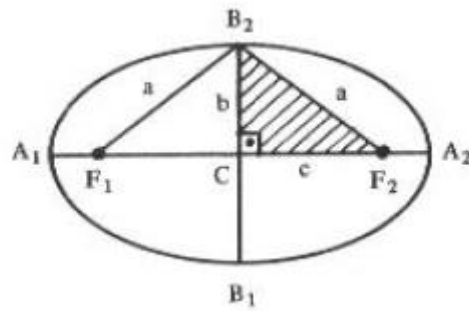


Figura 3. Elipse com triângulo retângulo. [1]

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

$$(cx - a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \text{ como } c^2 = a^2 - b^2$$

Temos:

$$a^2x^2 - b^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow -b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2 \quad (a, b > 0)$$

$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (\div a^2b^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Equação Canônica da elipse})$$

Elipse centrada no eixo x: de maneira análoga, mostra-se que a equação da elipse centrada no eixo y é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Resumindo, temos que, em quaisquer dos casos, a equação de elipse é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se $a > b$, os focos da elipse estão no eixo x e são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Se $a < b$, os focos da elipse estão no eixo y e são $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$.

Exemplo 1: deduza uma equação de focos $F_1(0, 1)$ e $F_2(0, -1)$ e eixo maior 4.

Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse. Por definição, temos:

$$\|\overrightarrow{PF_1}\| + \|\overrightarrow{PF_2}\| = 2a$$

Logo:

$$\sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4$$

Excentricidade: A excentricidade da elipse é dada por $\frac{c}{a}$, que é sempre menor que 1.

2.1.3. HIPÉRBOLE

Chama-se hipérbole o conjunto de pontos $P(x, y)$ do plano, tais que o módulo da diferença das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 do mesmo plano é constante. Observe a Figura 4:

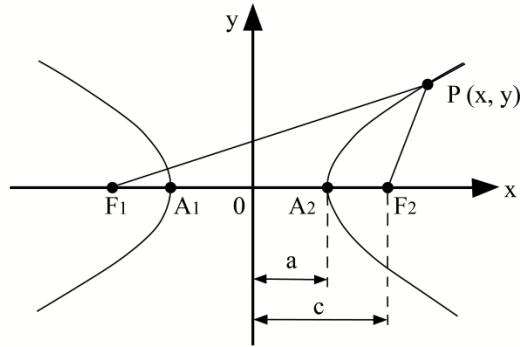


Figura 4. Elementos de uma Hipérbole (Autoria Própria)

$$|\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\|| = 2a$$

Onde:

F_1 e F_2 são os focos, cujo ponto médio é o centro.

PF_1 PF_2 raios focais.

$d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ distância focal.

C centro da hipérbole.

Equação da hipérbole com focos sobre um dos eixos coordenados e centro na origem.

Consideramos inicialmente os focos sobre o eixo Ox . Sendo o centro $C \equiv 0$ o ponto médio entre os focos, temos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, com $2ca$ distância focal. Se $P(x, y)$ é um ponto qualquer da hipérbole. Por definição, temos:

$$|\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\|| = 2a \Rightarrow |\|\overrightarrow{PF_1}\| - \|\overrightarrow{PF_2}\|| = \pm 2a$$

Logo:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Tomando a relação $b^2 = c^2 - a^2$, temos:

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

Como:

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2$$

Então:

$$b^2x^2 + a^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2b^2 + a^4 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ (como } a, b > 0 \text{) segue que:}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Da maneira análoga, mostra-se que a equação da hipérbole com ramos no eixo Oy é dada por:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Onde a distância focal é dada por $2b$ e $c^2 - b^2 = a^2$.

Exemplo 1: Determine condições sobre a, b e m para que a reta $y = mx$ intercepte a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto da interseção da reta com a hipérbole. Então, devemos ter:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1, y_0 = mx_0$$

2.1.4. PARÁBOLA:

Dados a um ponto F e uma reta r no plano, chama-se parábola de foco F e diretriz r o conjunto de pontos P do plano, como observamos na Figura 5, tais que:

$$\| \overrightarrow{PF} \| = d(P, r) \quad (d(P, F) = d(P, r))$$

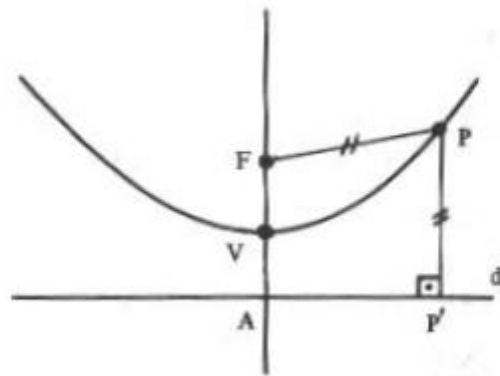


Figura 5. Parábola. [1]

Onde:

F é o foco.

d é a reta diretriz.

A reta que contém o foco é o eixo focal e é perpendicular a reta diretriz d .

Equação da parábola com o foco sobre um dos eixos coordenados e vértices na origem do sistema.

Em geral, a equação de uma parábola é do 2º grau, isto é, contém termos x^2, y^2, xy . Porém, quando o sistema de eixos é escolhido de modo que a origem coincide com o vértice e um dos eixos do sistema coincide com o eixo da parábola, como veremos, sua equação é simples. Temos quatro casos como mostramos na Figura 6.

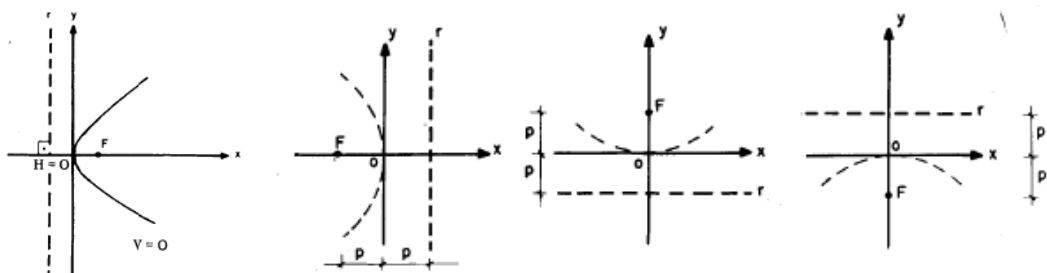


Figura 6. Quatro casos para obter equação das parábolas. [2]

Note que no primeiro gráfico da figura 6 o foco está sobre o eixo y e a diretriz é a paralela ao eixo x . Se $d(F, r) = 2p$, então o foco é $F(0, p)$ e a equação da diretriz é $y = -p$. Temos que um ponto $P(x, y)$ pertence a parábola se, e somente se:

$$d(P, f) = d(P, r)$$

Ou:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Logo:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y - p)^2}\right)^2 = (|y + p|)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py \Rightarrow y = \frac{x^2}{4p} = \frac{1}{4p}x^2, p \neq 0$$

De maneira análoga, temos:

$$y = -\frac{1}{4p}x^2$$

$$x = \frac{1}{4p}y^2$$

$$x = -\frac{1}{4p}y^2$$

Com $a \neq 0$.

Vejamos agora as cônicas transladadas.

Já vimos que a equação de uma cônica (elipse, hipérbole ou parábola) é sempre do 2º grau, isto é, da forma:
 $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

Vimos ainda que, quando o sistema de coordenadas é conveniente escolhida, a equação da cônica reduz-se a uma das formas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ou } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$y = \frac{1}{4a}x^2, y = -\frac{1}{4a}x^2, x = \frac{1}{4a}y^2 \text{ ou } x = -\frac{1}{4a}y^2$$

Exemplo 1: Seja o ponto $P(4, -1)$ efetuando-se uma translação em que a nova origem é $O_1(-2, 3)$, em relação ao novo sistema, as coordenadas de P passam a ser

$$x_1 = 4 - (-2) = 6$$

$$y_1 = -1 - 3 = -4$$

ou seja, $P(6, -4)$.

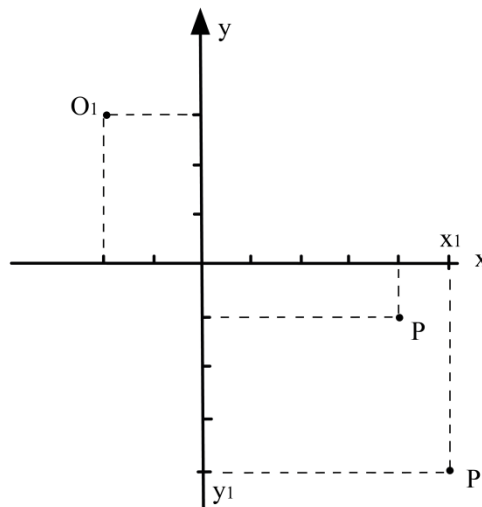


Figura 7. Gráfico de Coordenadas (Autoria Própria)

Exemplo 2: Usando a translação conveniente, elimine os termos do 1º grau da equação
 $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$

Solução:

$$4(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) + 4 = 0$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 9(y^2 - 4y + 4) - 36 + 4 = 0$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36 \quad (\div 36)$$

$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$$

Fazendo:

$$x_1 = x - 1$$

$$y_1 = y - 2$$

Obtemos:

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

2.2. Quádricas

Nesta subseção, nosso objetivo é estudar o gráfico de equações quadráticas com três variáveis.

Equações da Forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxz + Exz + Fyz + Gx + Hz + Ig + J = R$$

Os gráficos de tais equações, se diferente do conjunto vazio, são superfícies chamadas quádricas.

2.2.1. SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Exemplo 1: Elipsoide de revolução. Superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno de seus eixos.

Para deduzirmos uma equação desta superfície, vamos supor que a equação da elipse, no plano yz, seja:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

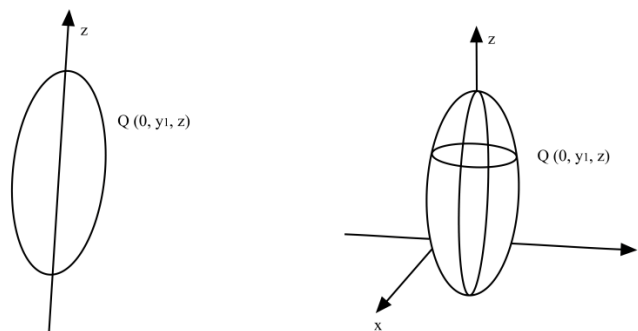


Figura 9. Elipsóide de Revolução (Autoria Própria)

Note que, ao rotacionar a elipse em torno do eixo z, o ponto Q descreve uma circunferência de centro R (0, 0, z). Seja P um ponto qualquer da superfície gerada pela elipse com P(x,y,z). Em particular, tome P à circunferência descrita por Q.

Note que $d(P, R) = d(R, Q)$, ou seja:

$$\| \overrightarrow{RP} \| = \| \overrightarrow{RQ} \| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y_1^2} \Rightarrow y_1^2 = x^2 + y^2$$

Como Q pertence à elipse

$$\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Logo:

$$\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

De maneira análoga, fazemos os cálculos quando y = 0 e z = 0.

Exemplo 1: Obtenha a equação da elipse gerada pela elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0$ em torno do eixo x.

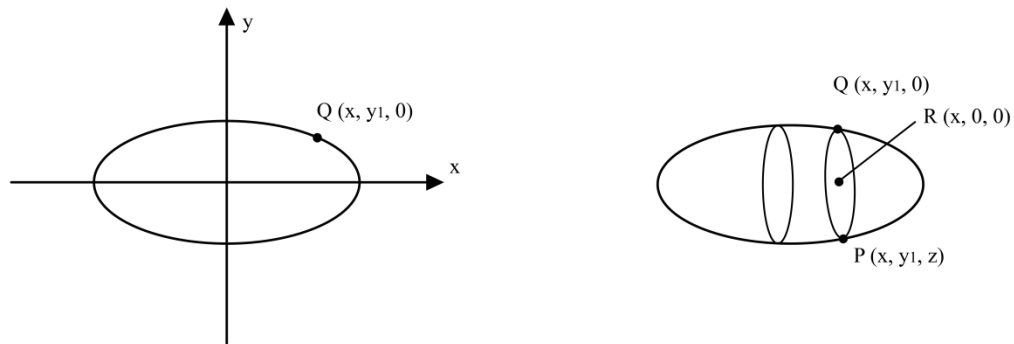


Figura 10. Elipse. (Autoria Própria)

Logo:

$$\|\overrightarrow{RP}\| = \|\overrightarrow{RQ}\| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y_1^2} \Rightarrow y_1^2 = y^2 + z^2.$$

Como Q pertence à elipse, segue

$$\frac{x^2}{9} + \frac{x^2 + z^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Em geral, a rotação de uma curva C em torno dos eixos x, y ou z chama-se superfície de revolução.

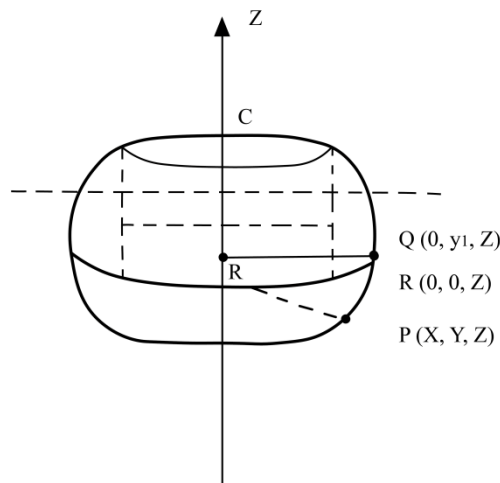


Figura 11. Superfície de Revolução (Autoria Própria)

$$\text{Note que } \|\overrightarrow{RP}\| = \|\overrightarrow{RQ}\| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y_1^2} \Rightarrow y_1^2 = y^2 + z^2(1).$$

Como $Q \in C$ segue que $F(y_1, z) = 0, x = 0$ (2).

Introduzindo em (2) o valor de y_1 , dado por (1), obtivemos uma relação em x, y e z que se verifica para todos os pontos $P(x, y, z)$ da superfície gerada pela rotação de C em torno do eixo Z segue-se, portanto que:

$$F(y_1, z) = 0, \text{ onde } y_1^2 = x^2 + y^2$$

É uma equação desta superfície.

Exemplo 2: Vamos determinar a equação da superfície gerada pela rotação da hipérbole $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, $x = 0$ em torno dos eixos y e z.

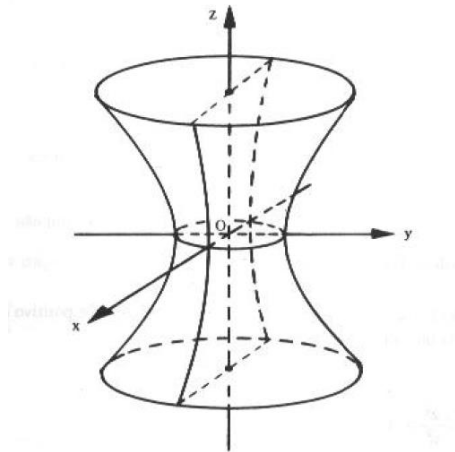


Figura 12. Hiperboloide de uma Folha. [1]

Temos $y_1^2 = x^2 + y^2$. Como $Q \in H$, temos:

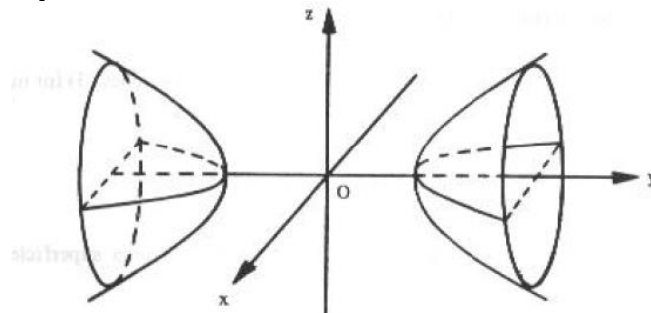
$$\frac{y_1^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$$


Figura 13. Hiperboloide de Duas Folhas. [1]

$\|\overrightarrow{RP}\| = \|\overrightarrow{RQ}\| \Rightarrow x^2 + z^2 = z_1^2$. Como $Q \in H$

Segue que:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{z_1^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \left(\frac{x^2 + z^2}{4}\right) = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$$

Exemplo 4: Obtenha a equação da superfície de redução gerada pela parábola $x = y^2$ ao girar em torno do eixo x. Esboce o gráfico da superfície $z=0$

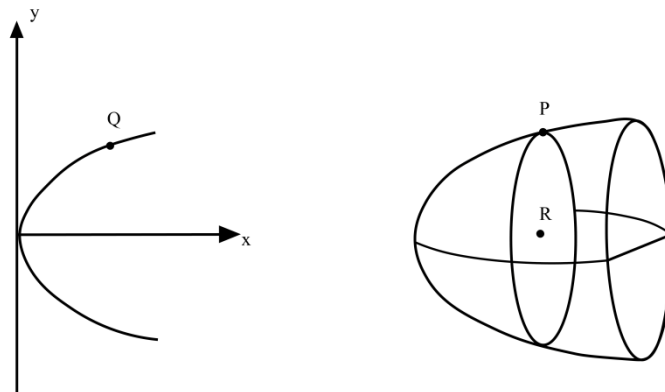


Figura 14. Gráfico e Parabolóide (Autoria Própria)

Note que $Q(x, y_1, 0)$, $R(x, 0, 0)$ e P é um ponto qualquer da superfície. Logo:

$$\|\overrightarrow{RP}\| = \|\overrightarrow{RQ}\| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y_1^2} \Rightarrow y_1^2 = y^2 + z^2$$

Como Q e P segue que:

$$x = y_1^2 \Rightarrow x = y^2 + z^2$$

Aqui $F(x, y) = x, y^2$, de modo que $F(x, y_1) = x - y_1^2$.

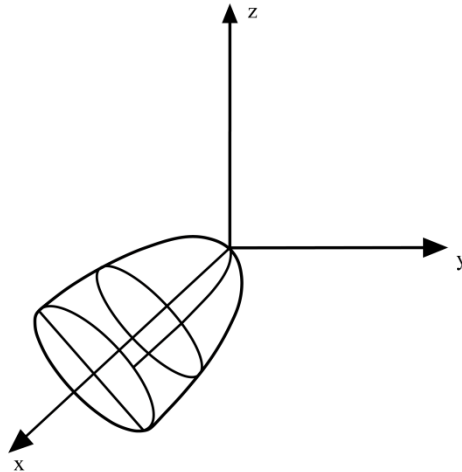


Figura 15. Parabolóide de Revolução (Autoria Própria)

2.2.2. CONE DE REVOLUÇÃO

Chama-se cone de revolução a superfície gerada pela rotação de uma reta em torno de outra que a intersecta.

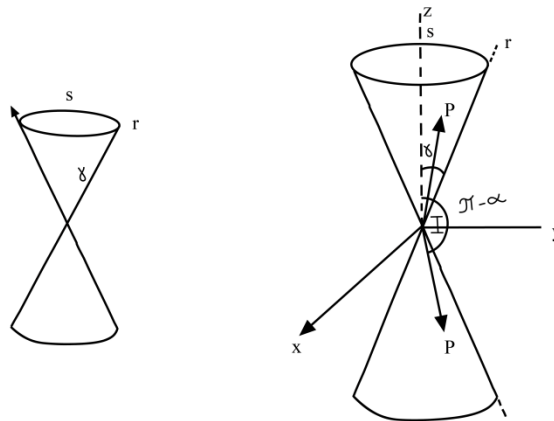


Figura 16. Cone de Revolução (Autoria Própria)

Consideramos que o eixo Z coincide com o eixo do cone e a reta r no plano YZ. Logo, uma equação da reta no plano yz é $y = mz, x = 0$, onde $m = \tan \alpha$ formando pelas retas r e s. Assim, temos que $F(y, z) = y - mz = 0$. Como a rotação é dada em torno do eixo z, segue que $y_1^2 = x^2 + y^2$. Como $F(y_1, z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = m^2 z^2$.

Outra Solução: Como $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, escolhendo $V_s \equiv (0, 0, 1)$, temos:

$$\frac{\overrightarrow{IP} \times \overrightarrow{VS}}{\|\overrightarrow{IP}\| \times \|\overrightarrow{VS}\|} = \pm \cos \alpha. \text{ Note que}$$

$$\overrightarrow{IP} = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \frac{(x, y, z) \times (0, 0, 1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \pm \cos \alpha \quad (1). \text{ Mas } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \quad (2), \text{ pois } (0, m, 1) \text{ é paralelo a } r \text{ e } (0, 0, 1) \text{ é paralelo a } s.$$

Introduzindo (1) em (2), obtemos:

$$x^2 + y^2 = m^2 z^2.$$

2.2.3. CILINDRO DE REVOLUÇÃO

O cilindro de revolução é uma superfície gerada pela rotação de uma reta r em torno de uma reta s , r/s (ou cilindro circular reto).

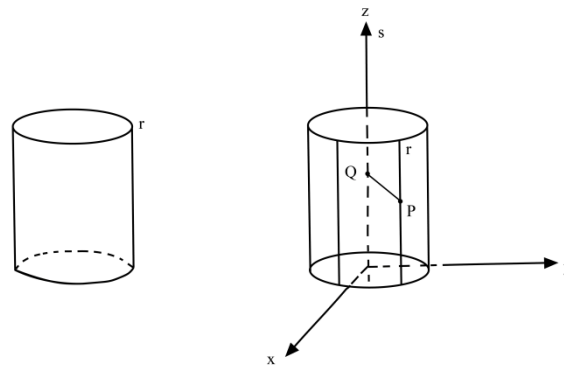


Figura 17. Cilindro Circular Reto (Autoria Própria)

Seja R a distância entre r e s . Então um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se, $d(P, s) = R$.

Mas $d(P, s) = d(P, Q)$, onde $Q(0, 0, z)$. Logo, $P \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$.

De maneira análoga, fazemos para os eixos x e y , ou seja, a reta s coincide com um desses eixos.

2.2.4. FORMAS CANÔNICAS

Proposição: Se o gráfico da equação:

$$Ax^2 + Bx^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + R$$

Não é um conjunto vazio, um ponto, um plano ou cilindro, usando mudanças de sistemas de coordenadas convenientes, podemos reduzi-la a uma das formas constantes dos grupos a seguir:

Grupo (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Grupo (H1): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Grupo (H2): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Grupo (PE): $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$; $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$; $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Grupo (PH): $x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$; $y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$; $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
 $x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$; $y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$; $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Grupo (C): $x^2 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$; $y^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$; $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

3. CONCLUSÕES

O objetivo geral desse artigo foi apresentar um estudo sobre as curvas ditas como cônicas e as superfícies quádricas, as quais podem ser expressas por equações do segundo grau. Para obter os resultados, foram inseridos gráficos, figuras geométricas e realizadas demonstrações de forma detalhada de equações das principais cônicas e quádricas, atingindo satisfatoriamente o objetivo proposto.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P.; **Geometria Analítica**. 2º edição. São Paulo: Pearson Education. 1987.

[2] BOULOS, PAULO; CAMARGO, IVAN DE. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 5° edição. São Paulo: MAKRON Books do Brasil Editora Ltda. 1993.