



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE ANGICOS
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

LUIS FILIPE FRANÇA DE ARAUJO

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES

ANGICOS - RN

2023

LUIS FILIPE FRANÇA DE ARAUJO

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Campus Angicos como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: David Levi da Silva Macêdo, Prof. Dr.

ANGICOS - RN

2023

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

A663e Araújo, Luis Filipe.
Estudo das equações diferenciais e aplicações /
Luis Filipe Araújo. - 2023.
27 f. : il.

Orientador: David Levi Macêdo.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2023.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Equações
separáveis. 3. Aplicações. I. Macêdo, David Levi,
orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Angicos
Bibliotecário: Helder Romero Maia Duarte
CRB: 15/673

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

LUIS FILIPE FRANÇA DE ARAUJO

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Campus Angicos como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 18 / 05 / 2023.

BANCA EXAMINADORA

David Levi da Silva Macêdo, Prof. Dr. (UFERSA)
Orientador

Francisco Vieira de Oliveira, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador



Documento assinado digitalmente

IGOR JOSE NASCIMENTO DE MEDEIROS

Data: 20/05/2023 14:31:14-0300

Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Igor José Nascimento de Medeiros, Prof. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado resiliência diante aos desafios encontrados e por ter permitido que eu chegasse até aqui.

Agradeço aos meus pais e minha irmã, por todo o suporte e, principalmente, a base essencial da minha vida.

Agradeço a minha namorada que sempre me ajudou e incentivou, além de toda paciência.

Agradeço a todos os meus amigos e companheiros que conheci durante o curso até aqui, por todas as conversas, momentos e incentivos.

Agradeço a Universidade Federal Rural do Semi-Árido por todas as oportunidades e acréscimos na minha vida acadêmica.

Agradeço ao meu orientador pelo privilégio da sua orientação, pelo compromisso e paciência para desenvolvimento deste trabalho. Por fim, quero agradecer a todos os professores, servidores, funcionários da UFERSA e a todos os envolvidos nessa longa jornada.

“Tudo é possível àquele que crê.”

Marcos 9:23

RESUMO

Ao descrever ou modelar um fenômeno da realidade em termos matemáticos, é muito frequente obter equações que envolvam as variações das quantidades presentes, essas equações são denominadas equações diferenciais. Nesse intuito, o presente trabalho possui como objetivo o estudo de equações diferenciais visando aplicações em modelos da realidade. Neste trabalho foi feita uma pesquisa em livros, monografias e outros, em que foram explorados conceitos e resoluções das equações diferenciais. Foi feito um estudo dentro das equações diferenciais de primeira ordem, apresentando um modelo matemático de uma corda suspensa. Sendo assim, aplicando-se as equações diferenciais em fenômenos reais, através de modelos que foram resolvidos utilizando métodos de resolução das equações diferenciais separáveis. Tal estudo, além de fornecer a base para todo o trabalho, procura mostrar por meio de aplicabilidades, o nexó entre os ramos da matemática e os fenômenos do cotidiano, desse modo, estimulando os acadêmicos em relação ao estudo das equações diferenciais.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Equações Separáveis. Aplicações.

ABSTRACT

When describing or modeling a phenomenon of reality in mathematical terms, it is very frequent to obtain equations that involve the variations of the present quantities, these equations are called differential equations. In this sense, the present work has as objective the study of differential equations to applications in models of reality. In this work, a research was done in books, monographs and others, in which concepts and resolutions of differential equations were explored. We study the first order differential equations, presenting a mathematical model of a suspended string. Therefore, we present the applications of differential equations in real phenomena, through models that were solved using methods of solving separable differential equations. This study, in addition to providing the basis for the entire work, search to show, through applicability, the relationship between the branches of mathematics and everyday phenomena, thus stimulating academics in relation to the study of differential equations.

Keywords: Ordinary Differential Equation. Separable Equations. Applications.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Linha de transmissão de energia elétrica.....	19
Figura 2 -	Ponte Hercílio Luz, Florianópolis.....	20
Figura 3 -	Catenária no plano cartesiano.....	20
Figura 4 -	Relação trigonométrica do triângulo.....	21
Figura 5 -	$k = \frac{1}{2}$	24
Figura 6 -	$k = 2$	25

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	12
2.1	Introdução às equações diferenciais	12
2.1.1	Classificação das Equações Diferenciais Ordinárias.....	13
2.1.2	Soluções e Problema de valor inicial.....	14
3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM....	15
3.1	Principais métodos de resolução.....	16
3.1.1	Equações separáveis.....	16
4	MODELAGEM COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SEPARÁVEIS.....	18
4.1	Catenária	19
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	26
	REFERÊNCIAS.....	27

1 INTRODUÇÃO

Compreende-se que um modelo matemático busca fornecer uma descrição matemática de um dado fenômeno da realidade. Porém, um problema real não pode ser descrito de maneira exata por uma equação matemática ou um sistema de equações. Daí, “Se tratando de modelar um fenômeno ou um experimento qualquer, é muito frequente obter equações que envolvam as variações das quantidades presentes. Dessa forma, quando estas variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas equações diferenciais.” (BASSANEZI; JUNIOR, 1988, p.9).

Através deste trabalho, pretende-se modelar e solucionar um problema físico conhecido como corda suspensa, onde serão utilizadas as equações diferenciais passando pelo uso das equações separáveis, um importante ramo da matemática no que diz respeito à modelagem de fenômenos presentes em diversas áreas das ciências exatas, como ressalta Boyce e DiPrima (2006, prefácio): “A importância das equações diferenciais reside no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem à modelos físicos úteis, tais como crescimento e decaimento exponencial, os sistemas massa-mola ou os circuitos elétricos.”. Dessa forma, busca-se mostrar a importância e estimular os discentes no estudo de tais equações. Na metodologia deste trabalho foi feita uma pesquisa em livros, artigos e monografias, a fim de obter um detalhamento nos assuntos abordados.

Com isso, expõe-se nas seções 2 e 3 um estudo teórico acerca de equações diferenciais, com foco nas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, bem como alguns métodos de solução, tais como o método das equações diferenciais separáveis.

Na seção 4, constitui-se o problema da corda suspensa (catenária), onde será feita a modelagem do problema e através das equações separáveis, encontrar a solução.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Nas investigações de uma grande variedade de problemas nas ciências e na engenharia, modelos matemáticos são desenvolvidos com intuito de auxiliar na compreensão de fenômenos físicos, químicos, biológicos e etc. Estes modelos formam uma equação que compõe-se de algumas derivadas de uma função desconhecida. Tal equação é denominada de equação diferencial. A resolução de uma equação diferencial consiste em encontrar uma função definida em algum intervalo que satisfaz a equação dada, ou seja, determinar uma solução para a equação.

Nessa seção, serão abordados conceitos fundamentais, como a classificação das equações diferenciais e alguns métodos de resolução. As definições desta seção foram baseadas no livro Nagle, Saff e Snider (2012).

2.1 Introdução às Equações Diferenciais

As equações diferenciais são equações que envolvem a derivada de uma ou mais funções (variáveis dependentes) em relação a uma ou mais variáveis (independentes).

Então na equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (1)$$

t é a variável independente e x é a variável dependente. Aqui a e k são coeficientes da equação. Na equação

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y, \quad (2)$$

x e y são as variáveis independentes e u é a variável dependente.

As equações diferenciais são classificadas em dois tipos: equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais.

Definição 2.1 A equação diferencial que envolve apenas derivadas comuns com relação a uma única variável independente é chamada de equação diferencial ordinária.

Exemplo 2.1 As equações

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1$$

$$(y - x) dx + 4x dy = 0$$

são equações diferenciais ordinárias.

Definição 2.2 A equação diferencial que envolve derivadas parciais com relação a mais de uma variável independente é uma equação diferencial parcial.

Exemplo 2.2 As equações

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

são equações diferenciais parciais.

2.1.1 Classificação das Equações Diferenciais Ordinárias

Além da classificação por tipo descrito acima, as equações diferenciais são classificadas quanto a ordem e linearidade.

Quanto a ordem, é dada pela ordem mais alta das derivadas que estão presentes na equação. Dessa forma, a equação (1) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, pois $\frac{d^2x}{dt^2}$ é a derivada de ordem mais alta presente. A equação (2) é uma equação diferencial parcial de primeira ordem, pois só ocorrem derivadas parciais de primeira ordem. Uma equação ordinária de n -ésima ordem pode ser escrita na forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad (3)$$

ou

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0,$$

onde $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ representa a derivada de ordem n da função.

Quanto a linearidade, “uma equação diferencial linear é aquela em que a variável dependente y e suas derivadas aparecem em combinações aditivas de suas primeiras potências” (Nagle, Saff e Snider, 2012). Assim, uma equação diferencial ordinária de n -ésima ordem é linear quando escrita na forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x)$$

que é um caso particular da equação (3). Uma equação que não pode ser escrita nesta forma, são classificadas como não-lineares. Por exemplo,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y^3 = 0$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear pelo fato da presença do termo y^3 . Enquanto isso, a equação

$$x^3 \frac{dy}{dx} = x^3 + y$$

é linear apesar dos termos x^3 .

Na prática, serão encontrados com mais frequência as equações na categoria não linear. Mas, é de fundamental importância saber lidar com as equações lineares.

Este trabalho tem como base apenas os conceitos acerca das equações diferenciais ordinárias. Dessa forma, a partir daqui, não será mais levado em consideração a teoria das equações diferenciais parciais.

2.1.2 Soluções e Problema de valor inicial

“Uma solução particular de uma equação diferencial ordinária de ordem n em um intervalo I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que as suas derivadas de ordem até n estão definidas no intervalo I e satisfazem a equação neste intervalo.” (SANTOS, 2010, p.8).

Baseado em Santos (2010) quando uma equação diferencial ordinária de ordem n é solucionada, obtém-se uma família de soluções que dependem de n constantes arbitrárias. Se toda solução particular puder ser obtida da família de soluções que é encontrada por uma escolha apropriada das constantes, essa família é denominada de solução geral da equação.

Definição 2.3 Com um Problema de Valor Inicial (PVI) para uma equação diferencial de ordem n

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0,$$

queremos dizer: encontre uma solução para a equação diferencial em um intervalo I que satisfaça em x_0 as n condições iniciais

$$y(x_0) = y_0,$$

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = y_1,$$

.

.

.

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1},$$

onde $x_0 \in I$ e $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ são constantes dadas.

Exemplo 2.3 Vejamos que $\phi(x) = \text{sen}x - \text{cos}x$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1. \quad (4)$$

Observe que $\phi(x) = \text{sen}x - \text{cos}x$ é um candidato esperado para solução, pois busca-se encontrar uma função que sua segunda derivada resulta nela mesma, a menos de um sinal.

Temos que $\phi(x) = \text{sen}(x) - \text{cos}(x)$, $\frac{d\phi}{dx} = \text{cos}(x) + \text{sen}(x)$ e $\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\text{sen}(x) + \text{cos}(x)$ são todos definidos em $(-\infty, \infty)$. Substituindo nas equações diferenciais, temos

$$(-\text{sen}(x) + \text{cos}(x)) + (\text{sen}(x) - \text{cos}(x)) = 0,$$

que se mantém para todo $x \in (-\infty, \infty)$. Logo, $\phi(x)$ é uma solução para a equação diferencial em (4) sobre $(-\infty, \infty)$. Quando verificamos as condições iniciais, descobrimos

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \text{sen}(0) - \text{cos}(0) = -1, \\ \frac{d\phi}{dx}(0) &= \text{cos}(0) + \text{sen}(0) = 1, \end{aligned}$$

que atende os requisitos já abordados. Portanto, $\phi(x)$ é uma solução para determinado problema de valor inicial.

Os problemas de valor inicial são amplamente utilizados em diversas áreas da ciência e engenharia, como em física, engenharia elétrica, mecânica, biologia, química, entre outras. Eles são essenciais para modelar e prever o comportamento de sistemas dinâmicos que evoluem no tempo.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são equações que envolvem uma função desconhecida e sua derivada de primeira ordem. Essas equações são amplamente usadas para modelar fenômenos físicos e biológicos.

Existem várias técnicas para resolver essas equações, incluindo separação de variáveis, método do fator integrante e integração por substituição.

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são equações que podem ser escritas como

$$F(t, y, y') = 0$$

No caso de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem da forma $y'(t) = f(t, y(t))$, em que $y(t)$ é a função que se deseja encontrar e $f(t, y(t))$ é uma função conhecida, o problema de valor inicial consiste em encontrar a solução $y(t)$ que satisfaça uma condição inicial da forma $y(t_0) = y_0$ em que t_0 é o valor inicial conhecido da variável independente t e y_0 é o valor inicial conhecido da função $y(t)$ no instante t_0 .

3.1 Principais métodos de resolução

Existem vários métodos para resolver equações diferenciais de primeira ordem, e a escolha do método adequado depende das características da equação em questão. As aplicações práticas deste trabalho tem como base o uso do método das equações separáveis, por isso, nesta seção descreve com mais foco tal método.

3.1.1 Equações separáveis

As equações diferenciais separáveis são um tipo de equação diferencial em que é possível separar as variáveis independentes e dependentes de forma a transformá-la em uma equação com a forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

onde y é a variável dependente e x é a variável independente. A função $f(x)$ é uma função que depende apenas de x , enquanto a função $g(y)$ é uma função que depende apenas de y . Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + xy}{y^2 + 1}$$

é separável, pois permite a fatoração em ambos os lados

$$\frac{2x + xy}{y^2 + 1} = x \frac{2 + y}{y^2 + 1} = g(x)p(y).$$

onde $g(x) = x$ e $p(y) = \frac{2 + y}{y^2 + 1}$.

Porém, a equação

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy$$

não admite tal fatoração do lado direito e, portanto, não é separável.

Essas equações podem ser resolvidas por meio de técnicas de integração para obter a solução geral. Tal técnica consiste em separar as variáveis independentes e dependentes, colocando todos os termos que contêm y de um lado da equação e todos os termos que contêm x do outro. Então, integra-se ambos os lados da equação, obtendo uma expressão para y em termos de x .

Exemplo 3.1 Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Para resolver essa equação, podemos multiplicar ambos os lados por y e dx , separando as variáveis dependentes e independentes:

$$y \, dy = x \, dx$$

Dessa forma, integra-se ambos os lados da equação:

$$\int y \, dy = \int x \, dx$$

Obtemos então:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

Onde C é a constante de integração. Sendo esta a solução geral para a equação diferencial separável.

Exemplo 3.2 Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - \cos(x) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Reescrevendo a equação, obtemos que

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$$

Integrando com relação a x em ambos os membros,

$$\int \frac{dy}{dx} = \int \cos(x)$$

segue que

$$y(x) = \text{sen}(x) + k$$

é uma solução geral para a equação ordinária. Para determinar a constante k usamos o problema de valor inicial, ou seja,

$$1 = y(0) = \text{sen}(0) + k = 0 + k$$

e daí $k = 1$. Portanto,

$$y(x) = \text{sen}(x) + 1$$

é uma solução (particular) do problema de valor inicial.

As equações diferenciais separáveis são bastante úteis em muitas áreas da física, engenharia e ciências aplicadas, pois muitos fenômenos podem ser modelados por meio dessas equações.

4 MODELAGEM COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SEPARÁVEIS

A modelagem matemática é uma técnica que usa conceitos matemáticos para descrever, prever e otimizar sistemas ou fenômenos complexos em diversas áreas do conhecimento, como física, biologia, engenharia, economia, entre outras. Ela permite representar esses sistemas ou fenômenos por meio de equações matemáticas, que são usadas para estudar as relações entre as variáveis envolvidas e fazer previsões sobre o comportamento do sistema em diversas condições. A modelagem matemática envolve a formulação do problema, a construção do modelo matemático, a resolução do modelo e a validação do mesmo. Tal técnica é de fundamental importância para o avanço da ciência e da tecnologia.

Este trabalho visa utilizar os princípios e técnicas de resolução das equações diferenciais separáveis aplicada em um modelo matemático de corda suspensa (catenária).

4.1 Catenária

A catenária é uma curva matemática que surge como solução de um problema físico conhecido como o problema da corda suspensa. Esse problema é definido como “uma curva que descreve o aspecto de um cabo suspenso por suas extremidades submetido apenas à força da gravidade”. (FARIA, 2011). A curva da catenária é formada pela sucessão de arcos e parábolas, curva essa muito presente na engenharia e na arquitetura, sendo frequentemente utilizadas na construção de pontes suspensas, linhas de transmissão de energia elétrica e cabos de elevadores, por exemplo. Na construção de linhas de transmissão de energia, a catenária também desempenha um papel importante. Os cabos de alta tensão são suspensos entre torres e assumem uma forma de catenária devido ao seu próprio peso.

Além disso, a catenária também é utilizada em outras áreas da física e da matemática, como na teoria da relatividade, na mecânica celeste e na teoria das cordas. É uma curva de grande interesse e beleza matemática, sendo objeto de estudo e apreciação por muitos matemáticos e físicos ao longo dos séculos. Abaixo seguem alguns exemplos de aplicações da catenária no cotidiano.

Figura 1: Linha de transmissão de energia elétrica.



Fonte: (CRT-RJ, 2021)

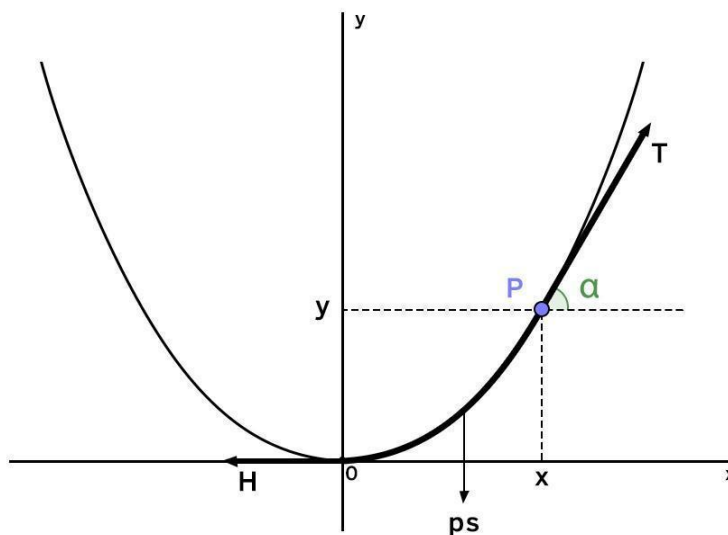
Figura 2: Ponte Hercílio Luz, Florianópolis.



Fonte: (CALDAS, 2022)

Dessa forma, para determinar a equação da catenária, observe a figura 3.

Figura 3: Catenária no plano cartesiano.



Fonte: Elaborado pelo autor

Consideremos um sistema de coordenadas com a origem no ponto mais baixo da curva, e com a curva situada no plano xy , sendo o eixo y coincidente com a vertical

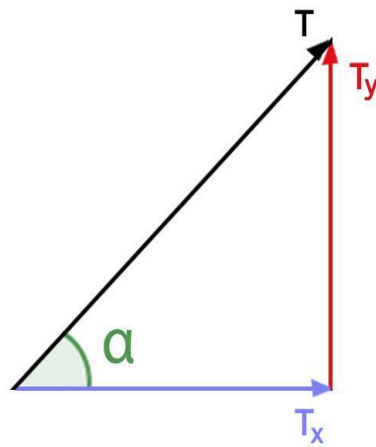
Seja P um ponto genérico $P = (x, y)$ da corda, e vamos considerar o trecho OP que está em equilíbrio devido à ação das forças:

- T : tensão atuando tangencialmente em P e formando um ângulo α com o eixo x .

- H : tensão da corda em seu ponto O , atuando horizontalmente.
- ps : peso do pedaço OP da corda cujo comprimento é s , agindo verticalmente em sentido contrário do eixo y (p é o peso por unidade de comprimento).

O equilíbrio do trecho OP implica que $H + T + ps = 0$. Decompondo a componente $T = T_x + T_y$ sobre os dois eixos e usando as relações trigonométricas do triângulo da Figura 4,

Figura 4: Relação trigonométrica do triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

temos que

$$\cos(\alpha) = \frac{T_x}{T}$$

e então $T_x = T \cos(\alpha)$. Devido a condição de equilíbrio, na direção x temos $H = T_x$, ou seja,

$$H = T_x = T \cos(\alpha)$$

Agora do mesmo modo usando a componente T_y e a Figura (4), obtemos que

$$\sin(\alpha) = \frac{T_y}{T}$$

e então $T_y = T \sin(\alpha)$. Devido a condição de equilíbrio, na direção y temos $ps = T_y$, ou seja,

$$ps = T_y = T \sin(\alpha)$$

Dividindo a equação na direção y pela equação na direção x , obtemos

$$\tan(\alpha) = \frac{ps}{H} = ks.$$

Note que, como p e H são constantes, substituímos $\frac{p}{H}$ pela constante k .

Usando que a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função é sua derivada e que essa inclinação é a tangente do ângulo α , obtemos que $tg(\alpha) = \frac{dy}{dx}$, vem $\frac{dy}{dx} = ks$.

Derivando ambos os lados em relação a x , $\frac{d^2y}{dx^2} = k \frac{ds}{dx}$. A partir da fórmula do comprimento

de arco (STEWART, 2014, seção 8.1), temos que $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ e então

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (5)$$

que é a equação diferencial da catenária. Para resolver essa EDO que é de segunda ordem, podemos reduzi-la à uma EDO separável de primeira ordem.

Tomamos $\frac{dy}{dx} = p$, o que nos leva à equação

$$\frac{dp}{dx} = k\sqrt{1 + p^2} \quad (6)$$

Utilizando o método de separação de variáveis reescrevemos a equação (6) na forma

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k dx$$

Integrando, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \cdot dp = \int k \cdot dx$$

e daí

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \cdot dp = kx + c_1$$

Usando a integral $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}} du = \ln(u + \sqrt{a^2+u^2}) + C$ com $a = 1$, segue que

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = kx + c_1$$

que é a solução geral da equação (6). Para obter solução particular usamos o PVI: em $x = 0$ temos $p(0) = y'(0) = 0$. Substituindo na equação

$$\ln\left(p(0) + \sqrt{1 + p(0)^2}\right) = k \cdot 0 + c_1 = c_1$$

vem

$$0 = \ln(1) = k \cdot 0 + c_1 = c_1$$

então $c_1 = 0$. Obtemos então

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = kx$$

que é solução particular de (6). Aplicando a exponencial em ambos os membros, segue que

$$e^{\ln(p + \sqrt{1 + p^2})} = e^{kx}$$

e

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{kx}$$

obtendo-se

$$\sqrt{1 + p^2} = e^{kx} - p$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$1 + p^2 = e^{2kx} - 2p e^{kx} + p^2.$$

Então

$$2p e^{kx} = e^{2kx} - 1$$

e

$$2p = \frac{e^{2kx} - 1}{e^{kx}} = (e^{2kx} - 1)e^{-kx}$$

logo $2p = e^{kx} - e^{-kx}$. Portanto

$$p = \frac{1}{2} (e^{kx} - e^{-kx})$$

Lembrando que $\frac{dy}{dx} = p$, obtemos

$$y = \frac{1}{2} \int (e^{kx} - e^{-kx}) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{kx}}{k} - \frac{e^{-kx}}{-k} \right) + c_2$$

daí

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{kx}}{k} + \frac{e^{-kx}}{k} \right) + c_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{k} \right) + c_2 = \frac{1}{2k} (e^{kx} + e^{-kx}) + c_2$$

Lembrando que $y(0) = 0$, obtemos

$$0 = y(0) = \frac{1}{2k} (e^{k \cdot 0} + e^{-k \cdot 0}) + c_2 = \frac{1}{2k} (1 + 1) + c_2 = \frac{1}{k} + c_2$$

ou seja, $c_2 = -\frac{1}{k}$. Assim,

$$y = \frac{1}{2k} (e^{kx} + e^{-kx}) - \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \left(\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - 1 \right)$$

e, usando que $\cosh(kx) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$, obtemos

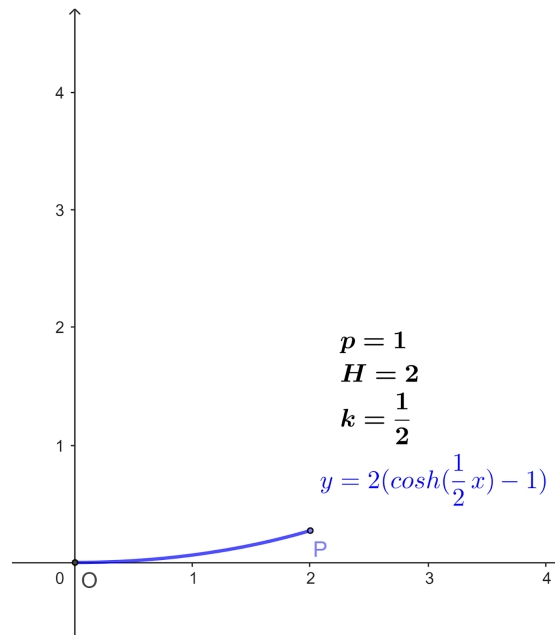
$$y = \frac{1}{k} (\cosh(kx) - 1) \quad (7)$$

que é a equação da catenária.

Dessa forma, mostramos que a curva assumida por um cabo flexível, suspenso em dois pontos e sujeito à força do seu próprio peso, tem como forma exata o gráfico de um cosseno hiperbólico e essa curva leva o nome de Catenária.

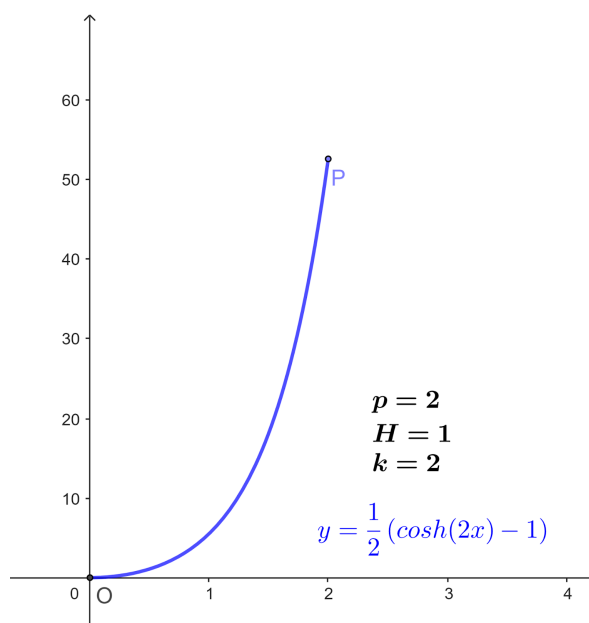
De fato, a equação que define a catenária é dada em (7), onde k é uma constante que determina a forma da curva e o cosseno hiperbólico é denotado por $(\cosh(kx))$. Um fato sobre o cosseno hiperbólico é que seu valor cresce exponencialmente com o aumento de k . Assim, vejamos as duas figuras:

Figura 5: $k = \frac{1}{2}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6: $k = 2$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sendo $k = \frac{p}{H}$, onde:

- k : é a constante da equação,
- p : é o peso e
- H : tensão atuando horizontalmente

Nota-se que, na figura 5, o peso é menor comparado a força aplicada para esticar a corda, por isso ela fica mais esticada. Já na figura 6 é o fenômeno contrário, temos um peso maior comparado a força usada, logo, ficando menos esticada e mais acentuada.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi exposto o referencial teórico sobre equações diferenciais, onde abordamos conceitos importantes e métodos de resolução, como o método das equações separáveis. Dessa forma, nas aplicações foi apresentado o conceito da Catenária, onde consideramos um cabo suspenso por suas extremidades. Por fim, buscamos a melhor aplicabilidade apresentando a resolução do mesmo através de métodos de resolução de equações diferenciais separáveis e analisamos a forma da catenária de acordo com as possíveis situações. Com isso, mostramos a importância da teoria e do estudo das equações diferenciais dentro da resolução de problemas nas áreas da Engenharia.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney; JUNIOR, Wilson. **Equações Diferenciais com Aplicações**. [S.l.]: HARBRA, 1988.

BOYCE, William; DIPRIMA, Richard. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8°. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.

CALDAS, Joana. **Dois anos após reinauguração, Ponte Hercílio Luz, em Florianópolis, faz 96 anos; FOTOS**. In: G1. [S. l.]. Santa Catarina, 2022. Disponível em: <<https://g1.globo.com/sc/santa-catarina/noticia/2022/05/13/ponte-hercilio-luz-em-florianopolis-faz-96-anos-com-evento-e-alteracao-no-transito.ghtml>> Acesso em: 10 abr. 2023.

CONSELHO REGIONAL DOS TÉCNICOS INDUSTRIAIS DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. **Como funciona a linha de transmissão?**. Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: <<https://old.crrj.gov.br/como-funciona-a-linha-de-transmissao/>>. Acesso em: 28 mar. 2023.

FARIA, Sirlene. **A Catenária**. 2011. 34 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Pós-graduação em Matemática para Professores) - Universidade Federal de Minas Gerais, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/BUOS-94QMAZ/1/a_catenaria.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2023.

NAGLE, Kant; SAFF, Edward; SNIDER, Arthur. **Equações Diferenciais**. 8°. ed. [S.l.]: Pearson, 2012.

SANTOS, Reginaldo J. **Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. 2010. Universidade Federal de Minas Gerais, [S.l.], 2010. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/~regi>> Acesso em: 29 abr. 2023

STEWART, James. **Cálculo**. 7°. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v.I, cap. 8.1.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. 3°. ed. São Paulo: Pearson, 2001. v. 1.